

## 第二版前言

### 关于自然演绎逻辑系统

在这里，笔者将对几个最有影响的自然演绎逻辑系统加以比较，并说明本书所给出的自然演绎系统与它们的相同或不同之处，以及做出这种取舍的原因。此外，还将对本书第一版的修改之处加以说明。

加拿大逻辑学家佩尔蒂埃（F. J. Pelletier）在其文章《自然演绎简史》（1999年）<sup>①</sup>开宗明义地道出自然演绎逻辑的重要性。他说道：“自然演绎是当代哲学家们最为熟悉的一种逻辑，甚至它是许多当代哲学家们关于逻辑所知道的一切。然而，自然演绎却是相当晚近才出现于逻辑学的一个创新”。这一创新“在逻辑史上的重要性不亚于鲁宾逊（J. A. Robinson）于1965年发现的分解法（resolution）和弗雷格于1879年发现的逻辑方法，甚至不亚于亚里士多德于公元前四世纪发现的三段论。”

自然演绎逻辑的创始人是德国逻辑家根岑（G. Gentzen）和波兰逻辑家雅斯可夫斯基（S. Jaśkowski）。他们两人不谋而合地同在1934年各自发表了一篇文章，并且是关于同一个主题即自然演绎<sup>②</sup>。自然演绎的纲领是什么？用根岑的话来说：

我的出发点是：逻辑演绎的形式化，尤其是经由弗雷格、罗素和希尔伯特等人发展起来的形式化，与在数学证明实践中所用到的演绎形式是相去甚远的。尽管取得了可观的形式方面的优点作为回报。与此相反，我打算首先建立一种形式系统，它尽可能地靠近实际的推论。其结果就是“自然演绎的演算”。（转引自《自然演绎简史》）

根岑和雅斯可夫斯基都认为，自然演绎的核心是引入假设然后撤除假设的做法。我

<sup>①</sup> F. J. Pelletier, 'A Brief History of Natural Deduction', in *History and Philosophy of Logic*, Vol. 20 (1999), pp. 1 ~ 31.

<sup>②</sup> 前者见 G. Gentzen, 'Untersuchungen über das Logische Schliessen', in *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934), pp. 176 ~ 210, 405 ~ 431。英译文见 'Investigations into Logical Deduction', in M. Szabo, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Amsterdam: North-Holland, 1969, pp. 68 ~ 31。

后者见 S. Jaśkowski, 'On the Rules of Suppositions in Formal Logic', in *Studia Logica*, Vol. 1 (1934)。重印于 S. McCall, *Polish Logic 1920 ~ 1939*, Oxford: Oxford University Press, 1967, pp. 232 ~ 258。

们知道，弗雷格、罗素和希尔伯特等人发展起来的公理系统，其证明过程是从系统的公理出发，根据少量的推论规则推出一系列定理。与之不同，自然演绎系统没有公理，或者说，可以没有公理，而是通过引入假设（包括前提）作为推演的出发点，运用推演规则推出另外一些命题，并通过撤除假设使这些被推出的命题独立于该假设。当除前提以外的假设都被撤除，所给推论的有效性便被证明；如果没有前提，所证结果便是本系统的一个定理。

依笔者所见，自然演绎系统之所以比公理系统更接近人们的实际推论，其原因是：在人们的推论实践中，逻辑从来都是被作为推论规则用于其他领域的公理或前提之上的，而逻辑真理本身只是推论规则的根据而不是推论的对象。逻辑的公理系统却把人们常用的推论规则大都搁置一旁，而把人们并不太熟悉的逻辑真理作为推论的出发点即公理或推论的目标即定理。与之相反，自然演绎系统则较多地保留了人们熟悉的推论规则，特别是引入然后撤除假设的条件证明规则，从而允许把逻辑真理以外的任何命题作为出发点，也可以把任何命题作为推论的目标，同时把对逻辑真理的推演作为一种特殊情形即无前提证明容纳进来。相比之下，自然演绎系统既符合人们实际运用逻辑推论的习惯，又能达到推演逻辑真理的目的，真可谓“一箭双雕”。因此可以说，自然演绎逻辑系统在很大程度上恢复了逻辑的本来面目。

佩尔蒂埃在其《自然演绎简史》中指出，根岑和雅斯可夫斯基的自然演绎纲领真正得到广泛传播和普遍接受的时间是从20世纪50年代开始的，对于这一局面起到很大促进作用的文献包括科庇（I. M. Copi）的《符号逻辑》（1954年初版）和苏佩斯（P. Suppes）的《逻辑导论》（1957年初版）。<sup>①</sup>这两本教科书也是本书的主要参考文献，同时本书参考了近年来美国大学所使用的若干逻辑学教材，其中由伯格曼（M. Bergmann）、穆尔（J. Moor）和纳尔逊（J. Nelson）合著的《逻辑教本》（2004年第四版，1980年初版）<sup>②</sup>尤为重要。下面将简要谈一下本书同这三本经典教科书以及根岑和雅斯可夫斯基关于处理自然演绎系统的异同之处。

**第一，关于假设域的表示。**自然演绎的推论特征是先引入假设然后撤除假设的策略，体现这一特征并为各个自然演绎系统所共有的推论规则是“条件证明规则”（雅斯可夫斯基的术语），亦即“→引入规则”（根岑的术语）。这条规则的每一次使用产生一个子推演，那么，如何把这个子推演表示出来呢？如何标示这个子推演对假设的引入和对假设的撤除？对此，不同的自然演绎系统往往采取不同的方法。根岑给出一种方法即

<sup>①</sup> 这两本书都有中译本：科庇：《符号逻辑》，宋文坚、宋文淦译，北京大学出版社，1988年；苏佩斯：《逻辑导论》，宋文淦等译，中国社会科学出版社，1984年。

<sup>②</sup> M. Bergmann, J. Moor, J. Nelson, *The Logic Book*, 4<sup>th</sup> edition, New York: The McGraw-Hill Companies, 2004。在后面的论述中，作者只提伯格曼（Bergmann）。

树形方法，但这种方法现在已经很少有人采用了。雅斯可夫斯基给出两种方法，一种是图示法，即把每一个子推演放在一个方框中，被引入的那个假设处于方框内的第一行，方框内的任何一行都依赖于该假设；这也就是说，方框标示出该假设的域，方框外的各行不依赖于该假设或不隶属于该假设域。对于方框外的各行而言，该假设就是被撤除的。

这种图示的方法在菲奇 (F. Fitch, 1952)<sup>①</sup> 和科庇以及伯格曼等人那里得到继承和改进，改进的主要之点是只保留方框左边的竖线（菲奇和伯格曼）或竖线两端加短横线和箭头（科庇），竖线的长度标示假设域的范围。本书采纳了柯庇的方式，把竖线上端的横箭头换成短横线，这样做是为了使图示在保持清晰的前提下更为简便。雅斯可夫斯基给出的另一种方法是标记法，即对推演的每一行分别做出标记，用以表明这一行依赖于哪一个假设。这种方法被奎因 (W. V. Quine, 1950)<sup>②</sup> 和苏佩斯等人继承和改进。本书没有采用这种方法，因为在笔者看来，这种方法比较麻烦并且容易出错。

第二，关于推演规则。条件证明规则 ( $\rightarrow$ 引入规则) 是每个自然演绎系统共有的，除此之外，不同的自然演绎系统往往采用不同的推演规则。根岑所采用的推演规则都是关于某个逻辑词（联结词或量词）的引入或销除的。具体地说，对于除等值词以外的四个真值函项联结词和两个量词各给一个引入规则和一个销除规则，共 12 条推演规则。这些推演规则在以后的教科书中得到广泛的采用，或者在此基础上略有增减或改变名称。如科庇对根岑的 4 条量词规则全部采用，只是将量词的引入规则改名为“概括规则”，将量词的销除规则改名为“例示规则”，并且附加了一条关于量词否定的置换规则。科庇对根岑的 8 条联结词规则略有增减，并改换名称。如其中的“条件证明规则”和“间接证明规则”分别是根岑的“ $\rightarrow$ 引入规则”和“ $\neg$ 引入规则”，“合取规则”和“化简规则”分别是根岑的“ $\wedge$ 引入规则”和“ $\wedge$ 销除规则”，“附加规则”和“二难推论规则”分别是根岑的“ $\vee$ 引入规则”和“ $\vee$ 销除规则”（后者略有不同，它相当于简单构成式二难推论，而科庇采用的是复杂构成式二难推论），“肯定前件规则”是根岑的“ $\rightarrow$ 销除规则”。关于联结词规则，科庇比起根岑减少了“ $\neg$ 销除规则”而新增了“否定后件规则”、“析取三段论规则”、“假言三段论规则”和“复杂破坏式二难推论”。此外，科庇还增加了 10 条等值置换规则，即双重否定律、德摩根律、交换律、结合律、分配律、假言易位律、蕴涵律、等值律、移出律和重言律。其中双重否定律包含了根岑的“ $\neg$ 销除规则”。根岑的推演规则虽然没有这些等值置换规则和其他一些规则，但从他的推演规则可以派生出这些规则，因此，对于根岑的系统来说，这些规则都是逻辑上不必要的。但是，一个明显的事是，这些规则在实际应用中可以起到简化推

① F. Fitch, *Symbolic Logic*, New York: Roland Press. 1952.

② W. V. Quine, *Method of Logic*, New York: Henry Holt & Co., 1950.

演的作用；或者说，有了它们可以使我们的推论更为自然。

伯格曼的《逻辑教本》关于命题逻辑介绍了两个彼此等价的自然演绎系统即 SD 和 SD +，关于谓词逻辑也介绍了两个彼此等价的自然演绎系统即 PD 和 PD +。其中 SD 和 PD 几乎完全采用了根岑的规则系统。SD + 则是在 SD 的基础上增加了由科庇首先增加的前三条推演规则和 10 条置换规则，PD + 是在 PD 的基础上增加了关于量词否定的置换规则。本书基本采用了科庇的规则系统包括规则的名称。不过，科庇的命题逻辑系统包含 21 条规则而本书的系统只有 20 条，少掉的那一条规则是“复杂破坏式二难推论”。另外，科庇关于等值词的置换规则包括两组公式，而本书的那条规则只包括一组公式；科庇关于量词的置换规则即量词否定规则只包括三组公式，而本书的那条规则包括四组公式，并称之为“量词转换规则”。

关于自然演绎的规则系统，雅斯可夫斯基与根岑之间有着明显的区别。首先，雅斯可夫斯基的系统没有把存在量词作为基本逻辑词，因而没有关于存在量词的推演规则。其次，雅斯可夫斯基关于命题逻辑的推演规则并没有给出一个详细的清单，而只是着重给出两个非同寻常的规则即“条件化规则”和“归谬规则”，即科庇所说的“条件证明规则”和“间接证明规则”。这两个规则都引出相应的一个子推演，子推演包括其他规则的应用，这些其他规则被雅斯可夫斯基笼统地称之为“普通规则”，并为他的自然演绎系统所容纳。

这种构造规则系统的做法被奎因和苏佩斯所继承。奎因在他的系统中包括这样一条规则（即 TF），允许从给定命题推出任何一个命题或其模式，只要它是被给定命题真值函项地蕴涵的（即重言蕴涵）。我们知道，任何一个重言的蕴涵式都相当于一个推演规则，即其前件真值函项地蕴涵其后件；而重言的蕴涵式是无穷多的，这意味着奎因的自然演绎系统包含无数多条推演规则。与之相似，苏佩斯的自然演绎系统只有三条明确给出的规则：一是规则 P，允许在证明过程中随时引入一个假设；另一是规则 C.P.，即条件证明规则；再一个就是规则 T，它相当于奎因规则 TF。不过，苏佩斯又列出一些常用的重言式，作为对规则 T 的补充说明，但对规则 T 的应用并不限于这些被列出的重言式。苏佩斯所列出的那些重言式大致与科庇的推演规则相对应。

本书之所以没有采取雅斯可夫斯基、奎因和苏佩斯的规则系统，因为这种规则系统不适合于初学者。初学逻辑的人并不知道哪些蕴涵命题是重言式，当然也就不知道哪些命题是被给定的命题所重言蕴涵的。换言之，如果他们能够准确地判别哪些公式是或不是重言式，那么他们也就不必学习命题逻辑了。

**第三，关于存在量词规则的表述。**根岑关于量词的推演规则有四条，即全称量词引入（introduction）规则、全称量词销除（elimination）规则、存在量词引入规则和存在量词销除规则。这四条量词规则在总体上得到普遍的接受，尽管在细节和名称上还存在许多分歧。从名称上讲，奎因和科庇等人把这四条规则分别称为“全称概括（generalization）”、“全称消去（specification）”、“存在引入（introduction）”和“存在消去（elimination）”。

zation) 规则”、“全称例示 (instantiation) 规则”、“存在概括规则”和“存在例示规则”。苏佩斯则把它们分别称为“全称概括 (generalization) 规则”、“全称限定 (specification) 规则”、“存在概括规则”和“存在限定规则”。菲奇和伯格曼等人则沿用根岑的叫法。本书采用奎因和科庇的名称，下面的分析将表明，这种叫法更能反映量词规则的本质。

从细节上讲，一个明显的分歧是，存在例示规则是否作为一条关于假设的引入 - 撤除规则？对此，根岑、菲奇、科庇和伯格曼等人的处理是肯定性的，而奎因、苏佩斯等人的处理是否定性的。<sup>①</sup> 不过，奎因和苏佩斯对存在例示规则的处理面临一个困境，它违反了关于推演有效性的一个原则，即：一个推演的每一行都是推演所依据的命题的逻辑后承。苏佩斯的规则允许这样的推论：从  $\exists x \Psi(x)$  推出  $\Psi(v)$ ，要求  $v$  是一个新的个体词。然而我们知道，“某个具体事物  $v$  具有属性  $\Psi$ ”不是“有事物具有属性  $\Psi$ ”的逻辑后承。为此，苏佩斯不得不把上述有效性原则减弱为：“如果推导中的一个公式不包含歧义名称（即  $V$ ），并且它的前提也不包含，那么它就是它的前提的逻辑后承。”<sup>②</sup> 这就是说，尽管  $\Psi(v)$  不是  $\exists x \Psi(x)$  的逻辑后承，但是由  $\Psi(v)$  导致的不含  $v$  的命题即  $P$  则是  $\exists x \Psi(x)$  的逻辑后承。这意味着，并非一个有效推演的每一行都是它所依据的那些命题的逻辑后承，只要由它最终可以导出  $P$ 。

奎因和苏佩斯所面临的这一困境对于根岑、科庇和伯格曼等人并不存在，因为在他们那里， $\Psi(v)$  只是作为一个假设而引入的，它不依据任何命题，当然不是也不应是  $\exists x \Psi(x)$  的逻辑后承。为此，本书采用根岑、科庇和伯格曼等人关于存在例示规则的表述方式，即把它作为一条假设引入 - 撤除规则。

**第四，关于一般量词规则的表述。**量词规则是否允许自由个体变项出现于推演中？这个问题也可表述为：用于例示的个体词是否可以是自由变项？对此，以上提到的学者中除伯格曼持否定性的处理外，其他人都持肯定性的处理。这两种不同的处理方法所导致的不同后果是，后者需要对量词规则给以更多的限制。现以科庇的量词规则为例，他把全称例示规则表述为（所用符号略有改变，以便同本书的规则进行比较）：

$$\forall x \Psi(x)$$

$$\therefore \Psi(y)$$

其中“ $y$ ”可以是自由个体变项。本来，运用全称例示规则进行推论是一种最为自然合理的推论，如从“所有会死”推出“孔子会死”；但是，由于这一规则允许自由个体

<sup>①</sup> 科庇的《符号逻辑》第四章第二节不把存在例示规则作为假设的引入 - 撤除规则，但在同章第五节却把它作为假设的引入 - 撤除规则。鉴于该书把前者称为“对量化规则的初步表述”而把后者作为正式的表述，笔者以后者为依据把科庇归于前一类作者。不过，佩尔蒂埃在其《自然演绎简史》中却把科庇归于后一类作者。

<sup>②</sup> 苏佩斯：《逻辑导论》，第 104 页。

变项“ $y$ ”出现于结论，这便导致出现某种逻辑错误的可能性。例如，应用这条规则可以进行如下的推演：

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (F(x) \leftrightarrow \neg F(y)) \\ \therefore & \exists y (F(y) \leftrightarrow \neg F(y)) \end{aligned}$$

此推演的结论显然是假的，因为它说的是：有一个体  $y$  是  $F$  当且仅当它不是  $F$ ；这等于说， $y$  既是  $F$  又不是  $F$ 。但是，此推演的前提可以是真的。这意味着，这是一个无效推论。为了避免这类无效推论，对这一全称例示规则加以如下限制：公式  $\Psi(x)$  表示任一命题或命题函数（即开语句），公式  $\Psi(y)$  表示用“ $y$ ”替换  $\Psi(x)$  中  $x$  的每一出现的结果，并且这一替换必须满足一个条件，即：如果  $y$  是一变项，凡  $x$  在  $\Psi(x)$  中自由出现的地方， $y$  在  $\Psi(y)$  中也自由出现。<sup>①</sup> 以上无效推论便违反了这个限制条件，因为：前提中“ $\forall x$ ”以后的开语句  $\exists y (F(x) \leftrightarrow \neg F(y))$  相当于  $\Psi(x)$ ， $x$  在其中是自由出现的，结论  $\exists y (F(y) \leftrightarrow \neg F(y))$  相当于  $\Psi(y)$ ， $y$  在其中没有自由出现。

请注意，这个限制条件仅当  $y$  为一个体变项时才起作用。如果  $y$  为一个体常项如  $a$ ，以上推演成为：

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (F(x) \leftrightarrow \neg F(y)) \\ \therefore & \exists y (F(a) \leftrightarrow \neg F(y)) \end{aligned}$$

这一结论没有包含自相矛盾因而并非一定是假的，事实上，此推论是有效的。究其原因，导致前面无效推论的关键是，用以例示  $x$  的是变项  $y$  并且被量词  $\exists y$  所约束。与之不同，当用以例示  $x$  的不是变项而是常项，这种情况是绝对不会发生的，因为一个常项不可能被任何量词所约束；相应地，以上赋予全称例示规则的限制条件便成为多余的。

在科庇的自然演绎系统中，这一条件限制不仅是针对全称例示规则的，而且是针对全部四条量词规则的，因为四条量词规则都允许自由个体变项出现。可以设想，如果禁止自由个体变项出现在量词规则中，那将使量词规则得到多么大的简化。<sup>②</sup> 科庇为何要让自由个体变项出现于推演过程中呢？他的说法是：“在为某一给定命题构造有效性的形式证明时，我们由之开始的前提和我们以之结束的结论都是命题。但是，每当使用存在例示或全称概括规则时，中间各行中至少要有一些行必须包含自由变项，并因而成为命题函数而不是命题。”<sup>③</sup>

事实上，科庇所说的出现在前提和结论之间的包含自由个体变项的命题函数（开

<sup>①</sup> 科庇：《符号逻辑》，第 124 页。

<sup>②</sup> 事实上，科庇在《符号逻辑》第四章第二节中给出这样一个不含自由个体变项的量词规则系统，只是存在例示规则没有采用假设引入—撤除的方式。科庇把它们称为“初步的量化规则”，而把他在同章第五节给出的容纳自由个体变项的量词规则看作是对前者的扩展。

<sup>③</sup> 科庇：《符号逻辑》，第 121 页。

语句) 是可以避免的, 伯格曼在其《逻辑教本》所给出的自然演绎系统就是如此, 它使推演的每一行只出现命题而不出现命题函项, 从而禁止自由个体变项的出现, 进而使量词规则得以简化。本书采取了伯格曼在量词规则中禁止自由个体变项出现的做法。

不过, 本书第一版和第二版在对量词规则的表述上并不完全一样, 这里涉及表述的简明性和逻辑的严格性之间的张力和取舍。如果说在兼顾简明性和严格性的前提下, 旧版本更注重表述的简明性, 新版本则更注重表述的严格性。对此, 不妨以存在概括规则和存在例示规则加以说明。

本书第一版关于存在概括规则的表述是:

$$\Psi(a)$$

$$\therefore \exists x\Psi(x)$$

而第二版本关于存在概括规则的表述是:

$$\Psi(a/x)$$

$$\therefore \exists x\Psi(x)$$

新版本的存在概括规则的前提是  $\Psi(a/x)$ , 而不是  $\Psi(a)$ ,  $\Psi(a/x)$  表示用个体常项  $a$  替换  $\Psi(x)$  中的  $x$  的每一次出现所得的结果。这看上去有些别扭, 似乎概括之前先要进行例示, 这样做的必要性何在? 其必要性在于: 存在概括规则并不像全称概括规则那样要求其结论不含个体常项  $a$ , 也就是说, 存在概括规则允许只把前提中  $a$  的部分出现替换为  $x$ , 使得其结论  $\exists x\Psi(x)$  亦即  $\Psi(x)$  中可以包含  $a$ 。为此, 当旧版本用前一种方式表述存在概括规则时, 必须把这一点作为规则的一部分附加其上。这样处理, 尽管在直观上简单明了而且在实际运算中也不会出错, 但是从理论上讲是不准确的。因为前提  $\Psi(a)$  中的复合谓词 “ $\Psi()$ ” 是不含  $a$  的 (“ $\Psi()$ ” 是通过去掉  $\Psi(a)$  中  $a$  的每一次出现而得到的), 一旦结论中含  $a$ , 其复合谓词就不是  $\Psi()$  而是  $\Psi'( )$ ; 相应地, 所得结论就不是  $\exists x\Psi(x)$  而是  $\exists x\Psi'(x)$ 。与之不同, 新版本的存在概括规则的前提是  $\Psi(a/x)$ , 其中的复合谓词 “ $\Psi()$ ” 可以含有  $a$ , 只要结论  $\exists x\Psi(x)$  中的 “ $\Psi()$ ” 含有  $a$ , 因为  $\Psi(a/x)$  只不过是用  $a$  替换  $\Psi(x)$  中  $x$  的每一次出现的结果, 并未对 “ $\Psi()$ ” 有丝毫的改变。由此可见, 新版本对存在概括规则的表述虽然显得不那么自然, 但却是准确的, 而且无需附加任何条款。这种对存在概括规则的表述方式也正是伯格曼等人所采用的。

关于存在例示规则, 一个关键的步骤是在  $\exists x\Psi(x)$  之后引入新名假设  $\Psi(a/x)$ 。如何保证  $\Psi(a/x)$  中的个体常项  $a$  是一个新名呢? 本书第一版采取了科庇和苏佩斯共用的方法, 即要求  $a$  不出现在引入新名假设  $\Psi(a/x)$  之前的任何一行。这样做的一个后果是, 当把新名  $a$  作为例示常项时, 全称例示的步骤必须在引入新名假设之后才能进行。然而, 这一要求在逻辑上是不必要的。实际上, 附加于存在例示规则上的这一限制条件可以弱化为: ①新名  $a$  不出现在前提和任何尚未撤除的假设中; ②新名  $a$  不出

现在  $\exists x \Psi(x)$  中。不过，这种弱化了的条件限制反倒不如强化的条件限制来得简单明了。正因为此，本书第一版采用强化的条件限制，尽管在注脚中给出弱化的限制条件。出于对准确性的重视，新版本的存在例示规则采用了弱化的条件限制而把强化的条件限制作为一种辅助性的策略。

**第五，关于常项和变项。**常项和变项属于逻辑学中最基本的概念。一般而言，常项相当于专名，变项相当于通名。在逻辑学中还区分了对象语言和元语言，相应地，也就有了对象专名和元专名、对象通名和元通名的区别，亦即对象常项和元常项、对象变项和元变项的区别。不过，在逻辑学的文献中似乎只有元变项（metavariable）成为专门的术语，而其他相关概念只能从上下行文中去辨认。就这一点而言，并不是什么大问题，但重要的是，不少作者常常将这几个概念在一定程度上混淆起来，其中也包括笔者在本书第一版中的有关处理。

如同科庇的《符号逻辑》以及其他人的一些著作，本书的旧版本不仅引入个体常项（如  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ）和个体变项（如  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ），还引入命题常项（如  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ）和命题变项（如  $p$ 、 $q$ 、 $r$ ），但却始终没有明确地告诉读者：个体变项属于对象语言（即一阶逻辑）的变项，而命题变项则属于元语言的变项，因为本系统中只有个体变项可以受到量词的约束，而命题变项却不能被量词所约束（个体常项和命题常项均属对象语言）。在具体做法上，正如把  $F(a)$  作为  $F(x)$  的一个替换例子，也把  $A \wedge B$  和  $A \rightarrow B$  等分别作为  $p \wedge q$  和  $p \rightarrow q$  等的一个替换例子。 $p \wedge q$  和  $p \rightarrow q$  等由于含有命题变项而成为命题形式， $A \wedge B$  和  $A \rightarrow B$  等由于只含有命题常项而成为具体命题。这些表述给读者造成一种错觉，似乎命题变项如同个体变项一样都属于对象语言。

个体变项如同个体常项可以成为对象语言的元素，因为个体变项可以通过量词的约束而构成对象语言的命题。与之不同的是，命题变项不能像命题常项那样成为对象语言的元素，因为命题变项不能通过量词的约束而成为对象语言的命题，而只能通过元语言中量词的约束而成为元语言的命题。

本书的第一版所面临的一个困境是：一方面，一阶逻辑肯定要把命题形式和推论形式作为研究对象；另一方面，似乎只有把命题变项引入对象语言才能表达命题形式和推论形式，而不限于只能表达具体命题和具体推论。这便是旧版本未把命题变项明确地宣布为元变项的内在原因。为摆脱这一困境，在新版本中提出“常项变项”和“变项变项”的概念（见第八章第一节）。通常所谓的常项在一定意义上也是变项，如数学公式中的系数，它只是相对于自变量是常数，但在不同的场合中系数可以取不同的数值。类似地，命题常项如  $A$  虽然在一定的语境下代表某一具体命题，但在不同的语境下它所代表的具体命题可以是不同的。简言之，相对于一定语境， $A$  是命题常项，离开特定语境， $A$  便成为命题变项；这便是“常项变项”的意思。既然如此，只用命题常项（即常项变项）同样可以表达命题形式和推论形式。所以，第二版只把命题常项引入系统，

而明确地把命题变项作为元变项，并用黑体大写字母表示之。同时，用黑体小写字母如 **a** 代表个体常项的元变项，其值包括 a、b、c 等对象语言的个体常项；用 **x** 代表个体变项的元变项，其值包括 x、y、z 等对象语言的个体变项，等等。这样处理将使我们的表述更为清晰准确。事实上，这样的表述在伯格曼的《逻辑教本》中都已采用，只是没有提出“常项变项”和“变项变项”的概念。

关于命题变项的问题，苏佩斯在其《逻辑导论》中专设一小节加以讨论<sup>①</sup>。在此，不妨对他关于命题变项的处理作一评论。苏佩斯区分了语句变项和命题变项：语句变项的值是语句的名称，语句变项用大写字母 P、Q、R 和 S 来表示；而命题变项的值是语句本身，命题变项用小写字母 p、q、r 和 s 来表示。苏佩斯用其他大写字母如 A、B、C、D 等表示语句本身即命题常项。他的这一区分也可以表述为：语句变项的值域是命题常项的名称，包括“A”、“B”、“C”、“D”等；命题变项的值域是命题常项，包括 A、B、C、D 等。在此，苏佩斯沿用加引号的方法表示一个词句的名称而不是一个词句本身。作了这种区分之后，苏佩斯认为，对逻辑系统的表述，使用语句变项比使用命题变项更为适当。其理由如下：

(1) 每一个语句 Q 都是或真或假的。

(1) 中使用了语句变项 Q。然而，如果将其中的语句换成命题变项 q，则在表述上会出现问题。这种替换的结果是：

(2) 每一个命题 q 都是或真或假的。

现令命题常项 A 表示：吉伦尼莫死了。用 A 作为 q 的例示常项对(2)进行例示后得到

(3) A 是或真或假的。

亦即

(4) 吉伦尼莫死了是或真或假的。

(4) 有两个主要动词即“死了”和“是或真或假的”，不合乎句法，因而是无意义的。与之不同，(1)则不会导致这种情形。因为对(1)进行例示的不是命题常项 A，而是命题常项的名称“A”，例示的结果是

(5) “吉伦尼莫死了”是或真或假的。

显然，这是一个合乎句法的句子，因而是有意义的。为了不放弃命题变项 q，我们也可考虑把(2)改为：

(6) 对于每一个命题 q，“q”是或真或假的。

用命题常项 A 对(6)进行例示的结果是

(7) “A”是或真或假的。

<sup>①</sup> 见苏佩斯：《逻辑导论》，第 152～154 页。

亦即

(8) “吉伦尼莫死了”是或真或假的。

(8) 与(5)相同，这似乎达到用命题变项而不用语句变项的目的。然而，(6)却违反了一个逻辑规则。这个逻辑规则是：处于引号外边的量词不能约束处于引号里边的变项。如果允许违反这一规则，那将会出现如下的语句：

(9) 对于每一个 $q$ ，“ $q$ ”是字母表上的第十七个字母。

用 $A$ 作为 $q$ 的例示常项对(9)进行例示的结果是

(10) “吉伦尼莫死了”是字母表上的第十七个字母。

显然，这是一个假句子甚至是无意义的。可见，以上挽留命题变项 $q$ 的策略是不成功的，因此，我们应当放弃命题变项 $q$ 而采用语句变项 $Q$ 。

笔者认为，苏佩斯的以上论证颇具启发性，但其结论是错误的。其错误的症结在于混淆了引号的两种用法即提及和分组。通常的用法是，给一个词或句加上引号，意味着这个词句是被提及而不是被使用；被提及的是这个词句的名称，而不是使用这个词句的意义。如(9)中的引号就是这种用法。另一种用法是，给一个词句加上引号，相当于给一个词句加上括号，它只起分组结合的作用，而不改变词句的意义。如(6)中的引号实际上就是这种用法，因而我们可以将(6)改写为：

(11) 对于每一个命题 $q$ ，( $q$ )是或真或假的。

在不引起混淆的情况下，括号可以省略。既然(6)中的 $q$ 是一不可分割的整体，所以对它加括号是不必要的。即(11)相当于

(12) 对于每一个命题 $q$ ， $q$ 是或真或假的。

(12) 就是(2)。在这种理解下，用常项 $A$ 对(2)进行例示的结果仍然是(3)，但(3)不相当于(4)，而是相当于：

(13) (吉伦尼莫死了)是或真或假的。

正如处于括号外边的逻辑词是主逻辑词，处于括号外边的动词即“……是或真或假的”是主要的动词。显然，(13)是有意义的。

这样，苏佩斯关于采用命题变项 $q$ 的困惑就被消除了。不过，需要强调，(2)、(11)和(12)都不属于对象语言(即一阶逻辑)，而是属于元语言，既然其中的命题变项 $q$ 是被量词约束的。有鉴于此，笔者主张采用命题变项而不采用苏佩斯所说的语句变项，并把命题变项看作元变项而不是对象变项。

需要指出，苏佩斯采用语句变项的主张是不妥的，因为逻辑学关注的是命题或语句，而不是命题或语句的名称。事实上，如果把(5)中的“吉伦尼莫死了”仅仅当作句子的名称，那么(5)便成为无意义的，因为一个名称无所谓真或假。正确的做法是，把(5)的引号看作括号，从而，(5)等同于(13)。可见，区分引号的两种用法即提及和分组是非常重要的。

由以上讨论可以看到，变项和常项尽管是一对常用的概念，但是其用法却并不简单。本书第二版对它们的处理是非常小心的。在正式讨论命题的符号化以前，仍然沿用习惯做法即用小写字母  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $s$  等表示命题变项，因为此时命题变项是相对于用自然语言表述的命题，即一个字母符号可以代入不同的自然语言命题。然而，在正式讨论命题的符号化的时候，就把原来作为命题变项的  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $s$  改写为从  $A$  到  $Z$  的大写字母，并称之为命题常项（亦即常项变项），而用黑体字的大写字母 **P**、**Q**、**R**、**S** 等表示元命题变项（亦即变项变项）。一个命题常项代表某一自然语言命题，而元命题变项可以代入任何一个用命题常项构成的命题。这一改变之所以必要，因为论域发生了变化：原来只讨论两层语言，即自然语言命题和表示它们的符号；后来则讨论三层语言，即自然语言命题、表示它们的符号命题和可以代入各种符号命题的符号。相应地，原来只需要一种符号即命题变项，后来则需要两种符号即命题常项和命题变项，亦即常项变项和变项变项。这两种变项的意义是不同的，一个是用以代入不同自然语言命题而另一个是用以代入不同符号语言命题；一个属于对象语言而另一个属于元语言。

第六，关于元理论的处理。元理论关注一个逻辑系统的整体性质，主要包括语法和语义以及二者之间的关系。应该说，元理论的难度和深度远远高于对象理论，而且，对于掌握推论技巧来说，对元理论的掌握并不是必不可少的。那么，作为一门逻辑导论课是否应当包括元理论呢？如果包括，那么以何种方式进行论述呢？对此，不同的作者有着不同的处理。从近年来美国大学使用的逻辑导论教科书来看，不包括元理论的课本不占少数；甚至苏佩斯的《逻辑导论》也不含元理论。那些包括元理论并以自然演绎为主的教科书中，对元理论的处理大致分为两类。一类是简要地介绍公理系统，从而建立自然演绎系统与公理系统之间的等价关系，进而通过证明公理系统的可靠性和完全性等元逻辑性质来间接证明自然演绎系统也具有同样的性质。如科庇的《符号逻辑》就是如此。另一类是直接论证自然演绎系统的元逻辑性质而不借助于公理系统，如伯科曼的《逻辑教本》就是这样做的。

本书的第一版没有包括对元理论的讨论，第二版则增加了部分元理论即关于命题逻辑的元理论，而没有包括谓词逻辑和模态逻辑的元理论。关于命题逻辑元理论的讨论并非紧跟命题逻辑的章节之后，而是放在谓词逻辑和模态逻辑的章节之后。因为本书作为逻辑导论教材，并不要求读者对元理论有一个全面的把握，而只是为了给出一个范例，让读者通过此范例而对现代符号逻辑的一个基本特征有所了解，这个基本特征是将语法和语义严格区分开来的。在此之前，本书在章节的安排上对语义和语法各有侧重，但未加以严格区分。这对于初学者或许是有益的，因为自然语言中的推论在很大程度上是把语法和语义结合在一起的。事实上，科庇的《符号逻辑》在最后引入元理论之前也是这样处理的。这样做的目的是：试图把逻辑学教学的可接受性和严格性兼顾起来。本书关于命题逻辑元理论的讨论在很大程度上参照了伯科曼的《逻辑教本》。不过，由于这

两本书所采用的自然演绎的规则系统有所不同，致使二者在证明过程中的许多细节上有所不同。仅就命题逻辑的元理论而言，本书新增的第八章应该说是严谨的和全面的。

**第七，关于模态逻辑和集合论。**科庇的《符号逻辑》和苏佩斯的《逻辑导论》都设专门章节来讨论集合论。他们对集合论的重视除了其本身的重要性以外，在很大程度上受到历史背景的影响，即现代符号逻辑在其建立过程中是与数学基础的研究密切相关的，而数学基础的重要内容之一就是集合论。这两本教科书试图与数学基础结合起来的目的在它们各自的前言中都已表明，甚至《逻辑导论》标明是作为美国大学本科数学用书，尽管苏佩斯本人是美国斯坦福大学的哲学教授。这两本教科书以及其他大多数逻辑导论教科书都没有把模态逻辑包含进来。然而，自 20 世纪 60 年代以来，模态逻辑取得长足的发展，其标志就是关于模态逻辑的可能世界语义学的建立。可能世界语义学为哲学逻辑的发展提供了一个广阔的平台，使得已经初步建立起来的各个哲学逻辑分支，如道义逻辑、认知逻辑和时态逻辑等有了一个统一的语义学框架，并促进了新的哲学逻辑分支的产生和发展。可以说，在现代逻辑的领域中，哲学逻辑的重要性已经可以同数学逻辑相提并论了。

本书主要是作为人文学科和社会科学学生的教科书，自然地，其侧重点是同哲学结合而非同数学结合。因此，本书没有包括集合论而是包括模态命题逻辑，并且是在自然演绎的框架中将其展开的。把自然演绎方法用于模态命题逻辑的努力早在 20 世纪 50 年代就开始了，其中包括菲奇的《符号逻辑》(1952 年)。本书的模态命题逻辑部分主要参考了康尼迪克 (K. Konyndyk) 的《模态逻辑导论》(1986 年)<sup>①</sup>。为了保持全书的一致性，本书对一些技术细节作了必要的调整和修改。

作 者  
2005 年 10 月于广州

<sup>①</sup> K. Konyndyk, *Introductory Modal logic*, University of Notre Dame Press, 1986.

## 第一版前言

现代演绎逻辑的系统很多，但从大的方面可以分为两类，即自然演绎系统和公理系统。自然演绎系统与公理系统的主要区别在于，公理系统中的推演必须以少数几个公理（或公理模式）为前提，而自然演绎系统中的推演则可以以任何命题为前提。这样，对于一个具体推理的证明，在公理系统中，必须首先把该推理转化为一个命题，然后再从公理出发推出该命题；而在自然演绎系统中，则可直接从该推理的前提推出该推理的结论。因此，自然演绎系统比起公理系统来更加接近人们的实际思维，从而应用起来更加简便。本书采用自然演绎系统。

除了采用自然演绎系统以外，本书的另一个特点是把现代逻辑的基础部分与传统逻辑的精华部分有机地结合起来。例如，在传统逻辑中占居核心地位的三段论逻辑，在本书中作为命题逻辑与谓词逻辑的过渡环节；传统逻辑颇为重视的同一律、矛盾律、排中律和充足理由律以及词项（或概念）等内容，在绪论中也给以适当的讨论和处理。

本书所阐述的各个逻辑分支即命题逻辑、谓词逻辑、模态逻辑和三段论逻辑等均为演绎逻辑的基本内容，并且主要是在自然演绎系统的框架内被展开的，故本书名曰《自然演绎逻辑导论》。

本书是作者在多年教学的基础上写成的，其油印本从1988年开始作为武汉大学哲学系的教材使用。在此正式出版之前，作者作了进一步的修改和增补。本书不要求读者预先具备任何逻辑基础知识，因此，适用于大学文科学生的逻辑导论课教材，也适合于广大读者自学。

在本书的编写过程中，作者得到武汉大学哲学系张巨青教授和田龙九教授、北京大学哲学系宋文坚教授以及武汉大学哲学系张掌然和孙思等同事的热情支持和帮助。为使本书得以正式出版，武汉大学教务处和社会科学研究处给予了慷慨资助。对于以上诸同志和机构，作者在此一并表示深切的谢意。

作 者  
1991年4月于武昌

# 目 录

第二版前言 关于自然演绎逻辑系统 .....	(I)
第一版前言 .....	(I)
第一章 绪论 .....	(1)
1.1 词项、命题和推论 .....	(1)
1.1.1 词项 .....	(1)
1.1.2 定义 .....	(2)
1.1.3 命题 .....	(4)
1.1.4 推论 .....	(4)
1.1.5 演绎推论与归纳推论 .....	(6)
习题 1.1 .....	(7)
1.2 推论的有效性和可靠性 .....	(9)
1.2.1 推论形式、变项和常项 .....	(9)
1.2.2 推论的有效性 .....	(11)
1.2.3 反例 .....	(12)
1.2.4 推论的可靠性 .....	(13)
习题 1.2 .....	(14)
1.3 论证 .....	(16)
1.3.1 证明与反驳 .....	(16)
1.3.2 论证的基本规则 .....	(18)
1.3.3 二难推论 .....	(20)
1.3.4 几种不正当的辩论手法 .....	(22)
习题 1.3 .....	(23)
第二章 命题逻辑：符号化和真值表 .....	(25)
2.1 一些基本概念 .....	(25)
2.1.1 真值函数复合命题和真值函数联结词 .....	(25)
2.1.2 合取词和合取命题 .....	(26)
2.1.3 析取词和析取命题 .....	(27)

2.1.4 否定词和否定命题 .....	(28)
2.1.5 蕴涵词和蕴涵命题 .....	(29)
2.1.6 等值词和等值命题 .....	(31)
习题 2.1 .....	(32)
2.2 命题的符号化 .....	(33)
2.2.1 什么是命题的符号化 .....	(33)
2.2.2 一些常见的复合命题的符号化 .....	(33)
2.2.3 包含多个联结词的复合命题的符号化 .....	(37)
习题 2.2 .....	(39)
2.3 命题的真值表及其逻辑性质 .....	(40)
2.3.1 真值表的构造 .....	(40)
2.3.2 重言式、矛盾式和偶然式 .....	(44)
2.3.3 重言等值和重言蕴涵 .....	(46)
习题 2.3 .....	(48)
2.4 用真值表检验推论的有效性 .....	(50)
2.4.1 真值表方法 .....	(50)
2.4.2 短真值表方法 .....	(54)
习题 2.4 .....	(58)
<b>第三章 命题逻辑：推演 .....</b>	<b>(61)</b>
3.1 八条整推规则 .....	(61)
3.1.1 八条整推规则的表述 .....	(61)
3.1.2 八条整推规则的应用 .....	(64)
习题 3.1 .....	(68)
3.2 十条置换规则 .....	(70)
3.2.1 什么是置换规则 .....	(71)
3.2.2 交换 .....	(72)
3.2.3 双重否定 .....	(73)
3.2.4 德摩根律 .....	(73)
3.2.5 假言易位 .....	(75)
3.2.6 蕴涵 .....	(75)
3.2.7 重言 .....	(76)
3.2.8 结合 .....	(77)
3.2.9 分配 .....	(78)

---

3.2.10 移出	(79)
3.2.11 等值	(80)
习题 3.2	(82)
3.3 条件证明规则	(85)
3.3.1 什么是条件证明规则	(85)
3.3.2 条件证明规则的应用	(87)
习题 3.3	(91)
3.4 间接证明规则	(92)
3.4.1 什么是间接证明规则	(92)
3.4.2 间接证明规则的应用	(93)
习题 3.4	(98)
3.5 重言式的证明	(99)
3.5.1 重言式的无前提证明	(99)
3.5.2 自然演绎与真值表方法	(102)
习题 3.5	(104)
<b>第四章 三段论逻辑</b>	(105)
4.1 直言命题	(105)
4.1.1 直言命题的形式	(105)
4.1.2 直言命题的图释	(106)
4.1.3 直言命题之间的关系	(109)
习题 4.1	(112)
4.2 三段论	(113)
4.2.1 什么是三段论	(113)
4.2.2 用文恩图检验三段论的有效性	(115)
4.2.3 用规则检验三段论的有效性	(120)
习题 4.2	(122)
4.3 强化三段论	(124)
4.3.1 强化直言命题与强化三段论	(124)
4.3.2 对强化三段论的有效性的检验	(126)
4.3.3 处理三段论的两种方案	(128)
习题 4.3	(129)

<b>第五章 谓词逻辑：基本概念和符号化</b>	.....	(131)
5.1 基本概念	.....	(131)
5.1.1 谓词逻辑和谓词推论	.....	(131)
5.1.2 个体词和谓词	.....	(132)
5.1.3 量词	.....	(134)
5.1.4 量词的辖域、普遍命题和复合命题	.....	(135)
5.1.5 自由变项和约束变项	.....	(137)
5.1.6 开语句、开语句的例示和概括	.....	(138)
5.1.7 重复约束和空约束	.....	(140)
习题 5.1	.....	(140)
5.2 命题的符号化	.....	(142)
5.2.1 直言命题的符号化	.....	(142)
5.2.2 论域	.....	(145)
5.2.3 一般命题的符号化	.....	(146)
5.2.4 命题的多重量化	.....	(151)
习题 5.2	.....	(155)
<b>第六章 谓词逻辑：解释与推演</b>	.....	(158)
6.1 解释	.....	(158)
6.1.1 命题的解释及其真假	.....	(158)
6.1.2 普遍有效式和不可满足式	.....	(162)
6.1.3 逻辑等值和逻辑蕴涵	.....	(164)
6.1.4 谓词推论的解释及其有效性	.....	(165)
习题 6.1	.....	(169)
6.2 推演	.....	(171)
6.2.1 命题推演规则和量词转换规则	.....	(171)
6.2.2 全称量词的整推规则	.....	(173)
6.2.3 存在量词的整推规则	.....	(179)
6.2.4 构造一些推论的证明	.....	(184)
习题 6.2	.....	(188)
<b>第七章 模态逻辑</b>	.....	(193)
7.1 一些基本概念	.....	(193)
7.1.1 命题的模态	.....	(193)

---

7.1.2 必然命题	(194)
7.1.3 可能世界	(195)
7.1.4 严格蕴涵	(197)
7.1.5 逻辑独立	(198)
7.1.6 严格等值	(198)
习题 7.1	(199)
7.2 模态命题的表达	(200)
7.2.1 基本符号与定义	(200)
7.2.2 整体模态与部分模态	(202)
7.2.3 模态命题的自然语言表达	(202)
习题 7.2	(204)
7.3 模态命题逻辑发展概况	(204)
7.4 系统 T	(206)
7.4.1 置换规则	(206)
7.4.2 必然模态词的整推规则	(207)
7.4.3 可能模态词的整推规则	(214)
习题 7.4	(219)
7.5 系统 $S_4$	(221)
7.5.1 重迭模态词	(221)
7.5.2 $S_4$ - 重述规则	(222)
7.5.3 模态词的化归	(225)
习题 7.5	(226)
7.6 系统 $S_5$	(227)
7.6.1 $S_5$ - 重述规则	(227)
7.6.2 模态词的化归	(228)
7.6.3 一些定理和推论的证明	(229)
7.6.4 构造反例	(230)
习题 7.6	(234)
7.7 各个系统的可能世界模型	(235)
7.7.1 可能世界之间的可达性关系	(236)
7.7.2 系统 T 的可能世界模型	(236)
7.7.3 系统 $S_4$ 和 $S_5$ 的可能世界模型	(238)

<b>第八章 命题逻辑的元理论 .....</b>	(242)
8.1 对象语言与元语言、常项变项与变项变项 .....	(242)
8.1.1 对象语言与元语言 .....	(242)
8.1.2 常项变项与变项变项 .....	(243)
习题 8.1 .....	(246)
8.2 SL 的语法 .....	(246)
8.2.1 SL 的基本语法 .....	(246)
8.2.2 一些语法元定理及其证明 .....	(250)
习题 8.2 .....	(253)
8.3 SL 的语义 .....	(254)
8.3.1 SL 的基本语义 .....	(254)
8.3.2 一些语义元定理及其证明 .....	(255)
习题 8.3 .....	(257)
8.4 数学归纳法 .....	(257)
8.4.1 什么是数学归纳法 .....	(257)
8.4.2 数学归纳法的例示 1 .....	(258)
8.4.3 数学归纳法的例示 2 .....	(259)
习题 8.4 .....	(261)
8.5 联结词的真值函项完全性 .....	(261)
8.5.1 什么是真值函项完全性 .....	(261)
8.5.2 对 SL 的真值函项完全性的证明 .....	(263)
习题 8.5 .....	(266)
8.6 SC 的可靠性 .....	(267)
8.6.1 什么是 SC 的可靠性 .....	(267)
8.6.2 一些元定理及其证明 .....	(267)
8.6.3 对 SC 的可靠性的证明 .....	(269)
习题 8.6 .....	(273)
8.7 SC 的完全性 .....	(274)
8.7.1 不一致性引理和最大一致性集合 .....	(274)
8.7.2 对 SC 的完全性的证明 .....	(278)
习题 8.7 .....	(281)
<b>主要参考文献 .....</b>	(282)

# 第一章 緒論

## 1.1 詞項、命題和推論

### 1.1.1 詞項

逻辑是一门以推论为主要研究对象的学科。推论是由命题组成的，而命题又是由词项组成的。

现代逻辑所说的“词项”(term)、“命题”(proposition)和“推论”(argument)分别对应于传统逻辑所说的“概念”(concept)、“判断”(judgment)和“推理”(inference)。现代逻辑之所以要做这样的改变，是为了突显逻辑学的语言学性质，从而削弱传统逻辑所包含的过多的心理学成分。另一方面，逻辑学也不是语言学，而是介于心理学和语言学之间的一门学科。相应地，“词项”介于“概念”和“语词”(word)之间，“命题”介于“判断”和“语句”(sentence)之间，“推论”介于“推理”和“句群”(sentence group)之间。<sup>①</sup>

我们首先讨论词项。

词项就是具有意义的语词。请比较两组语词。一组是：“电车”、“飞”、“红”；另一组是：“啊”、“吗”、“的”。前一组的三个语词都是有意义的，因而它们都是词项。后一组的三个语词虽然具有某种语言的功能，但它们本身都不具有意义，因而它们都不是词项。

词项的意义可被区分为两个不同的方面，即外延和内涵。一个词项的外延就是该词项所指称的一类对象；一个词项的内涵就是该词项所指谓的一种属性，并且这种属性能够把一类对象与他类对象区别开来。例如，“电车”的外延就是各个具体的电车。“电车”的内涵是“利用电力行驶的车辆”。再如，“飞”的外延就是各种具体的飞行，“飞”的内涵是“一种在空中进行的来往运动”。

需要指出的是，并非任何词项都同时具有外延和内涵这两个方面。有些词项虽然指谓某种属性，但与该属性相对应的事物并不存在。例如，“光速火车”、“方的圆”、“神

<sup>①</sup> 现代逻辑关于这些术语的用法仍然存有争议，如命题、语句和陈述之间的关系就有诸多不同的说法。在此，笔者不想涉及这些争论的细节，而是选择了笔者认为最为恰当的用法。

仙”等就是如此。这种有内涵而无外延的词项叫做“空词项”。此外，具有相同外延的词项可以具有不同的内涵。例如“等边三角形”和“等角三角形”具有不同的内涵，但却具有相同的外延。再如，“《狂人日记》的作者”和“《呐喊》的作者”的外延都是鲁迅，但它们的内涵却是不同的。

从外延方面，词项可以分为单独词项（或专有名词）和普遍词项（或普通名词）。单独词项就是其外延只有一个成员的词项，如“鲁迅”、“太阳”、“中国的首都”等。普遍词项就是其外延不只有一个成员的词项，如“人”、“行星”、“中国的城市”等。从作用方面，词项可分为个体词项、属性词项（即谓词）和逻辑词项。个体词项的例子有：“这张桌子”、“那张椅子”、“天安门”等；属性词项的例子有：“红的”、“人”、“大于”等；逻辑词项的例子有“并非”、“或者”、“并且”、“如果…那么…”、“当且仅当”、“所有”、“有些”等。

对词项还有一种特殊的分类，即把词项分为集合词项和非集合词项。这种分类的特殊性在于必须把一个词项放在命题中才能进行。如果一个命题赋予一个词项的含义可以分配到其外延的成员上去，那么，这个词项是非集合词项。反之，如果一个命题赋予一个词项的含义不能分配到其外延的成员上去，那么，这个词项是集合词项。例如：

- (1) 甲班学生是勤奋的。
- (2) 甲班学生共有 50 人。

现在考虑词项“甲班学生”，它在(1)中是非集合词项，因为(1)赋予它的意义即“是勤奋的”可以分配到其成员上去，如张三这个甲班学生是勤奋的。“甲班学生”在(2)中是集合词项，因为(2)赋予它的意义即“共有 50 人”不可以分配到其成员上，我们不能说张三这个甲班学生共有 50 人。

词项的意义也叫做“概念”，词项意义的两个方面即内涵和外延也是概念的两个方面。因此，词项也就是表达概念的语词。

### 1.1.2 定义

定义的作用在于规定或说明一个词项的意义。既然词项的意义有内涵和外延两个方面，关于一个词项的定义也相应地有两种，即内涵定义和外延定义。不过，通常所用的定义大都是内涵定义。

内涵定义的作用在于规定或说明一个词项的内涵。例如，下面两个定义都是内涵定义：

- (1) 行星就是沿椭圆轨道环绕太阳运行并且本身不发光的天体。
- (2) 矩形就是直角的平行四边形。

(1) 中的“行星”和(2)中的“矩形”叫做“被定义项”，用来定义它们的词项或词组叫做“定义项”。(1)和(2)中的定义项分别表达了“行星”和“矩形”的内涵。

最常用的一种定义方法是属加种差的方法。种和属是相对于两类事物之间的关系而言的：当一类事物包含于另一类事物时，那个大的类叫“属”，那个小的类叫“种”，种差就是同一个属之内的两个种之间的差别。定义中的属和种分别指表达这两类事物的词项。在以上定义(1)中，“天体”是属，“沿椭圆轨道环绕太阳运行并且本身不发光”是行星与其他天体之间的种差。在(2)中，“平行四边形”是属，“是直角的”是矩形与其他平行四边形之间的种差。

在对一个词项下定义的时候，要求做到两点：

第一，定义项与被定义项必须是外延相等的。违反这条则会犯“定义过宽”或“定义过窄”的错误，如：

- (3) 矩形就是各边相等的四边形。
- (4) 商品就是用货币进行交换的劳动产品。

(3) 犯了“定义过宽”的错误，因为它把有些菱形包括进来了，因而它的内涵大于它的外延。(4)犯了“定义过窄”的错误，因为它把以物易物的商品排除在外，因而它的内涵小于它的外延。

第二，定义项不得直接或间接地包含被定义项。违反这一规则会犯“循环定义”的错误，循环定义是不能起到规定或说明词项意义的作用的。下面两个定义都是循环定义：

- (5) 圆就是一动点围绕圆心运动的轨迹。
  - (6) 太阳是白昼发光的天体。
- (5) 中的定义词项中直接包含了被定义词项“圆”。这种循环定义的错误也叫做“同语反复”。(6)中的定义词项中含有“白昼”这个词项，而“白昼”又是指太阳光照着我们的那段时间。可见，(6)中的定义词项间接地包含了被定义词项“太阳”。

外延定义的作用在于规定或说明一个词项的外延。下面两个定义都是外延定义：

- (7) 行星包括水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星和冥王星。
- (8) 矩形包括长方形和正方形。

(7) 中例举了“行星”的外延的所有成员。这种列举一个词项的外延的所有成员的定义叫做“枚举定义”。枚举定义不适用于其外延包括无穷或大量成员的词项。如，对于“矩形”我们就不可能给出它的枚举定义。尽管如此，我们却可以将属于“矩形”的外延的那类事物分为几个小类，然后把这几个小类列举出来。这种外延定义叫做“划分定义”。(8)就是关于“矩形”的划分定义。

还有一种特殊的外延定义即实指定义。实指定义就是通过直接显示一个词项的外延的一个或一些成员来说明该词项的意义。例如，当一个人指着一片颜色对他的孩子说：“这是红色”，他正在给出关于“红色”的实指定义。实指定义是一种非语言的定义。然而，实指定义是联系语言和现实的中间环节，因而它对于语言定义来说是必不可少

的。在人类的自然语言中，必有一些最基本的词项是通过实指定义来说明的。一般说来，像“红”、“疼”、“甜”等表达直接经验的词项的意义是通过实指定义的方式被人们了解的。这些词项为语言定义提供了必要的现实基础。如果没有实指定义，语言定义将不可避免地导致循环定义或无穷倒退。

### 1.1.3 命题

命题就是具有真假性质的语句。自然语言中的语句并非都有真假性质。例如，“你吃过饭了吗？”这句话就无所谓真或假，因为这句话只表达了一个疑问，并没有肯定什么或否定什么。如果把上面这个疑问句改为一个陈述句“你吃过饭了”，那么，这句话就有真假可言了，因为这句话表达了一个断定，即断定你吃过饭了。如果事实上你吃过饭了，这句话就是真的。反之，如果事实上你没有吃过饭，这句话就是假的。语句的真和假统称为语句的真值。人们对事物情况有所断定的思想叫做“判断”。因此，我们又可以说，命题就是表达判断的语句。

一般说来，陈述句都是命题，而大多数的疑问句、感叹句和祈使句不是命题。这是因为，只有陈述句直接表达了对事物情况的断定，而疑问句、祈使句和感叹句没有表达或者没有直接表达对事物情况的断定。不过，疑问句、感叹句和祈使句有时也可以表达一个判断。例如：“难道长城不雄伟吗？”这是一个反诘疑问句，它以更强的语气表达了陈述句“长城是雄伟的”所要表达的判断，因此，它是一个命题。再如，感叹句“长城多么雄伟啊！”也间接地表达了相同的判断，因而也可被看作一个命题。

### 1.1.4 推论

我们先看几个例子。

**【例 1】**

有的大学生是运动员；

①

所以，有的运动员是大学生。

②

**【例 2】**

如果小张考上大学，那么，小张离开他的家乡；

①

小张考上大学；

②

因此，小张离开他的家乡。

③

**【例 3】**

S 中学前年的升学率高；

①

S 中学去年的升学率高；

②

S 中学今年的升学率高；

③

可见，S 中学明年的升学率也将是高的。④

以上三个例子都被称为推论。其中每一个例子包含一组命题，并且其中一个命题是根据其他命题得出的。在例 1 中，②是根据①得出的。在例 2 中，③是根据①和②得出的。在例 3 中，④是根据①②③得出的。

我们可以对推论作如下定义：

一个推论是一个至少由两个命题组成的序列，其中一个命题是根据其他命题得出的。

我们把推论所根据的命题叫做“前提”，把由前提得出的那个命题叫“结论”。任何一个推论都包含一个结论和至少一个前提。

推论是一个命题序列，然而，并非任何命题序列都是推论。

例如：

小张上大学。

小李进工厂。

小王参加解放军。

这组命题就不是一个推论。从语言方面说，识别一组命题是不是推论的方法之一，就是看在这组命题中是否有“所以”、“因此”、“可见”等这类语词出现。如果在一组命题中有这类语词出现，那么这组命题就是一个推论。如，在例 1 中出现了“所以”，“所以”之前的命题是前提，“所以”之后的命题是结论。在例 2 中出现了“因此”，“因此”之前的是前提，“因此”之后的是结论。在例 3 中出现了“可见”，“可见”之前的是前提，“可见”之后的是结论。像“所以”、“因此”、“可见”等这类能够显示推论的语词叫做“推论指示词”。常用的推论指示词还有“因为”、“既然”、“故”、“由此得出结论”等等。由于各个推论指示词的语言性质有所不同，推论的结论并非总是出现在前提之后。下面两个例子将能说明这一点。

#### 【例 4】

T 大学招收文科学生。因为 T 大学是综合性大学，而所有综合性大学都招收文科学生。

#### 【例 5】

凡已去世的人都不能复活。孔子不能复活。既然孔子已经去世。

例 4 中出现了推论指示词“因为”，故例 4 是一个推论。“因为”前边的一个命题是结论，“因为”后边的两个命题是前提。例 5 中出现了“既然”，表明例 5 是一个推论。例 5 中间的一个命题是结论，而前后两个命题是前提。

由于自然语言的灵活性，推论的前提和结论不仅可以变换位置，而且可以有所省略，省略了结论或一部分前提的推论叫做“省略推论”。

**【例 6】**

凡已去世的人不能复活，所以，孔子不能复活。

**【例 7】**

所有综合性大学都招收文科学生，而 T 大学是综合性大学。

不难看出，例 6 省略了一个前提即“孔子已经去世”。例 6 的完整形式正是例 5。例 7 省略了结论“T 大学招收文科学生”，例 7 的完整形式是例 4。推论的前提或结论之所以有时被省略，是因为在一定的语言环境中，有些前提或结论是显而易见的，省略了它们不会引起人们的误解，反而会使推论更加简洁、明晰。此外，我们注意到，既然结论或前提可以省略，推论指示词当然也可以省略。如例 7 中就没有推论指示词。由此可见，辨认一组命题是否是一个推论不能仅仅根据其中是否有推论指示词出现。如果在一组命题中有推论指示词出现，一般可以肯定这组命题构成一个推论。但是，如果一组命题中没有推论指示词出现，并不能由此否定这组命题是一个推论，而需要根据具体的语言环境和上下文关系加以确定，即确定这组命题之间是否具有某种推论关系，从而确定这组命题是否是一个推论。

### 1.1.5 演绎推论与归纳推论

推论由前提和结论组成，而结论是从前提“推出”的。现在，我们将区别“推出”的两种含义，从而区别两种不同性质的推论，即演绎推论和归纳推论。

在第一种意义上，当我们说，一个结论是从一些前提推出的，就是说，当所有这些前提真时，这个结论必然是真的。换句话说，当所有这些前提真时，这个结论不可能是假的。在前提和结论之间具有这种推出关系的推论就是演绎推论。如前面的例 1、例 2、例 4 和例 5，它们的前提和结论都具有这种推出关系，因此，它们都属演绎推论。

在第二种意义上，我们说，一个结论是从一些前提推出的，就是说，当所有这些前提真时，这个结论很可能是真的。换句话说，当所有这些前提真时，这个结论不太可能是假的。在前提和结论之间具有这种推出关系的推论就是归纳推论。如前一节中的例 3 就是一个归纳推论。如果将例 3 和例 4 作一个比较，那么我们不难发现这两个推论之间的区别。

例 3 的前提是“S 中学前年的升学率高”、“S 中学去年的升学率高”、“S 中学今年的升学率高”。当我们知道这三个前提都为真时，我们自然会估计到例 3 的结论即“S 中学明年的升学率也高”。但是，我们不能由此肯定这个结论是真的，因为我们不能排除 S 中学的升学率明年降低的可能性。

例 4 的前提是“所有综合性大学都招收文科学生”、“T 大学是综合性大学”。当我们知道这两个前提真时，我们能够由此肯定，“T 大学招收文科学生”这个结论是真的。

总之，演绎推论与归纳推论的区别在于：演绎推论的结论是从前提中必然地推出的，而归纳推论的结论并非从前提中必然地推出的，而只是或然地推出的。需要指出的是，尽管归纳推论不具有必然性，但它在科学推论中的作用并不亚于演绎推论。事实上，演绎推论和归纳推论一起构成科学推论的基础。

本书只讨论演绎逻辑。演绎逻辑是以演绎推论为研究对象的。关于归纳推论和归纳逻辑我们将另作专门讨论。

### 习题 1.1

#### 一、在下列各段中，哪些语词或语句是有横线的词项的外延或内涵？

1. 政治权利是宪法和法律规定公民参加国家政治生活的权利。《中华人民共和国宪法》规定，人民享有选举权、被选举权和言论、通信、出版、集会、结社、游行、示威的自由等。

2. 宇宙速度是物体摆脱地球或太阳引力的束缚作用，从而飞向星际空间必须具有的速度。（1）作为人造地球卫星环绕地球运行必须具有的速度是7.9公里/秒，称为“第一宇宙速度”；（2）作为人造行星环绕太阳运行必须具有的速度是11.2公里/秒，称为“第二宇宙速度”；（3）脱离太阳系飞向星际空间必须具有的速度是16.7公里/秒，称为“第三宇宙速度”。

3. 大气中的各种物理现象叫做“天气现象”。例如，云、雾、降水、雷暴等，其综合变化常能表现天气变化的特征。

4. 宗教就是对神灵、偶像等“超人间力量”的崇拜，具有一定的组织和仪式。在人类历史上曾经出现过多种类型的宗教。目前世界上最流行的宗教有基督教、佛教和伊斯兰教。有些国家和民族还有另外的宗教，如中国的道教、日本的神道教、印度的印度教、犹太人的犹太教等。

#### 二、下列词项是单独词项还是普遍词项，是个体词项还是属性词项？

1. 收音机
2. 西安
3. 勇敢的
4. 秦始皇
5. 大学
6. 沙漠
7. 游泳
8. 中国最大的城市

**三、指出下列定义是内涵定义或是外延定义。**

1. 海啸是由于地震或风暴而造成的海面巨大涨落现象。
2. 银河系是太阳所在的恒星集团，它所包含的各种类型的恒星，总数在 1000 亿颗以上。
3. 我国的直辖市是北京、上海、天津和重庆。
4. 海底山脉是深海底部的山脉。一般处于海面以下，有的峰顶露出海面，成为岛屿。
5. 文学就是应用语言作为表现工具的艺术，如诗歌、小说、戏剧与散文等。

**四、请指出下列语句中哪些是命题。**

1. 中国是世界上人口最多的国家。
2. 对不起！
3. 火星上有生命吗？
4. 他是一个好人。
5. 行人请靠右边。
6. 武汉在广州和北京之间。
7. 谁说中国不能发射人造卫星？
8. 祝你万事如意！
9. 小张是北京人或是天津人。
10. 只有锻炼身体，才能身体健康。
11. 虽然老李生病，但是他坚持工作。
12. 长江是多么浩瀚啊！
13. 住口，先生！
14. 不入虎穴，焉得虎子？
15. 我的天哪！

**五、辨认以下推论的前提和结论。**

1. 我们的朋友遍天下；因此，在西班牙有我们的朋友。
2. 如果他去，那么我就不去；因为只有一张票。
3. 既然张三比李四大，那么张三比王五大；因为李四比王五大。
4. 明天下雨或者下冰雹；明天不可能下冰雹；所以，明天下雨。
5. 所有天主教徒都信上帝；王明不是天主教徒；既然王明不信上帝。
6. 除非有一个好前锋，甲队才能获胜；甲队不能获胜；因为甲队没有好前锋。
7. 恩格斯在《论权威》一书中论证道：“或者是反权威主义者自己不知所云；如果是这样，那他们只是在散布糊涂观念。或者他们知道的；如果是这样，那他们就是背叛无产阶级运动。在这两种情况下，他们都只是为反动派效劳。”

**六、将以下省略推论补充完整。**

1. 每一个艺术家或多或少地懂得美学；因此，每一个画家或多或少地懂得美学。
2. 我们的事业是正义的；而正义的事业必定胜利。
3. 如果我刻苦学习，那么我能取得好成绩；如果我不刻苦学习，那么我轻松自在；总之，我或者取得好成绩，或者轻松自在。
4. 当今的世界是避免不了战争的；因为只要帝国主义存在，战争就不可避免。
5. 如果上帝存在，那么世界上没有邪恶；如果世界上没有邪恶，那么世界上就没有军队；因此，上帝不存在。
6. 上帝是存在的；因为《圣经》中是这样写的。

**七、指出下列推论中哪些是演绎推论，哪些是归纳推论。**

1. 保卫祖国，人人有责；所以，我有责任保卫祖国。
2. 许多初学者对逻辑学感到困难，因而小刚对逻辑学感到困难，既然小刚是初学者。
3. 所有的马是动物，故所有的马头是动物头。
4. 我不会中奖，因为卖出去的彩票太多了。
5. 张红历次考试优秀；所以，张红毕业考试将是优秀的。
6. 凡鱼都用鳃呼吸；鲸不是鱼；既然鲸不是用鳃呼吸的。
7. 如果马会飞，那么马有翅膀；然而马没有翅膀；所以马不会飞。
8. 在孔子以前中国可能没有私人著作；可想，《老子》一书出于孔子之后。
9. 小宋是篮球队员或是足球队员；既然他不是篮球队员；所以，他是足球队员。
10. 陈同志在军队工作；陈同志是一位医生；可见，陈同志是一位军医。
11. 4 是偶数，4 能成为两个素数之和；6 是偶数，6 能成为两个素数之和；8 是偶数，8 能成为两个素数之和；10 是偶数，10 能成为两个素数之和；……所以，任何偶数都能成为两个素数之和（除了能被 1 和自身整除外，不能被其他任何自然数整除的自然数是素数。如 2, 3, 5, 7, …）。
12. 如果气温降到 0℃ 以下，那么湖面结冰；如果湖面结冰，那么不能划船；所以，如果气温降到 0℃ 以下，那么不能划船。
13. 海豚是水生动物；凡水生动物都不会飞；所以，海豚是不会飞的。

## 1.2 推论的有效性和可靠性

### 1.2.1 推论形式、变项和常项

任何具体推论都有内容和形式两个方面。推论的内容就是推论所涉及的具体对象。

例如，数学中的推论就涉及数量和图形这些具体对象，物理学中的推论就涉及力、电、声、光等这些具体对象。虽然各个不同领域中的推论的内容是不同的，但是，各个不同领域中的推论往往具有某种共同的结构。推论所具有的共同结构就是推论的形式。我们举例加以说明。

### 【推论 1】

如果天上下雨，那么地上潮湿；  
天上下雨；  
所以，地上潮湿。

### 【推论 2】

如果物体被加热，那么物体体积膨胀；  
物体被加热；  
所以，物体体积膨胀。

推论 1 和推论 2 是两个具有不同内容的推论，但是它们有着共同的结构。首先，它们的第一个前提都具有结构“如果…那么…”。我们用“p”与“q”分别表示“如果”后面的“…”和“那么”后面的“…”。这样一来，它们的第一个前提的共同结构就成为“如果 p，那么 q”。其次，它们的第二个前提都是“p”。最后，它们的结论都是“q”。从整体上看，推论 1 和推论 2 的共同结构是：

如果 p，那么 q

p

所以，q

这一共同结构就是推论 1 和推论 2 的推论形式。

我们在写出上面那个推论形式的时候，用到了字母 p 和 q。p 和 q 不代表任何具体的命题，而是分别代表“如果”和“那么”后面的空位“…”。由于空位“…”是允许填入任何具体命题的，相应地，我们可以用任何一个具体命题代换 p 和 q，因此，p 和 q 都是变项。所谓变项就是没有确定含义的符号。变项的变化范围叫做“变域”。p 和 q 的变域是命题的集合，故 p 和 q 属于命题变项。除了命题变项以外，我们以后还会用到以词项的集合为变域的词项变项和以个体的集合为变域的个体变项等等。

在“如果 p 那么 q”这个表达式中，除了有 p 和 q 外，还有“如果…那么…”这个联结词。“如果…那么…”这个联结词有着确定的含义，因此，我们不能用其他语词来替换它。我们把具有确定意义的词项或符号叫做“常项”。“如果…那么…”就是一个常项，具体地说，是一个联结词常项。除了联结词常项以外，我们以后还会用到“谓词常项”、“量词常项”、“个体常项”和“命题常项”等等。

常项和变项是构成推论形式的基本要素。如推论 1 和推论 2 的推论形式就是由联结

词常项“如果…那么…”和命题变项“ $p$ ”和“ $q$ ”以及推论指示词构成的。

需要指出，本小节对变项和常项的讨论是非常初步的。现代逻辑将形式语言区分为对象语言和元语言，相应地，变项和常项也有属于对象语言或属于元语言的区别。关于变项和常项的进一步讨论将在第二章第一节，特别是在第八章第一节中给出。

## 1.2.2 推论的有效性

有效性是演绎推论的性质。我们已经讲过，当一个演绎推论的所有前提为真时，其结论必然为真；换句话说，当一个演绎推论的所有前提为真时，其结论不可能为假。如果任何一个推论具有这种性质，那么，这个推论就是有效的。请看下面一个推论。

### 【推论 3】

所有鸟是有羽毛的；  
所有麻雀是鸟；  
所以，所有麻雀是有羽毛的。

推论 3 是一个有效推论。我们这样说，并不是根据它的前提和结论都是真的这一事实，而是根据，它的前提的真实性能够保证它的结论的真实性，而这一保证取决于推论 3 的推论形式，即

### 【推论形式 1】

所有 M 是 P；  
所有 S 是 M；  
所以，所有 S 是 P。

推论形式 1 中的 S、M 和 P 都是词项变项，因而我们可以用任何词项来替换它们。我们不妨用“整数”、“正数”和“大于零的”分别替换 S、M 和 P，于是，我们就得到另一个推论，即

### 【推论 4】

所有正数是大于零的；  
所有整数是正数；  
所以，所有整数是大于零的。

虽然推论 4 的第二个前提和结论都是假的，但推论 4 仍然是一个有效推论。这是因为它所具有的推论形式 1 保证了：如果推论 4 的所有前提都是真的，那么，它的结论不可能是假的。由此可见，一个推论的有效性取决于它的推论形式，而不取决于它的具体内容。

我们把通过对一个推论形式中的变项作替换而得到的一个具体推论叫做该推论形式的一个替换例子。推论 3 和推论 4 都是推论形式 1 的替换例子。当然，推论形式 1 的替

换例子不止有这两个，而有无穷多个。现在，我们给出推论形式有效性的定义：

一个推论形式是有效的，当且仅当，该推论形式的所有替换例子并非所有前提真而结论假。

据此定义，我们一旦知道一个推论是一个有效推论形式的替换例子，我们就可断定，当该推论的所有前提为真时，它的结论不可能是假的。于是，我们可以这样定义推论的有效性：

一个推论是有效的，当且仅当，它是一个有效推论形式的替换例子。

推论 3 和推论 4 之所以是有效的，是因为它们都是有效推论形式 1 的替换例子。

我们曾讨论了推论 1 和推论 2 的推论形式，即

### 【推论形式 2】

如果  $p$ ，那么  $q$

$p$

所以， $q$

由于推论形式 2 是有效的，并且推论 1 和推论 2 都是它的替换例子，所以，推论 1 和推论 2 也都是有效的。

如何确定一个推论或一个推论形式是否有效，这是演绎逻辑的核心问题，也是本书所要讨论的主要课题。

### 1.2.3 反例

从推论形式的有效性的定义我们看到，要确定某一推论形式是有效的，这并非一件易事，因为这涉及到该推论形式的所有替换例子，而其替换例子的数目是无穷的。然而，要确定某一推论形式是无效的，则相对地容易办到。因为这只需要我们找出该推论形式的一个替换例子，该替换例子的所有前提是真的而结论是假的。

对于某一推论形式而言，这种所有前提真而结论假的替换例子叫做该推论形式的“反例”。根据推论形式的有效性定义，任何有效的推论形式都不会有反例的。因此，我们一旦找出某一推论形式的一个反例，便能证明该推论形式是无效的。这种用反例来确定某一推论形式无效的方法叫做构造反例的方法。

下面，我们用构造反例的方法来证明一些推论形式是无效的。

### 【推论形式 3】

如果  $p$ ，那么  $q$

$q$

所以， $p$

推论形式 3 与推论形式 2 虽然有些相似，但在本质上却是不同的。仅从形式上看，

推论形式 2 的第二个前提是 p，结论是 q；而推论形式 3 正好颠倒过来，它的第二个前提是 q，结论是 p。现在，我们用“汉城在日本”和“汉城在亚洲”分别替换推论形式 3 中的变项 p 和 q，便得到推论形式 3 的一个替换例子，即

**【推论 5】**

如果汉城在日本，那么汉城在亚洲；

汉城在亚洲；

所以，汉城在日本。

推论 5 的两个前提都是真的，而其结论却是假的。根据定义，推论 5 是推论形式 3 的一个反例。这便证明了推论形式 3 是无效的。

**【推论形式 4】**

所有 P 是 M；

所有 S 是 M；

所以，所有 S 是 P。

推论形式 4 与推论形式 1 在第二个前提和结论上是相同的，但在第一个前提上不同，即 P 和 M 的位置恰好颠倒了。我们用“鸟”、“动物”和“狗”分别替换推论形式 4 中的 P、M 和 S，这样得到的推论形式 4 的一个替换例子是：

**【推论 6】**

所有鸟是动物；

所有狗是动物；

所以，所有狗是鸟。

推论 6 是推论形式 4 的一个反例，因为它的两个前提都是真的，而结论是假的。这便证明了推论形式 4 是无效的。

值得指出的是，并非一个无效推论形式的所有替换例子都是前提真而结论假的。例如，推论形式 4 的另一个替换例子是：

**【推论 7】**

所有鸟是动物；

所有麻雀是动物；

所以，所有麻雀是鸟。

这个推论的前提和结论都是真的。尽管如此，它仍然是无效的，因为它的推论形式 4 是无效的。总之，一个推论的有效性取决于它的形式而不取决于它的内容。

### 1.2.4 推论的可靠性

就推论的前提和结论的真假组合而言，不外乎以下四种方式，即：

- (1) 所有前提真并且结论真；
- (2) 所有前提真并且结论假；
- (3) 至少有一前提假并且结论真；
- (4) 至少有一前提假并且结论假。

其中的(2)就是所谓的反例。有效推论形式和无效推论形式的惟一差别在于，有效推论形式没有(2)这种替换例子，而无效推论形式却有(2)这种替换例子。其他三种替换例子两者都有。对于一个有效的推论而言，当它至少有一前提假时，它有两种可能的情况即(3)和(4)，因此其结论可能真也可能假。只有当一个有效推论的所有前提都真时，其结论才一定真。因为这时它只有一种可能的情况即(1)。这表明，所有前提真对于保证有效推论的结论的真实性来说是必不可少的条件。

**【定义】**：一个推论是可靠的，当且仅当，该推论是有效的并且它的所有前提都是真的。

根据这个定义，一个可靠的推论必是一个有效的推论，但是，一个有效的推论未必是一个可靠的推论。例如，推论3和推论4都是有效的，然而只有推论3是可靠的，而推论4却不是可靠的。一个有效的推论只保证其前提和结论之间有必然性联系，即如果前提真那么结论真；而一个可靠的推论则保证其结论一定是真的。正由于此，推论的可靠性对于实际推论尤为重要。这一点在下一节关于论证的讨论中将得到进一步的说明。

## 习题 1.2

一、写出以下每一对推论所共同具有的推论形式（用字母 p、q、r、s 等作为命题变项）。

1. (1) 如果刘强进行社会调查，那么刘强暑假到农村去；刘强暑假没有到农村去；所以，刘强没有进行社会调查。  
 (2) 如果经济衰退，那么失业率增高；失业率没有增高；所以，经济没有衰退。
2. (1) 吴华在教室或者吴华在图书馆；吴华不在教室；所以，吴华在图书馆。  
 (2) 资本主义能救中国或者社会主义能救中国；并非资本主义能救中国；所以，社会主义能救中国。
3. (1) 所有快乐的人都是热爱工作的人；所有快乐的人都是心胸开阔的人；所以，有些心胸开阔的人是热爱工作的人。  
 (2) 所有马克思主义者是辩证论者；所有马克思主义者是唯物论者；所以，有些唯物论者是辩证论者。
4. (1) 如果忽视废物处理，那么污染环境；如果污染环境，那么危害人民健康；所以，如果忽视废物处理，那么危害人民健康。

(2) 如果赵青学习优秀，那么她将获得奖学金；如果赵青获得奖学金，那么减轻父母负担；所以，如果赵青学习优秀，那么减轻父母负担。

5. (1) 所有罪犯不是好公民；所有盗窃犯是罪犯；所以，所有盗窃犯不是好公民。

(2) 所有绝缘体不是金属；所有橡胶是绝缘体；所以，所有橡胶不是金属。

6. (1) 如果天晴，那么我们照相；如果天阴，那么我们下棋；天晴或者天阴；所以，我们照相或者下棋。

(2) 如果我擅长抽象思维，那么我将研究哲学；如果我擅长形象思维，那么我将研究文学；我擅长抽象思维或者擅长形象思维；所以，我将研究哲学或者研究文学。

7. (1) 中国人民是勤劳的；中国人民是勇敢的；所以，中国人民是勤劳的并且是勇敢的。

(2) 6 能被 2 整除；6 能被 3 整除；所以 6 能被 2 整除并且能被 3 整除。

8. (1) 如果人民安居乐业，那么国家繁荣昌盛；如果国家繁荣昌盛，那么人民安居乐业；所以，人民安居乐业，当且仅当，国家繁荣昌盛。

(2) 如果一个三角形是等边的，那么它是等角的；如果一个三角形是等角的，那么，它是等边的；所以，一个三角形是等边的，当且仅当，它是等角的。

9. (1) 如果法制建设好，那么冤假错案少；所以，如果并非冤假错案少，那么并非法制建设好。

(2) 如果他骄傲，那么他落后；所以，如果并非他落后，那么并非他骄傲。

## 二、回答以下问题。

1. 一个所有前提为假的推论可能是有效的吗？为什么？

2. 一个结论为假的推论可能是有效的吗？为什么？

3. 一个所有前提为真而结论为假的推论可能是有效的吗？为什么？

4. 一个前提和结论全为真的推论一定是有效的吗？为什么？

5. 一个有效的推论一定是可靠的吗？为什么？

6. 一个无效的推论一定是不可靠的吗？为什么？

7. 一个无效推论形式的替换例子全都是反例吗？为什么？请举例说明。

8. 一个有效推论形式的替换例子全都不是反例吗？为什么？

9. 对于一个推论形式，只要有一个反例就能说明它是无效的吗？为什么？

三、已知以下推论形式都是有效的，请你给出每一个推论形式的两个替换例子，其中一个是可靠的，而另一个不是可靠的。

1.  $p$  或者  $q$

并非  $p$

所以， $q$

2. 所有  $P$  是  $M$

所有 S 不是 M

所以，所有 S 不是 P

3. 如果 p, 那么 q

并非 q

所以，并非 p

4. 如果 p, 那么 q

如果 q, 那么 r

所以，如果 p, 那么 r

四、请用构造反例的方法证明下列推论形式是无效的。

1. p 或者 q

p

所以，并非 q

2. 所有 P 是 M

所有 S 是 M

所以，所有 S 是 P

3. 如果 p, 那么 q

并非 p

所以，并非 q

4. 如果 p, 那么 q

如果 q, 那么 r

所以，如果 r, 那么 p

5. 所有 M 是 P

所有 S 不是 M

所以，所有 S 不是 P

6. 如果 p, 那么 q

所以，如果 q, 那么 p

## 1.3 论 证

### 1.3.1 证明与反驳

论证是推论的实际应用。论证包括两种，即证明和反驳。

证明就是确定一个命题的真实性的推论。例如，为了确定“月球上没有生命”这个命题的真实性，可以进行如下推论：

**【例 1】**

如果月球上没有水，那么月球上没有生命； ①

月球上没有水； ②

所以，月球上没有生命。 ③

这个推论就是一个证明。一个证明包括三个因素，即论题、论据和论证方式。论题就是其真实性需要加以确认的那个命题。在例 1 中“月球上没有生命”就是论题。论题既是证明的开端，也是证明的终结。论据就是确认论题的真实性所依据的命题。例 1 中的前两个命题①和②就是论据。论证方式就是由论据到论题的推论形式。例 1 的论证方式恰好是前一节所讲的推论形式 2，即

如果  $p$ ，那么  $q$

$p$

所以， $q$

**反驳是确定对方的证明不成立的推论。**

既然证明是由论题、论据和论证方式这三个因素组成，那么，为要确定一个证明是不成立的，也可以从这三个方面着手，即反驳对方的论题、反驳对方的论据或反驳对方的论证方式。

反驳对方的论证方式就是指明对方的推论形式是不正确的。对于演绎证明来说，就是要指出该证明的推论形式是无效的。我们举例加以说明。

**【例 2】**

如果月球上没有生命，那么月球上没有水；

月球上没有水；

所以，月球上没有生命。

请注意，例 2 与例 1 的论证方式是不同的。例 2 的论证方式正是前一节讲过的推论形式 3，即：

如果  $p$ ，那么  $q$

$q$

所以， $p$

为了反驳这个证明的论证方式，你可以指出这个推论形式是无效的。如果必要，你可以构造该推论形式的一个反例——如前一节的推论 5——来证明这一点。值得强调的是，对方的论证方式被反驳，这并不意味着对方的论题同时被反驳。对方的论证方式不正确，仅仅意味着对方的论据不能支持对方的论题，但这并不表明对方的论题是假的。例 2 的论题就是真的，尽管它的论证方式是无效的。

反驳对方的论题或论据，就是要确定对方的论题或论据的虚假性。为确定一个命题的虚假性，最常用的方法是归谬法。我们举一个科学史上使用归谬法的例子。

意大利科学家伽利略在反驳亚里士多德的“物体愈重，下落速度愈快”的观点时，提出这样的论证：假设石头甲比石头乙重，根据“物体愈重，下落速度愈快”的命题，甲比乙下落的速度要快。现在问，把甲乙两块石头捆在一起（记为（甲 - 乙）），其下落速度比甲快还是比甲慢？对此可以有两个相反的答案。其一是，（甲 - 乙）比甲下落得快，因为（甲 - 乙）比甲重；另一是，（甲 - 乙）比甲下落得慢，因为（甲 - 乙）的速度应当介于甲的速度与乙的速度之间，既然乙比甲下落得慢，乙会对甲产生牵制作用。这样，由“物体愈重，下落速度愈快”这一命题推出两个相互矛盾的命题，即“（甲 - 乙）比甲下落得快”和“（甲 - 乙）比甲下落得慢”。所以，“物体愈重，下落速度愈快”这一命题是假的。

归谬法的基本思想是：以被反驳的命题作为前提，推出荒谬的结论；这荒谬的结论或者与已知为真的知识相违，或者自相矛盾。根据（即将讨论的）矛盾律，一个结论无论是与已知为真的知识相违，还是自相矛盾，该结论都是假的。我们知道，对于一个有效的推论来说，如果它的前提是真的，那么它的结论不可能是假的。既然由归谬法推出一个假结论，由此可以断定，归谬法所依据的前提即被反驳的那个命题是假的（假定其他前提都是真的，并且归谬法的推论形式是有效的）。

证明和反驳是针锋相对的两种推论，二者都是为“辩论”服务的。因此，我们可以进一步说，论证是用于辩论的推论。我们这里所说的“辩论”，不仅指那种面对面的争论，而且指没有明确对手的潜在的争论。例如，有些数学家试图证明哥德巴赫猜想，在一定意义上就是为了反驳对这个猜想所可能提出的任何否定，尽管他们面前并没有一个对哥德巴赫猜想明确地持否定态度的人。

### 1.3.2 论证的基本规则

论证的基本规则包括矛盾律、排中律、同一律和充足理由律。

我们说，论证是用于辩论的推论。而辩论的出发点是分歧。可以说，没有分歧就没有辩论。最基本的分歧是由一对相互矛盾的命题构成的。我们把一对矛盾命题记为：A 和非 A。

#### 1. 矛盾律

矛盾律可以表示为，A 和非 A 必有一假。正因为如此，矛盾律要求辩论双方对于作为分歧点的 A 和非 A 必须否定其中的一个。根据矛盾律，任何一个对 A 的直接证明，都是对非 A 的间接反驳；任何一个对非 A 的直接证明，都是对 A 的间接反驳。这是因为 A 和非 A 必有一假，既然其中一个已经被确定为真，另一个就被确定为假。如，例 1 是对命题“月球上没有生命”的直接证明，同时又是对此命题的矛盾命题“月球上有

“生命”的间接反驳。矛盾律还为归谬法的使用提供了逻辑依据。我们正是依据矛盾律，断定由归谬法推出的一对矛盾命题必有一假，进而断定那个被反驳的命题为假。

### 2. 排中律

排中律可以表示为：A 和非 A 必有一真。正因为此，排中律要求辩论双方对于作为分歧点的 A 和非 A 必须肯定其中一个。根据排中律，任何一个对 A 的直接反驳都是对非 A 的间接证明；任何一个对非 A 的直接反驳，都是对 A 的间接证明。这是因为，A 和非 A 必有一真，既然其中一个已经被确定为假，另一个就被确定为真。如，伽利略通过归谬法反驳了命题“物体愈重，其下落速度愈快”，同时间接证明了命题“并非物体愈重其下落速度愈快”。在数学中经常使用的反证法就是一种间接证明。反证法的基本思想是：为证明 A，而用归谬法反驳非 A，非 A 一旦被驳倒，A 便得到证明。

矛盾律和排中律合在一起表示：A 和非 A 必有一假并且必有一真。矛盾律和排中律要求辩论双方对于作为分歧点的 A 和非 A 必须否定其中一个并且肯定其中另一个；否则，就没有分歧或分歧不明，这样也就失去了进行辩论或论证的先决条件。

### 3. 同一律

同一律可以表示为：A 等于 A；也可以表示为：A 和 A 同真或者同假。同一律要求辩论双方在整个辩论过程中对 A 的态度要始终如一。如果一处肯定 A，那么应当处处肯定 A；如果一处否定 A，那么应当处处否定 A。根据同一律，在辩论过程中允许两个相等的命题或词项相互代替，但是绝不允许两个不相等的命题或词项相互代替。如，我们可以用“并非月球上有生命”这个命题代替例 1 中的论题“月球上没有生命”；但是，我们不能将这个论题替换为“月球上没有人”。这是因为“人”和“生命”不是相等的词项，因而“月球上没有人”和“月球上没有生命”不是相等的命题。如果有人作了这种替换，那么他就犯了“偷换概念”或“偷换论题”的错误。

### 4. 充足理由律

充足理由律可以表示为：A 真是因为 B 真，并且由 B 可以推出 A。充足理由律要求辩论双方必须为各自的论题提供充足的理由。充足理由律包括两个方面：一是论据要真；二是论证方式是有效的。这也就是要求，辩论者所提供的证明是一个可靠的推论。1.3.1 中例 2 的推论形式是无效的，因此，提出例 2 这个证明的辩论者违反了充足理由律。在论据上违反充足理由律的错误有三种，即“虚假论据”、“预期理由”和“循环论证”。

所谓虚假论据，就是以已知为假的命题作为论据。所谓预期理由就是以真假尚未确定的命题作为论据。例如，有人根据“飞碟”是一种非地球人发射的飞行器来论证“外星人”的存在。然而，“飞碟”究竟是什么至今仍是一个有待解决的谜。可见，用所谓“飞碟”来论证“外星人”的存在，就犯了预期理由的错误。设想将来某一天“飞碟”被表明不过是某种自然现象，如果到那时还有人提出上面那个证明，那么他就犯了虚假

论据的错误。因为那时“飞碟是一种非地球人发射的飞行器”已经成为一个假命题。

所谓循环论证就是论据的真实性依赖于论题的真实性。既然论题的真实性是有待确定的，因而，循环论证中的“论据”的真实性也成为有待确定的了。鲁迅曾经举过一个诡辩的例子，即：“你是卖国贼，我骂卖国贼，所以，我是爱国者。爱国者的话是最有价值的，所以我这话是不错的。我的话既然不错，你就是卖国贼无疑了！”在这个“证明”中，“你是卖国贼”既是论题又是论据，因而这是一个循环论证。像这种直接把论题作为论据的循环论证又叫做“窃取论题”。

循环论证的错误在科学史上也是不乏其例的。如，从公元前1世纪到18世纪，许多数学家试图证明欧几里德几何学的第五公设即平行公设。但是，他们却用“三角形的内角之和等于 $180^{\circ}$ ”、“四边形的四角之和等于四直角”等原理作为论据来进行证明，而这些论据都是从平行公设加上其他公设推出来的，它们的真实性都依赖于平行公设的真实性。因此，所有这些证明都犯了循环论证的错误。

总之，矛盾律、排中律和同一律为正确有效的论证提供了先决条件，充足理由律为正确有效的论证提供了基本保障。正因为这样，矛盾律、排中律、同一律和充足理由律被看作论证的基本规律或规则。

### 1.3.3 二难推论

二难推论在辩论中常常用到。辩论的一方常常提出一个断定两种可能性的前提，再由这两种可能性分别引伸出对方难以接受的结论，从而使对方处于进退两难的境地。二难推论之所以叫“二难”，就是由于这个缘故。

我国古代流传着这样一个故事：有个卖矛和盾的人声称他的矛能戳穿任何一个盾，他的盾能挡住任何一个矛。当一个顾客提议用他的矛去戳他的盾时，他立刻目瞪口呆了。这是因为他面临一个二难推论，即：

如果你的矛能戳穿你的盾，那么你的盾没有你夸得那么好； ①

如果你的矛不能戳穿你的盾，那么你的矛没有你夸得那么好； ②

你的矛能戳穿你的盾或者你的矛不能戳穿你的盾； ③

所以，你的盾没有你夸得那么好，或者你的矛没有你夸得那么好。 ④

上面这个二难推论的第三个前提即③含有“或者”这个联结词，它断定了两种可能性，即“你的矛能戳穿你的盾”和“你的矛不能戳穿你的盾”。前提①和②都含有“如果…那么…”这个联结词，它们分别从这两种可能的情况引伸出两个结论，即“你的盾没有你夸得那么好”和“你的矛没有你夸得那么好”，而这两个结论都是那个卖矛和盾的人难以接受的。因此，结论④就使那个卖矛和盾的人处于左右为难的境地。这个二难推论的形式是：

【二难推论形式1】

如果 p, 那么 q

如果 r, 那么 s

p 或者 r

所以, q 或者 s

在有些二难推论中, 从两个可能的情况引伸出来的结论是相同的。例如, 中世纪的神学家们宣称“上帝是全能的”。有一个人向神学家提出挑战, 他问道: “上帝能不能创造一块连他自己也举不起来的石头?” 神学家们立刻无言以对了。神学家们面临这样一个二难推论:

如果上帝能够创造一块连他自己也举不起来的石头, 那么上帝不是全能的(因为有一块石头他举不起来); ①

如果上帝不能创造一块连他自己也举不起来的石头, 那么上帝也不是全能的(因为有一块石头他不能创造); ②

上帝能够创造这样一块石头或者上帝不能创造这样一块石头; ③

所以, 上帝不是全能的。

上面这个二难推论的形式是

#### 【二难推论形式 2】

如果 p, 那么 q

如果 r, 那么 q

p 或者 r

所以, q

出现在实际论证或辩论中的二难推论往往是不规范的, 但是, 我们可以通过分析而使之规范化。现以恩格斯在《论权威》一书中对那些反权威者所作的一段批驳为例。恩格斯谈道: “总之, 二者必居其一。或者是反权威者自己不知所云, 如果是这样, 那他只是在散布糊涂观念; 或者他们是知道的, 如果是这样, 那他们就是在背叛无产阶级运动。在这两种情况下, 他们都只是在为反动派效劳。”

不难看出, 这里应用了二难推论。将它规范地写出来是这样的:

如果反权威者自己不知所云, 那么他们是在散布糊涂观念;

如果反权威者知道自己谈了些什么, 那么他们就是背叛无产阶级运动;

反权威者自己不知所云, 或者是知道的;

所以, 反权威者散布糊涂观念或者背叛无产阶级运动。

至此, 还没有得出恩格斯原来的结论, 最好再补充一个二难推论:

如果反权威者在散布糊涂观念, 那么, 他们是为反动派效劳;

如果反权威者背叛无产阶级运动, 那么, 他们也是为反动派效劳;

反权威者散布糊涂观念或者背叛无产阶级运动；  
所以，反权威者是为反动派效劳的。

恩格斯这段话里包含了两个二难推论，其中一个具有二难推论形式 1，另一个具有二难推论形式 2。

在实际辩论或论证中所应用的推论形式是多种多样的。二难推论仅仅是其中之一。我们知道，一个正确论证的必要条件之一就是其推论形式必须是正确的。对于演绎论证来说，则要求其推论形式必须是有效的。如何判定一个推论形式是否有效，这正是演绎逻辑所研究的中心问题。至于一个推论的前提和结论是否为真，这是需要根据经验知识或由各门具体科学决定的，而不属于演绎逻辑研究的范围（正因为这样，演绎逻辑又叫做“形式逻辑”）。从第二章开始，我们将转入对演绎推论形式的讨论。在结束本章之前，我们指出几种不正当的辩论手法。

### 1.3.4 几种不正当的辩论手法

这里所提及的几种不正当的辩论手法是一些比较特殊的辩论错误，它们与辩论者的态度、动机和道德有关，所以，尤为需要禁止。

(1) 人身攻击。在反驳对方观点的时候，不去揭露对方论题或论据的虚假性，也不去指出对方论证方式上的错误，而是对对方的人格进行污辱。

例如，1860 年在英国牛津召开的一次关于达尔文进化论的辩论会上，赫胥黎维护达尔文关于人是由猿进化而来的观点。一位大主教指着赫胥黎说：按照你的说法，你是由猿猴变成的，那么请问，你的猿猴资格是从你的祖父那里继承来的，还是从你的祖母那里继承来的？这位大主教便是在施展人身攻击的伎俩，这是一种不道德的行为。

(2) 滥用权威。不适当引用权威人士的话，并作为不可置疑的论据来支持自己的观点。

例如，有些人反对爱因斯坦提出的有限而无界的宇宙模型。但是，他们不是从现代科学发展的成果中寻找依据，而是拿了马克思和恩格斯在 100 多年前的一些话作为依据，给爱因斯坦戴上“形而上学”的帽子。这就是滥用权威。当然，说这些人是滥用权威并不是说他们不应该反驳爱因斯坦的宇宙模型，而是说他们这种论证方式是错误的。

(3) 强词夺理。明知无理，硬拿一些与论题无关的事实作为论据，来为自己的观点进行强辩。

传说我国古代有一位大学者，他的儿子不学无术，但他的孙子却考中进士。这位学者责备他的儿子不成器，他的儿子却回答说：“你的父亲不如我的父亲，你的儿子不如我的儿子，我怎么不成器？”这位学者的儿子用他的父亲和他的儿子成器来证明自己成器，这就是强词夺理。

(4) 复杂问语。复杂问语是这样一种问语，对它无论是肯定的回答，还是否定的

回答，都意味着承认问话中预设的某个命题。例如，“你现在还信教吗？”就是一个复杂问语。对它的肯定回答是“我现在还信教”，对它的否定回答是“我现在不信教了”。无论采取哪一种回答，都意味着你承认自己原先是信教的。“你原先是信教的”就是这个复杂词语所预设的命题。提出复杂问语的人是为了引诱对方无形中接受自己的预设，然后再反驳别人。这样来进行辩论，显然是没有诚意的。

不正当的辩论手法还有不少，在此就不一一列举了。

### 习题 1.3

一、为什么说对 A 的直接证明是对非 A 的间接反驳，对 A 的直接反驳是对非 A 的间接证明？

二、简述归谬法的基本过程及逻辑依据。

三、驳倒了对方的论据或证明方式，是否一定驳倒了对方的论题？为什么？

四、根据论证的基本规则，指出下列各个议论中所包含的逻辑错误。

1. 对于同一个问题，有些人这样说，另一些人那样说，这两种人之间是没有共同语言的。由此可见，语言是有阶级性的，没有什么全民族通用的共同语言。

2. 甲：“照你说来，就没有什么信念之类的东西了？”

乙：“没有，根本没有！”

甲：“你就是这样确信吗？”

乙：“对！”

3. 甲：“你完成了任务没有？”

乙：“谁说我没有完成任务？”

甲：“那么，你是说你已经完成任务了？”

乙：“我没这么说。”

4. 整体大于它的部分，这是因为，部分小于它的整体。

5. 人定胜天；我是人；所以，我定胜天。

6. 如果地球旋转，那么我们将被甩出地球；既然我们没有被甩出地球；所以，地球没有旋转。

五、分析以下辩论双方的论题、论据和论证方式，并指出他们各自的论证错误。

据说古希腊有一个名叫欧提勒士的人向当时著名的智者普罗达哥拉斯学法律。两人订有合同，在毕业时欧提勒士须付普罗达哥拉斯一半学费，另一半学费等欧提勒士第一次打赢官司时付清。但是，欧提勒士毕业后并不执行律师职务。普罗达哥拉斯等得不耐烦，就向法庭提出诉讼，并且论证如下：

如果欧提勒士这次官司打赢，那么按照合同，他应给我另一半学费。如果他这次官

司打输，那么按照法庭判决，他也应该给我另一半学费。他这次官司或者打赢或者打输。所以，他都应给我另一半学费。

欧提勒士针对普罗达哥拉斯的论证提出一个相反的论证：

如果我这次官司打赢，那么按法庭判决，我不应给普罗达哥拉斯另一半学费。如果我这次官司打输，那么按照合同，我也不应给他另一半学费。我这次官司或者打赢或者打输。所以，我都不应给他另一半学费。

### 六、分析以下论证的论题、论据和论证方式。

[已知] 在  $\triangle ABC$  中（见右图）

$$\angle C = 90^\circ$$

$$DA = DB$$

[求证]  $DC > DA$

[证明]

①假设  $DC > DA$

② $DC > DB$  (由①与已知条件)

③ $\angle A > \angle ACD$  (三角形的大边对大角)

$\angle B > \angle BCD$  (同理)

④ $\angle A + \angle B > \angle ACD + \angle BCD$  (③, 同号不等式两端相加, 不等式仍成立)

即  $\angle A + \angle B > \angle C$

⑤ $\angle A + \angle B > 90^\circ$  (已知条件)

⑥ $\angle A + \angle B \neq 90^\circ$  (⑤, “ $>$ ” 和 “ $=$ ” 的定义)

⑦ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (三角形内角之和等于  $180^\circ$ )

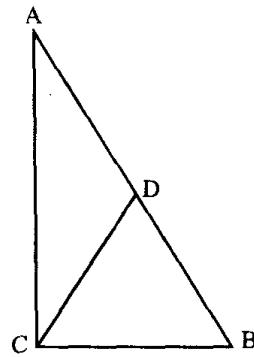
⑧ $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$  (⑦的两端同时减去  $\angle C$ )

⑨ $\angle A + \angle B = 180^\circ - 90^\circ$  (已知条件)

即  $\angle A + \angle B = 90^\circ$

⑩ ⑥与⑨矛盾

⑪ $\therefore DC > DA$



# 第二章

## 命题逻辑：符号化和真值表

### 2.1 一些基本概念

#### 2.1.1 真值函项复合命题和真值函项联结词

命题逻辑是演绎逻辑的一个分支。在命题逻辑中所研究的推论只涉及简单命题或复合命题之间的逻辑关系，而不涉及构成命题的词项之间的逻辑关系。也就是说，**命题逻辑是以命题为最小单位的。**

复合命题是相对于简单命题而言的。简单命题就是不包含其他命题的命题。复合命题就是包含其他命题的命题。例如，“罗素是一位哲学家”，这个命题不包含其他命题，因此它是一个简单命题。而“罗素是一个哲学家并且罗素是一个数学家”，就是一个复合命题。因为它是以“罗素是一个哲学家”和“罗素是一个数学家”这两个简单命题为其组成部分的。一个复合命题所包含的其他命题叫做“复合命题的支命题”。上面那两个简单命题就是那个复合命题的支命题。在一个复合命题中，把各个支命题联结起来的那个词项叫做“联结词”。上面那个复合命题中的“并且”就是一个联结词。常用的联结词还有“或者”、“如果…那么…”、“当且仅当”等。

任何复合命题都是由简单命题通过联结词组合而成的。在日常语言中，联结词的用法是多种多样的。但是，在命题逻辑中，我们感兴趣的仅仅是联结词的真值函项的用法。被真值函项地使用的联结词，使得由它构成的复合命题的真值是它的支命题的真值的一个函数。这也就是说，一个联结词被真值函项地使用，当且仅当，由该联结词构成的复合命题的真值完全地决定于它的支命题的真值。

日常语言中的联结词，有些常常被真值函项地使用，有些则很少甚至从未被真值函项地使用。请比较以下两个复合命题：

- (1) 明天刮风并且明天下雨。
- (2) 明天刮风在明天下雨之前。

(1) 是由“明天刮风”和“明天下雨”通过联结词“并且”而构成的一个复合命题。如果这两个支命题都是真的，(1)就是真的。如果这两个支命题中有一个是假的或者两个都是假的，(1)就是假的。这表明，(1)的真值完全决定于它的两个支命题的真

值。因而，(1)中的联结词“并且”是被真值函项地使用的。

(2)的两个支命题也是“明天刮风”和“明天下雨”，它的联结词是“…在…之前”。(2)的真值不完全决定于它的支命题的真值。试想，明天刮风和明天下雨都是事实，也就是说，(2)的两个支命题都是真的，我们却不能由此确定(2)是真的还是假的。为要确定(2)的真值，还须考虑更多的事实，即明天刮风和明天下雨在时间上的先后顺序，而这与它的两个支命题的真值无关。这表明，(2)的真值不是其支命题的真值的函项，因而，(2)中的联结词“…在…之前”不是被真值函项地使用的。

再如，“张三相信明天下雨”的联结词是“…相信…”，这句话的真或假并不由其支命题“明天下雨”的真或假来决定。即使“明天下雨”是真的，也不能表明这句话是真的或是假的；“明天下雨”是假的也同样如此。可见，“…相信…”不是一个真值函项联结词。

被真值函项地使用的联结词叫做“真值函项联结词”。由真值函项联结词构成的复合命题叫做“真值函项复合命题”。(1)中的“并且”是一个真值函项联结词，因而(1)是一个真值函项复合命题。(2)中的“…在…之前”不是一个真值函项联结词，因而(2)不是一个真值函项复合命题。以后行文中在不引起混淆的情况下，我们常常把真值函项联结词简称为“联结词”，把真值函项复合命题简称为“复合命题”。

## 2.1.2 合取词和合取命题

在前一小节，我们已经提到由联结词“并且”构成的复合命题。如“罗素是一个哲学家并且罗素是一个数学家”。在这个命题中，联结词“并且”是被真值函项地使用的。由于这个复合命题的两个支命题，即“罗素是一个哲学家”和“罗素是一个数学家”都是真的，这就决定了这个复合命题是真的。

现在，我们用符号“ $\wedge$ ”作为一个真值函项联结词，它的作用相当于被真值函项地使用的联结词“并且”。再用命题变项“P”和“Q”分别表示任何两个命题（注意，这里用黑体大写字母而不是用小写字母，其理由将在2.2.2中给出）。于是，该复合命题可以符号化为：

$$P \wedge Q$$

“ $\wedge$ ”叫做“合取词”，“ $P \wedge Q$ ”叫做“合取式”，由“ $P \wedge Q$ ”表达的命题叫做“合取命题”（在传统逻辑中又叫做“联言命题”）。合取命题的支命题叫做“合取支”。一个合取命题为真，当且仅当，它的合取支都为真。合取命题的真值与它的合取支的真值之间的这种函项关系可以由表1完全地反映出来：

表 1

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

这个表叫做“ $\wedge$ ”的“特征真值表”，它精确地定义了“ $\wedge$ ”的用法。这里“T”和“F”分别表示“真”和“假”。表的左边列出了P和Q的全部可能的真值组合，即TT、TF、FT和FF。表的右边列出了 $P \wedge Q$ 在其合取支的每一真值情况下的相应的真值。我们从此表中看到，仅当P和Q均为真时， $P \wedge Q$ 为真；在其他三种情况下， $P \wedge Q$ 为假。

在日常语言中，“并且”常常并非完全地被真值函项地使用，请比较下面两个命题：

她结婚并且她已怀孕。

她已怀孕并且她结婚。

这两个命题的惟一区别是，两个支命题的位置正好颠倒。如果这里的“并且”完全地被真值函项地使用，那么，这两个命题是完全相等的。因为根据表1，交换合取支的位置，并不影响合取命题的真值。然而，上面这两个命题在通常情况下并不完全相等。不难想象，一个婚后怀孕的女人更情愿用前一个命题描述自己。这是因为，这里的“并且”多少含有“然后”的意思，而“然后”正如“…在…之前”不是一个真值函项联结词。

合取词“ $\wedge$ ”只表达被真值函项地使用的“并且”。如果我们将上面那两个命题分别符号化为 $P \wedge Q$ 和 $Q \wedge P$ ，那么，我们就舍弃了其中“并且”的一些用法，而仅仅保留了它的真值函项的用法。在命题逻辑中，我们把“并且”也作为合取词，即作为“ $\wedge$ ”的自然语言的对应词。为了把作为合取词的“并且”与日常语言中的“并且”区分开来，在必要的情况下，我们用“并且”标明一个合取词。

### 2.1.3 析取词和析取命题

日常语言中的“或者”也是一个联结词，由它构成的复合命题的一个例子是：“深圳位于广东省或者深圳在广州与香港之间。”这个复合命题的支命题是两个简单命题，即“深圳位于广东省”和“深圳在广州与香港之间”。它的真值完全决定于它的这两个支命题的真值。只要它的两个支命题中至少有一个是真的，它就是真的，如果它的两个

支命题都是假的，那么它就是假的。既然“深圳在广州与香港之间”是真的，我们可以肯定，这个复合命题是真的，而无论“深圳位于广东省”是真的还是假的。由此可见，这里的联结词“或者”是被真值函项地使用的。

我们用符号“ $\vee$ ”作为一个真值函项联结词，它的作用相当于被真值函项地使用的“或者”。再用命题变项“ $P$ ”和“ $Q$ ”分别表示任何两个命题。上面的命题可以符号化为：

$$P \vee Q$$

“ $\vee$ ”叫做“析取词”，“ $P \vee Q$ ”叫做“析取式”，由“ $P \vee Q$ ”表达的命题叫做“析取命题”（在传统逻辑中又叫做“选言命题”）。析取命题的支命题叫做“析取支”。一个析取命题为假，当且仅当，它的析取支都为假。析取命题的真值与它的析取支的真值之间的这种函项关系可以由表2来刻画：

表2

$P$	$Q$	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

这个表是“ $\vee$ ”的特征真值表，它精确地定义了“ $\vee$ ”的用法。由此表可以看到，仅当 $P$ 和 $Q$ 均为假时， $P \vee Q$ 为假，在其他三种情况下， $P \vee Q$ 为真。

与“并且”一样，出现在日常语言中的“或者”常常有多种用法，而“ $\vee$ ”仅仅表达被真值函项地使用的“或者”。我们把被真值函项地使用的“或者”也叫做析取词，必要时用“或者”加以标明。

#### 2.1.4 否定词和否定命题

在一个命题之前加上“并非”，就构成了那个命题的否定命题。如，在“所有人都是哲学家”之前加上“并非”，就构成了这个命题的否定命题，即“并非所有人都是哲学家”。当前一个命题为真时，它的否定命题是假的；当前一个命题为假时，它的否定命题就是真的。这表明，这个由“并非”构成的复合命题的真值完全决定于它的支命题的真值，因而“并非”在这里是被真值函项地使用的。习惯上把“并非”也作为联结词，尽管它并未联结两个支命题。与之不同，“并且”，“或者”等都是联结两个支命题的联结词，因而它们是二项联结词，而“并非”则是一项联结词。

我们引入一个真值函项联结词“ $\neg$ ”，即“否定词”，用以表达被真值函项地使用

的“并非”。“ $\neg P$ ”叫做“否定式”，由“ $\neg P$ ”表达的命题叫“否定命题”。“ $\neg$ ”的特征真值表是：

表 3

P	$\neg P$
T	F
F	T

请注意，由于“ $\neg$ ”是一项联结词，所以“ $\neg P$ ”的支命题的全部真值情况只有两种，即真或假。相应地，“ $\neg$ ”的特征真值表只有两行。根据此表，既然“所有人都是哲学家”是假的，那么，它的否定命题“并非所有人都是哲学家”就是真的。既然“有人是哲学家”是真的，那么“并非有人是哲学家”就是假的。

### 2.1.5 蕴涵词和蕴涵命题

在日常语言中，“如果…那么…”是一个使用最频繁，用法最灵活的联结词。下面是一些由“如果…那么…”构成的复合命题：

- (1) 如果夏季到来，那么天气变热。
- (2) 如果日本侵略中国得逞，那么中国沦为殖民地。

现在我们引入符号“ $\rightarrow$ ”作为一个真值函项联结词，它的作用相当于被真值函项地使用的“如果…那么…”，亦即“如果…那么…”，于是，具有上面命题形式的任何命题可以符号化为：

$$P \rightarrow Q$$

“ $\rightarrow$ ”叫做“蕴涵词”，“ $P \rightarrow Q$ ”叫做“蕴涵式”，由“ $P \rightarrow Q$ ”表达的命题叫做“蕴涵命题”或“条件命题”（在传统逻辑中又叫做“假言命题”）。在“ $P \rightarrow Q$ ”中，“P”所表达的支命题叫做“前件”，“Q”所表达的支命题叫做“后件”。“ $\rightarrow$ ”的特征真值表是：

表 4

P Q	$P \rightarrow Q$
T T	T
T F	F
F T	T
F F	T

由此表我们看到，仅当  $P$  真而  $Q$  假时， $P \rightarrow Q$  是假的，在其他三种情况下， $P \rightarrow Q$  都是真的。这也就是说， $P \rightarrow Q$  是真的，当且仅当，并非  $P$  真而  $Q$  假。

然而，“如果…那么…”在日常语言中往往不被真值函项地使用。就以命题(1)和(2)来说，(1)可以被理解为“夏季到来必然导致天气变热”，(2)可以被理解为“日本侵略中国得逞必然导致中国沦为殖民地”。在(1)和(2)的这种用法下，“如果  $P$  那么  $Q$ ”的真值不仅仅决定于  $P$  和  $Q$  的真值，还决定于  $P$  和  $Q$  之间是否具有某种必然联系。再如，

(3) 如果  $2+2=4$ ，那么雪是白的。

这个命题通常被认为是无意义的。这是因为它的前件和后件之间几乎没有丝毫联系。但是，当我们把(3)中的“如果…那么…”看作一个蕴涵词，从而把(3)看作一个蕴涵命题，即：

(3')  $(2+2=4) \rightarrow (\text{雪是白的})$

根据表 4，既然它的两个支命题“ $2+2=4$ ”和“雪是白的”都是真的，我们可以确定(3')是真的。

在逻辑学中，把用真值函项联结词“ $\rightarrow$ ”表达的蕴涵关系叫做“实质蕴涵”，以区别于其他蕴涵关系（如第七章将要讨论的“严格蕴涵”）。实质蕴涵比起“如果…那么…”通常所表达的蕴涵关系要弱。然而，在数学中和日常语言中，根据“如果…那么…”的逻辑性质而进行的一些推论，如“肯定前件式”或“否定后件式”等，并没有超出“ $\rightarrow$ ”的逻辑功能。因此，出现于这些推论中的“如果…那么…”也可由“ $\rightarrow$ ”来表达。为了避免不必要的复杂性，我们假定以后行文中出现的“如果…那么…”都是被真值函项地使用的，因而都可用“ $\rightarrow$ ”加以表达。

另外值得指出的是，具有“ $P \rightarrow Q$ ”形式的命题和具有“ $\neg P \vee Q$ ”形式的命题是完全相等的。为证明这一点，我们只需比较这两个公式的真值表。根据“ $\vee$ ”和“ $\neg$ ”的特征真值表，我们可以构造出“ $\neg P \vee Q$ ”的真值表，即：

$P$ $Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T   T	F	T
T   F	F	F
F   T	T	T
F   F	T	T

这个表中“ $\vee$ ”下边的一列真值与表 4 中“ $\rightarrow$ ”下边的一列真值完全相同。这说明“ $\neg P \vee Q$ ”和“ $P \rightarrow Q$ ”表达了完全相同的真值函项。据此，我们可以把“如果夏

季到来，那么天气变热”和“并非夏季到来，或者，天气变热”看作完全相等的命题。

### 2.1.6 等值词和等值命题

在日常语言中特别是在数学中常常用到联结词“当且仅当”。如：

(1) 一个数是偶数，当且仅当，它能被2整除。

现在我们再引入一个真值函项联结词“ $\leftrightarrow$ ”，其作用相当于被真值函项地使用的“…当且仅当…”，亦即“…当且仅当…”。于是具有上面命题形式的任何命题可以符号化为：

$$P \leftrightarrow Q$$

“ $\leftrightarrow$ ”叫做“等值词”，“ $P \leftrightarrow Q$ ”叫做“等值式”，由“ $P \leftrightarrow Q$ ”表达的命题叫做“等值命题”或“双条件命题”。在“ $P \leftrightarrow Q$ ”中，“P”和“Q”所表达的命题分别叫做等值命题的“左支”和“右支”。“ $\leftrightarrow$ ”的特征真值表是：

表 5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

由此表我们看到，仅当 P 和 Q 都为真或都为假时， $P \leftrightarrow Q$  为真，在其他两种情况下， $P \leftrightarrow Q$  为假。换句话说， $P \leftrightarrow Q$  为真，当且仅当，P 和 Q 的真值相同。

如同其他联结词，“当且仅当”在日常语言中也往往不被真值函项地使用。如：

(2) 孔子死了，当且仅当，北京是中国首都。

在通常情况下，(2)这个命题被看作是假的，甚至是无意义的，因为它的左支和右支之间没有任何意义上的联系。但是，当我们把(2)中的“当且仅当”看作一个等值词，从而把(2)看作一个等值命题，即：

(2') (孔子死了)  $\leftrightarrow$  (北京是中国首都)

根据表 5，我们可以确定(2')是真的，既然它的左支“孔子死了”和右支“北京是中国首都”都是真的。由此可见(2)和(2')是有所不同的。

在逻辑学中，把由“ $\leftrightarrow$ ”表达的等值关系叫做“实质等值”，用以区别“当且仅当”在通常情况下所表达的那种更强的等值关系（如第七章将要讨论的“严格等值”）。为了便于讨论，我们假定以后行文中出现的“当且仅当”都是被真值函项地使用的，因而都可以表达为“ $\leftrightarrow$ ”。

需要指出，根据“ $\rightarrow$ ”和“ $\wedge$ ”的特征真值表，我们可以构造“ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ”的真值表，即：

表 6

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

将此表与表 5 作比较，我们发现，此表中“ $\wedge$ ”下边的一列真值与表 5 中“ $\leftrightarrow$ ”下边的一列真值完全相同。这说明，“ $P \leftrightarrow Q$ ”与“ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ”表达了相同的真值函数，因而，这两个公式是完全相等的。可以说，“P 当且仅当 Q”是“如果 P 那么 Q，并且，如果 Q 那么 P”的缩写。

以上讨论了五个真值函数联结词和相应的五个真值函数复合命题，即合取、析取、否定、蕴涵和等值。我们即将看到，命题逻辑中所有的复合命题都是由这五种基本复合命题组合而成的。这五种基本复合命题的逻辑特征由相应的五个特征真值表给出。因此，牢牢记住这五个特征真值表对于我们以后的学习是非常必要的。

## 习题 2.1

一、为什么说，日常语言中的联结词并不都是真值函数联结词？

二、假定 P 是真的，Q 是假的，R 是真的，根据有关的真值函数联结词的特征真值表，确定下列公式的真值。

1.  $\neg \neg P$
2.  $\neg (P \vee \neg Q)$
3.  $\neg (\neg Q \vee (P \wedge \neg R))$
4.  $(R \rightarrow \neg P) \vee \neg Q$
5.  $(\neg Q \rightarrow R) \rightarrow (P \wedge \neg R)$
6.  $(P \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee \neg \neg P)$
7.  $(P \rightarrow R) \rightarrow (R \rightarrow \neg P)$
8.  $\neg ((Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \leftrightarrow P))$
9.  $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg (\neg Q \wedge \neg P)$
10.  $(\neg Q \leftrightarrow P) \leftrightarrow \neg (R \leftrightarrow \neg P)$

11.  $P \rightarrow (Q \vee (\neg R \rightarrow Q))$
12.  $((\neg R \vee \neg Q) \rightarrow P) \rightarrow ((Q \wedge \neg P) \leftrightarrow R)$
13.  $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow \neg ((\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P))$
14.  $((P \rightarrow \neg R) \vee (\neg Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge \neg Q) \rightarrow (\neg R \vee \neg P))$

## 2.2 命题的符号化

### 2.2.1 什么是命题的符号化

用人为规定的符号来表达一个命题就是对一个命题的符号化。例如，把

(1) 如果天上下雨，那么地上潮湿。

表达为“ $T \rightarrow D$ ”， $T \rightarrow D$  就是对(1)的符号化。再如，把

(2) 明天天阴并且明天刮风。

表达为“ $Y \wedge F$ ”， $Y \wedge F$  就是对(2)的符号化。在  $T \rightarrow D$  中， $T$  代表“天上下雨”， $D$  代表“地上潮湿”， $T$  和  $D$  属于命题常项。“ $\rightarrow$ ” 代表“如果…那么…”，属于逻辑常项。同样地，在  $Y \wedge F$  中， $Y$  和  $F$  属于命题常项， $\wedge$  属于逻辑常项。现在我们规定，命题常项用从  $A$  到  $Z$  的大写字母来表示；为防止字母不够用，这些字母可以带或不带正整数下标，如， $A_2$ 、 $B_5$ 、 $Z_{100}$  等。

我们在第一章中曾谈到命题变项并用  $p$ 、 $q$ 、 $r$  和  $s$  等来表示。命题变项与命题常项的区别是：命题常项代表某个具体命题，而命题变项代表任何一个命题。不过，从这一章开始，我们不再用  $p$ 、 $q$ 、 $r$  和  $s$  等作为命题变项，而用黑体大写字母 **P**、**Q**、**R**、**S**（带或不带正整数下标）表示命题变项。这是因为，以前的讨论是初步的，只涉及两层语言即自然语言命题和符号语言命题。但从现在起，我们对符号化的讨论要更深一步，涉及三层语言，即自然语言命题、符号语言命题和表达符号语言命题的符号。相应地，我们要区分两种语言符号即对象语言符号和元语言符号。在现代逻辑中，对象语言不是自然语言而是表达自然语言的符号语言，元语言则是表达这种对象语言的语言。我们现在引入的变项 **P**、**Q**、**R**、**S** 就是元语言符号，它们表示任一对象语言命题，如  $A$ ， $A \rightarrow B$ ， $(H \vee K) \wedge \neg J$ ，等等。以后还会遇到别的元变项，如个体元变项、谓词元变项等。关于对象语言和元语言、变项和常项的问题，我们在第八章第一节将会给出进一步的讨论。

### 2.2.2 一些常见的复合命题的符号化

我们已经指出，出现在日常语言中的联结词，其用法是多种多样的，纯粹地被真值函项地使用的联结词是很少的，有些联结词甚至不能被真值函项地使用，如“…在…

之前”、“…相信…”等。对于其他联结词，我们也只有对它们作出真值函项的释义之后，才能用真值函项联结词加以表达。对一个复合命题进行符号化，就是对它的真值函项的释义进行符号化，符号化的结果所表达的是与原复合命题相对应的真值函项复合命题。下面我们讨论一些具体例子。

(1) 虽然老王有病，但是他坚持工作。

这个复合命题的联结词是“虽然…但是…”，它的支命题是“老王有病”和“老王坚持工作”。为了对它进行真值函项的释义，需要考察它的真值是如何决定于它的支命题的真值的。不难看出，仅当它的两个支命题均为真时，(1)才为真；在其他情况下，(1)为假。这表明，在真值函项的用法上，“虽然…但是…”与“并且”是完全相同的。因此，(1)可以被真值函项地释义为：

老王有病并且老王坚持工作。

我们用命题常项 B 和 G 分别表示“老王有病”和“老王坚持工作”，于是，(1)可被符号化为：

$B \wedge G$

当我们用  $B \wedge G$  表达(1)时，已经舍弃了(1)的部分意义，如(1)的转折语气所表达的对“老王坚持工作”的强调。不过，这种“损失”对于我们的逻辑分析的目标来说是无关紧要的。

日常语言中在真值函项的用法上与“并且”相当的联结词还有“然而”、“不但…而且…”、“既…又…”、“既然…那么…”等，甚至不用任何联结词。如，“国家要独立，民族要解放”真值函项地等同于“国家要独立并且民族要解放”。

(2) 要么你听错了，要么我说错了。

(2) 的联结词是“要么…要么…”。支命题是“你听错了”和“我说错了”。仅当这两个支命题均为假时，(2)为假，在其他情况下，(2)为真。这表明，在真值函项的用法上，“要么…要么…”等同于“或者”。因此，(2)可以被释义为：

你听错了或者我说错了。

我们用 T 表示“你听错了”，用 S 表示“我说错了”，于是，(2)可被符号化为：

$T \vee S$

(3) 要么东风压倒西风，要么西风压倒东风。

这个复合命题的联结词也是“要么…要么…”。但是，由于(3)的两个支命题“东风压倒西风”和“西风压倒东风”是互不相容的，因此(3)不仅断定了这两个支命题中必有一真，而且断定了这两个支命题中必有一假。这与(2)是不同的。(2)的两个支命题“你听错了”和“我说错了”并非彼此排斥，因此，(2)并没有断定这两个支命题中必有一假。由此可见，(3)和(2)中的两个“要么…要么…”并不相同，(3)中的“要么…要么…”并不真值函项地等同于“或者”。因而，不应将(3)释义为：

东风压倒西风或者西风压倒东风。

而应释义为：

(东风压倒西风或者西风压倒东风), 并且, 并非(东风压倒西风并且西风压倒东风)。

这个释义的后半部表示(3)的两个支命题彼此不相容。我们用“D”表示“东风压倒西风”, 用“E”表示“西风压倒东风”。于是, (3)可被符号化为:

$$(D \vee E) \wedge \neg(D \wedge E)$$

以上表明, 日常语言中的“要么…要么…”是有歧义的。由它构成的复合命题有时应当符号化为“ $P \vee Q$ ”。有时则应符号化为“(P  $\vee$  Q)  $\wedge$  \neg(Q  $\wedge$  P)”。这取决于它的支命题P和Q是否相容。若相容, 则取前者; 若不相容, 则取后者。在传统逻辑中, 把后者叫做“不相容的选言命题”, 我们也可称之为“不相容析取”。

日常语言中的“或者”如同“要么…要么…”也是有歧义的。我们完全可以将(2)和(3)中的“要么…要么…”都替换为“或者”, 这并不改变(2)和(3)的原意。与“或者”比较接近的联结词还有“或者…或者…”, “不是…就是…”等, 这些联结词也都有上述那种歧义性。

(4) 太阳围绕地球旋转是假的。

在这里, “…是假的”可以看作一个一項联结词, 支命题是“太阳围绕地球旋转”。若这个支命题为真, (4)为假; 若这个支命题为假, (4)为真。这表明, (4)中的“…是假的”真值函项地等同于“并非”。因此, (4)可被释义为

并非太阳围绕地球旋转。

用“F”代表“太阳围绕地球旋转”, (4)的符号化是

$$\neg F$$

请比较下面两个命题:

(5) 地球不是恒星。

(6) 所有行星不是恒星。

显然, (5)可被释义为:

并非地球是恒星。

而(6)却不应被释义为:

并非所有行星是恒星。

而应被释义为:

并非有行星是恒星。

(5)和(6)之所以有这种区别, 是因为(6)含有量词“所有”, 而(5)却不含量词。一般说来。出现在不含量词的命题中间的“不”相当于“并非”。至于含有量词的命题, 情况略为复杂, 这一问题留待后面“三段论逻辑”讨论。

(7) 只有勤奋学习，才能学习优异。

(7) 中的联结词是“只有…才…”。按照这个联结词的用法，(7)相当于：

(8) 如果不勤奋学习，那么不能学习优异。

用“J”代表“勤奋学习”，用“K”代表“学习优异”。(8)可以被符号化为：

$\neg J \rightarrow \neg K$

既然(7)和(8)是相等的，那么“ $\neg J \rightarrow \neg K$ ”也是(7)的符号化。

在普通逻辑教科书中，把具有“如果 P 那么 Q”这种形式的命题叫做“充分条件假言命题”，把“只有 P 才 Q”这种形式的命题叫做“必要条件假言命题”。为弄清这两种命题之间的关系，有必要先了解什么是充分条件和必要条件。说事态 a 是事态 b 的充分条件，就是说，当 a 存在时 b 一定存在。说事态 a 是事态 b 的必要条件，就是说，当 a 不存在时 b 一定不存在。例如，当作家就是有文化的充分条件，但不是必要条件。勤奋学习就是学习优异的必要条件，但不是充分条件。虽然充分条件和必要条件是两种不同的条件关系，但二者恰好是互逆的。这就是说，倘若 a 是 b 的充分条件，那么 b 就是 a 的必要条件；倘若 a 是 b 的必要条件，那么 b 就是 a 的充分条件。还用刚才的例子。当作家是有文化的充分条件，有文化就是当作家的必要条件；勤奋学习是学习优异的必要条件，学习优异就是勤奋学习的充分条件。我们用“P”作为表达事态 a 的命题，用“Q”作为表达事态 b 的命题，相应的情形是：“如果 P 那么 Q”为真，当且仅当，“只有 Q 才 P”为真。这就是说，“如果 P 那么 Q”和“只有 Q 才 P”是相等的两个命题。据此，(7)相当于

(9) 如果学习优异，那么勤奋学习。

相应的符号化是：

$K \rightarrow J$

这样，我们对(7)进行了两种符号化，即“ $\neg J \rightarrow \neg K$ ”和“ $K \rightarrow J$ ”。用真值表容易表明，这两个公式的真值是完全一样的（请读者自证）。

在自然语言中，与“如果…那么…”的用法比较接近的联结词有“倘若…则…”、“只要…就…”、“当…便…”等；与“只有…才…”的用法比较接近的联结词有“仅当…才…”、“除非…不…”等。有时还会遇到这种表达方式：“P 如果 Q”或“P 仅当 Q”。“P 如果 Q”相当于“如果 Q 那么 P”，因而可以符号化为“ $Q \rightarrow P$ ”。“P 仅当 Q”相当于“仅当 Q 才 P”，因而可以符号化为“ $P \rightarrow Q$ ”。如：

(10) 一个数是自然数，仅当它是整数。

用“M”和“L”分别代表“一个数是自然数”和“一个数是整数”，此命题可被符号化为：

$M \rightarrow L$

普通逻辑中所讨论的“充分并且必要条件假言命题”，正是我们所说的等值命题。

我们知道，等值式  $P \leftrightarrow Q$  相当于  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ，其中的  $P \rightarrow Q$  表示  $P$  是  $Q$  的充分条件； $Q \rightarrow P$  表示  $P$  是  $Q$  的必要条件。因此， $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  就表示  $P$  是  $Q$  充分并且必要条件。在日常语言中，构成等值命题的联结词除了“当且仅当”以外，还有“如果并且只有…才…”等。如：

(11) 如果并且只有加入中国国籍，才能成为中国公民。

其符号化是：

$$O \leftrightarrow R$$

在这里，“O”为加入“中国国籍”，“R”为“成为中国公民”。

### 2.2.3 包含多个联结词的复合命题的符号化

当一个公式所含的真值函项联结词不止一个时，就需要对其中的符号进行分组，否则，它的含义往往是不确定的。例如：

$$F \rightarrow G \wedge H$$

中含有两个真值函项联结词，我们可以对它作两种理解，即：

$$(i) F \rightarrow (G \wedge H)$$

$$(ii) (F \rightarrow G) \wedge H$$

这里的括号如同数学中的括号，我们先计算括号内的符号式，然后计算括号外的符号式。由真值表可以证明，(i)和(ii)是不等值的。

在日常语言中，复合命题的支命题的分组是靠各种各样的手段来实现的。如依据联结词的用法、逗号的位置、某些语词的增加或省略等等。如：

(1) 如果明天放假并且天好那么小王划船或者游泳。

这个复合命题含有三个联结词：“如果…那么…”、“并且”、“或者”。根据这些联结词的习惯用法，我们很自然地将(1)中的支命题这样归组：

如果(明天放假并且天好)那么(小王划船或者游泳)。

除此之外的其他分组都不符合这些联结词的正确用法。如：

(如果明天放假)并且(天好那么小王或者划船或者游泳)在这里，由“并且”联结的两个“支命题”即“如果明天放假”和“天好那么小王或者划船或者游泳”都不是合乎语法的句子，因而不能表达命题。再如：

(如果(明天放假并且天好)那么(小王或者划船))或者游泳。在这里，紧跟“那么”的一对括号中的“支命题”即“小王或者划船”不是合乎语法的句子，因而不表达命题。

根据对(1)的正确归组，我们用四个命题常项分别替换(1)中的四个简单命题，即，F：“明天放假”；T：“明天天好”；H：“小王划船”；Y：“小王游泳”。于是，(1)可被符号化为：

$$(F \wedge T) \rightarrow (H \vee Y)$$

当一个复合命题含有不止一个联结词时，其中必有一个联结词决定该复合命题的主要逻辑性质，这个联结词叫做复合命题的主联结词。在对这样的命题进行符号化时，主联结词处于括号的外边。如，(1)的主联结词是“如果…那么…”，因而在(1)的符号化中，“ $\rightarrow$ ”处于括号的外边。此外，我们把由主联结词联结的支命题叫做“复合命题的直接支命题”。如，上面公式中的“ $F \wedge T$ ”和“ $H \vee Y$ ”是它的直接支命题，因为它们是由主联结词“ $\rightarrow$ ”联结起来的；而其中的“ $F$ ”、“ $T$ ”、“ $H$ ”和“ $Y$ ”则不是该复合命题的直接支命题。命题常项是复合命题的最小元素，因而可以叫做复合命题的“基本支命题”或“原子支命题”。

现在，我们把包含不止一个联结词的复合命题的符号化归结为如下步骤：

(i) 用不同的命题常项表示复合命题中所有不同的简单命题；

(ii) 辨认所有联结词进而辨认主联结词和直接支命题；

(iii) 用真值函项联结词将命题常项联结起来，并用括号将符号分组，使主联结词处于括号的外边。

我们根据以上步骤对下面的命题进行符号化。

(2) 小赵划船或者小李游泳，并且小王钓鱼。

为了对(2)进行符号化，首先令：Z：小赵划船；L：小李游泳；W：小王钓鱼。然后根据(2)中逗号的位置，可以辨认出，(2)的主联结词是“并且”，因而(2)是一个合取命题。它的一个直接支命题是析取命题，即“ $Z \vee L$ ”，另一个直接支命题是一个简单命题即“W”，于是，(2)的符号化是：

$$(Z \vee L) \wedge W$$

(3) 如果一个人是勤奋的，并且他聪明或者健康，那么他是有能力的；如果一个人既不聪明又不健康，那么他没能力。

为了对(3)进行符号化，令：Q：一个人是勤奋的；C：这个人是聪明的；J：这个人是健康的；N：这个人是有能力的。根据(3)的表述，可以看出，(3)的主联结词是“并且”。不过该联结词在(3)中没出现，而是由(3)中的分号暗示的，因此，(3)是一个合取命题。接下来需要分别考虑(3)的两个合取支。先看第一个合取支。第一个合取支的主联结词是“如果…那么…”，因而是一个蕴涵命题。我们进一步考察这个蕴涵命题的前件和后件。前件的主联结词是“并且”，显然是一个合取命题，它的合取支分别是“Q”和“ $C \vee J$ ”，该合取命题的符号式为“ $Q \wedge (C \vee J)$ ”；后件是一个简单命题即“N”；因而作为第一个合取支的蕴涵命题的符号式为“(Q  $\wedge (C \vee J)$ )  $\rightarrow N$ ”。再看第二个合取支。第二个合取支的主联结词是“如果…那么…”，它也是一个蕴涵命题。进而分析这个蕴涵命题的前件和后件。前件的主联结词是“既…又…”，它是一个合取命题。该合取命题的两个合取支分别是“ $\neg C$ ”和“ $\neg J$ ”，该合取命题的符号式为“ $\neg C$

$\wedge \neg J$ ；后件是一个否定命题即 “ $\neg N$ ”；因而，作为第二个合取支的蕴涵命题的符号式是 “ $(\neg C \wedge \neg J) \rightarrow \neg N$ ”。于是，(3)的符号化是：

$$((Q \wedge (C \vee J)) \rightarrow N) \wedge ((\neg C \wedge \neg J) \rightarrow \neg N)$$

复合命题越复杂，它的符号式所需要的括号越多。然而，括号太多了会给书写和阅读带来不便。因此，有必要采取措施以适当地省略括号。我们仿效算术中先乘除后加减的办法规定：

先 “ $\vee$ ” 和 “ $\wedge$ ”；后 “ $\rightarrow$ ” 和 “ $\leftrightarrow$ ”

按此规定，(3)的符号式可以简写为：

$$(Q \wedge (C \vee J) \rightarrow N) \wedge (\neg C \wedge \neg J \rightarrow \neg N)$$

## 习题 2.2

### 一、用给定的命题常项将下列复合命题符号化。

A: 小王划船

B: 小李钓鱼

C: 小赵游泳

D: 小李游泳

E: 小赵钓鱼

F: 小王高兴

G: 小王游泳

H: 小王钓鱼

1. 并非如果小王划船，那么小李钓鱼。
2. 如果并非小王划船，那么小李钓鱼。
3. 小王划船而并非小李钓鱼，这种情况是没有的。
4. 小王划船，并且如果小李钓鱼，那么小赵游泳。
5. 如果小王划船，那么小李游泳或者钓鱼。
6. 如果小王划船那么小李游泳，并且小李游泳或者钓鱼。
7. 如果小王划船当且仅当小李游泳，那么小赵钓鱼。
8. 仅当小王划船或者游泳或者钓鱼，他才高兴。
9. 如果小王划船，那么如果小李游泳，那么小赵钓鱼。

### 二、将下列复合命题加以符号化（用命题常项）。

1. 只有甲队获胜才能乙队获胜，或者，甲队获胜仅当乙队获胜。
2. 此地气候潮湿，不是天阴就是下雨。
3. 单单学习好是不够的，只有锻炼身体和关心社会才能成为三好学生。

4. 要想人不知，除非己莫为。
5. 人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。
6. 如果我必须懂得古文才能精通古代哲学，那么我不精通古代哲学。
7. 只要他出门，他就买书或者看电影，尽管他的钱不多。
8. 或者甲上场，或者乙上场，或者丙上场，否则我队失败。
9. 如果并且只有他获得奖学金，他才唱歌并且跳舞；他抽烟并且烦躁仅当他考试不及格。

## 2.3 命题的真值表及其逻辑性质

### 2.3.1 真值表的构造

一个符号化了的真值函项复合命题无论多么复杂，不外乎是由五个真值函项联结词和命题常项组合而成的。在本章第一节中已给出了五个真值函项联结词的特征真值表。根据这五个特征真值表，我们可以构造出任何一个真值函项复合命题的真值表。

一个真值函项复合命题的真值取决于它所含的命题常项的真值。命题常项的真值一旦确定，真值函项复合命题的真值也就相应地确定了。对于任何一个命题常项，我们可以进行两种真值赋值，即：真和假。对于两个命题常项，我们可以进行四种真值赋值，即：真真、真假、假真、假假。总之，一个复合命题所含的命题常项越多，对其命题常项可能进行的真值赋值的数目就越大，因为这种真值赋值的数目就是复合命题所含命题常项的真值组合的数目。我们把对一个复合命题的所有命题常项的真值赋值称为对该命题的“真值指派”。<sup>①</sup>用“K”表示真值指派的数目，用“n”表示一个复合命题所含命题常项的数目，二者之间的关系为：

$$K = 2^n$$

据此，一个含有一个命题常项的复合命题的真值指派的数目为 $2^1$ ，即2；含有两个

<sup>①</sup> 严格地说，真值指派是指对一个形式语言系统的所有命题常项的真值赋值，而不限于对某个复合命题所含的命题常项的真值赋值。一般而言，后者所包含的命题常项比前者要少得多，只是前者的一小部分，不妨把后者称为“局部真值指派”，而把前者称为“完全真值指派”。可以说，局部真值指派是对完全真值指派的分类组合。例如，涉及两个命题常项A和B的局部真值指派只有四个，即：A真B真、A真B假、A假B真和A假B假。其中第一个真值指派代表这样一类完全真值指派，其成员的共同特点是包括A真和B真，如：A真B真C真D真…，A真B真C假D真…。如果所讨论的形式语言系统包含无穷多个命题常项，那么，每一个局部真值指派代表无穷多个完全真值指派，只要这些完全真值指派都包含此局部真值指派。从可能世界语义学来看，每一个完全真值指派相当于指派一个可能世界，既然这一真值指派穷尽了该语言系统的所有命题常项，也就相当于给出某一世界的一种详尽描述。不过，我们这里只谈局部真值指派就够了，因为一个复合命题的真值仅仅取决于它所包含的命题常项的真值。

命题常项的复合命题的真值指派的数目为  $2^2$ ，即 4；含有三个命题常项的复合命题的真值指派的数目为  $2^3$ ，即 8；……。总之，每增加一个命题常项，真值指派的数目就增加一倍。

我们在构造一个命题的真值表时，首先要把这个命题的全部真值指派逐一列举出来，每一种真值指派占一行，有多少种真值指派，真值表就有多少行。下面我们以含有三个命题常项的复合命题“ $F \rightarrow G \vee H$ ”为例，来说明如何列举一个复合命题的全部真值指派。

步骤 1：写出该复合命题的所有命题常项：

F G H

步骤 2：确定真值表的行数。既然这里有三个命题常项，那么，真值表应有 8 行。

步骤 3：对最左边的命题常项 F 赋值。做法是：对前四行赋值 T，对后四行赋值 F。

步骤 4：对左起第二个命题常项 G 赋值。做法是：将对应于左边被赋予 T 的四行对半分，前二行赋予 T，后二行赋予 F。以后就按照两个 T 和两个 F 交替赋值，直到最后一行。

步骤 5：对最右边的命题常项 H 赋值。做法是：将对应于左边被赋予 T 的前两行对半分，第一行赋予 T，第二行赋予 F。以后就按照一个 T 和一个 F 交替赋值，直到最后一行。

由以上五个步骤得到的结果是：

F	G	H
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

当给命题常项的真值指派的工作完成之后，我们便可确定“ $F \rightarrow G \vee H$ ”在每一种真值指派下的真值。具体步聚如下：

步骤 1：将“ $F \rightarrow G \vee H$ ”写在命题常项的右边，并将每个命题常项的赋值平移到所有相同的符号之下，即

F	G	H	F →	G	V	H
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	
T	F	T	T	F	T	
T	F	F	T	F	F	
F	T	T	F	T	T	
F	T	F	F	T	F	
F	F	T	F	F	T	
F	F	F	F	F	F	

步骤2：根据“V”的特征真值表确定“G V H”在每一行的真值，并将其真值写在“V”的下方，即：

F	G	H	F →	G	V	H
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F

步骤3：根据“→”的特征真值表确定“F → G V H”在每一行的真值，并将真值写在“→”的下方：

F	G	H	F →	G	V	H
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F
T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F

这样，我们便依据特征真值表构造了“F → G V H”的真值表。这个表显示了“F →

$G \vee H$ " 在其任何真值指派下的相应的真值。例如，当真值指派为： $F = T, G = F, H = T$  时，我们通过查看上表 "→" 之下第三行的真值，便可知道 " $F \rightarrow G \vee H$ " 是真的。

在上面构造真值表的过程中，我们根据特征真值表，首先确定那些以命题常项为直接支命题的复合命题在每一行的真值，然后确定那些以这些复合命题为其直接支命题的复合命题的真值，以此类推，直到确定所讨论的那个复合命题在每一行的真值。可见，构造真值表的过程是一个能行的过程，即我们可以用机械的方法在有穷的步骤内构造出任何一个复合命题的真值表，而无论这个复合命题多么复杂。下面再讨论一个略为复杂的复合命题的真值表。在构造真值表的过程中，对上面所谈的步骤适当加以省略或合并。

构造 " $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ " 的真值表。

步骤 1：写出该命题所有的真值指派：

P    Q    R	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T    T    T	
T    T    F	
T    F    T	
T    F    F	
F    T    T	
F    T    F	
F    F    T	
F    F    F	

步骤 2：确定其中 " $Q \vee R$ "、" $P \wedge Q$ " 和 " $P \wedge R$ " 的真值：

P    Q    R	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T    T    T	T    T    T
T    T    F	T    T    F
T    F    T	T    F    T
T    F    F	F    F    F
F    T    T	T    F    F
F    T    F	T    F    F
F    F    T	T    F    F
F    F    F	F    F    F

步骤3：确定其中“ $P \wedge (Q \vee R)$ ”和“( $P \wedge Q$ )  $\vee (P \wedge R)$ ”的真值。

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$					
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F

步骤4：确定“ $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ”的真值：

P	Q	R	$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$					
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	F
T	F	T	T	T	F	T	T	
T	F	F	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	F	T	F	F	F

至此，我们便构造出“ $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ”的真值表。从这个真值表我们看到，主逻辑词“ $\leftrightarrow$ ”之下的每一行都是“T”，这表明“ $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ”在所有的真值指派下都是真的。

### 2.3.2 重言式、矛盾式和偶然式

复合命题的真值表刻画了复合命题的真值与其命题常项的真值之间的函项关系。根据真值函项关系的不同，我们可以把命题分为三类，即重言式、矛盾式和偶然式。请比较以下三个命题及其真值表：

(1)  $B \rightarrow B \vee M$ 

$B \quad M$	$B \rightarrow B \vee M$
T T	T T
T F	T T
F T	T T
F F	T F

(2)  $(J \rightarrow Q) \wedge (J \wedge \neg Q)$ 

$J \quad Q$	$(J \rightarrow Q) \wedge (J \wedge \neg Q)$
T T	T F F F
T F	F F T T
F T	T F F F
F F	T F F T

(3)  $D \rightarrow (D \rightarrow K)$ 

$D \quad K$	$D \rightarrow (D \rightarrow K)$
T T	T T
T F	F F
F T	T T
F F	T T

由以上三个真值表可见，在所有的真值指派下，(1)总是真的，(2)总是假的，而(3)则有真有假。现在我们给出如下定义：

一个命题是重言式，当且仅当，该命题在所有的真值指派下都是真的。

一个命题是矛盾式，当且仅当，该命题在所有的真值指派下都是假的。

一个命题是偶然式，当且仅当，该命题在有些真值指派下是真的，在另一些真值指派下是假的。

根据以上定义，(1)是一个重言式，(2)是一个矛盾式，(3)是一个偶然式。对于任何一个真值函数复合命题，我们都可通过它的真值表判定它是一个重言式、矛盾式或偶然式。同偶然式相比，重言式和矛盾式具有必然性，即无论在何种真值指派下，重言式

总是真的，矛盾式总是假的。这一事实表明，重言式和矛盾式的真值独立于命题的具体内容，因而每一个重言式都是一个普遍的逻辑真理，每一个矛盾式都是一个普遍的逻辑谬误。

由于重言式、矛盾式和偶然式的逻辑性质都是由真值函项的性质来定义的，因此，我们可以说：重言式是真值函项地真的，矛盾式是真值函项地假的，偶然式是真值函项地不定的。相应地，重言式又叫做“真值函项的真命题”，矛盾式又叫做“真值函项的假命题”，偶然式又叫做“真值函项的不定命题”。

接下来，我们再看几个最简单但却最重要的例子。

$$(4) A \leftrightarrow A$$

$$(5) A \vee \neg A$$

$$(6) \neg(A \wedge \neg A)$$

(4)、(5)和(6)通常被看作是对同一律、排中律和矛盾律的符号化，它们的真值表如下：

A	$A \leftrightarrow A$	$A \vee \neg A$	$\neg(A \wedge \neg A)$
T	T	T	T F
F	T	T	T F

由上表可以判定，(4)、(5)和(6)都是重言式。它们的否定命题都是矛盾式。

### 2.3.3 重言等值和重言蕴涵

我们说任何两个命题 **P** 和 **Q** 是重言等值的，就是说，**P** 和 **Q** 在所有的真值指派下都是真值相同的。为确定两个命题是否重言等值，我们只需构造和比较两个命题的真值表。让我们举例加以说明。

为确定命题 “ $\neg(E \wedge N)$ ” 和 “ $\neg E \vee \neg N$ ” 是否重言等值的，我们构造如下的真值表：

E N	$\neg(E \wedge N)$	$\neg E \vee \neg N$
T T	F T	F F
T F	T F	F T
F T	T F	T F
F F	T F	T T

在上表中，这两个命题的主联结词下方的真值完全相同。这表明，这两个命题在所

有的真值指派下都具有相同的真值。可见，这两个命题是重言等值的。

为考虑“ $A \rightarrow B$ ”和“ $B \rightarrow A$ ”是否重言等值，我们构造真值表如下：

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

在上表中的第二行和第三行，这两个命题的真值不同。这表明，这两个命题并非在所有真值指派下都具有相同的真值。因此，这两个命题不是重言等值的。

在 2.1.5 和 2.1.6 中谈到，“ $A \rightarrow B$ ”和“ $\neg A \vee B$ ”在所有的真值指派下真值相等，“ $A \leftrightarrow B$ ”与“ $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ”也是如此。现在我们可以说，其中每一对中的两个命题是重言等值的。如果我们将重言等值的两个命题用“ $\leftrightarrow$ ”联结起来，那么这样构成的命题就是一个重言式；反之亦然。例如，用“ $\leftrightarrow$ ”联结“ $A \rightarrow B$ ”和“ $\neg A \vee B$ ”，从而得到命题“ $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$ ”。下面的真值表表明该命题是一个重言式：

A	B	$(A \rightarrow B)$	$\leftrightarrow$	$\neg A \vee B$
T	T	T	T	F T
T	F	F	T	F F
F	T	T	T	T T
F	F	T	T	T T

显然，我们还可以这样定义“重言等值”：

命题 **P** 和 **Q** 是重言等值的，当且仅当， $P \leftrightarrow Q$  是一个重言式。

接下来讨论“重言蕴涵”。我们说，命题 **P** 重言蕴涵命题 **Q**，就是说，在所有的真值指派下，都不会出现 **P** 真而 **Q** 假的情形。为确定 **P** 是否重言蕴涵 **Q**，我们可以通过真值表来实现。如，对于“ $L \wedge D$ ”和“ $L \vee D$ ”，我们构造如下的真值表：

L	D	$L \wedge D$	$L \vee D$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

我们看到，在每一种真值指派下，都未出现  $L \wedge D$  真而  $L \vee D$  假的情形。因而， $L \wedge D$  重言蕴涵  $L \vee D$ 。在此表的第二行和第三行中出现  $L \vee D$  真而  $L \wedge D$  假的情形，这表明，并非  $L \vee D$  重言蕴涵  $L \wedge D$ 。由此可见，重言蕴涵是不对称的。

如果用“ $\rightarrow$ ”将重言蕴涵的两个命题 **P** 和 **Q** 联结起来，那么，由此构成的命题就是一个重言式。如，用“ $\rightarrow$ ”联结  $L \wedge D$  和  $L \vee D$  而形成的命题  $L \wedge D \rightarrow L \vee D$  就是一个重言式，其真值表如下：

$L \wedge D$	$L \wedge D$	$\rightarrow$	$L \vee D$
T T	T	T	T
T F	F	T	T
F T	F	T	T
F F	F	T	F

现在，我们给出“重言蕴涵”的另一个定义：

**P** 重言蕴涵 **Q**，当且仅当， $P \rightarrow Q$  是一个重言式。

重言等值和重言蕴涵是两个命题之间基于真值函项的逻辑关系，因此，重言等值和重言蕴涵又分别叫做“真值函项地等值”和“真值函项地蕴涵”。

### 习题 2.3

一、构造下列命题的真值表，并指出它们是重言式、矛盾式或偶然式。

1.  $K \leftrightarrow \neg K$
2.  $\neg \neg J$
3.  $N \rightarrow N \wedge L$
4.  $(D \rightarrow J) \wedge (J \rightarrow D)$
5.  $(B \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow R) \rightarrow (B \rightarrow R)$
6.  $A \vee O \rightarrow A$
7.  $(E \rightarrow F \wedge G) \wedge ((\neg G \vee \neg F) \wedge E)$
8.  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

二、根据真值表判定下面哪对命题是重言等值的。

1.  $O \rightarrow N$  和  $\neg N \vee O$
2.  $D \vee J$  和  $\neg (\neg D \wedge \neg J)$
3.  $K \rightarrow M$  和  $K \rightarrow K \wedge M$
4.  $(W \vee X) \wedge Z$  和  $W \vee (X \wedge Z)$
5.  $(B \leftrightarrow E)$  和  $(B \wedge E) \vee (\neg B \wedge \neg E)$

6.  $I \rightarrow (M \rightarrow O)$  和  $M \rightarrow (I \rightarrow O)$

7.  $(P \vee \neg C) \wedge C$  和  $P$

8.  $J \rightarrow O$  和  $E \vee (J \rightarrow O)$

三、根据真值表判定题二各对命题中的第一个是否重言蕴涵第二个。

四、以下都是重要的逻辑规律，请用真值表证明它们都是重言式。

1. 交换律

$$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$$

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$$

2. 双重否定律

$$\neg \neg P \leftrightarrow P$$

3. 德摩根律

$$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

$$\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

4. 假言易位律

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

5. 蕴涵律

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$$

6. 重言律

$$P \leftrightarrow P \vee P$$

$$P \leftrightarrow P \wedge P$$

7. 结合律

$$P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

8. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

9. 移出律

$$(P \wedge Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

10. 等值律

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

## 2.4 用真值表检验推论的有效性

### 2.4.1 真值表方法

我们在第一章曾经讲过，一个演绎推论是有效的，当且仅当，在任何情况下，它都不会出现所有前提真而结论假的情形。在命题逻辑中，所有可能的真值指派就是我们所要考虑的情况范围。因而我们可以说：在命题逻辑中，一个推论是有效的，当且仅当，在任何真值指派下，它都不会出现所有前提真而结论假的情形。根据“重言蕴涵”的定义，我们还可以说：在命题的逻辑中，一个推论是有效的，当且仅当，它的所有前提的合取式重言蕴涵它的结论。命题推论的有效性又叫做“重言有效”或“真值函项地有效”。

推论的一般表述方式是：

**【模式 1】**

$P_1$

$P_2$

...

$P_n$

$\therefore C$

这个模式中的  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\cdots$ 、 $P_n$  代表  $n$  个前提， $C$  代表结论。我们可以把模式 1 转换为：

**【模式 2】**

$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow C$

模式 2 与模式 1 之间具有对应关系。任何一个按照模式 1 表述的推论都可以按照模式 2 重新加以表述。做法就是将模式 1 中的所有前提的合取式作为蕴涵式的前件，将结论作为蕴涵式的后件。按照模式 2 重新表述的推论是一个蕴涵命题。根据前面关于推论的有效性的定义，在命题逻辑中，一个模式 1 的推论是有效的，当且仅当，相应的模式 2 的蕴涵式是一个重言式。一个蕴涵式是否是一个重言式，可以通过真值表来判定。这样，我们可以通过真值表来检验一个推论是否有效。下面举例加以说明。

**【例 1】**

$P \rightarrow Q$

$Q$

$\therefore P$

我们在第一章曾讲过，例 1 是一个无效的推论形式，现在按照模式 2 将此推论形式

重写为：

$$(1) (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$$

相应的真值表是：

P	Q	$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$		
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

在此真值表中，主联结词“ $\rightarrow$ ”下面的第三行为 F，可见(1)不是一个重言式。由此可以判定，例(1)是无效的。

【例 2】

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{P}$$

$$\therefore \mathbf{Q}$$

我们在第一章中曾经讲过，例 2 是一个有效的推论形式。现在我们按照模式 2 将此推论重写为：

$$(2) (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$$

相应的真值表是：

P	Q	$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$		
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

在这个真值表中，主联结词“ $\rightarrow$ ”下边的每一行都是 T，可见(2)是一个重言式。由此可以判定，例 2 是有效的。例 2 这种推论形式叫做“肯定前件式”。

接下来我们考察几个具体推论。

【例 3】

这份统计表计算有错或者数据有错；既然计算没有错；所以，这份统计表的数据有错。

为了用真值表判定这个推论是否有效，我们首先需要对这个推论进行符号化。令：

J: 这份统计表计算有错;

S: 这份统计表数据有错。

于是, 这个推论可被符号化为:

$$J \vee S$$

$$\neg J$$

$$\therefore S$$

相应的蕴涵式是:

$$(J \vee S) \wedge \neg J \rightarrow S$$

其真值表如下:

J	S	$(J \vee S) \wedge \neg J \rightarrow S$			
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T

在此表中, 联结“ $\rightarrow$ ”下方的真值皆为 T, 所以, 例 3 这个推论是有效的。

例 3 的推论形式叫“否定析取支”。否定析取支的结构是:

$$\begin{array}{ll} P \vee Q & P \vee Q \\ \neg P & \text{或} \\ \therefore Q & \neg Q \\ & \therefore P \end{array}$$

这就是说, 当一个推论的一个前提是析取命题, 另一个前提是其中一个析取支的否定, 那么, 就可以由此推出它的另一个析取支。有一种常犯的逻辑错误是“肯定析取支”。如

#### 【例 4】

这份统计材料计算有错或者数据有错; 既然计算有错; 所以这份统计材料的数据没有错。

还用例 3 的命题常项, 这个推论可被符号化为:

$$J \vee S$$

$$J$$

$$\therefore \neg S$$

相应的蕴涵式是:

$$(J \vee S) \wedge J \rightarrow \neg S$$

其真值表是:

J	S	$(J \vee S) \wedge J \rightarrow \neg S$			
T	T	T	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

在此真值表的第一行中，主联结词下方的真值为 F。可见，例 4 这个推论是无效的。

### 【例 5】

如果他获得冠军，那么他得到奖金；如果他得到奖金，那么他资助业余体校；所以，如果他获得冠军，那么他资助业余体校。

令：

G：他获得冠军；

D：他得到奖金；

Z：他资助业余体校。

以上推论被符号化为：

$$G \rightarrow D$$

$$D \rightarrow Z$$

$$\therefore G \rightarrow Z$$

相应的蕴涵式是：

$$(G \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow Z) \rightarrow (G \rightarrow Z)$$

其真值表是：

G	D	Z	$(G \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow Z) \rightarrow (G \rightarrow Z)$				
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	
T	F	T	F	T	T	T	
T	F	F	F	T	T	F	
F	T	T	T	T	T	T	
F	T	F	T	F	T	T	
F	F	T	T	T	T	T	
F	F	F	T	T	T	T	

在这个真值表中，主联结词下方的每一行都是 T，因此，例 5 是一个有效的推论。例 5

这种推论形式叫做“假言三段论”。假言三段论的一般结构是：

$$P \rightarrow Q$$

$$Q \rightarrow R$$

$$\therefore P \rightarrow R$$

在第一章中，我们曾经讲过，一个具体推论是否有效，不取决于它的内容，而取决于它的推论形式是否有效。现在我们看到，用来检验具体推论的有效性的真值表只与该推论的符号结构有关，而与符号所表示的内容无关。这与我们在第一章中所论述的一致的。

另外，值得指出的是，在命题逻辑中所研究的推论只涉及命题间的真值函数关系，而不涉及命题内部的逻辑结构。我们把那些仅仅依据命题间的真值函数关系，或者说，仅仅依据真值函数联结词所进行的推论叫做“命题推论”。用真值表方法只能检验命题推论的有效性。

## 2.4.2 短真值表方法

在前一小节，我们讨论了检验命题推论的有效性的真值表方法。从原则上讲，这种方法对命题推论是普遍适用的。然而，实际上，当推论所含的命题常项（或命题变项）较多时，判定推论的有效性的过程就变得十分冗长和烦琐。例如，当有五个命题常项时，就得给出一个 32 行的真值表，当有六个命题常项时，就得给出一个 64 行的真值表。因此，我们有必要对其值表方法加以简化。本小节将介绍一种简化的真值表方法，即短真值表方法。

我们回顾一下用真值表检验一个推论的有效性的过程。首先将所讨论的推论符号化为一个蕴涵命题；再列出该蕴涵命题的全部真值指派；然后计算出该蕴涵命题在每一种真值指派下的真值；最后查看是否至少有一种真值指派使得该蕴涵命题的真值为假。如果没有，那么所讨论的推论是有效的；如果有，那么该推论是无效的。

现在我们设想这样一种方法，用它直接寻找使所讨论的蕴涵命题为假的真值指派，而无需讨论所有真值指派。如果可能找到这样一种真值指派，那么，所讨论的推论就是无效的；如果不可能找到这样一种真值指派，那么所讨论的推论就是有效的。这就是短真值表方法的基本思想。实现这一思想的手段是间接证明和归谬法。

我们举例说明短真值表方法的具体程序。

**【例 1】**

$$P \rightarrow Q$$

$$P$$

$$\therefore Q$$

与此推论形式相应的蕴涵式是：

(i) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$

我们假定(i)是假的，即：

(ii) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$

F

为满足(ii)，必须使前件真而后件假，即：

(iii) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$

T F F

为了满足(iii)，必须使( $P \rightarrow Q$ )和P均为真，并且既然已知一个Q为假，其余的Q亦应为假，即：

(iv) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$

T F T T F F

为了满足(iv)，必须使(iv)中的第一个P为假，即：

(v) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$

F T F T T F F

检查(v)中各个命题变项下边的赋值，发现P既是F又是T。这就是说，当我们假定( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge P \rightarrow Q$ 为假时，便导致P既真又假的逻辑矛盾。根据归谬法可以得出结论：我们关于该蕴涵式为假的假定不能成立，也就是说，该蕴涵式不可能为假。这样就间接证明了该蕴涵式是一个重言式。我们由此可以判定。例1是一个有效的推论形式。

### 【例2】

$P \rightarrow Q$

Q

$\therefore P$

相应的蕴涵式是：

(i) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge Q \rightarrow P$

我们假定(i)是假的，即：

(ii) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge Q \rightarrow P$

F

为满足(ii)必须使前件真而后件假，即：

(iii) ( $P \rightarrow Q$ )  $\wedge Q \rightarrow P$

T F F

为满足(iii)，必须使( $P \rightarrow Q$ )和Q均为真，并且，既然有一个P已为假，其余的P也应为假，即：

$$(iv) (P \rightarrow Q) \wedge Q \rightarrow P$$

$$\begin{array}{cc} F & T \\ T & T \\ F & F \end{array}$$

为满足 (iv)，该式中第一个 **Q** 无论是真还是假都是可以的。既然有一个 **Q** 已经为真，这个 **Q** 也为真，即：

$$(v) (P \rightarrow Q) \wedge Q \rightarrow P$$

$$\begin{array}{cc} F & T \\ T & T \\ F & F \end{array}$$

检查 (v) 中每一个命题变项下边的真值，发现相同的变项具有相同的真值，并没有出现某个变项既是真又是假的逻辑矛盾。这样，我们便找到一种真值指派即 **P** 假而 **Q** 真，使得该蕴涵式为假。这表明例 2 这种推论形式是无效的。

请注意，这里的例 2 与前一小节中的例 1 完全相同，在前一小节中，我们用真值表判定它是无效的。如果将我们现在找到的这一真值指派与它的真值表相比较，就会发现这一真值指派正是真值表的第三行。由此可见，用短真值表方法所构造的仅是真值表的一部分。

短真值表方法的一般程序可以归结如下：

步骤 1：写出与所讨论的推论相应的蕴涵式。

步骤 2：假定蕴涵式是假的，即假定它的前件为真而后件为假。

步骤 3：在这种假定下，根据真值函项联结词的特征真值表推导出命题常项（或命题变项）的真值。

步骤 4：检查每一个命题常项（或命题变项）的真值，如果所有相同的命题常项（或命题变项）都被赋予相同的真值，那么所讨论的推论是无效的；如果至少有一个命题常项（或命题变项）既真又假，那么所讨论的推论是有效的。

接下来我们讨论几个具体推论。

### 【例 3】

老宋加入棋社并且加入诗社，仅当他退休并且身体好；老宋身体不好；所以老宋不加入棋社或者不加入诗社。

令：

**Q**: 老宋加入棋社；      **S**: 老宋加入诗社；

**T**: 老宋退休；      **H**: 老宋身体好。

此推论被符号化为：

$$Q \wedge S \rightarrow T \wedge H$$

$$\neg H$$

$$\therefore \neg Q \vee \neg S$$

相应的蕴涵式是：

$$(i) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

假定(i)假，进而假定前件真而后件假，即：

$$(ii) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T	F	F
---	---	---

为满足(ii)，我们必须赋值如下：

$$(iii) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T	T T	F F	F F
---	-----	-----	-----

为了满足(iii)，又必须这样赋值：

$$(iv) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T	T T F F F T F F T
---	-------------------

既然 Q 和 S 都为 T，那么其余的 Q 和 S 亦为 T，即：

$$(v) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T T	T T F F F T F F T
-----	-------------------

因而

$$(vi) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T T T T	T	T T F F F T F F T
---------	---	-------------------

为满足(vi)，另一个 H 和 T 必须赋值 T，即：

$$(vii) (Q \wedge S \rightarrow T \wedge H) \wedge \neg H \rightarrow \neg Q \vee \neg S$$

T T T T T T	T T F F F T F F T
-------------	-------------------

我们发现 H 的赋值既是 T 又是 F，这表明，例 3 是一个有效推论。

#### 【例 4】

如果他生病那么他缺席；或者他没生病或者他不缺席；所以，他缺席当且仅当他生病。

令：

B：他生病；

X：他缺席。

此推论被符号化为：

$$(i) (B \rightarrow X) \wedge (\neg B \vee \neg X) \rightarrow (X \leftrightarrow B)$$

在假定(i)为假之后，我们立即可以赋值如下：

$$(ii) (B \rightarrow X) \wedge (\neg B \vee \neg X) \rightarrow (X \leftrightarrow B)$$

T	T	T	F	F
---	---	---	---	---

但是，在这种情况下，我们不能确定任何一个命题常项的真值。因为，当  $B \rightarrow X$  为真时，B 和 X 有三种真值指派，即 B 真 X 真、B 假 X 假、B 假 X 真。当  $\neg B \vee \neg X$  为真时，B 和 X 也可以有三种真值指派，即 B 假 X 假、B 假 X 真、B 真 X 假。当  $X \leftrightarrow B$  为假时，X 和 B 有两种真值指派，即 X 真 B 假、X 假 B 真。这使得我们无论从哪里着手，

都不能惟一地确定 B 和 X 的真值。面对这种不确定的情形，我们只能对 X 和 B 的真值指派的多种可能性分别加以考虑。于是，我们从最少的可能性入手，即在(ii)的基础上，把后件  $X \leftrightarrow B$  为假时 X 和 B 的两种真值指派都写出来：

$$(iii) (B \rightarrow X) \wedge (\neg B \vee \neg X) \rightarrow (X \leftrightarrow B)$$

T	T	T	F	T F F
				F T

我们先考虑第一种赋值，即 X 真 B 假，并对所有的 X 赋予真：

$$(iv) (B \rightarrow X) \wedge (\neg B \vee \neg X) \rightarrow (X \leftrightarrow B)$$

T T	T	T F T	F	T F F

为了满足(iv)中的  $\neg B \vee \neg X$ ，我们必须使 B 为假。为满足(iv)中的  $B \rightarrow X$ ，B 可真可假。既然其他 B 为假，我们也使这个 B 为假。于是有：

$$(v) (B \rightarrow X) \wedge (\neg B \vee \neg X) \rightarrow (X \rightarrow B)$$

F T T	T	T F T F T	F	T F F

至此，我们完成了第一种情况的赋值，检查(v)，没有一个命题常项既是 T 又是 F。这说明，我们找到了一种赋值即 B 假 X 真，使得上面的蕴涵式为假。因此，例(4)是一个无效的推论。

由此可见，当对一个蕴涵式应用短真值表方法的赋值多于一种可能时，只要在其中一种可能的赋值下没有导致矛盾，就表明这个蕴涵式不是重言式，从而可以断定相应的推论是无效的。刚才讨论的例 4 就是如此。但是，在其中一种可能的赋值下导致矛盾，并不能由此断定这个蕴涵式是重言式，因而也不断定相应的推论是有效的。要断定所讨论的推论是有效的，必须在所有可能的赋值下都导致矛盾。不过，对于一个有效推论，运用短真值表方法的赋值常常只有一种可能。上面讨论的例 1 和例 3 就是如此。

## 习题 2.4

一、以下是一部分常用的推论形式，请用真值表验证它们的有效性。

1. 否定后件      2. 合取

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow Q & P \\ \neg Q & Q \\ \therefore \neg P & \therefore P \wedge Q \end{array}$$

3. 化简      4. 附加

$$\begin{array}{ll} P \wedge Q & P \\ \therefore P & \therefore P \vee Q \end{array}$$

## 5. 二难推论

$$P \rightarrow Q$$

$$R \rightarrow S$$

$$P \vee R$$

$$\therefore Q \vee S$$

二、把下列推论符号化（用命题常项），然后用真值表判定它们是否有效。

1. 王波只有学好外语才能考上研究生；王波没有学好外语；所以王波不能考上研究生。
  2. 10 是偶数；10 能被 5 整除；所以，10 既是偶数又能被 5 整除。
  3. 李强学习优秀；所以，李强学习优秀并且受到表扬。
  4. 大连在东北并且大连是海滨城市；所以，大连是海滨城市。
  5. 发展经济仅当提高社会生产力；所以，如果不发展经济，那么不提高社会生产力。
  6. 他要么去旅游要么去疗养；他不去疗养；所以，他去旅游。
  7. 刘英考试及格；所以，刘英考试及格或者考试优秀。
  8. 如果他工作顺利，那么他心情舒畅；他工作不顺利；所以，他心情不舒畅。
  9. 如果张老师出考题，那么学生害怕考试；或者张老师不出考题，或者学生不怕考试；所以，张老师不出考题。
  10. 这本书饶有趣味或者富有哲理；这本书富有哲理；所以，这本书没有趣味。
  11. 他激动仅当他的实验成功；他激动仅当他升为教授；因此，他激动仅当他的实验成功并且他升为教授。
  12. 如果并且只有掌握辩证唯物主义，才能成为马克思主义者；李同志是马克思主义者；所以，李同志掌握辩证唯物主义。
- 三、用短真值表方法重做题一和题二。
- 四、用短真值表方法判定下列推论是否有效（用命题常项）。
1. 如果进甲车间，那么工作繁重并且对身体有害；如果进乙车间，那么工资微薄并且没有假日；或者进甲车间或者进乙车间；所以，或者工作繁重或者工资微薄。
  2. 只有明天是节日，才能明天放假；如果明天不是节日，那么我们上课；明天放假或者明天不上课；可见，明天是节日。
  3. 甲出席会议或者乙出席会议；甲出席会议当且仅当丙出席会议；所以，如果丙不出席会议，那么乙出席会议。
  4. 甲出席会议或者乙出席会议；甲出席会议当且仅当丙出席会议；丙出席会议；所以，乙不出席会议。
  5. 如果生产下降，或人口过多，那么物资短缺；如果物资短缺，那么通货膨胀或

者人民遭受苦难；如果人民遭受苦难，政府就失去人心；事实上没有通货膨胀，而且政府没有失去人心；所以，生产没有下降。

6. 汽车厂赢得这场诉讼，当且仅当，机械厂签定了合同并且合同是合法的并且机械厂不履行合同；如果机械厂缺乏原料或者缺乏劳动力，那么它就不会签定合同；事实上机械厂缺乏原料；所以，汽车厂不会赢得这场诉讼。

7. 如果老王身体好并且有空闲，那么他就去旅游；如果老王去旅游，那么他乘火车或者乘轮船或者乘飞机；但是老王不乘火车，或者不乘飞机，或者不乘轮船；所以，老王身体不好或者没有空闲。

8. 如果下雨，那么，只要刮风就会很冷；所以，如果刮风，那么，只要下雨就会很冷。

9. 今天游泳，或者明天跑步并且爬山；因此，今天游泳并且明天跑步，或者今天游泳并且明天爬山。

10. 只有小张比小李大，并且比小王小，小张才和小赵同岁；小张与小赵同岁或者与小陈同岁；如果小张与小陈同岁，那么小陈比小刘大；但事实上小陈不比小刘大；所以，小张比小李大，并且与小赵同岁。

# 第三章 命题逻辑：推演

在前一章中，我们介绍了一种判定命题推论的有效性的方法，即真值表方法。不过判定命题推论的有效性的方法并非只此一种。另一种常用的方法是推演。我们举例加以说明。

## 【推论】

如果小王研究科学方法论，那么小王学习科学史和逻辑学；小王研究科学方法论；所以小王学习逻辑学。

用真值表方法不难判定此推论是有效的。然而，对于一个不了解真值表方法的人，他很可能进行如下的一系列的推导：

(1) 如果小王研究科学方法论，那么小王学习科学史和逻辑学；小王研究科学方法论；所以，小王学习科学史和逻辑学。

(2) 小王学习科学史和逻辑学；所以，小王学习逻辑学。

这种方法的实质是将一个复杂推论分解为若干简单推论。上面的那个推论就被分解为两个更为简单的推论。由于这些简单推论的有效性是明显的，所以，那个复杂推论的有效性也就被确立起来。如果我们把某些简单推论作为推演规则，那么，我们就可以根据这些规则，从给定的前提一步一步地推出所要的结论。这种方法被称为“自然演绎”或“自然推论”。

“自然演绎系统”是以一组推演规则为基础的。对于任何一个推论，如果我们能够依据这组推演规则，从它的前提推出它的结论，那么这个推论就是有效的；并且如果一个推论是有效的，那么我们就可以依据这组推演规则，从它的前提一步一步地推出它的结论。至于把哪些简单推论作为推演规则，不同的自然演绎系统有不同的选择。本章所要介绍的只是其中的一种。

## 3.1 八条整推规则

### 3.1.1 八条整推规则的表述

命题逻辑的推演规则必须保证由此进行的命题推论是有效的。推论的有效性决定于推论形式的有效性。因此，一些简单有效推论形式就是我们制定自然演绎的推演规则的依据。

### 1. 肯定前件

在前一章中我们已用真值表方法证明推论形式

$$P \rightarrow Q$$

$$P$$

$$\therefore Q$$

是有效的。由此我们得到相应的推论规则：

从  $P \rightarrow Q$  和  $P$  可以推得  $Q$ 。

$P$  和  $Q$  作为命题变项可以代表简单命题，也可以代表复合命题。例如， $P$  和  $Q$  分别代表  $(A \wedge B)$  和  $(B \rightarrow C)$ ，根据肯定前件规则，我们可以进行如下推论：

$$A \wedge B \rightarrow (B \rightarrow C)$$

$$A \wedge B$$

$$\therefore B \rightarrow C$$

### 2. 否定后件

根据真值表方法可知，推论形式

$$P \rightarrow Q$$

$$\neg Q$$

$$\therefore \neg P$$

是有效的，我们由此得到相应的推论规则：

从  $P \rightarrow Q$  和  $\neg Q$  可以推得  $\neg P$ 。

根据此规则，我们可以进行如下的推论：

$$(J \leftrightarrow K) \rightarrow R$$

$$\neg R$$

$$\therefore \neg (J \leftrightarrow K)$$

### 3. 否定析取支

根据真值表方法可知，推论形式

$$P \vee Q$$

$$P \vee Q$$

$$\neg P$$

和

$$\neg Q$$

$$\therefore Q$$

$$\therefore P$$

都是有效的，据此我们有规则：

从  $P \vee Q$  和  $\neg P$  可以推得  $Q$ 。

从  $P \vee Q$  和  $\neg Q$  可以推得  $P$ 。

### 4. 化简

根据真值表方法，可知推论形式

$P \wedge Q$  $\therefore P$  和 $P \wedge Q$  $\therefore Q$ 

都是有效的，于是我们有规则：

从  $P \wedge Q$  可以推得  $P$ 。从  $P \wedge Q$  可以推得  $Q$ 。

## 5. 合取

根据真值表方法，推论形式

 $P$  $Q$  $\therefore P \wedge Q$ 

是有效的，于是，相应的规则是：

从  $P$  和  $Q$  可以推得  $P \wedge Q$ 。

## 6. 假言三段论

由真值表方法可以判定，推论形式

 $P \rightarrow Q$  $Q \rightarrow R$  $\therefore P \rightarrow R$ 

是有效的，相应的规则是：

从  $P \rightarrow Q$  和  $Q \rightarrow R$  可以推得  $P \rightarrow R$ 。

## 7. 二难推论

由真值表方法可以判定，推论形式

 $P \rightarrow Q$  $R \rightarrow S$  $P \vee R$  $\therefore Q \vee S$ 

是有效的，于是我们得到如下规则：

从  $P \rightarrow Q$ 、 $R \rightarrow S$  和  $P \vee R$  可以推得  $Q \vee S$ 。

## 8. 附加

由真值表方法可以判定，推论形式：

 $P$              $Q$  $\therefore P \vee Q$  和  $\therefore P \vee Q$ 

是有效的，于是我们有规则：

从  $P$  可以推得  $P \vee Q$ 。从  $Q$  可以推得  $P \vee Q$ 。

至此我们讨论了八条推论规则。应用以上八条规则时有一个总的要求，即：这八条规则必须应用于整个命题，而不能应用于命题的某一个部分；或者说，这八条规则必须应用于主联结词，而不能应用于非主联结词。正因为此，这八条规则被称之为“整推规则”。

请看一个例子：

$$F \wedge G \rightarrow H$$

$$\therefore F \rightarrow H$$

在上面这个“推论”中，结论中的  $F$  似乎是从前提中的  $F \wedge G$  应用化简规则推出来的。但由于  $F \wedge G$  仅仅是前提中的一个部分，也就是说， $F \wedge G$  中的“ $\wedge$ ”不是前提的主联结词，所以，这个推论是对化简规则的误用，因而不能保证该推论的有效性。事实上，这个推论是无效的，我们可以用短真值表方法加以验证：

$$(F \wedge G \rightarrow H) \rightarrow (F \rightarrow H)$$

$$\begin{array}{ccccc} T & F & F & T & F \\ F & T & F & F & T \\ \end{array}$$

此赋值没有导致矛盾，故此推论是无效的。

再看一个例子：

$$(F \rightarrow H) \wedge G$$

$$\therefore F \rightarrow H$$

由于这个推论的前提在整体上是一个合取命题，也就是说，前提的主联结词是“ $\wedge$ ”，所以这个推论是对化简规则的正确应用，因而是有效的。

### 3.1.2 八条整推规则的应用

依据前一小节给出的八条整推规则，我们可以证明许多推论的有效性。现在我们就应用这八条整推规则，构造几个具体推论的有效性的证明。先证明本章开头的那个推论，即：

#### 【推论 1】

如果小王研究科学方法论，那么小王学习科学史和逻辑学；小王研究科学方法论；所以小王学习逻辑学。

为了构造此推论的有效性的证明，我们首先对该推论进行符号化。令：

L：小王研究科学方法论；

S：小王学习科学史；

X：小王学习逻辑学。

于是，推论 1 可被符号化为：

$$L \rightarrow S \wedge X$$

$$L$$

∴ X

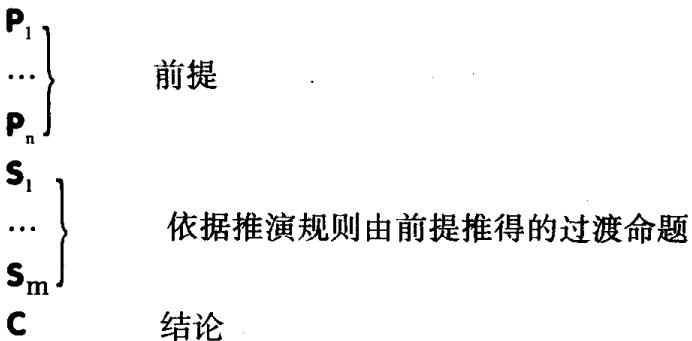
接下来，我们对推论 1 的有效性进行证明，即揭示推论 1 的结论是怎样从前提一步一步地得出来的。证明如下：

- |                                |               |
|--------------------------------|---------------|
| (1) $L \rightarrow S \wedge X$ | 前提            |
| (2) L                          | 前提            |
| (3) $S \wedge X$               | (1) (2), 肯定前件 |
| (4) X                          | (3), 化简       |

以上就是对推论 1 的证明。现在我们给出“证明”的定义：

一个证明是这样一个命题序列：在其中，每一个命题或者是前提，或者是根据推演规则从序列中在前的命题推得的；序列的最后一个命题是结论。

证明的一般模式是：



在具体证明过程中，我们还要求，证明中的每一行的左边写出顺序编号；在每一行的右边给出说明，即说明每一行是怎样得出的。在上面对推论 1 的证明中，前二行(1)和(2)是前提，最后一行(4)是结论。行(3)是由前提推出的过渡命题，相当于上面模式中的 S。每一行的右边都附有说明。对行(3)的说明是“(1), (2), 肯定前件”，意为：(3)是根据肯定前件规则从(1)和(2)推得的。(4)的说明是“(3), 化简”，意为，(4)是根据化简规则从(3)推得的。为了论述简捷，在对证明过程的说明中可以采用推理规则的简称，如“肯定前件”可以简称为“肯前”，“否定后件”可以简称为“否后”，“否定析取支”可以简称为“否析”，等等。

### 【推论 2】

如果他能上大学少年班，那么他智力优越；他上大学少年班或者上技术学校；如果他智力优越，那么他打算将来从事脑力工作；所以，他上技术学校；因为他不打算将来从事脑力工作。

我们通过以下步骤证明推论 2 的有效性：

步骤 1：将推论符号化。令：

D：他上大学少年班；

Z：他智力优越；

J: 他上技术学校;

N: 他打算将来从事脑力工作。

于是, 推论 2 被符号化为:

$$D \rightarrow Z$$

$$D \vee J$$

$$Z \rightarrow N$$

$$\neg N$$

$$\therefore J$$

步骤 2: 分析结论怎样能从前提中推出。一般采用从结论向前提逆推的办法, 也叫做“目标分析”的方法。(i) 我们的目标命题是结论 J, 而惟一含有 J 的前提是  $D \vee J$ ; 为从此前提得出 J, 需要依据否定析取支规则, 并且需要  $\neg D$ 。(ii) 既然前提中没有  $\neg D$ , 那么,  $\neg D$  只能从另一含有 D 的前提  $D \rightarrow Z$  中得到; 为从此前提得到  $\neg D$  只能依据否定后件规则和  $\neg Z$ 。(iii) 既然前提中没有  $\neg Z$ , 那么  $\neg Z$  只能从另一含有 Z 的前提  $Z \rightarrow N$  中得到; 为从此前提中得到  $\neg Z$ , 需要依据否定后件规则和  $\neg N$ ; 而前提中恰好有  $\neg N$ 。(iv) 整理从前提得出结论的步骤, 即: 首先对前提  $Z \rightarrow N$  和  $\neg N$  应用否定后件规则得出  $\neg Z$ , 再对前提  $D \rightarrow Z$  和  $\neg Z$  应用否定后件规则得出  $\neg D$ , 然后对前提  $D \vee J$  和  $\neg D$  应用否定析取支规则得出结论 J。

步骤 3: 写出证明, 即

- |     |                   |             |
|-----|-------------------|-------------|
| (1) | $D \rightarrow Z$ | 前提          |
| (2) | $D \vee J$        | 前提          |
| (3) | $Z \rightarrow N$ | 前提          |
| (4) | $\neg N$          | 前提          |
| (5) | $\neg Z$          | (3) (4), 否后 |
| (6) | $\neg D$          | (1) (5), 否后 |
| (7) | J                 | (2) (6), 否析 |

以上就是关于推论 2 的有效性的证明。需要指出的是, 对于一个推论的有效性的证明方法常常不止一种。例如, 对推论 2, 我们还可将行(5)和行(6)改为:

- |     |                   |              |
|-----|-------------------|--------------|
| (5) | $D \rightarrow N$ | (1) (3), 三段论 |
| (6) | $\neg D$          | (4) (5), 否后  |

这样也可以得出行(7)。这两种证明推论 2 的方法都是正确的, 无论采用哪一种都行。不过, 当不同的证明方法有明显的繁简之分时, 我们当然应当采用比较简单的证明方法。

### 【推论 3】

如果李某家庭幸福, 那么他有一个好妻子和一个好儿子; 如果李某有一个好妻子或

者有一个好朋友，那么他工作不吃力；李某工作吃力或者心情愉快；既然李某家庭生活幸福并且他练太极拳；所以李某的心情愉快。

步骤1：将推论符号化。令：

- J: 李某家庭生活幸福；
- Q: 李某有一个好妻子；
- E: 李某有一个好儿子；
- P: 李某有一个好朋友；
- G: 李某工作吃力；
- X: 李某心情愉快；
- L: 李某练太极拳。

推论3的符号化为：

$$\begin{aligned} & J \rightarrow Q \wedge E \\ & Q \vee P \rightarrow \neg G \\ & G \vee X \\ & J \wedge L \\ \therefore & X \end{aligned}$$

步骤2：分析结论怎样能从前提中推出。(i) 我们想得到结论X，并且惟一含有X的前提是 $G \vee X$ ；要想从此前提得到X，需要用否析规则和 $\neg G$ 。(ii) 既然前提中没有 $\neg G$ ，那么 $\neg G$ 只能从前提 $Q \vee P \rightarrow G$ 得到，这就需要用肯前规则和 $Q \vee P$ 。(iii) 既然前提中没有 $Q \vee P$ ，那么我们考虑从其他前提中得到 $Q \vee P$ ，而其他前提中没有一个含有 $Q \vee P$ ，因此只能寻找间接的途径。我们知道在八条整推规则中，能够得出析取式的规则有两条。一条是二难规则，另一条是附加规则。使用二难规则时需要两个蕴涵式，蕴涵式的后件分别是所要得到的那两个析取支，在这里即是Q和P。既然前提中没有这两个蕴涵式，那么，在此不能用二难规则，只能使用附加规则。(iv) 要想用附加规则得到 $Q \vee P$ ，我们必须有Q或P；然而，在前提中既没有Q，也没有P，我们只能考虑从前提 $J \rightarrow Q \wedge E$ 得到Q。(v) 如果能得到 $Q \wedge E$ ，便可由化简规则得到Q；而要得到 $Q \wedge E$ ，可对前提 $J \rightarrow Q \wedge E$ 使用肯前规则，因而需要有J。(vi) 既然前提中没有J，我们考虑从另一含有J的前提 $J \wedge L$ 得到J；为此需要对 $J \wedge L$ 使用化简规则。(vii) 综合以上分析，便知如何从前提中推得结论：首先通过化简从前提 $J \wedge L$ 得出J；通过肯前从前提 $J \rightarrow Q \wedge E$ 得到 $Q \wedge E$ ；然后通过化简得到Q；再通过附加得到 $Q \vee P$ ，通过肯前从前提 $Q \vee P \rightarrow \neg G$ 得出 $\neg G$ ；最后通过否析由前提 $G \vee X$ 得出X。

步骤3：写出证明：

- |                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| (1) $J \rightarrow Q \wedge E$    | 前提 |
| (2) $Q \vee P \rightarrow \neg G$ | 前提 |

(3) $G \vee X$	前提
(4) $J \wedge L$	前提
(5) $J$	(4), 化简
(6) $Q \wedge E$	(1) (5), 肯前
(7) $Q$	(6), 化简
(8) $Q \vee P$	(7), 附加
(9) $\neg G$	(2) (8), 肯前
(10) $X$	(3) (9), 否析

### 习题 3.1

一、指出以下每一推论是否使用了八条整推规则之一；若使用，请说明使用了哪一条规则。

- |   |  |
|---|--|
| 1. $B \vee D$   | 2. $(R \vee S) \vee (M \vee N)$              |
| $\therefore (B \vee D) \vee (R \wedge B)$                 | $\therefore R \vee S$                        |
| 3. $\neg (O \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow N)$ | 4. $A \vee B \rightarrow C$                  |
| $\neg (P \rightarrow N)$                                  | $C \rightarrow B \wedge D$                   |
| $\therefore O \rightarrow P$                              | $\therefore A \vee B \rightarrow B \wedge D$ |
| 5. $(S \rightarrow T) \rightarrow U$                      | 6. $J \rightarrow K \wedge L$                |
| $S$   | $M \vee N \rightarrow K \wedge Q$            |
| $\therefore T \rightarrow U$                              | $J \vee (M \vee N)$                          |
| 7. $(A \rightarrow D \wedge N) \wedge R$                  | $\therefore (K \wedge L) \vee (K \wedge Q)$  |
| $\therefore R$  | 8. $(\neg J \rightarrow M) \vee (R \vee Q)$  |
|   | $\neg (R \vee Q)$                            |
|   | $\therefore \neg J \rightarrow M$            |
| 9. $B \wedge S \rightarrow F$                             |  |
| $S \vee D \rightarrow F$                                  |  |
| $(B \wedge S) \wedge (S \vee D)$                          |  |
| $\therefore F$  |  |

二、从以下各组前提中能得出什么结论？为得出结论使用哪条整推规则？

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1. $D \wedge G \rightarrow (R \rightarrow S)$ | 2. $F \vee G$                   |
| $\neg (R \rightarrow S)$                      |                                 |
| 3. $A \rightarrow B \wedge C$                 | 4. $M \vee N \rightarrow O$     |
| $A \wedge C \rightarrow D$                    | $P \vee Q \rightarrow N \vee M$ |

- (M ∨ N) ∨ (P ∨ Q)
5.  $\neg(R \rightarrow S)$   
T → S  
6.  $\neg(U \wedge V) \rightarrow W \wedge \neg X$   
 $\neg(U \wedge V)$
7.  $(J \rightarrow K \wedge \neg L) \wedge I$   
8.  $\neg(E \vee T) \vee (B \vee C)$   
 $\neg(B \vee C)$

三、用八条整推规则构造以下推论的有效性的证明。

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\neg R \rightarrow (H \rightarrow T)$<br>R → H<br>T → S<br>$\neg H$<br>$\therefore H \rightarrow S$   | 2. $B \rightarrow \neg A$<br>$B \wedge (C \rightarrow D)$<br>$A \vee C$<br>$\therefore D$   |
| 3. $F \vee G \rightarrow (H \rightarrow (I \leftrightarrow K))$<br>H ∧ I<br>$H \vee M \rightarrow F$<br>$\therefore I \leftrightarrow K$          | 4. $\neg M \rightarrow (N \rightarrow L)$<br>J → K<br>$\neg M$<br>$M \vee (N \vee J)$<br>$\therefore L \vee K$  |
| 5. $\neg P \rightarrow (R \rightarrow \neg Q)$<br>P → $\neg Q$<br>$\neg S \vee \neg R \rightarrow \neg \neg Q$<br>$\neg S$<br>$\therefore \neg R$ | 6. $\neg P \vee \neg Q \rightarrow \neg (R \rightarrow S)$<br>$\neg P$<br>$(R \rightarrow S) \vee (T \rightarrow U)$<br>$\neg U$<br>$\therefore \neg T$ |
| 7. $\neg X \rightarrow Y$<br>X → $\neg Z$<br>$\neg \neg Z \wedge W$<br>$\therefore Y \wedge W$  | 8. $\neg \neg Q$<br>$((P \vee Q) \vee (\neg O \vee \neg S)) \wedge R$<br>$\neg (P \vee Q)$<br>$\therefore \neg S$                                       |
| 9. B<br>$\therefore (((D \wedge C) \vee (E \vee B)) \vee (E \rightarrow B)) \vee F$   | 10. E → F ∧ G<br>E ∧ H<br>I ∨ K<br>$F \vee J \rightarrow \neg I$<br>$\therefore K$  |
| 11. $(L \rightarrow M) \vee N$<br>$(L \rightarrow M) \rightarrow O$<br>$\neg O \wedge \neg J$<br>$N \rightarrow J \vee M$                         | 12. U ∧ V<br>$U \vee W \rightarrow (U \rightarrow X)$<br>U → Y<br>$\therefore (Y \wedge X) \wedge V$  |

$\therefore M$	
13. $F \rightarrow G$	14. $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \rightarrow (A \wedge C \rightarrow (C \rightarrow D))$
$I \vee F \rightarrow (H \rightarrow J)$	A
$\neg H \wedge I$	$D \vee B \rightarrow E$
$G \rightarrow H$	C
$\therefore F \rightarrow J$	$\therefore E \vee B$

#### 四、先将以下推论符号化，然后构造它们的有效性的证明。

1. 或者如果甲当选校长那么他将改善学生生活，或者学生失望；倘若如果甲当选校长那么他将改善学生生活，那么学生拥护甲；如果学生失望，那么学生自由散漫；所以学生拥护甲；因为学生没有自由散漫。

2. 如果北京队胜或者上海队败，那么如果广州队胜那么广州队为冠军；如果辽宁队胜，那么上海队败并且广州队胜；或者辽宁队胜或者天津队胜；天津队败了；所以，广州队为冠军。

3. 市长管理有方或者增加警察；如果市长管理有方，那么犯罪率降低并且交通事故减少；如果物价稳定，那么群众情绪稳定；事实上，没有增加警察；所以或者犯罪率降低并且交通事故减少，或者群众情绪稳定。

4. 如果小刘参加短跑比赛，那么小陈参加长跑比赛；如果小孙参加跳高比赛，那么小赵参加跳远比赛；如果小陈参加长跑比赛或者小赵参加跳远比赛，那么甲班比赛得分将提高；如果甲班比赛得分提高，那么甲班同学受到鼓舞；或者小刘参加短跑比赛或者小孙参加跳高比赛；所以甲班比赛得分提高并且甲班同学受到鼓舞。

5. 如果医生对病人施用了镇静剂，那么如果病人喝酒那么病人在冒险；如果医生对病人施用了镇静剂，那么如果病人在冒险那么医生的工作无效；既然医生给病人施用了镇静剂；所以，如果病人喝酒那么医生的工作无效。

6. 如果胎儿是人并且杀人是错误的，那么人工流产是错误的；或者胎儿是人并且杀人是错误的，或者称赞人工流产的人是有理的；既然人工流产不错；所以，称赞人工流产的人是有理的，或者胎儿不是人。

## 3.2 十条置换规则

上一节我们引进了八条整推规则。通过这八条整推规则，我们可以证明一些命题推论的有效性。但是以为用这八条整推规则可以证明所有有效的命题推论则是错误的。事实上，有许多有效的命题推论仅由这八条整推规则是不能证明的。例如推论：

某甲不但没有评为先进工人反而受到批评；如果某甲受到批评，那么他或者产品质量低劣，或者产品数量不足；如果某甲或者产品数量不足，或者产品质量低劣，那么他

被罚款；所以，某甲被罚款。

首先对这个推论符号化。令：

M：某甲被评为先进工人；

N：某甲受到批评；

L：某甲产品质量低劣；

O：某甲产品数量不足；

P：某甲被罚款。

这个推论可被符号化为：

$$\neg M \wedge N$$

$$N \rightarrow L \vee O$$

$$O \vee L \rightarrow P$$

$$\therefore P$$

我们即将看到，这个推论的有效性是不难被证明的。然而仅仅由八条整推规则却不能达到此目的。初看起来，似乎可以对第二个和第三个前提使用假言三段论规则，从而得到  $N \rightarrow P$ ，然后再通过肯前规则得到 P。但是，第二个前提的后件  $L \vee O$  和第三个前提的前件  $O \vee L$  并不完全相同，故对它们不能应用假言三段论规则。本章的目的在于建立一个能够证明任何有效命题推论的逻辑系统，为此我们需要增添新的推演规则。在这一节里，我们将增加十条置换规则。在列举这十条置换规则之前，有必要说明什么是置换规则。

### 3.2.1 什么是置换规则

在命题逻辑中，置换规则的一般表述如下：

对于任何命题 **P**，无论它是以整个命题出现，还是作为一个命题的一部分出现，都可用与它重言等值的命题 **Q** 来替换。

对此规则的有效性的严格证明要用到数学归纳法，这一证明将在第八章给出。在此，我们给出一个不太严格但比较直观的说明。此说明分两种情况进行。

第一种情况，**P** 作为整个命题出现。既然已知 **P** 与 **Q** 重言等值，即在任何真值指派下，**P** 和 **Q** 要么同为真，要么同为假，那么，通过用 **Q** 来置换 **P** 进行推演，绝不会出现前提 **P** 真而结论 **Q** 假的情形。因此，在这种情况下，置换规则能够保证推论的有效性。

第二种情况，**P** 作为某一命题的一部分出现。我们把那个以 **P** 作为其部分的真值函项复合命题记为  $\emptyset(\mathbf{P})$ 。现在保持  $\emptyset(\mathbf{P})$  的其他部分不变，仅仅用 **Q** 替换  $\emptyset(\mathbf{P})$  中的 **P**，从而得到  $\emptyset(\mathbf{Q})$ 。既然 **P** 与 **Q** 在任何真值指派下真值相同，并且  $\emptyset(\mathbf{P})$  和  $\emptyset(\mathbf{Q})$  这两个真值函项复合命题的真值惟一取决于其支命题的真值，而它们所有的支命题都是真

值相等的。因此， $\emptyset(P)$  和  $\emptyset(Q)$  在任何真值指派下也是真值相等的。这使得从  $\emptyset(P)$  到  $\emptyset(Q)$  的推演绝不会出现前提真而结论假的情形。因此，在这种情况下，置换规则也保证推论的有效性。

上节讲过，八条整推规则只能应用于整个命题，而不能应用于命题的一部分。现在我们看到，置换规则不仅能应用于整个命题，而且能够应用于命题的一部分。可见，置换规则比八条整推规则在使用上所受的限制要少，因此使用起来更加方便。例如，由前提  $K \wedge K \rightarrow O$ ，不能通过化简规则推出  $K \rightarrow O$ ，但却可以通过置换规则推出这个结论，如果我们知道  $K \wedge K$  和  $K$  是重言等值的。

由于任何一个重言等值式的左右两支是重言等值的，根据置换规则，任何重言等值式的左右两支都是可以互相置换的。然而，重言等值式是无穷多的。例如  $P \leftrightarrow P \wedge P$ 、 $P \leftrightarrow (P \wedge P) \wedge P$ 、 $P \leftrightarrow ((P \wedge P) \wedge P) \wedge P$ ……都是重言等值式。本章所要建立的演绎系统并不打算引入如此众多的置换规则作为出发点，我们仅仅引入十条比较常用的置换规则。这十条置换规则对于我们的推演系统已经足够了。下面就逐一介绍这十条规则。

### 3.2.2 交换

根据重言式

$$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$$

和

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$$

我们有规则：

$P \vee Q$  和  $Q \vee P$  可以相互置换。

$P \wedge Q$  和  $Q \wedge P$  可以相互置换。

这条规则包括两个部分，前一部分叫做“析取交换”，后一部分叫做“合取交换”。由于置换规则不仅可以用于整个命题，也可用于命题的部分，因此以下推论都是这条置换规则的正确应用：

【推论 1】

$$A \vee (B \rightarrow C)$$

$$\therefore (B \rightarrow C) \vee A$$

【推论 3】

$$(H \vee I) \wedge (I \wedge J)$$

$$\therefore (I \wedge J) \wedge (H \vee I)$$

【推论 2】

$$D \rightarrow F \vee G$$

$$\therefore D \rightarrow G \vee F$$

【推论 4】

$$(K \leftrightarrow L) \wedge (L \wedge M)$$

$$\therefore (K \leftrightarrow L) \wedge (M \wedge L)$$

推论 1 是将整个命题进行析取交换；推论 2 是对部分命题进行析取交换；推论 3 是对整个命题进行合取交换；推论 4 是对部分命题进行合取交换。

引进这条置换规则以后，我们便能构造本节开头那个推论的证明了。具体如下：

- |                              |             |
|------------------------------|-------------|
| (1) $\neg M \wedge N$        | 前提          |
| (2) $N \rightarrow L \vee O$ | 前提          |
| (3) $O \vee L \rightarrow P$ | 前提          |
| (4) $L \vee O \rightarrow P$ | (3), 交换     |
| (5) $N \rightarrow P$        | (2) (4) 三段论 |
| (6) $N$                      | (1), 化简     |
| (7) $P$                      | (5) (6) 肯前  |

### 3.2.3 双重否定

根据重言式：

$$P \leftrightarrow \neg \neg P$$

我们有如下置换规则：

$P$  和  $\neg \neg P$  可以相互置换。

以下推论都是双重否定规则的正确应用：

**【推论 5】**

$$\begin{aligned} & D \vee (F \wedge G) \\ \therefore & \neg \neg D \vee (F \wedge G) \end{aligned}$$

**【推论 7】**

$$\begin{aligned} & P \vee Q \rightarrow S \wedge T \\ \therefore & \neg \neg (P \vee Q \rightarrow S \wedge T) \end{aligned}$$

**【推论 6】**

$$\begin{aligned} & L \rightarrow (J \rightarrow \neg \neg K) \\ \therefore & L \rightarrow (J \rightarrow K) \end{aligned}$$

**【推论 8】**

$$\begin{aligned} & \neg \neg (M \leftrightarrow M \vee N) \\ \therefore & M \leftrightarrow M \vee N \end{aligned}$$

推论 5 和推论 6 是将双重否定规则应用于部分命题，推论 7 和推论 8 将双重否定规则应用于整个命题。

### 3.2.4 德摩根律

根据以逻辑学家德摩根命名的两个重言式

$$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

和

$$\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

我们有规则：

$\neg (P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$  可以互相置换。

$\neg (P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$  可以互相置换。

此规则有两个部分，前一部分叫做“否定析取的德摩根律”；后一部分叫做“否定合取的德摩根律”。下面是应用德摩根律的例子。

**【推论 9】**

如果小王是三好学生，那么小王既关心集体又锻炼身体；小王不关心集体或者不锻炼身体；所以，小王不是三好学生。

将此推论符号化。令：

$H$ : 小王是三好学生；

$G$ : 小王关心集体；

$D$ : 小王锻炼身体。

推论 9 的符号化为：

$$H \rightarrow G \wedge D$$

$$\neg G \vee \neg D$$

$$\therefore \neg H$$

接下来构造此推论的证明。首先分析如何从给定前提推出结论：我们要得到  $\neg H$  而惟一含有  $H$  的前提是  $H \rightarrow G \wedge D$ 。因此我们需要使用否后规则并且要有  $\neg(G \wedge D)$ 。在前提中没有  $\neg(G \wedge D)$ ，但是却有  $(\neg G \vee \neg D)$ 。根据德摩根律，由  $(\neg G \vee \neg D)$  可以得到  $\neg(G \wedge D)$ 。

### 【证明】

- |                                |             |
|--------------------------------|-------------|
| (1) $H \rightarrow G \wedge D$ | 前提          |
| (2) $\neg G \vee \neg D$       | 前提          |
| (3) $\neg(G \vee D)$           | (2), 德摩根律   |
| (4) $\neg H$                   | (1) (3), 否后 |

### 【推论 10】

$$\neg(M \wedge N)$$

$$\neg(R \wedge S)$$

$$N$$

$$\therefore \neg(S \vee M)$$

分析：(i) 我们想得到  $\neg(S \vee M)$ ，而  $\neg(S \vee M)$  不能直接由八条整推规则从前提中得到。既然  $\neg(S \vee M)$  是析取式的否定，那么可以根据德摩根律对它进行置换，然后我们根据置换后的结果进行分析。(ii) 根据德摩根律我们从  $\neg(S \vee M)$  得到  $\neg S \wedge \neg M$ 。一眼可以看出， $\neg S \wedge \neg M$  可由  $\neg S$  和  $\neg M$  合取而成。现在我们只需考虑如何从前提中得到  $\neg S$  和  $\neg M$ 。(iii) 惟一含有  $S$  的前提是  $\neg(R \vee S)$ ，由德摩根律可得  $\neg R \wedge \neg S$ ；再由化简得  $\neg S$ 。(iv) 惟一含有  $M$  的前提是  $\neg(M \wedge N)$ ，由德摩根律可得  $\neg M \vee \neg N$ ；再将它与前提  $N$ （先将  $N$  置换为  $\neg \neg N$ ）通过否析规则得  $\neg M$ 。

具体证明如下：

- |                        |    |
|------------------------|----|
| (1) $\neg(M \wedge N)$ | 前提 |
| (2) $\neg(R \vee S)$   | 前提 |

- |                            |             |
|----------------------------|-------------|
| (3) N                      | 前提          |
| (4) $\neg R \wedge \neg S$ | (2), 德摩根    |
| (5) $\neg S$               | (4), 化简     |
| (6) $\neg M \vee \neg N$   | (1), 德摩根    |
| (7) $\neg \neg N$          | (3), 双否     |
| (8) $\neg M$               | (6) (7), 否析 |
| (9) $\neg S \wedge \neg M$ | (5) (8), 合取 |
| (10) $\neg (S \vee M)$     | (9), 德摩根    |

### 3.2.5 假言易位

根据真值表，我们有重言式：

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

于是，我们有置换规则：

$(P \rightarrow Q)$  和  $(\neg Q \rightarrow \neg P)$  可以相互置换。

【推论 11】

$$(X \rightarrow \neg Y) \wedge Z$$

$$\therefore (\neg \neg Y \rightarrow \neg X) \wedge Z$$

【推论 12】

$$\neg (O \vee P) \rightarrow \neg (J \rightarrow K)$$

$$\therefore (J \rightarrow K) \rightarrow O \vee P$$

请注意，从推论 11 的前提  $(X \rightarrow \neg Y) \wedge Z$  应用假言易位规则不能直接得出  $(Y \rightarrow \neg X) \wedge Z$ 。因为根据假言易位规则，被易位的前件和后件要么同时增加一个“ $\neg$ ”，要么同时减少一个“ $\neg$ ”，而不能一个增加一个“ $\neg$ ”，另一个减少一个“ $\neg$ ”。当然，这样得出的结论并不错，但这不是仅仅通过假言易位规则得出的。应用假言易位规则从推论 11 的前提只能得出推论 11 的结论。要想得出  $(Y \rightarrow \neg X) \wedge Z$ ，必须根据双否规则再进行一次置换，即将  $\neg \neg Y$  置换为  $Y$ 。

### 3.2.6 蕴涵

根据真值表，我们有重言式：

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

于是，我们有置换规则：

$(P \rightarrow Q)$  和  $(\neg P \vee Q)$  可以相互置换。

根据这条规则，一个蕴涵式可以置换为一个析取式，这样得到的析取式的左析取支比原来蕴涵式的前件多一个“ $\neg$ ”；一个析取式也可以置换为一个蕴涵式，这样得到的蕴涵式的前件比原来析取式的左析取支少一个“ $\neg$ ”。

下面两个推论都是对蕴涵规则的正确应用。

【推论 13】

- (1)  $B \vee (E \rightarrow I)$  前提  
 (2)  $\neg \neg B \vee (E \rightarrow I)$  (1), 双否  
 $\therefore (3) \neg B \rightarrow (E \rightarrow I)$  (2), 蕴涵

**【推论 14】**

- (1)  $(M \vee N) \wedge (\neg L \rightarrow M)$  前提  
 (2)  $(M \vee N) \wedge (\neg \neg L \vee M)$  (1), 蕴涵  
 $\therefore (3) (M \vee N) \wedge (L \vee M)$  (2), 双否

请注意，从推论 13 的前提  $B \vee (E \rightarrow I)$  应用蕴涵规则不能直接得出其结论  $\neg B \rightarrow (E \rightarrow I)$ 。因为根据蕴涵规则，由析取式得出蕴涵式时，蕴涵式的前件比析取式的左析取支少一个 “ $\neg$ ”。同样地，从推论 14 的前提  $(M \vee N) \wedge (\neg L \rightarrow M)$  应用蕴涵规则不能直接得出其结论  $(M \vee N) \wedge (L \vee M)$ ，因为根据蕴涵规则，由蕴涵式得出析取式时，析取式的左析取支比蕴涵式的前件多一个 “ $\neg$ ”。当然，根据双否规则，结论中多一个 “ $\neg$ ” 和少一个 “ $\neg$ ” 相比，其真值是不变的。然而，仅仅应用蕴涵规则，我们不能将增加一个 “ $\neg$ ” 改为减少一个 “ $\neg$ ”，也不能将减少一个 “ $\neg$ ” 改为增加一个 “ $\neg$ ”。

### 3.2.7 重言

根据真值表，我们有重言式：

$$P \leftrightarrow P \vee P$$

和

$$P \leftrightarrow P \wedge P$$

于是，我们有如下置换规则：

**P** 和 **P**  $\vee$  **P** 可以相互置换。

**P** 和 **P**  $\wedge$  **P** 可以相互置换。

这个规则的前一部分叫做“析取重言”；后一部分叫做“合取重言”。

对推论 15 的证明将用到这个规则。

**【推论 15】**

- $(\neg X \rightarrow \neg Y) \wedge (Z \rightarrow Y)$   
 $\neg Z \rightarrow X$

$\therefore X$

分析：我们注意到，第一个前提可以通过化简分解为  $\neg X \rightarrow \neg Y$  和  $Z \rightarrow Y$ 。我们要得到  $X$ ，或者通过否后规则从  $\neg X \rightarrow \neg Y$  得到，或者通过肯前规则，从前提  $\neg Z \rightarrow X$  得到，这就需要有  $\neg \neg Y$  或  $\neg Z$ 。然而，我们无法得到它们。我们又注意到，如果我们通过假言易位规则从  $Z \rightarrow Y$  得到  $\neg Y \rightarrow \neg Z$ ，那么就可以通过两次使用三段论规则得到  $\neg X \rightarrow X$ ；对  $\neg X \rightarrow X$  使用蕴涵规则可得  $\neg \neg X \rightarrow X$ ，再使用双否规则得到  $X \vee X$ ，最后使用

重言规则推得 X。

证明如下：

- |  |              |
|--|--------------|
| (1) $(\neg X \rightarrow \neg Y) \wedge (Z \rightarrow Y)$ | 前提           |
| (2) $\neg Z \rightarrow X$                                 | 前提           |
| (3) $\neg X \rightarrow \neg Y$                            | (1), 化简      |
| (4) $Z \rightarrow Y$                                      | (1), 化简      |
| (5) $\neg Y \rightarrow \neg Z$                            | (4), 假易      |
| (6) $\neg Y \rightarrow X$                                 | (2) (5), 三段论 |
| (7) $\neg X \rightarrow X$                                 | (3) (6), 三段论 |
| (8) $\neg \neg X \vee X$                                   | (7), 蕴涵      |
| (9) $X \vee X$   | (8), 双否      |
| (10) X   | (9), 重言      |

### 3.2.8 结合

根据真值表，我们有重言式：

$$P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

和

$$P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

于是，我们有如下置换规则：

$P \vee (Q \vee R)$  与  $(P \vee Q) \vee R$  可以相互置换。

$P \wedge (Q \wedge R)$  与  $(P \wedge Q) \wedge R$  可以相互置换。

这个规则的第一部分叫做“析取结合”，第二部分叫做“合取结合”。根据这条规则，我们可以重新安排三个以上的析取支之间的结合关系，也可重新安排三个以上的合取支之间的结合关系。

#### 【推论 16】

$$(D \vee E) \vee F$$

$$\therefore E \vee (F \vee D)$$

构造这个推论的证明，显然需要用到结合规则，但是仅用结合规则还不够，还需要用交换规则。证明如下：

- |                         |         |
|-------------------------|---------|
| (1) $(D \vee E) \vee F$ | 前提      |
| (2) $(E \vee D) \vee F$ | (1), 交换 |
| (3) $E \vee (D \vee F)$ | (2), 结合 |
| (4) $E \vee (F \vee D)$ | (3), 交换 |

另一种证明方法是：

- |                         |         |
|-------------------------|---------|
| (1) $(D \vee E) \vee F$ | 前提      |
| (2) $F \vee (D \vee E)$ | (1), 交换 |
| (3) $(F \vee D) \vee E$ | (2), 结合 |
| (4) $E \vee (F \vee D)$ | (3), 交换 |

### 3.2.9 分配

根据真值表，我们有重言式：

$$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

和

$$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

于是，我们有如下置换规则：

$P \vee (Q \wedge R)$  和  $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  可以相互置换。

$P \wedge (Q \vee R)$  和  $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  可以相互置换。

此规则的前一部分叫做“析取对合取的分配”，后一部分叫做“合取对析取的分配”。通过这条规则，我们可以对由合取词和析取词构成的命题的支命题重新组合，同时改变主联结词。

#### 【推论 17】

$$P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$$

$$P \wedge (Q \vee R)$$

$$P \wedge R \rightarrow R \wedge T$$

$$\therefore R \wedge (S \vee T)$$

分析：我们要得到  $R \wedge (S \vee T)$ 。运用分配律可将它变为  $(R \wedge S) \vee (R \wedge T)$ ，它的两个析取支分别是第一个前提和第三个前提的后件，因此可以考虑使用二难规则。这就需要有一个析取式，它的两个析取支分别是第一个前提的前件和第三个前提的前件，而这个析取式恰好可由第二个前提  $P \wedge (Q \vee R)$  通过分配而得到。

#### 【证明】

- |   |                 |
|---|-----------------|
| (1) $P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$ | 前提              |
| (2) $P \wedge (Q \vee R)$               | 前提              |
| (3) $P \wedge R \rightarrow R \wedge T$ | 前提              |
| (4) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$    | (2), 分配         |
| (5) $(R \wedge S) \vee (R \wedge T)$    | (1) (3) (4), 二难 |
| (6) $R \wedge (S \vee T)$               | (5), 分配         |

### 3.2.10 移出

根据真值表，我们有重言式：

$$(P \wedge Q \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

于是，我们有置换规则：

$(P \wedge Q \rightarrow R)$  和  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$  可以相互置换。

【推论 18】

$$J \wedge K \rightarrow H$$

$$J$$

$$\therefore K \rightarrow H$$

证明如下：

- |                                       |             |
|---------------------------------------|-------------|
| (1) $J \wedge K \rightarrow H$        | 前提          |
| (2) $J$                               | 前提          |
| (3) $J \rightarrow (K \rightarrow H)$ | (1), 移出     |
| (4) $K \rightarrow H$                 | (2) (3), 肯前 |

对于推论 18，我们也可以不用移出规则来证明，即：

- |                                   |             |
|-----------------------------------|-------------|
| (1) $J \wedge K \rightarrow H$    | 前提          |
| (2) $J$                           | 前提          |
| (3) $\neg (J \wedge K) \vee H$    | (1), 蕴涵     |
| (4) $(\neg J \vee \neg K) \vee H$ | (3), 德摩根    |
| (5) $\neg J \vee (\neg K \vee H)$ | (4), 结合     |
| (6) $\neg \neg J$                 | (2), 双否     |
| (7) $\neg K \vee H$               | (5) (6), 否析 |
| (8) $K \rightarrow H$             | (7), 蕴涵     |

对推论 18 可以不用移出规则来证明，这一事实使我们想到，移出规则是否可以省掉？回答是肯定的。下面我们就证明移出规则可由其他规则推出。证明分为两部分。其一，证明从  $P \wedge Q \rightarrow R$  可推出  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ ；其二，证明从  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$  可推出  $P \wedge Q \rightarrow R$ 。

部分一：

- |                                       |          |
|---------------------------------------|----------|
| (1) $P \wedge Q \rightarrow R$        | 前提       |
| (2) $\neg (P \wedge Q) \vee R$        | (1), 蕴涵  |
| (3) $(\neg P \vee \neg Q) \vee R$     | (2), 德摩根 |
| (4) $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$     | (3), 结合  |
| (5) $P \rightarrow (\neg Q \vee R)$   | (4), 蕴涵  |
| (6) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | (5), 蕴涵  |

部分二：

- |                                       |          |
|---------------------------------------|----------|
| (1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | 前提       |
| (2) $\neg P \vee (Q \rightarrow R)$   | (1), 蕴涵  |
| (3) $\neg P \vee (\neg Q \vee R)$     | (2), 蕴涵  |
| (4) $(\neg P \vee \neg Q) \vee R$     | (3), 结合  |
| (5) $\neg (P \wedge Q) \vee R$        | (4), 德摩根 |
| (6) $P \wedge Q \rightarrow R$        | (5), 蕴涵  |

以上表明，移出规则可由蕴涵、德摩根和结合等规则推导出来。除移出规则以外，前面引入的假言移位、否定析取支、否定后件等规则也都可以由本系统的其他规则推导出来。这说明，在我们这个系统中，有些规则在逻辑上是不必要的。但是这些在逻辑上不必要的规则在实际使用上却是十分重要的，它们使许多证明得以简化。我们对推论 18 所作的两种不同的证明就说明了这一点。正是出于这种实用上的考虑，我们这个系统容纳了若干逻辑上不必要的规则。有些逻辑系统则强调推演规则之间的独立性，即强调推演规则之间的不可推演性。这样的系统不容纳逻辑上不必要的规则，其优点在于作为推演出发点的规则较少；缺点在于，使得实际证明过程比较复杂。总之，这两种处理推演规则的方法是各有利弊的。

### 3.2.11 等值

根据真值表，我们有重言式：

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

于是，我们有如下置换规则：

$(P \leftrightarrow Q)$  和  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  可以相互置换。

通过这条规则，我们可以从一个等值式得到两个互逆的蕴涵式的合取，也可以从两个互逆的蕴涵式的合取得到一个等值式。

#### 【推论 19】

$$A \vee B \leftrightarrow \neg C \wedge D$$

$$\neg C \wedge D \rightarrow E \vee F$$

$$\neg (\neg E \rightarrow F)$$

$$\therefore \neg A \wedge \neg B$$

分析：我们要得到  $\neg A \wedge \neg B$ 。前提中同时含有 A 和 B 的是第一个前提的左支  $A \vee B$ 。如果我们能够推得  $\neg (A \vee B)$ ，那么就能通过德摩根律得出结论。我们注意到第一个前提是一个等值式，通过等值规则和化简规则可以由它得出  $A \vee B \rightarrow \neg C \wedge D$ ；而这个蕴涵式的后件  $\neg C \wedge D$  恰好是第二个前提的前件；因而通过三段论便可得到  $A \vee B \rightarrow E \vee F$ 。现在，为要得到  $\neg (A \vee B)$  就需要得到  $\neg (E \vee F)$ ，而  $\neg (E \vee F)$  可由第三个前提

$\neg(\neg E \rightarrow F)$  通过蕴涵规则和双否规则得到。

证明：

- |  |             |
|--|-------------|
| (1) $A \vee B \leftrightarrow \neg C \wedge D$   | 前提          |
| (2) $\neg C \wedge D \rightarrow E \vee F$   | 前提          |
| (3) $\neg(\neg E \rightarrow F)$   | 前提          |
| (4) $(A \vee B \rightarrow \neg C \wedge D) \wedge (\neg C \wedge D \rightarrow A \vee B)$ | (1), 等值     |
| (5) $A \vee B \rightarrow \neg C \wedge D$   | (4), 化简     |
| (6) $A \vee B \rightarrow E \vee F$  | (2)(5), 三段论 |
| (7) $\neg(\neg \neg E \vee F)$   | (3), 蕴涵     |
| (8) $\neg(E \vee F)$   | (7), 双否     |
| (9) $\neg(A \vee B)$   | (6)(8), 否后  |
| (10) $\neg A \wedge \neg B$  | (9), 德摩根    |

请注意，由以上推论中的(1)应用等值规则不能直接得出(5)。因为根据等值规则，由一个等值式只能推出两个互逆的蕴涵式的合取，而不能直接推出该合取式的某个合取支。要得出该合取式的某个合取支，必须再经过化简。

### 【推论 20】

$$J \wedge K$$

$$J \rightarrow (K \rightarrow L)$$

$$J \rightarrow (K \rightarrow H)$$

$$\therefore L \leftrightarrow H$$

分析：我们要得到  $L \leftrightarrow H$ 。而  $L \leftrightarrow H$  可由  $(L \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow L)$  通过等值规则得到。因此，我们只要分别得到  $L \rightarrow H$  和  $H \rightarrow L$  便可通过合取规则和等值规则得到所要的结论。我们注意到，通过移出律可以将第二个前提和第三个前提分别置换为  $J \wedge K \rightarrow L$  和  $J \wedge K \rightarrow H$ ；而另一个前提  $J \wedge K$  恰好是它们的前件；这样，我们便可通过肯前规则得到  $L$  和  $H$ 。接下来，我们考虑能否从  $L$  和  $H$  得出  $L \rightarrow H$  和  $H \rightarrow L$ 。根据蕴涵律， $L \rightarrow H$  和  $H \rightarrow L$  可以分别从  $\neg L \vee H$  和  $\neg H \vee L$  得到。而  $\neg L \vee H$  可以由  $H$  通过附加规则得到， $\neg H \vee L$  可以由  $L$  通过附加规则得到。

### 【证明】

- |                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| (1) $J \wedge K$                      | 前提         |
| (2) $J \rightarrow (K \rightarrow L)$ | 前提         |
| (3) $J \rightarrow (K \rightarrow H)$ | 前提         |
| (4) $J \wedge K \rightarrow L$        | (2), 移出    |
| (5) $J \wedge K \rightarrow H$        | (3), 移出    |
| (6) $L$                               | (1)(4), 肯前 |

(7) H	(1)(5), 肯前
(8) $\neg H \vee L$	(6), 附加
(9) $H \rightarrow L$	(8), 蕴涵
(10) $\neg L \vee H$	(7), 附加
(11) $L \rightarrow H$	(10), 蕴涵
(12) $(L \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow L)$	(9)(11), 合取
(13) $L \leftrightarrow H$	(12), 等值

请注意，从上面的(9)和(11)不能应用等值规则直接得出(13)，因为根据等值规则，可以与等值式置换的不是两个互逆的蕴涵式，而是两个互逆的蕴涵式的合取。

### 习题 3.2

一、指出下列推论中哪些使用了十条置换规则之一？使用了哪一条？

1.  $(A \vee B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow D)$   
 $\therefore (\neg C \rightarrow \neg (A \vee B)) \rightarrow (B \rightarrow D)$
2.  $\neg E \rightarrow \neg F \wedge \neg G$   
 $\therefore \neg E \rightarrow \neg F \wedge \neg \neg \neg G$
3.  $\neg ((J \vee K) \vee (L \vee M))$   
 $\therefore \neg (J \wedge K) \vee \neg (L \wedge M)$
4.  $\neg S \vee \neg T \rightarrow U \vee T$   
 $\therefore \neg (\neg S \vee \neg T) \vee (U \vee T)$
5.  $L \wedge L \rightarrow (L \rightarrow L)$   
 $\therefore L \rightarrow (L \rightarrow L)$
6.  $(K \wedge M) \vee (N \wedge O)$   
 $\therefore ((K \wedge M) \vee N) \wedge ((K \wedge M) \vee O)$
7.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \rightarrow S \wedge P)$   
 $\therefore (P \rightarrow Q) \wedge R \rightarrow S \wedge P$
8.  $U \wedge ((V \vee W) \wedge X)$   
 $\therefore ((V \vee W) \wedge X) \wedge U$
9.  $W \vee X \leftrightarrow (Y \leftrightarrow W)$   
 $\therefore (W \vee X \rightarrow (Y \leftrightarrow W)) \wedge ((Y \leftrightarrow W) \rightarrow W \vee X)$
10.  $(I \wedge J) \vee K$   
 $\therefore I \wedge (J \vee K)$
11.  $(Z \vee A) \wedge (Z \vee B)$   
 $\therefore Z \wedge (A \vee B)$

$$12. (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$$\therefore (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$13. C \wedge (D \vee C) \rightarrow E$$

$$\therefore (C \rightarrow D \vee C) \rightarrow E$$

$$14. \neg (\neg C \vee \neg J) \wedge \neg \neg (C \rightarrow J)$$

$$\therefore \neg ((\neg C \vee \neg J) \vee \neg (C \rightarrow J))$$

$$15. ((I \vee K) \vee (K \rightarrow L)) \vee (L \vee T)$$

$$\therefore (I \vee K) \vee ((K \rightarrow L) \vee (L \vee T))$$

$$16. ((O \rightarrow I) \wedge (I \rightarrow A)) \vee ((O \rightarrow I) \wedge (O \rightarrow A))$$

$$\therefore (O \rightarrow I) \wedge ((I \rightarrow A) \vee (O \rightarrow A))$$

二、用八条整推规则和十条置换规则证明以下推论是有效的。

$$1. J \vee K \rightarrow N$$

$$\neg M$$

$$N \rightarrow M$$

$$\therefore \neg K$$

$$2. (\neg A \rightarrow S) \wedge (T \rightarrow A)$$

$$\neg (\neg T \wedge S)$$

$$\therefore A$$

$$3. M \rightarrow B \vee (L \vee S)$$

$$4. J \rightarrow (K \rightarrow L)$$

$$S \vee (B \vee L) \rightarrow (O \rightarrow S)$$

$$S \rightarrow \neg L$$

$$\therefore M \wedge O \rightarrow S$$

$$S$$

$$\therefore J \rightarrow \neg K$$

$$5. R \rightarrow \neg S \wedge T$$

$$6. \neg L$$

$$T \vee (R \wedge \neg S)$$

$$I \vee J \rightarrow K$$

$$\therefore T$$

$$\neg (K \wedge \neg L)$$

$$\neg I \rightarrow U$$

$$\therefore U$$

$$7. \neg M$$

$$8. (P \vee \neg Q) \vee R$$

$$\neg Q$$

$$\neg P \vee (Q \wedge \neg P)$$

$$M \vee Q \leftrightarrow N$$

$$\therefore Q \rightarrow R$$

$$\therefore \neg (N \wedge S)$$

$$9. R \rightarrow S \wedge T$$

$$10. A \wedge C \rightarrow K$$

$$\neg S$$

$$(A \rightarrow K) \rightarrow R$$

$$R \leftrightarrow U$$

$$\therefore C \rightarrow R$$

$$\therefore \neg U$$

$$11. B \wedge (C \vee J)$$

$$12. J \rightarrow (H \wedge R \rightarrow S \vee T)$$

$$B \rightarrow (C \rightarrow K \wedge T)$$

$$\neg S$$

$B \wedge J \rightarrow \neg (K \vee T)$	$(R \wedge H) \wedge J$
$\therefore (K \wedge T) \vee (\neg K \wedge \neg T)$	$\therefore T$
13. $\neg (M \vee O) \rightarrow N$	14. $H \rightarrow I \wedge K$
$M \rightarrow U$	$I \rightarrow O \vee H$
$\neg O$	$\neg O$
$\therefore U \vee N$	$\therefore H \leftrightarrow I$

### 三、把下列推论符号化，并用八条整推规则和十条置换规则给出每一推论的有效性的证明。

1. 如果世界上存在着邪恶，那么，上帝或者不愿意清除邪恶，或者不能清除邪恶；如果上帝是仁慈的，那么上帝愿意清除邪恶；如果上帝是全能的，那么上帝能够清除邪恶；如果上帝存在，那么上帝既是仁慈的，又是全能的；或者世界上没有战争，或者世界上有邪恶；所以上帝不存在；因为世界上有战争。

2. 如果人有自由意志，那么人的行为不是因果性的；如果人有自由意志，那么，如果人的行为不是因果性的，那么人的行为不能被预料；此外，如果人的行为不是因果性的，那么，如果人的行为不能被预料，那么人的行为后果也不能被预料；功利主义是一种完善的伦理学理论，仅当人的行为后果是能被预料的；所以，如果人有自由意志，那么功利主义不是完善的伦理学理论。

3. 某甲不能既有一份全日制工作同时又进行全日制学习；但是如果某甲不进行全日制学习，那么他不能在今年毕业；如果他不能在今年毕业，那么他不能得到一份全日制工作；如果某甲用钱不仔细，那么，如果他要交纳学费，那么他就要有一份全日制工作；所以，如果某甲交纳学费，那么他用钱仔细。

4. 如果 x 市的政策是被精心制定并且是被有力贯彻的，那么告状的人会少得多；倘若如果 x 市的政策是被有力贯彻的那么告状人会少得多，那么，机关工作人员将减少并且机关工作效率将提高；然而，机关工作效率没有提高；所以，x 市的政策不是被精心制定的。

5. 工人信赖他仅当他说话算数；然而，他是经理而不说话算数，或者，他是经理而没有组织能力；如果他没有组织能力，那么工人不服从他；如果并非工人既信赖他又服从他，那么他苦恼；所以他是经理并且苦恼。

四、证明假言易位规则、否定析取支规则和否定后件规则是可以由其他规则推出来的。

### 3.3 条件证明规则

#### 3.3.1 什么是条件证明规则

到目前为止，我们已经有了十八条规则。但是，仅用这十八条规则还不能给出所有有效命题推论的证明。如

【推论 1】

$\neg J \vee K$

$\therefore J \rightarrow J \wedge K$

用真值表方法可以表明，推论 1 是有效的。但是，我们仅用十八条规则不能证明它的有效性。为了证明推论 1 的有效性，我们可以这样来考虑：

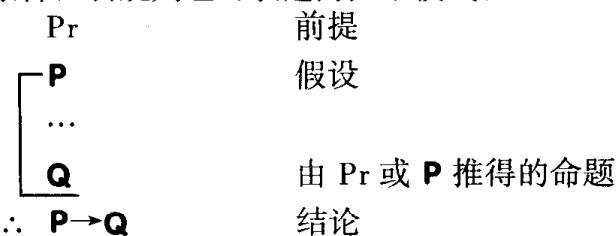
推论 1 是有效的，当且仅当，它的前提真时，结论不可能假。它的结论是一个蕴涵式，一个蕴涵式不可能假，也就是，当它的前件真时，后件不可能假。现在，我们把结论中的前件  $J$  作为假设给出。如果能够由前提和此假设有效地推出结论的后件  $J \wedge K$ ，这就意味着，在原来的前提之下，当  $J$  真时， $J \wedge K$  不可能假（这是有效推论的性质所决定的）；这也表明，当原有前提为真时，原结论  $J \rightarrow J \wedge K$  不可能是假的。这样，推论 1 的有效性就被证明了。

根据以上道理，我们引入一条新的推演规则，即条件证明规则。

条件证明规则：

如果从前提  $Pr$  或假设  $P$  推出  $Q$ ，那么，仅从前提  $Pr$  可以推得  $P \rightarrow Q$ 。

条件证明规则也可表达为如下模式：



在上面模式中。 $Pr$  表示所有前提的合取，从假设  $P$  开始到  $Q$  为止的直线标示出假设的范围即假设域。假设域的第一行是假设，亦即结论的前件；假设域的最后一行是结论的后件。假设域中的任何一行，或者是假设，或者是由假设或前提推出的。作为结论的蕴涵式  $P \rightarrow Q$  在假设域之外。这表明，此结论不依赖于假设  $P$ ，而仅仅依赖于前提  $Pr$ ；或者说，对于该结论来说，假设  $P$  是被撤除的。

现在我们就用条件证明规则证明推论 1 的有效性。

证明：

(1) $\neg J \vee K$	前提
(2) $J$	条件假设
(3) $\neg \neg J$	(2), 双否
(4) $K$	(1) (3), 否析
(5) $J \wedge K$	(2) (4), 合取
(6) $J \rightarrow J \wedge K$	(2) – (5), 条件证明

上面行(6)右边的说明是指，行(6)是通过条件证明规则从(2)到(5)得出的。行(6)在假设域之外表明行(6)不依赖于假设  $J$ ，而仅仅依赖于前提；也就是说，假设  $J$  是被撤除的。

条件证明规则与其他规则相比，它的最大特点在于，先引入假设然后撤除假设。引入假设可以增加推演的前提，从而使原来无法证明的推论得以证明，或者使原来比较复杂的证明得以简化。撤除假设的目的在于保证结论是仅由前提得出的。对于条件证明规则的合理性，还可以用以下方式加以说明。我们考虑以下几个推论模式：

【模式 1】

Pr

P

∴ Q

我们知道，模式 1 是有效的，当且仅当

【模式 2】

Pr  $\wedge$  P  $\rightarrow$  Q

是一个重言式。根据移出律，模式 2 重言等值于

【模式 3】

Pr  $\rightarrow$  (P  $\rightarrow$  Q)

而模式 3 是一个重言式，当且仅当

【模式 4】

Pr

∴ P  $\rightarrow$  Q

是有效的。因此，模式 4 是有效的，当且仅当，模式 1 是有效的。条件证明规则就是把对模式 4 的证明变为对模式 1 的证明。

值得强调的是，由条件证明所得的结论一定是蕴涵式，而且它的前件是假设域的第一行，它的后件是假设域的最后一行。可见，条件证明规则最适于证明那些结论为蕴涵式的推论。

### 3.3.2 条件证明规则的应用

在本小节，我们将应用条件证明规则证明一些推论的有效性。

#### 【推论 2】

如果一个人自信，那么他有闯劲但不易保持谦虚；如果一个人怯懦，那么他容易保持谦虚；所以，如果一个人自信，那么他不怯懦。

将此推论符号化。令：

$Z$ ：一个人自信；

$C$ ：他有闯劲；

$B$ ：他易保持谦虚；

$Q$ ：他怯懦。

此推论被符号化为：

$$Z \rightarrow C \wedge \neg B$$

$$Q \rightarrow B$$

$$\therefore Z \rightarrow \neg Q$$

分析：(i)既然此推论的结论是一个蕴涵式，并且我们不能一眼看出如何从前提推得它，那么，我们就考虑使用条件证明规则，即考虑证明下面推论的有效性：

$$Z \rightarrow C \wedge \neg B \quad \text{前提}$$

$$Q \rightarrow B \quad \text{前提}$$

$$Z$$

$$\therefore \neg Q$$

(ii) 不难看出，对假设  $Z$  和第一个前提使用肯前规则便可得到  $C \wedge \neg B$ ，再通过化简得到  $\neg B$ ，然后将  $\neg B$  和第二个前提使用否后规则便得到  $\neg Q$ 。(iii)通过条件证明规则将假设  $Z$  和  $\neg Q$  用“ $\rightarrow$ ”联结起来便得到所需要的结论。

证明如下：

- |     |                                 |                 |
|-----|---------------------------------|-----------------|
| (1) | $Z \rightarrow C \wedge \neg B$ | 前提              |
| (2) | $Q \rightarrow B$               | 前提              |
| (3) | $Z$                             | 条件假设            |
| (4) | $C \wedge \neg B$               | (1) (3), 肯前     |
| (5) | $\neg B$                        | (4), 化简         |
| (6) | $\neg Q$                        | (2) (5), 否后     |
| (7) | $Z \rightarrow \neg Q$          | (3) - (6), 条件证明 |

注意，不要把假设域的标志忘掉或画错。为了避免此类错误，我们最好一作出假设便在该行编号的左边画一条短横线；一推出结论的后件，便在该行编号的下边画一条短

横线；然后再画一条垂直线将这两条短横线连结起来。这三条直线一方面标示出假设域，另一方面表明，对于假设域以外的蕴涵式结论来说，该假设域中的假设是被撤除的。

下面一个推论的结论不是一个蕴涵式，但在对它的证明过程中需要推出蕴涵式作为中间环节，因此，我们在对它的证明过程中局部地使用条件证明规则。

### 【推论 3】

如果外出忘记锁门则家里被盗，那么社会秩序不好；或者家里被盗或者安心工作；然而，如果外出忘记锁门，那么不安心工作；所以，社会秩序不好。

将此推论符号化。令：

$W$ ：外出忘记锁门；

$J$ ：家里被盗；

$S$ ：社会秩序好；

$A$ ：安心工作。

此推论被符号化为：

$$(W \rightarrow J) \rightarrow \neg S$$

$$J \vee A$$

$$W \rightarrow \neg A$$

$$\therefore \neg S$$

分析：我们要得到 $\neg S$ ，就需要对第一个前提使用肯前规则，因而需要有 $W \rightarrow J$ 。但在前提中没有 $W \rightarrow J$ 。从第二和第三个前提容易看出，如果假定了 $W$ ，那么，通过肯前和否析能推出 $J$ ；这样，再通过条件证明便可得到 $W \rightarrow J$ 。

### 【证明】

- |     |  |                 |
|-----|--|-----------------|
| (1) | $(W \rightarrow J) \rightarrow \neg S$ | 前提              |
| (2) | $J \vee A$                             | 前提              |
| (3) | $W \rightarrow \neg A$                 | 前提              |
| (4) | $W$                                    | 条件假设            |
| (5) | $\neg A$                               | (3) (4), 肯前     |
| (6) | $J$                                    | (2) (5), 否析     |
| (7) | $W \rightarrow J$                      | (4) - (6), 条件证明 |
| (8) | $\neg S$                               | (1) (7), 肯前     |

在上面的证明过程中，作为假设的 $W$ 在行(7)通过条件证明规则被撤除。然后，行(7)继续与假设域以外的其他命题进行推演，直到得出结论。这样得出的结论当然不依赖于假设 $W$ 。需要注意的是，假设一旦被撤除，假设域内的任何一行都不能再被使用，否则，就不能保证结论独立于假设。

在对前几个推论的证明中，只需一次使用条件证明规则；对下面几个推论的证明则需要多次使用条件证明规则。

**【推论 4】**

$$I \rightarrow (H \rightarrow K)$$

$$\neg K$$

$$H \vee (I \wedge E)$$

$$\therefore I \leftrightarrow \neg H$$

分析：结论是一个等值式。根据等值规则，如果我们能够得到  $I \rightarrow \neg H$  和  $\neg H \rightarrow I$ ，那么我们便得出结论。既然这两个蕴涵式在前提中都没有出现，那么我们考虑用条件证明规则得到它们。不难看出，一旦假设了  $I$ ，便可对第一个前提使用肯前规则，从而得出  $H \rightarrow K$ ；再将  $H \rightarrow K$  与第二个前提  $\neg K$  进行否后使得  $\neg H$ ；然后通过条件证明得到  $I \rightarrow \neg H$ 。接下来，我们又假设  $\neg H$ ，并与第三个前提进行否析，从而得到  $I \wedge E$ ；再通过化简便得到  $I$ ；然后再通过条件证明得到  $\neg H \rightarrow I$ 。

**【证明】**

(1) $I \rightarrow (H \rightarrow K)$	前提
(2) $\neg K$	前提
(3) $H \vee (I \wedge E)$	前提
(4) $I$	条件假设
(5) $H \rightarrow K$	(1) (4), 肯前
(6) $\neg H$	(2) (5), 否后
(7) $I \rightarrow \neg H$	(4) - (6), 条件证明
(8) $\neg H$	条件假设
(9) $I \wedge E$	(3) (8), 否析
(10) $I$	(9), 化简
(11) $\neg H \rightarrow I$	(8) - (10), 条件证明
(12) $(I \rightarrow \neg H) \wedge (\neg H \rightarrow I)$	(7) (11), 合取
(13) $I \leftrightarrow \neg H$	(12), 等值

**【推论 5】**

$$P \vee S \rightarrow R$$

$$R \wedge Q \rightarrow T$$

$$\therefore P \rightarrow (Q \rightarrow T \wedge R)$$

分析：(i) 此推论的结论是一个蕴涵式，我们考虑用条件证明规则来得到它，即把  $P$  作为假设来推导  $Q \rightarrow T \wedge R$ 。于是，我们面对的推论是：

$$P \vee S \rightarrow R \quad \text{前提}$$

$R \wedge Q \rightarrow T$  前提  
 $P$   
 $\therefore Q \rightarrow T \wedge R$

(ii) 此推论的结论仍然是一个蕴涵式，我们可以继续使用条件证明规则来得到它，即把  $Q$  作为假设来推导  $T \wedge R$ 。这样，我们面对的推论又成为：

$P \vee S \rightarrow R$  前提  
 $R \wedge Q \rightarrow T$  前提  
 $P$   
 $Q$   
 $\therefore T \wedge R$

(iii) 不难看出，通过对  $P$  附加可得到  $P \vee S$ ；再对第一前提肯定前件得出  $R$ ， $R$  与  $Q$  合取得到  $R \wedge Q$ ；再对第二前提肯定前件得到  $T$ ， $T$  与  $R$  合取得到  $T \wedge R$ 。

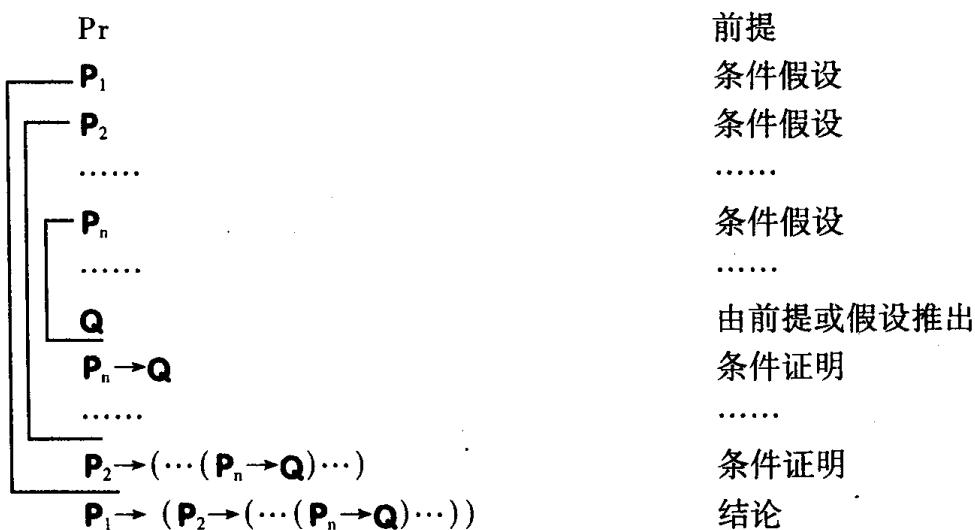
### 【证明】

(1) $P \vee S \rightarrow R$	前提
(2) $R \wedge Q \rightarrow T$	前提
(3) $P$	条件假设
(4) $Q$	条件假设
(5) $P \vee S$	(3), 附加
(6) $R$	(1)(5), 肯前
(7) $R \wedge Q$	(4)(6), 合取
(8) $T$	(2)(7), 肯前
(9) $T \wedge R$	(6)(8), 合取
(10) $Q \rightarrow T \wedge R$	(4) – (9), 条件证明
(11) $P \rightarrow (Q \rightarrow T \wedge R)$	(3) – (10), 条件证明

在上面这个证明中，它的第二个假设域即  $Q$  的假设域完全包含于第一个假设域即  $P$  的假设域之中（与此不同，对推论 4 的证明中的两个假设域互不包含）。一般说来，如果一个推论的结论具有如下形式：

$$P_1 \rightarrow (P_2 \rightarrow (\cdots (P_n \rightarrow Q) \cdots))$$

那么，我们可以把  $P_1, P_2, \dots, P_n$  这  $n$  个前件依次作为假设；由这些假设和前提  $P_r$  推出  $Q$  后，再按相反的次序依次撤除它们。这一过程按照如下模式进行：



### 习题 3.3

一、用条件证明规则和其他规则构造以下推论的证明。

1.  $F \vee \neg G$

$\neg H \rightarrow \neg F$

$\therefore G \rightarrow H$

3.  $L \vee I \rightarrow K \wedge S$

$\therefore \neg L \vee K$

5.  $P \vee Q \rightarrow R$

$\therefore (R \vee S \rightarrow T) \rightarrow (P \rightarrow T)$

7.  $M \rightarrow N$

$L \rightarrow N$

$K \rightarrow \neg N$

$\therefore M \vee L \rightarrow \neg K$

9.  $A \rightarrow (J \wedge K) \vee F$

$J \wedge K \rightarrow \neg A$

$T \rightarrow \neg F$

$\therefore A \rightarrow \neg T$

2.  $J \rightarrow K$

$\therefore J \rightarrow (J \rightarrow K)$

4.  $A \rightarrow B$

$\neg C \vee B \rightarrow (D \rightarrow E)$

$\therefore A \rightarrow (D \rightarrow E)$

6.  $X \rightarrow Y \vee Z$

$Z \rightarrow \neg X$

$\therefore X \rightarrow Y$

8.  $F \rightarrow \neg (Z \vee O)$

$O \vee H \rightarrow F$

$\neg K \rightarrow H \wedge \neg E$

$\therefore Z \rightarrow K$

10.  $\neg (N \wedge J) \rightarrow \neg X$

$N \rightarrow C$

$X \vee O$

$O \rightarrow U$

$\therefore U \vee C$

$$\begin{array}{l} 11. P \vee Q \rightarrow R \\ \quad S \vee T \rightarrow (U \vee W \rightarrow P) \\ \therefore S \rightarrow (U \rightarrow R) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12. M \leftrightarrow D \\ \quad \therefore \neg M \leftrightarrow \neg D \end{array}$$

## 二、把下列推论符号化，并给出它们的条件证明。

1. 这位厂长下台仅当工会主席和总工程师都反对他；如果工会主席反对他或者车间主任反对他，那么他办事不公正；如果他办事不公正并且他下台，那么工人高兴；所以，如果这位厂长下台，那么工人高兴。

2. 如果赵某写文章，那么李某就批判赵某的文章；如果李某批判赵某的文章，那么李某或者不公正或者不友好；如果并非李某既公正又友好，那么，赵某恨李某；所以，如果赵某不恨李某，那么赵某没有写文章。

3. 青年人易激动并且兴奋或者易激动并且懊丧；如果青年人有理想，那么，如果他们得到支持那么他们不懊丧；所以，如果青年人不兴奋，那么，如果他们有理想那么他们没有得到支持。

4. 没有地狱；也没有天堂；所以，有地狱或者有神仙，当且仅当，有天堂或者有神仙。

5. 如果中国女队获得冠军，那么中国男队受到鼓舞；如果中国男队受到鼓舞或者中国男队精神状态好，那么，中国男队将越战越勇；中国男队获得冠军或者中国男队没有越战越勇；所以，如果中国女队获得冠军，那么，如果中国男队精神状态好，那么，如果不出现意外，那么，中国男队越战越勇并且取得冠军。

三、再次构造习题 3.2 中的二、14 和三、2 的证明。这一次使用条件证明规则，并比较哪一次证明更容易些。

## 3.4 间接证明规则

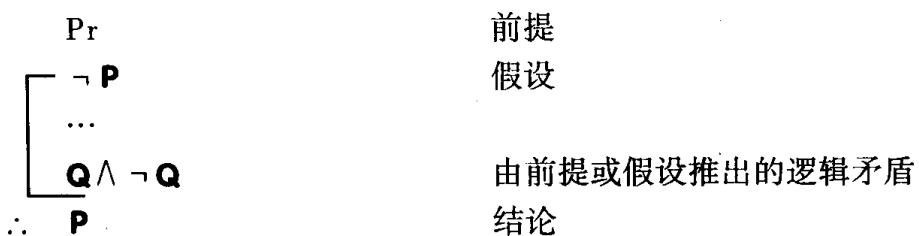
### 3.4.1 什么是间接证明规则

在第一章“论证”那一节中，我们曾经讨论了间接证明的论证方法。间接证明的一般程序是：为要从给定的前提推出结论  $P$ ，我们先假设  $\neg P$ ；如果能从前提和  $\neg P$  推出一对矛盾命题  $Q$  和  $\neg Q$ ，这便证明了  $\neg P$  是假的，从而证明  $P$  是真的。这就是本小节所要讨论的“间接证明规则”的基本思想。

间接证明规则：

如果从前提  $P_r$  和假设  $\neg P$  推出  $Q \wedge \neg Q$ ，那么，仅从前提  $P_r$  可以推出  $P$ 。

间接证明规则也可表达为如下模式：



需要指出，间接证明规则可以由条件证明规则和其他一些规则推导出来。虽然间接证明规则是一个常用的规则，但是，它的作用仅仅在于简化证明过程。因此，间接证明规则在逻辑上不是必不可少的。对此，我们证明如下：

$\Pr$ $\neg P$ $\dots$ $Q \wedge \neg Q$ (a) $Q$ (b) $Q \vee P$ (c) $\neg Q$ (d) $P$ (e) $\neg P \rightarrow P$ (f) $\neg \neg P \vee P$ (g) $P \vee P$ (h) $P$	前提 假设  逻辑矛盾 化简 (a), 附加 化简 (b)(c), 否析 条件证明 (e), 蕴涵 (f), 双否 (g), 重言	}
	间接证明的 必要条件	

以上表明，只要从前提  $\Pr$  和假设  $\neg P$  推出  $Q \wedge \neg Q$ ，我们就可以通过从 (a) 到 (h) 的步骤推出  $P$ 。而整个证明过程只需运用化简、附加、否析、蕴涵、双否、重言和条件证明等规则。这就是说，间接证明规则可由以上这些规则来代替。此外，从上面这个证明中可以看到，假设  $\neg P$  在行 (e) 已被撤除，因此，间接证明的结论  $P$  不依赖于假设  $\neg P$ ，而只依赖于前提。间接证明规则如同条件证明规则也是一个“假设引入—撤除规则”。

### 3.4.2 间接证明规则的应用

我们知道条件证明规则较适用于证明其结论为蕴涵式的推论，与此不同，间接证明规则常常用来证明其结论不是蕴涵式的推论。例如：

【推论 1】

$F \vee N$

$N \rightarrow B \wedge J$

$$B \vee F \rightarrow D$$

$$\therefore D$$

分析：(i) 结论  $D$  难以从给定前提得出，同时，此结论不是一个蕴涵式，不宜使用条件证明规则，因此，我们考虑使用间接证明规则。首先作假设  $\neg D$ 。(ii) 对  $\neg D$  和第三个前提进行否后，便得到  $\neg(B \vee F)$ ，再通过德摩根律和化简便得到  $\neg B$  和  $\neg F$ 。(iii) 对  $\neg F$  和第一前提进行否析得到  $N$ ，对  $N$  和第二前提进行肯前得到  $B \wedge J$ ，再化简便得到  $B$ 。(iv) 前面已经有了  $\neg B$ ，通过合取得到  $B \wedge \neg B$ 。(v) 通过间接证明规则得出结论  $D$ 。

### 【证明】

(1) $F \vee N$	前提
(2) $N \rightarrow B \wedge J$	前提
(3) $B \vee F \rightarrow D$	前提
(4) $\neg D$	间接假设
(5) $\neg(B \vee F)$	(3) (4), 否后
(6) $\neg B \wedge \neg F$	(5), 德摩根律
(7) $\neg F$	(6), 化简
(8) $N$	(1) (7), , 否析
(9) $B \wedge J$	(2) (8), 肯前
(10) $B$	(9), 化简
(11) $\neg B$	(6), 化简
(12) $B \wedge \neg B$	(10) (11), 合取
(13) $D$	(4) - (12), 间接证明

对于有些结论为蕴涵式的推论，仅仅使用条件证明规则仍然难以证明。在这种情况下，可以考虑进一步使用间接证明规则，即在以结论的前件作为假设以后，进而以结论的后件的否定作为假设。如

### 【推论 2】

$$E \rightarrow (D \rightarrow F)$$

$$\neg G \rightarrow E \vee F$$

$$E \rightarrow D$$

$$\therefore \neg G \rightarrow F$$

分析，(i) 结论是一个蕴涵式而且不易从前提中推出，因此，考虑使用条件证明规则。这样，我们所要证明的推论成为：

$$E \rightarrow (D \rightarrow F) \quad \text{前提}$$

$$\neg G \rightarrow E \vee F \quad \text{前提}$$

$E \rightarrow D$	前提
$\neg G$	条件假设（原结论的前件）
$\therefore F$	原结论的后件

(ii) 我们发现  $F$  仍然难以从  $\neg G$  和前提中推出，因此，我们进一步使用间接证明规则，这样，我们所要证明的推论又成为：

$E \rightarrow (D \rightarrow F)$	前提
$\neg G \rightarrow E \vee F$	前提
$E \rightarrow D$	前提
$\neg G$	条件假设（原结论的前件）
$\neg F$	间接假设
$\therefore Q \wedge \neg Q$	任何逻辑矛盾

(iii) 不难看出，由  $\neg G$  和第二前提通过肯前规则可得  $E \vee F$ ， $E \vee F$  与  $\neg F$  一起通过否析规则得到  $E$ ， $E$  与第一前提通过肯前规则得  $D \rightarrow F$ ， $E$  与第三前提通过肯前规则得到  $D$ ； $D$  与  $D \rightarrow F$  通过肯前规则得到  $F$ ，既然已有假设  $\neg F$ ，通过合取便得到  $F \wedge \neg F$ 。

### 【证明】

(1) $E \rightarrow (D \rightarrow F)$	前提
(2) $\neg G \rightarrow E \vee F$	前提
(3) $E \rightarrow D$	前提
(4) $\neg G$	条件假设
(5) $\neg F$	间接假设
(6) $E \vee F$	(2) (4), 肯前
(7) $E$	(5) (6), 否析
(8) $D \rightarrow F$	(1) (7), 肯前
(9) $D$	(3) (7), 肯前
(10) $F$	(8) (9), 肯前
(11) $F \wedge \neg F$	(5) (10), 合取
(12) $F$	(5) - (11), 间接证明
(13) $\neg G \rightarrow F$	(4) - (12), 间接证明

在推论 2 的证明中，我们首先使用条件证明规则，然后再使用间接证明规则。对下面一个推论的证明则需要先使用间接证明规则，然后使用条件证明规则。

### 【推论 3】

$J \vee K \rightarrow L$	前提
$\neg H$	前提
$(J \rightarrow M \wedge L) \rightarrow (I \rightarrow L \wedge H)$	前提

$\therefore \neg(I \wedge M)$

分析：(i) 结论  $\neg(I \wedge M)$  难以从前提中得出，并且它不是蕴涵式，因此考虑使用间接证明规则。于是，我们所要证明的推论成为：

$J \vee K \rightarrow L$	前提
$\neg H$	前提
$(J \rightarrow M \wedge L) \rightarrow (I \rightarrow L \wedge H)$	前提
$\neg \neg(I \wedge M)$	间接假设
$I \wedge M$	双否
$\therefore Q \wedge \neg Q$	任何逻辑矛盾

(ii) 我们发现，从前提和假设难以推出逻辑矛盾。然而，我们注意到，第二个前提是  $\neg H$ ，第三个前提中含有  $H$ 。不过，要从第三个前提得出  $H$  需要进行两次肯定前件，因而需要有  $J \rightarrow M \wedge L$  和  $I$ 。 $I$  可以由  $I \wedge M$  通过化简得到；而  $J \rightarrow M \wedge L$  则难以得到。因此，我们考虑使用条件证明规则。于是，我们所要证明的推论成为：

$J \vee K \rightarrow L$	前提
$\neg H$	前提
$(J \rightarrow M \wedge L) \rightarrow (I \rightarrow L \wedge H)$	前提
$\neg \neg(I \wedge M)$	间接假设
$I \wedge M$	双否
$J$	条件假设
$\therefore M \wedge L$	

(iii) 不难看出，由  $J$  附加可得  $J \vee K$ ，再与第一个前提通过肯定前件得  $L$ 。由  $I \wedge M$  通过化简可得  $M$ ， $M$  与  $L$  合取便得  $M \wedge L$ 。

证明如下：

(1) $J \vee K \rightarrow L$	前提
(2) $\neg H$	前提
(3) $(J \rightarrow M \wedge L) \rightarrow (I \rightarrow L \wedge H)$	前提
(4) $\neg \neg (I \wedge M)$	间接假设
(5) $I \wedge M$	(4), 双否
(6) $J$	条件假设
(7) $J \vee K$	(6), 附加
(8) $L$	(1) (7), 肯前
(9) $M$	(5), 化简
(10) $M \wedge L$	(8) (9), 合取
(11) $J \rightarrow M \wedge L$	(6) $\neg (10)$ , 条证
(12) $I \rightarrow L \wedge H$	(3) (11), 肯前
(13) $I$	(5), 化简
(14) $L \wedge H$	(12) (13), 肯前
(15) $H$	(14), 化简
(16) $H \wedge \neg H$	(2) (15), 合取
(17) $\neg (I \wedge M)$	(4) $\neg (16)$ , 间证

请注意，按照我们的间接证明规则，上面证明中的行(4)的假设只能是 $\neg \neg (I \wedge M)$ 。当然，只需通过双重否定便可由该式得出 $I \wedge M$ 。

从以上几个证明中我们看到，在证明过程中可以根据需要随时使用间接证明规则或条件证明规则，而且使用的次序和次数均不受限制，只要我们最终将所有的假设一一删除即可。

到目前为止，我们已经引入二十条推演规则。这二十条推演规则结合起来就能使我们证明任何一个有效的命题推论，而且，任何一个被这二十条规则或其中几条规则证明的命题推论都是有效的。再次指出，这二十条推演规则并不都是在逻辑上必不可少的。为了给第八章对本系统的可靠性的证明提供方便，在此，我们将证明八条整推规则中的三条是可以由其他推演规则导出的，因而是逻辑上不必要的。它们是否定后件规则、否定析取支规则和假言三段论。证明如下：

证明否定后件规则：

- (1)  $P \rightarrow Q$   
 (2)  $\neg Q$   
 (3)  $\neg Q \rightarrow \neg P$  (1), 假言易位  
 ∴ (4)  $\neg P$  (2) (3), 肯前

证明否定析取支规则：

- (1)  $P \vee Q$   
 (2)  $\neg P$   
 (3)  $\neg \neg P \vee Q$  (1), 双重否定  
 (4)  $\neg P \rightarrow Q$  (3), 蕴涵

$\therefore (5) Q \quad (2) (4), \text{肯前}$

证明假言三段论规则：

(1) $P \rightarrow Q$	假言三段论规 则给定的条件 条件假设 (1)(3), 肯定前件 (2)(4), 肯定前件 (3)(5), 条件证明
(2) $Q \rightarrow R$	
(3) $P$	
(4) $Q$	
(5) $R$	

$\therefore (6) P \rightarrow R$

### 习题 3.4

一、应用间接证明规则和其他规则构造下列推论的证明。

1.  $P \vee Q \rightarrow R$

$\neg (R \wedge \neg S)$

$\neg P \rightarrow T$

$\therefore T \vee S$

3.  $\neg B \rightarrow K$

$O \rightarrow (I \vee \neg (B \vee K))$

$\therefore \neg I \rightarrow \neg O$

5.  $L \vee H$

$H \rightarrow A \wedge S$

$A \vee L \rightarrow T$

$\therefore T$

7.  $C \wedge \neg Q \rightarrow (C \rightarrow F)$

$F \rightarrow S$

$\therefore C \rightarrow \neg (\neg S \wedge \neg Q)$

9.  $X \rightarrow \neg X$

$X$

$\therefore G$

11.  $(M \rightarrow R) \rightarrow (K \rightarrow \neg B)$

$\neg (\neg K \vee I) \rightarrow R$

$\neg K \rightarrow I$

$\therefore B \rightarrow I$

2.  $E \vee (J \wedge \neg K)$

$J \rightarrow (\neg K \wedge E)$

$\therefore E$

4.  $\neg (F \rightarrow A) \wedge (K \wedge \neg T)$

$(A \vee \neg F) \vee (K \wedge I \rightarrow T)$

$\therefore \neg I$

6.  $\neg B \rightarrow W$

$K \rightarrow \neg W$

$\neg (\neg K \wedge \neg B)$

$\therefore B$

8.  $P \wedge I \rightarrow (D \rightarrow \neg P)$

$(I \rightarrow V) \rightarrow \neg P$

$\therefore \neg (P \wedge (D \vee V))$

10.  $Y \vee (G \wedge U)$

$U \rightarrow \neg Y$

$\therefore G \vee \neg U$

12.  $Z \rightarrow B$

$\neg Z \wedge K \rightarrow S$

$S \rightarrow B$

$\therefore \neg B \rightarrow \neg K$

13. N

$$\therefore M \vee \neg M$$

14. U

$$\therefore G \vee Q \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg (G \rightarrow \neg U))$$

二、把下列推论符号化，并用间接证明规则和其他规则对它们的有效性给以证明。

1. 明天下雨并且刮风，或者明天是晴天。明天不是晴天或者明天刮风；所以，明天刮风。

2. 如果工人消极，那么企业破产；如果工人积极但领导无方，那么企业亏损；如果企业亏损那么企业破产；所以，如果企业不破产那么领导有方。

3. 倘若如果赢球心切那么打球急躁，那么应当沉着应战或者讲究战术；如果赢球心切或者竞技状态不佳，那么打球急躁或者失误增加；事实上没有讲究战术；所以，失误增加或者应当沉着应战。

4. 倘若如果身体太胖那么患心脏病的概率增加，那么要少吃饭并且多活动；或者身体不太胖或者少活动；如果少活动或者多吃饭，那么患心脏病的概率增加；因此，情况并非是：少吃饭当且仅当少活动。

三、应用间接证明规则重做习题 3.2 的二、5 和二、13，并比较哪一次的证明更容易些。

### 3.5 重言式的证明

#### 3.5.1 重言式的无前提证明

我们知道，重言式是常真的，重言式的真不依赖于任何前提，因此，我们可以构造任何重言式的无前提证明。无前提证明是通过使用条件证明规则或间接证明规则来实现的。具体地说，无前提证明是以假设为出发点并通过撤除所有假设来得出结论的，结论就是所要证明的重言式。例如，对于  $P \rightarrow P$  这个重言式可以构造如下的无前提证明：

$P$	条件假设
$\neg \neg P$	双否
$P$	双否
$P \rightarrow P$	条件证明

在命题逻辑中，如果我们能够构造出一个公式的无前提证明；那么，该公式就被证明是一个重言式。对此，我们给出进一步的说明。请看下面两个推论：

【推论 1】

Q

$$\therefore P \rightarrow P$$

【推论 2】

$\neg Q$

$$\therefore P \rightarrow P$$

注意，推论 1 和推论 2 的前提正好相互否定，而它们的结论却完全相同。

## 【证明】

(1) $Q$	前提
(2) $P$	条件假设
(3) $\neg \neg P$	(2), 双否
(4) $P$	(3), 双否
(5) $P \rightarrow P$	(2) - (4), 条件证明

这就是对推论 1 的有效性的证明。对于推论 2 的证明，只需把上面证明中的第一行  $Q$  改为  $\neg Q$  即可。这是因为从第二行到第五行就是对  $P \rightarrow P$  的无前提证明，它根本没有用到  $Q$  或  $\neg Q$ 。

由此可见，如果我们能够构造一个公式的无前提证明，那么，我们也就证明了该公式可以从任何前提有效地推出。可以从任何前提有效地推出的公式必是一个重言式。因为，对于一个非重言式的命题，至少有一类命题使它由之推不出来，这类命题就是重言式：在前提为重言式而结论为非重言式的情况下，至少有一种真值指派使得该推论的前提真而结论假。因此在命题逻辑中，一个能被无前提证明的公式必是一个重言式。

下面就构造一些重言式的证明。

## 【重言式 1】

$$P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$$

这个公式是一个蕴涵式，我们利用条件证明规则来证明它，即先假设它的前件，再推导它的后件，然后撤除假设。证明如下：

(1) $P \wedge Q$	条件假设
(2) $P$	(1), 化简
(3) $P \vee Q$	(2), 附加
(4) $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$	(1) - (3), 条件证明

## 【重言式 2】

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$$

这个公式是一个蕴涵式，而且它的后件也是一个蕴涵式，于是，我们两次应用条件证明规则来证明它：

(1) $P$	条件假设
(2) $Q$	条件假设
(3) $P \wedge Q$	(1)(2), 合取
(4) $Q \rightarrow P \wedge Q$	(2) - (3), 条件证明
(5) $P \rightarrow (Q \rightarrow P \wedge Q)$	(1) - (4), 条件证明

## 【重言式 3】

$$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$$

这个公式不是一个蕴涵式，我们考虑用间接证明规则来证明，即首先假设 $\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$ 再设法推导出矛盾，然后撤除假设。证明如下：

(1) $\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	间接假设
(2) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg(Q \rightarrow P)$	(1), 德摩根
(3) $\neg(P \rightarrow Q)$	(2), 化简
(4) $\neg(\neg P \vee Q)$	(3), 蕴涵
(5) $\neg\neg P \wedge \neg Q$	(4), 德摩根
(6) $P \wedge \neg Q$	(5), 双否
(7) $P$	(6), 化简
(8) $\neg(Q \rightarrow P)$	(2), 化简
(9) $\neg(\neg Q \vee P)$	(8), 蕴涵
(10) $\neg\neg Q \wedge \neg P$	(9), 德摩根
(11) $\neg P$	(10), 化简
(12) $P \wedge \neg P$	(7) (11), 合取
(13) $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	(1) – (12), 间接证明

#### 【重言式 4】

$$P \rightarrow Q \vee \neg Q$$

这个公式是一个蕴涵式。首先考虑用条件证明规则，即假设  $P$  然后设法推出推导  $Q \vee \neg Q$ 。但是， $Q \vee \neg Q$  不能直接由  $P$  推出，故需要用间接证明规则引进第二个假设 $\neg(Q \vee \neg Q)$ 。显然，通过德摩根律很容易由 $\neg(Q \vee \neg Q)$  推出矛盾。证明如下：

(1) $P$	条件假设
(2) $\neg(Q \vee \neg Q)$	间接假设
(3) $\neg Q \wedge \neg \neg Q$	(2), 德摩根
(4) $Q \vee \neg Q$	(2) – (3), 间证
(5) $P \rightarrow Q \vee \neg Q$	(1) – (4), 条证

#### 【重言式 5】

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$$

这是一个等值式，我们可以把它作为两个互逆的蕴涵式分别加以证明，然后通过合取规则和等值规则得到这个等值式。

#### 【证明】

(1) $P \leftrightarrow Q$	条件假设
(2) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	(1), 等值
(3) $P \rightarrow Q$	(2), 化简
(4) $\neg Q \rightarrow \neg P$	(3), 假易
(5) $Q \rightarrow P$	(2), 化简
(6) $\neg P \rightarrow \neg Q$	(5), 假易
(7) $(\neg P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$	(4)(6), 合取
(8) $(\neg P \leftrightarrow \neg Q)$	(7), 等值
(9) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$	(1) – (8), 条证
(10) $\neg P \leftrightarrow \neg Q$	条件假设
(11) $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)$	(10), 等值
(12) $\neg P \rightarrow \neg Q$	(11), 化简
(13) $Q \rightarrow P$	(12), 假易
(14) $\neg Q \rightarrow \neg P$	(11), 化简
(15) $P \rightarrow Q$	(14), 假易
(16) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	(13)(15), 合取
(17) $P \leftrightarrow Q$	(16), 等值
(18) $(\neg P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$	(10) – (17), 条证
(19) $((P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)) \wedge ((\neg P \leftrightarrow \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$	(9)(18), 合取
(20) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$	(19), 等值

### 3.5.2 自然演绎与真值表方法

现在，我们已经有两种方法可以检验一个命题推论的有效性，即真值表方法和自然演绎方法。当用真值表方法检验一个命题推论的有效性时，首先要把推论由

【模式 1】

$$\left. \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{array} \right\} \text{前提}$$

$$\therefore C$$

改写为：

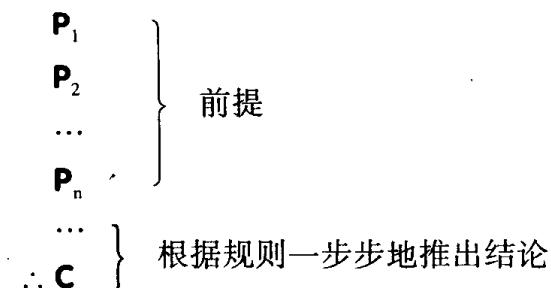
【模式 2】

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C$$

然后用真值表检验具有模式 2 的蕴涵式是否一个重言式。若是，那么所检验的推论就是有效的；若不是，那么所检验的推论就是无效的。

当用自然演绎方法检验一个推论的有效性时，我们根据给定的推演规则，从该推论的前提一步一步地推出其结论。这一过程可以归结为：

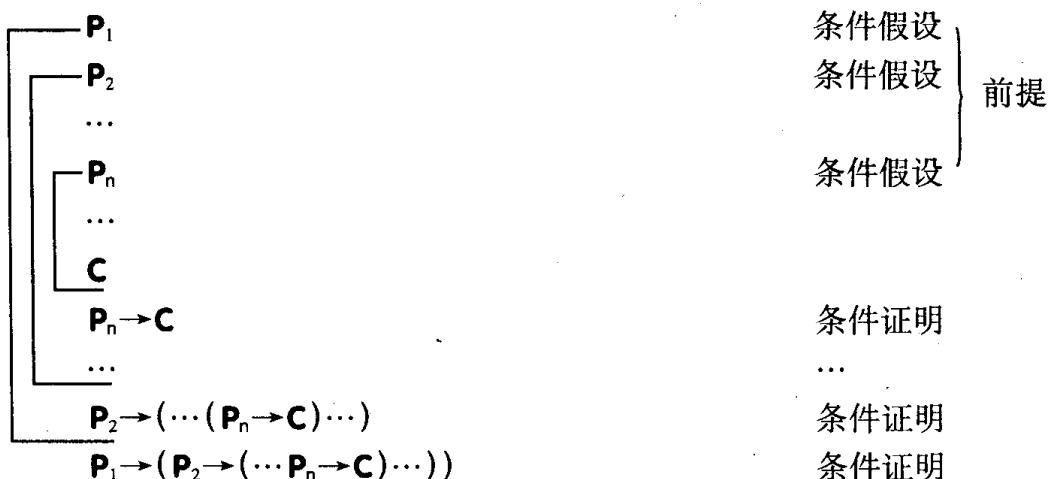
**【模式 3】**



相应于模式 3 的过程一旦完成，所讨论的推论的有效性便被证明了。

如果在模式 3 的基础上进而使用条件证明规则，把所有的前提作为假设依次加以撤除，那么，其结果便是一个无前提证明，即：

**【模式 4】**



相应于模式 4 的最后一行公式是一个重言式。根据移出律，模式 4 的最后一行等值于模式 2。这样，也就证明了相应于模式 2 的公式是一个重言式。这恰好是用真值表方法所要证明的。由此可见，在证明命题推论的有效性上，自然演绎方法和真值表方法的结果是一致的。

### 习题 3.5

构造下列重言式的证明。

1.  $P \vee \neg P$
2.  $\neg(P \wedge \neg P)$
3.  $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$
4.  $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow P \vee R)$
5.  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
6.  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q \wedge R)$
7.  $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R)$
8.  $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
9.  $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$
10.  $(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$
11.  $P \vee (Q \wedge \neg Q) \leftrightarrow P$
12.  $P \wedge (Q \vee \neg Q) \leftrightarrow P$
13.  $P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$
14.  $P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$
15.  $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
16.  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

## 第四章 三段论逻辑

三段论逻辑是由古希腊的大哲学家亚里士多德最初建立的。三段论逻辑只处理三段论推论。下面的推论就是一个三段论的例子。

### 【推论 1】

所有哲学家都是善于抽象思维的；

有人不是善于抽象思维的；

所以，有人不是哲学家。

三段论一般不涉及复合命题，只涉及简单命题。不过，三段论涉及简单命题的内部结构，即涉及简单命题内部的词项之间的逻辑关系。因此，我们首先讨论构成三段论的命题的结构和性质。

### 4.1 直言命题

#### 4.1.1 直言命题的形式

出现在一个三段论中的命题都是直言命题。直言命题有以下四种形式：

所有 S 是 P

所有 S 不是 P

有 S 是 P

有 S 不是 P

以上直言命题形式中的 S 和 P 是词项变项，它表示任何一个词项。由 S 表示的词项叫做“主项”，由 P 表示的词项叫做“谓项”。如，在推论 1 的第一个前提中，“哲学家”是主项，“善于抽象思维的”是谓项。把主项和谓项联结起来的词项叫“联项”。联项有两种，即“是”和“不是”。“是”叫做“肯定联项”，“不是”叫做“否定联项”。“S”前边的“所有”或“有”叫做“量项”，量项是用来表示主项在外延方面的数量的。“所有”叫做“全称量项”，它表示了主项的全部外延；“有”叫做“特称量项”，它没有表示主项的全部外延。任何一个直言命题都具有以上四种形式之一。相应地，任何一个直言命题都是由主项、谓项、联项和量项这四个部分组成的。

习惯上，人们把“所有 S 是 P”缩写为“A”，并称之为“全称肯定命题”，把

“所有 S 不是 P” 缩写为 “E”，并称之为“全称否定命题”；把 “有 S 是 P” 缩写为 “I”，并称之为“特称肯定命题”；把 “有 S 不是 P” 缩写为 “O”，并称之为“特称否定命题”。

推论 1 的第一个前提具有形式 “所有 S 是 P”，第二个前提和结论具有形式 “有 S 不是 P”。可见，推论 1 是由一个全称肯定命题和两个特称否定命题所组成。然而，在日常语言中，许多直言命题却不具有直言命题的标准形式，这就需要我们按照直言命题的标准形式将它们加以重写。例如，对于 “保卫祖国，人人有责” 这个命题，我们可以把它重写为 “所有人都是有保卫祖国的责任的”。在日常语言中，联词 “是” 常常被省掉，有时用 “为”、“皆” 等词来代替。“不是” 常常用 “非”、“没”、“未” 等词来代替。全称量词除了 “所有” 以外，还常常用到 “任何”、“每一”、“一切”、“凡” 等，甚至被省掉。如，“哲学家是人” 就是一个省略了全称量词的 A 命题。特称量词除了 “有” 以外，还常常用到 “有些”、“有的”、“至少有一”、“存在” 等。如：“活到一百岁以上的人是存在的” 可按照标准的形式重写为 “有人是活到一百岁以上的”。当然，并非每一个命题都能被重写为直言命题。这就需要我们对于日常语言中的命题加以细致的分析，从而把那些伪装了的直言命题从非直言命题中辨别出来。

#### 4.1.2 直言命题的图释

在日常语言中，直言命题的量词是有歧义的。例如，有时我们说 “有些政治家是诚实的”，还意味着 “有些政治家不是诚实的”；但有时说这句话却没有这种意思，而仅仅意味着 “至少有一个政治家是诚实的”，或者 “诚实的政治家是存在的”。再如，有时我们说 “所有乌鸦是黑的” 还意味着 “乌鸦这种东西是存在的”；但有时我们说这句话却仅仅意味着 “没有乌鸦不是黑的”，至于乌鸦这种东西是否存在，我们毫无断定。为了能够确定任何一个三段论的有效性，我们必须首先确定直言命题的含义；也就是说，我们必须对 A、E、I 和 O 这四种直言命题给以确定的解释。下面，我们就进行这项工作。

我们把特称量词解释为 “至少有一”。相应地，把 I 命题解释为 “至少有一 S 是 P”，把 O 命题解释为 “至少有一 S 不是 P”。我们对 I 和 O 的这种解释可以用文恩图加以直观的表达。<sup>①</sup>

首先画两个相交的圆，如图 4.1 所示，它们分别表示 S 和 P 的外延；亦即它们分别表示 S 和 P 所指称的两类事物。这两个相交的圆构成三个不同的区域。中间相交的区域表示既是 S 又是 P 的那类事物，最左边区域表示是 S 而不是 P 的那类事物，最右边的区域表示是 P 而不是 S 的那类事物。

<sup>①</sup> 文恩（John Venn, 1834—1923）是英国数学家和逻辑学家，他首先提出这种图释的方法。

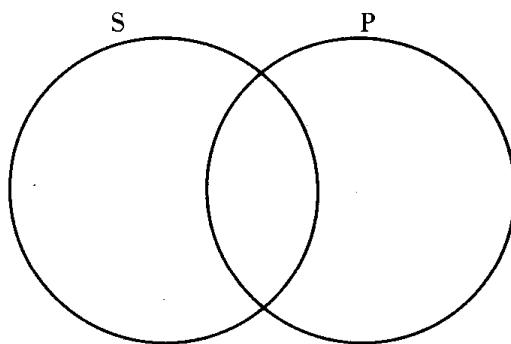
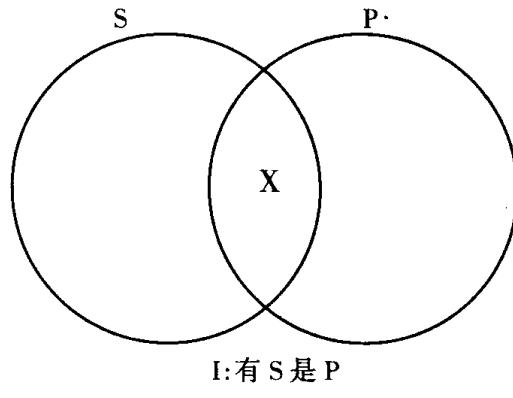


图 4.1

如果已知哪一类事物存在，或者说，已知至少有一个个体属于那一类，我们就在相应的区域写上“X”；如果已知哪一类事物不存在，或者说，已知没有一个个体属于那一类，我们就在相应的区域画上影线。如果一个区域既未写上“X”，也未画上影线，那就意味着我们对相应的那类事物一无所知；也就是说，我们既不知道那类事物存在，也不知道它们不存在。

按照我们的解释，I 表示“至少有一 S 是 P”，这就是说“既是 S 又是 P 的那类事物是存在的”。为表示 I，我们应该在图 4.1 中间的相交区域写上“X”。这样，I 就被解释为：



I: 有 S 是 P

图 4.2

我们把 O 解释为“至少有一 S 不是 P”，这就是说，“是 S 而不是 P 的那类事物是存在的”。为表示 O，我们应在图 4.1 中最左边的区域写上“X”。这样，O 就被解释为：

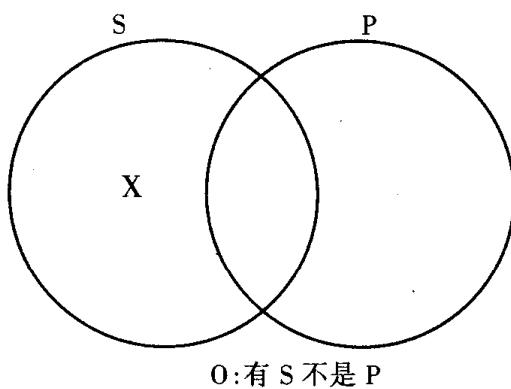


图 4.3

我们关于全称量词的解释是没有存在含义的，即把“所有 S 是 P”解释为“没有 S 不是 P”，或“是 S 而不是 P 的事物是没有的”。为表示 A 命题，我们应当在图 4.1 中最左边的区域画上影线。于是，A 被解释为：

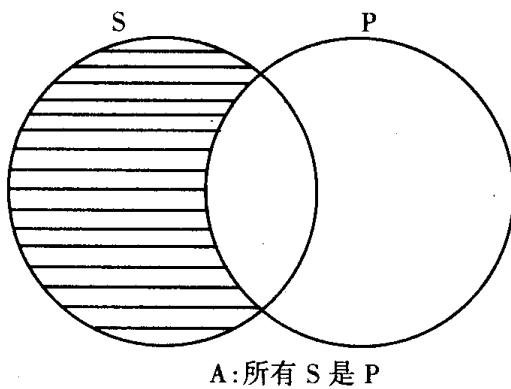


图 4.4

按照我们对全称量词的解释，E 命题即“所有 S 不是 P”的含义是“没有 S 是 P”或“既是 S 又是 P 的事物是没有的”。为表示 E，我们应当在图 4.1 中间的相交区域画上影线。这样，E 就被解释为图 4.5。

请注意，在图 4.2 和图 4.3 中都有“X”，这表明 I 和 O 这两个特称命题有主项存在的含义。但在图 4.4 和图 4.5 中却没有“X”，这表明 A 和 E 这两个全称命题没有主项存在的含义。正因为这样，当主项为一个空词项时，特称命题都是假的，而全称命题都是真的，这一点可由图 4.6 说明。

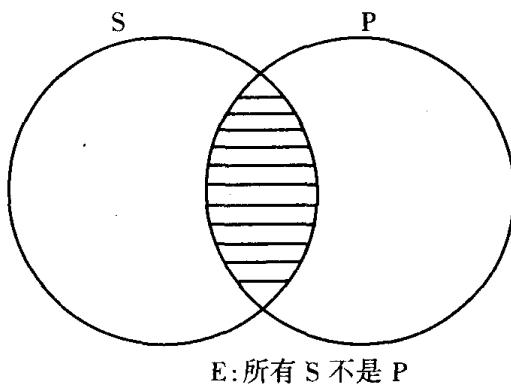


图 4.5

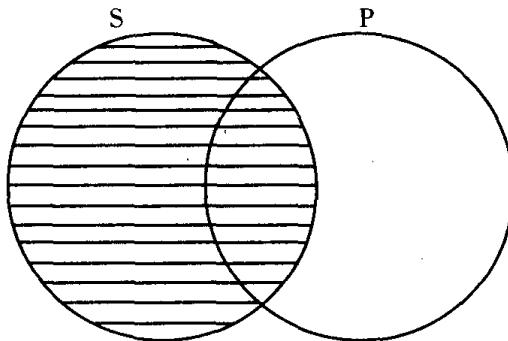


图 4.6

图 4.6 是当主项 S 为空词项时的图释。我们看到，图 4.6 中画影线的部分把图 4.4 和图 4.5 中画影线的部分包括了。这使得，当图 4.6 所显示的命题为真时，图 4.4 和图 4.5 所显示的命题一定是真的。然而，在这种情况下，图 4.2 和图 4.3 所显示的命题是不可能为真的。

由于全称命题没有主项存在的含义，而特称命题有主项存在含义。所以，由“所有 S 是 P”推不出“有 S 是 P”；由“所有 S 不是 P”推不出“有 S 不是 P”。

### 4.1.3 直言命题之间的关系

比较 A 命题和 O 命题的文恩图，我们发现，前者的最左边的区域为影线，其他两个区域为空白；后者的最左边的区域为“X”，其他两个区域为空白。这表明，A 和 O 的断定正好相反：其中一个为真，另一个一定为假；其中一个为假，另一个一定为真。由此可见，A 和 O 是相互否定的，或者说，A 和 O 之间具有矛盾关系。由于 A 和 O 相互矛盾，因而，其中之一与另一个的否定命题是等值的，即：

“所有 S 是 P” 等值于 “并非有 S 不是 P”。

“有 S 不是 P” 等值于 “并非所有 S 是 P”。

再比较 E 命题和 I 命题的文恩图，我们也发现类似的情况。这两个图都是左右两边的区域为空白；不同之处在于，前者的中间相交区域为影线，后者的中间相交区域为“X”。这表明 E 和 I 的断定正好相反；其中一个为真，另一个一定为假；其中一个为假，另一个一定为真。可见，E 和 I 之间也具有矛盾关系，因而，以下等值关系成立：

“所有 S 不是 P” 等值于 “并非有 S 是 P”。

“有 S 是 P” 等值于 “并非所有 S 不是 P”。

我们知道，两个相互等值的命题可以相互置换。根据以上四种等值关系，我们可以进行一些置换推演。如，从“所有蛇是爬行的”可以推出“并非有蛇不是爬行的”；从“并非所有液体比铁轻”可以推出“有液体不比铁轻”，等等。

为了进一步的讨论，需要引进一个新的概念，即“词项的补”或“补词项”。一个词项的补指称所有不被该词项指称的对象。任何一个词项“P”的补记为“非 P”。例如，“红的”的补为“非红的”；“非红的”的外延包括一切不为红色的个体，其中有黑板、绿草、白雪等等。不难理解，对于任一词项和任一个体来说，该个体属于该词项的外延，或者属于该词项的补的外延，并且不可两者得兼。因此，说一个个体是 P，等于说该个体不是非 P；说一个个体不是 P，等于说该个体是非 P。根据一个词项和该词项的补之间的这种关系，我们得到如下等值关系：

“所有 S 是 P” 等值于 “所有 S 不是非 P”。

“所有 S 不是 P” 等值于 “所有 S 是非 P”。

“有 S 是 P” 等值于 “有 S 不是非 P”。

“有 S 不是 P” 等值于 “有 S 是非 P”

另外需要指出，词项“P”的补是“非 P”，“非 P”的补是“非非 P”，而“非非 P”的外延与“P”的外延恰好相同。可见，“非 P”的补正是“P”。

根据以上等值关系，我们有如下置换规则：

这样两个具有相同主项的直言命题可以相互置换：它们的联项相反，谓项互为补词项。

这个置换规则通常叫做换质法。下面的两个推论就是对换质法的应用。

所有的哺乳动物是热血的；

所以，所有的哺乳动物不是非热血的。

有些行星是没有卫星的；

所以，有些行星不是有卫星的。

在日常语言中，表示一个词项 P 的补还可用“没 P”、“不 P”等等。上面最后一个

推论中的“没有卫星的”就是“有卫星的”的补。

从 E 命题和 I 命题的文恩图还可发现，二者都是左右对称的。这就是说，交换 E 和 I 中 S 和 P 的位置，并不改变命题的含义。因此，我们又有如下等值关系：

“所有 S 不是 P” 等值于“所有 P 不是 S”。

“有 S 是 P” 等值于“有 P 是 S”。

相应地，我们有如下置换规则：

主项和谓项交换位置的两个 E 命题可以相互置换；

主项和谓项交换位置的两个 I 命题可以相互置换。

这个置换规则通常叫做换位法。下面两个推论是对换位法的应用：

有的钓鱼者是有耐心的；

所以，有的有耐心的是钓鱼者。

所有的天主教徒不是无神论者；

所以，所有的无神论者不是天主教徒。

由于 A 命题和 O 命题的文恩图不是左右对称的，因此，对 A 命题和 O 命题不能使用换位法。下面两个推论是对换位法的误用：

所有人是动物；

所以，所有动物是人。（错误！）

有些动物不是人；

所以，有些人不是动物。（错误！）

以上分析了直言命题间的关系，并得出十对相互等值的命题。我们把这十对相互等值的命题集中列举如下：

(1) 根据矛盾关系：

“所有 S 是 P” 等值于“并非有 S 不是 P”。

“有 S 不是 P” 等值于“并非所有 S 是 P”。

“所有 S 不是 P” 等值于“并非有 S 是 P”。

“有 S 是 P” 等值于“并非所有 S 不是 P”。

(2) 根据谓项及其补词项之间的关系（即换质法）：

“所有 S 是 P” 等值于“所有 S 不是非 P”。

“所有 S 不是 P” 等值于“所有 S 是非 P”。

“有 S 是 P” 等值于“有 S 不是非 P”。

“有 S 不是 P” 等值于“有 S 是非 P”。

(3) 根据主项和谓项的对称性（即换位法）：

“所有 S 不是 P” 等值于“所有 P 不是 S”。

“有 S 是 P” 等值于 “有 P 是 S”。

### 习题 4.1

一、按照直言命题的标准形式把下列命题规范化，并指出它们各自属于哪一种直言命题。

1. 任何人都有缺点。
2. 有的神仙是善的。
3. 有的神仙不是善的。
4. 凡英雄都不是懦夫。
5. 有怕死的军人。
6. 个个是好汉。
7. 凤凰是美丽的。
8. 凤凰不是美丽的。
9. 美丽的凤凰是存在的。
10. 金无足赤。
11. 爱美之心，人皆有之。
12. 没有不透风的墙。
13. 无论什么困难都能克服。

二、先写出下列直言命题的形式，再用文恩图表示之。

1. 每一个甲班学生爱好音乐。
2. 甲班学生都不是爱好音乐的。
3. 至少有一个甲班学生爱好音乐。
4. 有些甲班学生不是爱好音乐的。

三、指出题一中哪些命题的主项是空词项，并用文恩图说明空词项是怎样影响这些命题的真值的。

四、给出与下列命题相矛盾的直言命题。

1. 有人是能歌善舞的。
2. 所有人都有所求的。
3. 有人不是自食其力的。
4. 所有人不是万能的。

五、通过换质法，对题四中每小题进行置换。

六、通过换位法，对题四中每一小题进行置换（对于那些不能直接进行换位的命题应当先进行换质）。

## 4.2 三 段 论

### 4.2.1 什么三段论

三段论是这样一种推论，它由三个直言命题组成，其中两个直言命题是前提，另一直言命题是结论；就主项和谓项而言，它包含三个不同的词项，每个词项在两个命题中各出现一次。例如：

**【推论 2】**

所有有机物都是含碳化合物；  
糖是有机物；  
所以，糖是含碳化合物。

这是一个三段论，它由三个直言命题组成。就主项和谓项而言，它只包含三个不同的词项，即“有机物”、“含碳化合物”和“糖”，其中每个词项在两个命题中各出现一次。

三段论所包含的三个不同的词项，分别叫做“大项”、“小项”和“中项”。大项就是作为结论的谓项的那个词项，小项就是作为结论的主项的那个词项。中项就是在两个前提中都出现的那个词项。在推论 2 中，大项是“含碳化合物”，小项是“糖”，中项是“有机物”。

三段论有多种多样的形式。为了讨论方便，一般规定，大前提写在前面，小前提写在后面。在这个规定下，只要中项的位置确定了，大项与小项的位置也就跟着确定了。我们把由于中项位置不同而形成的各种三段论形式叫做“三段论的格”。习惯上用“P”、“M”和“S”分别表示大项、中项和小项。现将三段论所有的四个格列举如下：

	第一格	第二格	第三格	第四格
大前提	M—P	P—M	M—P	P—M
小前提	S—M	S—M	M—S	M—S
结 论	S—P	S—P	S—P	S—P

当三段论的格确定以后，三段论的形式仍未完全确定，因为三段论的两个前提和一个结论还可以在 A、E、I、O 这四种不同形式的命题中加以选择。由于以不同形式的命题作为前提或结论而形成的各种不同的三段论形式叫做“三段论的式”。推论 2 属于第一格，它的式可以表示为：AAA。这里的三个字母依次代表大前提、小前提与结论的命题形式。推论 2 的格和式一起记为 AAA-I，其中“I”表示第一格。本章开头给出的推论 1 具有第二格的 AOO 式，故可记为 AOO-II。

当三段论的格和式都确定以后，三段论的形式也就完全确定了。例如，如果告诉我

们一个三段论的形式是 EIO—Ⅲ，我们便知道这个三段论具有如下的形式：

所有 M 不是 P

有 M 是 S

所以，有 S 不是 P

就三段论的任何一格而言，它的两个前提和一个结论各有四种可能的形式，即 A、E、I 或 O。因此，三段论的任何一格都有  $4^3$  即 64 个式，四个格一共有 256 个式。然而，并非每一个三段论形式是有效的。如何确定一个三段论形式从而确定一个三段论的有效性，这正是三段论逻辑所要研究的主要问题。在转入这一问题之前，我们对另一个问题略加讨论，即如何把日常语言中的三段论加以规范化。请看下面一个推论：

**【推论 3】**

所有富人是狡猾的；

有些哲学家是不狡猾的；

所以，并非所有哲学家是富人。

初看上去，推论 3 不是一个三段论。首先，它的三个命题并不都是直言命题，其中的结论是一个含有联结词“并非”的复合命题。然而，根据“并非所有 S 是 P”和“有 S 不是 P”之间的等值关系，我们可以把推论 3 的结论置换为一个直言命题，从而可以把推论 3 重写为：

所有富人是狡猾的；

有些哲学家是不狡猾的；

所以，有些哲学家不是富人。

然而，这个重新表述了的推论仍然不是一个三段论。因为其中含有四个不同的词项，即“富人”、“哲学家”、“狡猾的”和“不狡猾的”。不过，根据直言命题的换质法，我们很容易把第一个前提中的“狡猾的”变为“不狡猾的”，或者把第二个前提中的“不狡猾的”变为“狡猾的”。如果采用后者，那么推论 3 可被再次重写为：

所有富人是狡猾的；

有些哲学家不是狡猾的；

所以，有些哲学家不是富人。

这样重写后的推论 3 便是一个标准的三段论，它的形式是 AOO—Ⅱ。在日常语言中，三段论的变形是多种多样的。我们要注意识别那些伪装了的三段论，并且在讨论它们的有效性之前先把它们加以规范化。

### 4.2.2 用文恩图检验三段论的有效性

为了用文恩图检验一个三段论的有效性，我们首先画三个彼此相交的圆，让它们分别代表大项、中项和小项，如图 4.7 所示。

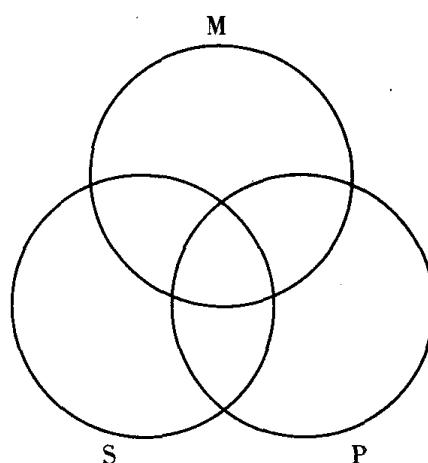


图 4.7

其次，把作为前提的两个直言命题分别在图中表示出来。不妨以 AAA—I 为例。AAA—I 的形式是：

所有 M 是 P  
所有 S 是 M  
所以，所有 S 是 P

把作为前提的两个 A 命题在图 4.7 中加以表示的结果是图 4.8。

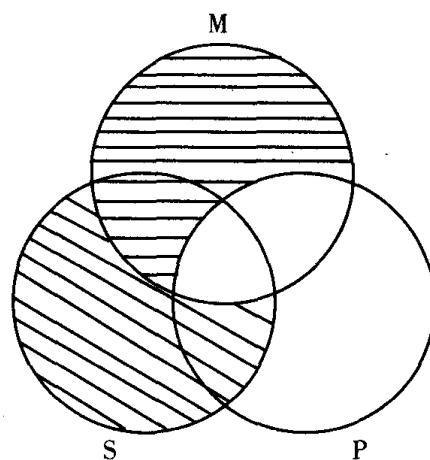


图 4.8

最后，根据图 4.8 来检验 AAA—I 是否有效。我们知道，一个推论是有效的，当且仅当，它的所有前提真时它的结论必然真。对于三段论我们还可以说，一个三段论是有效的，当且仅当，表示所有前提的文恩图包含了表示结论的文恩图。据此，我们检查图 4.8，看它是否包含了表示 AAA—I 的结论文恩图：若包含，AAA—I 是有效的；若不包含，则表明 AAA—I 是无效的。AAA—I 的结论是“所有 S 是 P”，表示该结论的文恩图是图 4.9。

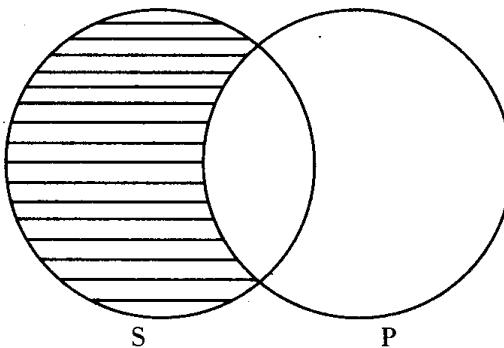


图 4.9

比较图 4.9 和图 4.8，我们看到，图 4.9 中画影线的部分完全包含在图 4.8 中的影线区域。由此可见，AAA—I 是有效的。

我们还知道，一个具体推论是有效的，当且仅当，该推论是一个有效的推论形式的一个替换例子。因此，检验一个三段论的有效性，只需检验它的三段论形式的有效性即可。例如，为检验推论 2 的有效性，我们只需检验它的三段形式即 AAA—I 的有效性。既然 AAA—I 的有效性已被确定，由此可以确定，推论 2 是有效的。

接下来，让我们检验推论 1 的有效性。推论 1 的三段论形式是 AOO—II，即：

所有 P 是 M

有 S 不是 M

所以，有 S 不是 P

首先，我们画出两个前提的文恩图，即图 4.10。其次，我们检查图 4.10 是否已经把结论表示出来。AOO—II 的结论是“有 S 不是 P”；在图 4.10 中“是 S 而非 P”的部分有“X”。可见，这个结论已被图 4.10 表示出来，因此，AOO—II 是有效的，进而推论 1 是有效的。

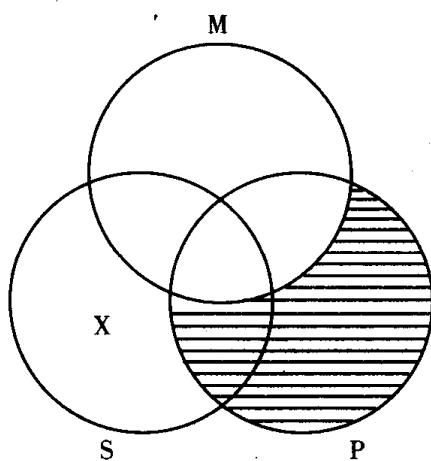


图 4.10

我们再考察几个例子。

**【推论 4】**

有些功利主义者不是企业家；

所有企业家都注重经济效益；

所以，有些注重经济效益的人不是功利主义者。

此推论的形式是：

有 P 不是 M

所有 M 是 S

所以，有 S 不是 P

首先，画出两个前提的文恩图，如图 4.11。其次，检查图 4.11 是否已经把结论表示出来。我们看到，图 4.11 中“是 S 而非 P”的区域没有出现“X”。可见，结论“有 S 不是 P”没有被图 4.11 表示出来。因此，推论 4 是无效的。

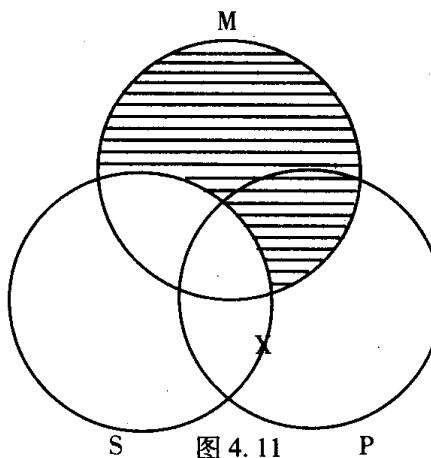


图 4.11

请注意，图 4.11 中的“X”是写在 S 的圆周上的。这是因为 S 的圆周把“是 P 而非 M”的区域分为两个部分，当我们表示前提“有 P 不是 M”时，我们不能根据这个前提确定“X”应该写在其中的哪一个部分。在这种情况下，我们只能把“X”写在 S 的圆周上。把“X”写在 S 的圆周上仅仅表示有事物至少存在于这两部分之一，但究竟存在于哪一部分尚未确定。如果不是这样，而是把“X”写在其中的任一部分，那么，图中所表示的内容便超出了前提所断定的内容，这样画出的文恩图就不能反映所讨论的推论。

此外，当一个三段论有一个全称前提和一个特称前提时，我们最好先画出全称前提，然后画出特称前提。这样做，常常可以避免不必要的麻烦。例如，前面检验推论 1 的文恩图即图 4.10，就属于这种情况。如果我们先画特称前提，后画全称前提，那么，检验推论 1 的文恩图成为图 4.12。

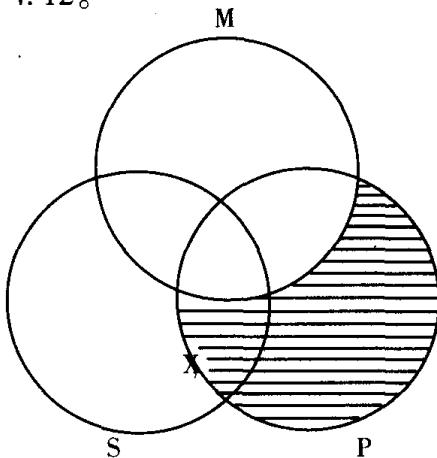


图 4.12.

在图 4.12 中，“X”写在 P 的圆周上。这是因为 P 的圆周把“是 S 而不是 M”的区域分为两部分。当先画“有 S 不是 M”时，这两个部分都是空白，我们无法确定“X”究竟应当画在其中的哪一部分。与此不同，如果先画全称前提“所有 P 是 M”，那么，以上所说的那右边部分就被画上影线，这表明右边部分没有任何个体。因此，在画“有 S 不是 P”时，“X”自然应当画在左边的部分，正如图 4.10 那样。将图 4.10 与图 4.12 作比较，我们发现，图 4.10 直截了当地把推论 1 的结论即“有 S 不是 P”显示出来，而图 4.12 却没有。因此，当我们画出图 4.12 以后还必须把图 4.12 改为图 4.10，这样便走了弯路。

### 【推论 5】

有些书是有插图的；

有些有插图的是有趣的；

所以，有些书是有趣的。

此推论的形式是：

有 S 是 M  
有 M 是 P  
所以，有 S 是 P

首先，画出两个前提的文恩图，即图 4.13。其次，检查图 4.13，看看在 S 和 P 的相交区域里是否有“X”。我们发现，图 4.13 中的两个“X”都位于 S 和 P 的相交区域的边界线上，这并不表明至少有一个体在该区域之内。因而，图 4.13 没有把结论“有 S 是 P”表示出来。据此可以断定，推论 5 是无效的。

顺便指出，三段论的标准形式要求大前提在前，小前提在后。而推论 5 却是小前提在前，大前提在后。不过，这完全无妨于我们检验三段论的有效性。对于检验三段论来说，重要的是辨认三个直言命题的形式和每一个词项的作用，即它是大项、中项或小项。

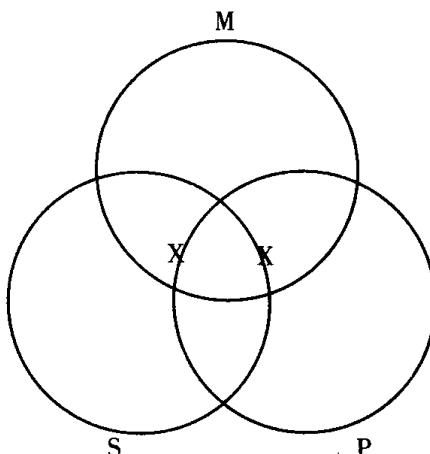


图 4.13

在前一小节我们讲到，三段论形式一共有 256 个。用文恩图逐一检验这 256 个三段论形式，结果只有 15 个是有效的。我们把这 15 个有效的三段论形式列举如下：

第一格	第二格	第三格	第四格
AAA	EAE	IAI	AEE
EAE	AEE	AII	IAI
AII	EIO	AOO	EIO
EIO	AOO	EIO	

三段论的有效形式是并且仅仅是以上 15 个形式。任何一个三段论如果是这 15 个形式之一的一个替换例子，它就是有效的，否则，它就是无效的。

### 4.2.3 用规则检验三段论的有效性

为了阐明检验三段论的原则，我们需要引进一个概念即“周延”。

**【定义】**一个命题中的一个词项是周延的，当且仅当，这个命题断定了这个词项的全部外延。

根据这个定义，我们可以确定：

(1) 全称命题的主项是周延的。

全称命题“所有 S 是 P”和“所有 S 不是 P”中的量词“所有”断定了 S 的全部外延。

(2) 特称命题的主项是不周延的。

特称命题“有 S 是 P”和“有 S 不是 P”中的量词“有”没有断定 S 的全部外延。

(3) 肯定命题的谓项是不周延的。

肯定命题“所有 S 是 P”和“有 S 是 P”并没有断定 S 是所有的 P，故没有断定 P 的全部外延。

(4) 否定命题的谓项是周延的。

否定命题“所有 S 不是 P”和“有 S 不是 P”断定了 S 不是任何一个 P，故断定了 P 的全部外延。

现在，我们把三段论规则列举如下：

规则 1：中项至少在一个前提中周延。

规则 2：如果一个词项在结论中是周延的，那么，它必须在前提中周延。

规则 3：至少一个前提是肯定的。

规则 4：如果有一个前提是否定的，那么，结论是否定的；如果结论是否定的，那么，有一前提是否定的。

规则 5：如果两个前提都是全称的，那么，结论不能是特称的。

一个三段论如果满足以上每一条规则，那么它是有效的；反之，如果它违反其中任何一条规则（即使满足其他规则），那么，它是无效的。接下来，我们就用这五条规则检验一些三段论的有效性。

首先，我们用规则重新检验推论 5。推论 5 的中项是“有插图的”，这个词项在第一个前提中作为肯定命题的谓项，在第二个前提中作为特称命题的主项。可见，这个中项在两个前提中均不周延；这就违反了规则 1，因此，推论 5 是无效的。

再用规则重新检验推论 4。我们看到，“功利主义者”在结论中作为否定命题的谓项是周延的，但在第一个前提中作为特称命题的主项是不周延的，这违反规则 2。因此，推论 4 是无效的。

当我们重新检验推论 1 和推论 2 时，我们发现这两个推论没有违反任何一条规则，

因而，它们都是有效的。

以上我们用规则检验推论 1、2、4 和 5 的结果与前面用文恩图检验的结果完全一致。推论 3 与推论 1 具有相同的形式即 AOO-II，因而也是有效的。下面我们再考察一些推论。

**【推论 6】**

欧洲人是白种人；

澳大利亚人不属于欧洲人；

所以，澳大利亚人是白种人。

这个推论的第二个前提相当于“澳大利亚人不是欧洲人”。这个前提是肯定的，而推论 6 的结论却是肯定的，这违反规则 4。因而，推论 6 是无效的。

**【推论 7】**

欧洲人不属于黑种人；

澳大利亚人不属于欧洲人；

所以，澳大利亚人不属于黑种人。

这个推论的两个前提都是否定的，违反规则 3，因而此推论是无效的。

**【推论 8】**

逻辑学是无阶级性的；

逻辑学是研究思维规律的科学；

所以，有些研究思维规律的科学不是有阶级性的。

从字面上看，推论 8 包含四个词项，即“逻辑学”、“研究思维规律的科学”、“无阶级性的”和“有阶级性的”。然而，通过换质法很容易把后两个词项统一起来。我们对推论 8 的结论进行换质，从而得到：

逻辑学是无阶级性的；

逻辑学是研究思维规律的科学；

所以，有些研究思维规律的科学是无阶级性的。

经过这样改写的推论 8 便是一个标准的三段论，因而可以用三段论的规则对它进行检验。我们看到，它的两个前提都是全称命题，而结论却是特称命题，这违反规则 5。可见，推论 8 是无效的。

如果我们再用文恩图重新检验以上最后的三个推论，我们会得出相同的结论，不妨对推论 8 用文恩图重新加以检验。推论 8 的三段论形式是：

所有 M 是 P

所有 M 是 S

所以，有 S 是 P

表示两个前提的文恩图见图 4.14。我们看到，在图 4.14 中没有任何“X”出现，因而它没有表示出结论“有 S 是 P”。可见，推论 8 是无效的。

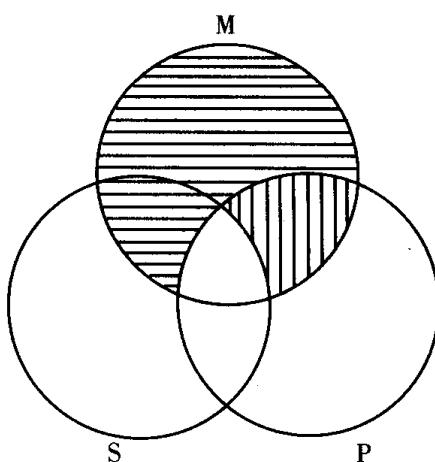


图 4.14

总之，检验三段论的有效性的两种方法，即文恩图方法和规则方法是完全吻合的。用文恩图检验为有效的 15 个三段论形式用规则检验也是有效的，用文恩图检验为无效的其他三段论形式用规则检验也是无效的。文恩图方法和规则方法的逻辑功能是相同的。不过，二者在实际使用上却有所差异。文恩图方法比较直观，但不太方便；规则方法比较方便，但不够直观。对于这两种方法，我们可以根据自己的爱好加以选择。

## 习题 4.2

一、指出下列三段论形式的格与式，并用文恩图检验它们是否有效。

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 1. 所有 M 不是 P | 2. 有 M 是 P   |
| 所有 S 是 M     | 所有 M 是 S     |
| 所以，所有 S 不是 P | 所以，有 S 是 P   |
| 3. 有 P 不是 M  | 4. 所有 P 是 M  |
| 有 S 是 M      | 所有 M 不是 S    |
| 所以，有 S 不是 P  | 所以，所有 S 不是 P |
| 5. 有 M 不是 P  | 6. 所有 M 不是 P |
| 所有 M 是 S     | 有 S 是 M      |
| 所以，所有 S 不是 P | 所以，所有 S 不是 P |
| 7. 所有 P 是 M  | 8. 所有 M 不是 P |

- |  |  |
|--|--|
| 所有 S 不是 M<br>所以，所有 S 不是 P<br>9. 所有 M 不是 P<br>所有 S 是 M<br>所以，有 S 不是 P<br>11. 所有 M 不是 P<br>所有 M 是 S<br>所以，有 S 不是 P | 有 S 是 M<br>所以，有 S 不是 P<br>10. 所有 P 是 M<br>有 S 不是 M<br>所以，有 S 不是 P<br>12. 所有 M 是 P<br>有 S 是 M<br>所以，有 S 是 P |
|--|--|

## 二、用文恩图检验下列三段论是否有效。

1. 所有军事家不是优柔寡断的；  
有些军事家是铁石心肠的；  
所以，有些铁石心肠的不是优柔寡断的。
2. 有些艺术家是不拘小节的；  
所有画家都是艺术家；  
所以，所有画家都是不拘小节的。
3. 铜是可塑的；  
橡胶不是铜；  
所以，橡胶不是可塑的。
4. 有些政治家不是实用主义者；  
没有政治家不注重社会效果；  
因此，有些注重社会效果的人不是实用主义者。
5. 没有金属是不导电的；  
汞是金属；  
所以，有些汞是导电的。
6. 并非有的鸟不是脊椎动物；  
并非所有的鸟都会下蛋；  
因此，有些不会下蛋的是脊椎动物。
7. 鱼不是哺乳动物；  
鱼不是微生物；  
可见，微生物不是哺乳动物。
8. 没有一门科学是容易精通的；  
所有容易精通的是缺乏吸引力的；  
所以，有些缺乏吸引力的不是科学。
9. 所有甲班学生不是球迷；

有些球迷是活泼的；

所以，有些活泼的是甲班学生。

10. 所有团员是青年；

所有老年人是非团员；

所以，有些老年人不是青年。

11. 有些商品是畅销的；

所有畅销的是有价值的；

所以，有些有价值的的商品。

12. 没有吸毒者是长寿的；

所有吸毒者都是颓废的；

所以，有些颓废的不是长寿的。

三、用规则检验题一的三段论形式是否有效；并与用文恩图检验的结果相比较，看这两种检验结果是否一致。

四、用规则检验题二的各个三段论是否有效；并与用文恩图检验的结果相比较，看这两种检验结果是否一致。

## 4.3 强化三段论

### 4.3.1 强化直言命题与强化三段论

在前一节中，我们判定推论 8 是无效的。然而，这一判定与人们的直觉多少有些不符。按照直觉，人们可能更倾向于把推论 8 看作是有效的。原因何在呢？这是因为人们自觉不自觉地假定推论 8 的前提的主项即“逻辑学”不是一个空词项；这就等于给推论 8 增加了一个前提，即“逻辑学是存在的”。不难证明，推论 8 加上这个前提后则成为一个有效的推论。现在，我们用文恩图证明这一点。

我们已经给出推论 8 的文恩图，即图 4.14。现在，我们要在图 4.14 的基础上把增加的前提“逻辑学是存在的”表示出来。作法就是在表示“逻辑学”的圆即 M 之内写上“X”。我们看到，在图 4.14 中，M 中只剩惟一的一块空白，其他部分都被画上影线。这就是说，M 中除那块空白以外的其他部分肯定不存在任何事物。因此，“X”只能写在 M 中那惟一的空白之中。其结果是图 4.15。图 4.15 表示出推论 8 的两个前提和一个新增的前提即“M 是存在的”。接下来检验图 4.15 是否把推论 8 的结论“有 S 是 P”表示出来。我们看到，“X”处于 S 和 P 的相交区域内。这表明推论 8 的结论在图 4.15 中已经被表示出来。这样，我们就证明了，推论 8 加上前提“M 是存在的”之后便成为有效的。

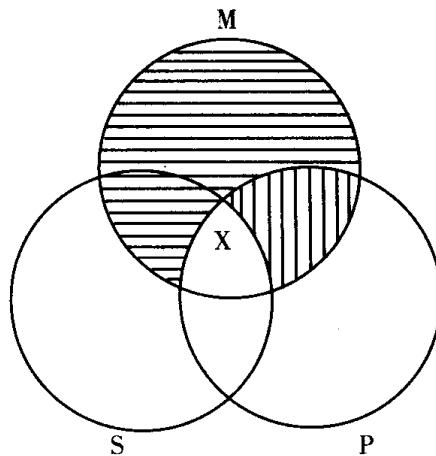


图 4.15

推论 8 加上这个前提之后的推论是推论 8'，即：

逻辑学是无阶级性的；

逻辑学是研究思维规律的科学；

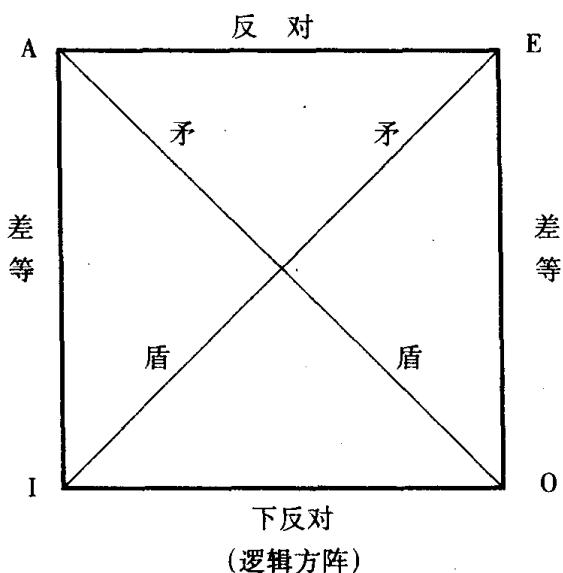
逻辑学是存在的；

所以，有些研究思维规律的科学是无阶级性的。

推论 8' 有三个前提，它不是一个三段论。然而，在日常语言中，类似推论 8' 的第三个前提常常被作为不言而喻的信息给以省略。这样被省略的推论 8' 与推论 8 在表达形式上就完全一样了。

事实上，由亚里士多德建立的传统三段论逻辑正是以省略一些前提的推论为其研究对象的。在传统三段论逻辑中有一个基本的假定，即“直言命题的主项不为空词项”，或者说，“直言命题的主项所表示的事物是存在的”。在这种假定下，每一个三段论都暗含着一个前提，即“由前提中的主项所表示的事物是存在的”。这样的三段论比起我们在前一节所讨论的三段论，可以说是强化了前提的三段论。因而，我们把这样的三段论叫做“强化三段论”，把组成强化三段论的直言命题叫做“强化直言命题”。相应地，把非强化三段论和非强化直言命题叫做“基本三段论”和“基本直言命题”。

由于强化直言命题暗含着假定“主项不是空词项”，而基本直言命题却没有这个假定，这使得强化直言命题之间的逻辑关系不同于基本直言命题之间的逻辑关系。在传统三段论逻辑中，强化直言命题之间的逻辑关系被归结为一个“逻辑方阵”，即：



这个逻辑方阵告诉我们：(i) A 和 O 之间具有矛盾关系；E 和 I 之间也具有矛盾关系。这与基本直言命题是一致的。(ii) A 和 E 之间具有反对关系，即，A 和 E 不能同真，但却可能同假；I 和 O 之间具有下反对关系，即，I 和 O 不能同假，但却可能同真。这两种关系在基本直言命题之间不存在。因为当直言命题的主项为空词项时，A 和 E 同真，I 和 O 同假。(iii) A 和 I 之间、E 和 O 之间具有差等关系，即如果 A 真，那么 I 真；如果 E 真，那么 O 真。这两种关系在基本直言命题之间也不存在。我们在 4.1.2 中提到，由于基本的全称命题没有主项存在的含义，而基本的特称命题有主项存在的含义，所以，从全称命题的真推不出特称命题的真。特别是，当基本直言命题的主项为空词项时，全称命题为真，而特称命题为假。

### 4.3.2 对强化三段论的有效性的检验

由于强化直言命题之间的逻辑关系不同于基本直言命题之间的逻辑关系，这使得强化三段论的有效性不同于基本三段论的有效性。例如，推论 8 作为一个基本三段论，它是无效的；但作为一个强化三段论就成为有效的。因为，作为强化三段论的推论 8 正是推论 8' 的省略形式。

由前面关于推论 8 和推论 8' 的讨论，可以归纳出用文恩图检验强化三段论的一般程序，即：

步骤 1：画出两个前提的文恩图。

步骤 2：在各个前提以及结论的主项的圆内写上“X”。

步骤 3：检查图中是否已把结论画出。若画出，则该推论有效；若未画出，则该推论无效。

下面我们就用文恩图检验一个强化三段论的有效性。

**【推论 9】**

所有核武器是有大杀伤力的；  
 任何原子弹都是核武器；  
 所以，有些原子弹是有大杀伤力的。

推论 9 的形式是：

所有 M 是 P  
 所有 S 是 M  
 所以，有 S 是 P

为检验推论 9 的有效性，首先画出两个前提的文恩图，即图 4.16。

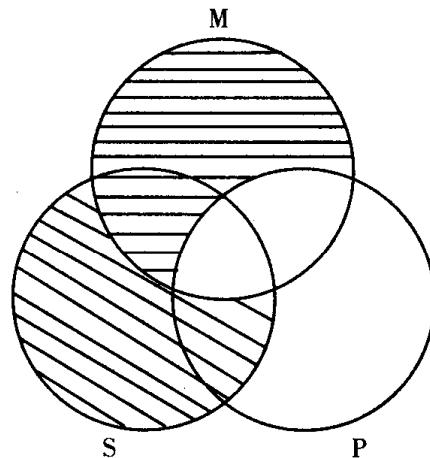


图 4.16

其次，我们在两个前提以及结论的主项 S 和 M 的圆内写上“X”，如图 4.17。

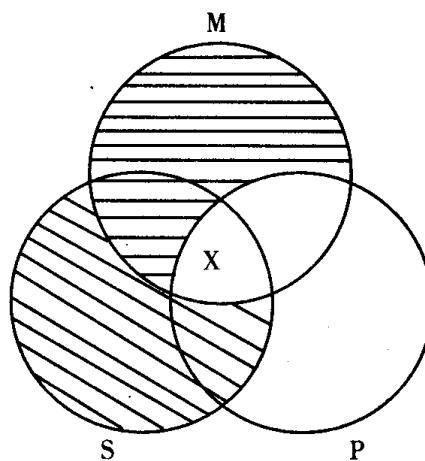


图 4.17

我们看到，S 的圆内只剩惟一的空白区，因而表示 S 存在的“X”只能写在那里。这个“X”同时写在 M 的圆内。最后，我们检查图 4.17 是否已经把结论“有 S 是 P”画出。我们看到在 S 和 P 的相交区域有一个“X”，这表明，结论确实被画出。因此，推论 9 作为一个强化的三段论是有效的。而图 4.16 并未把结论表示出来，这说明推论 9 作为一个基本三段论是无效的。推论 8 和推论 9 的共同特点有二：(i)作为强化三段论是有效的，而作为基本三段论是无效的；(ii)两个前提都是全称的而结论是特称的；我们知道，检验基本三段论的第五条规则恰恰不允许出现两个前提均为全称而结论为特称这种情况。因此，为要用规则来检验强化三段论的有效性，我们必须取消第五条规则。如果取消第五条规则，只用前四条规则检验强化三段论，所得结果与我们刚才介绍的用文恩图检验强化三段论的结果是相同的。检验强化三段论只需要其中的四条规则，这一事实的一个自然推断是：强化三段论的有效形式多于基本三段论的有效形式。

在前一节中我们已经列出十五个基本三段论的有效形式。强化三段论的有效形式除了这 15 个以外，还有 9 个，即：

第一格	第二格	第三格	第四格
AAI	AEO	EOA	AOE
EOA	AOE	AAI	EOA

AAI

这 9 个三段论形式都是以全称命题为前提，而以特称命题为结论的。无论是用本小节介绍的文恩图方法还是用本小节介绍的规则方法都能证明这 24 个强化三段论形式是有效的，并且还能证明这 24 个形式以外的其他三段论形式都是无效的。

### 4.3.3 处理三段论的两种方案

现在，我们面临一个问题，即如何确定一个三段论是强化三段论还是基本三段论？对于这个问题，我们没有也不可能有一个一般性的答案。我们只有把一个三段论和它出现于其中的具体的语言环境结合起来，才能确定这个三段论的性质。举例来说，假定下面一个推论出自一个哲学工作者之口：

维也纳学派的成员都懂逻辑学；  
维也纳学派的成员都是经验主义者；  
所以，有些经验主义者是懂逻辑学的。

在这种情况下，我们最好把这个推论看作一个强化三段论，即假定前提的主项“维也纳学派的成员”不是一个空词项。因为哲学工作者一般都知道维也纳学派是一个真实存在的哲学派别。然而，如果这个推论出于一个小学生或中学生之口，我们最好把它看作一个基本三段论，即不假定“维也纳学派的成员”不是一个空词项。因为在中小学生中知道实际存在的作为哲学派别的维也纳学派的人毕竟是不多的。

可见，如何确定一个三段论是基本三段论还是强化三段论，这不是一个单纯的逻辑问题，而是一个涉及语言环境和具体科学的问题。因此，在逻辑学的讨论中最好避开这个问题。避开这个问题的方案主要有二：其一是传统逻辑所采取的方案，另一是现代逻辑所采取的方案。

传统逻辑通常把三段论作为强化的三段论，把直言命题作为强化的直言命题。那些明显不能被强化的直言命题，即那些主项明显为空词项的命题，如“有些长翅膀的马是会飞的”等，都被看作无意义的；相应地，以这样的命题作为前提的三段论也被看作无意义的。与此不同，在现代逻辑中，通常把直言命题作为基本直言命题，把三段论作为基本三段论。这种作法的优点是，能够处理传统逻辑所不能处理的三段论和直言命题，即不假定主项存在的三段论和直言命题。其缺点是，对于那些主项明显存在的三段论和直言命题处理得比较迂回，不够直截了当。

我们采取现代逻辑处理三段论的方案。在本书中所出现的三段论和直言命题，除非特别声明，都是作为基本三段论和基本直言命题的。关于现代逻辑对三段论和直言命题的处理，在后面的谓词逻辑中还会有所涉及。

### 习题 4.3

一、已知下列强化直言命题为真，与它具有相同主项和谓项的其他三种形式的强化直言命题的真值是否可以根据强化直言命题的逻辑方阵来确定？若可以确定，其真值是什么？

1. 所有公园都有树木。
2. 有些人是勤劳的。
3. 有些国家不是民主的。
4. 所有海豚不是鱼。

二、已知下列强化直言命题为假，与它们具有相同主项和谓项的其他三种形式的强化直言命题的真值是否可以根据强化直言命题的逻辑方阵来确定？若可以确定，其真值是什么？

1. 有些飞行员是盲人。
2. 所有牡丹花是红的。
3. 所有唯心论者不是辩证论者。
4. 有些城市不是有居民的。

三、把习题 4.2 题二中各个推论作为强化三段论，用文恩图检验它们是否有效；并将检验结果与原来的检验结果相比较，看这两次检验结果对哪些推论是一致的，对哪些推论是不一致的。

四、把习题 4.2 题二中各个推论作为强化三段论，用规则检验它们是否有效；并与

上面用文恩图检验结果相比较；看这两种检验强化三段论的方法是否一致。

五、说明传统逻辑和现代逻辑处理直言命题和三段论的不同之处。

# 第五章

## 谓词逻辑：基本概念和符号化

### 5.1 基本概念

#### 5.1.1 谓词逻辑和谓词推论

到目前为止，我们已经讨论了两种不同类型的推论，其一是命题推论，其二是三段论推论。三段论推论看上去比较简单，因为它只涉及简单命题而没有涉及复合命题。然而，三段论推论却超出了命题推论的范围。通过下面的一个例子很容易看出这一点。

##### 【推论 1】

所有综合性大学都招收文科学生；  
有的大学是综合性大学；  
所以，有的大学招收文科学生。

推论 1 是一个三段论，应用三段论规则或文恩图很容易判明它是有效的。但是，在命题逻辑的范围内，推论 1 只能被符号化为：

A  
B  
 $\therefore C$

显然，这不是一个有效的命题推论。

命题逻辑的局限性在于，它所研究的最小逻辑单位是简单命题，而没有深入到简单命题的内部结构，不研究构成命题的词项之间的逻辑关系。命题逻辑所处理的是那些只依据真值函项联结词的推论。而像推论 1 这样的推论却是依据词项之间的逻辑关系——确切地说，是依据反映词项之间外延关系的量词——的推论。

三段论逻辑是一种关于词项之间外延关系的逻辑理论，因此，在三段论逻辑的范围内能够证明推论 1 的有效性。然而，三段论逻辑也有很大的局限性。比较明显的一点是，三段论逻辑完全没有讨论复合命题之间的逻辑关系，因而它对命题逻辑所能处理的那些推论是无能为力的。

总之，命题逻辑和三段论逻辑各执一端：命题逻辑的范围限于那些仅仅依据真值函

项联结词的推论，三段论逻辑的范围限于那些仅仅依据量词的推论，而且仅仅限于这类推论的一小部分。这种情形所带来一个必然后果是，对于那些既依据真值函项联结词又依据量词的推论，命题逻辑和三段论逻辑都不能处理。下面一个推论就属于这一类。

### 【推论 2】

任何大学生或者考试及格或者心情烦躁；

有些大学生考试不及格；

所以，有些大学生心情烦躁。

推论 2 是一个有效推论。然而，一方面，推论 2 不是一个三段论，它所依据的真值函项联结词“或者”在三段论中不能处理，因此，推论 2 的有效性在三段论中得不到证明。另一方面，推论 2 不是一个命题推论，它所依据的量词“任何”、“有些”在命题逻辑中不能处理，因此，推论 2 的有效性在命题逻辑中也得不到证明。

本章的目的在于发展这样一个逻辑系统：在其中，我们既能处理那些依据真值函项联结词的推论，又能处理那些依据量词的推论，而且还能处理那些既依据量词又依据真值函项联结词的推论。这样的逻辑理论叫做“谓词逻辑”。谓词逻辑是对命题逻辑的扩展，它在命题逻辑的基础上，又增添了一些新的推演规则。因此，所有在命题逻辑中能够被证明为有效的推论在谓词逻辑中都能被证明；许多在命题逻辑中不能被证明的有效推论在谓词逻辑中也能够被证明。如，推论 2 的有效性在谓词逻辑中是很容易得到证明的。我们把谓词逻辑所处理的推论叫做“谓词推论”。命题推论是谓词推论的一部分。

## 5.1.2 个体词和谓词

我们首先考察几个命题：

- (1) 武汉大学是综合性大学。
- (2) 武汉大学依山傍水。
- (3) 泰山是雄伟的。
- (4) 庐山是雄伟的。

这四个命题有一个共同的特点，即它们都断定了某个个别事物具有某种属性。在谓词逻辑中，把表示个别事物的名称或短语叫做“个体词”；把表示事物的性质或关系的短语叫“谓词”。上面四个命题中的“武汉大学”、“泰山”、“庐山”是个体词；“…是综合性大学”、“…依山傍水”、“…是雄伟的”是谓词。

现在，我们规定，小写字母 a 至 w（带或不带正整数下标）为个体常项，它们用来表示自然语言中的个体词亦即专名（专有名词）；其后紧跟一对括号的大写字母 A 至 Z（带或不带正整数下标）为谓词常项，它们用来表示自然语言中的谓词；在将命题符号化时，先写谓词常项，然后将个体词填写在谓词常项后边的一对括号里。据此，我们可以对上面四个命题进行如下的符号化：

首先给出谓词常项和个体常项：

- |                    |                  |
|--------------------|------------------|
| $Z(\ )$ : …是综合性大学, | $S(\ )$ : …依山傍水, |
| $X(\ )$ : …是雄伟的,   | $w$ : 武汉大学,      |
| $t$ : 泰山,          | $l$ : 庐山。        |

然后写出命题的符号表达式：

- (1')  $Z(w)$
- (2')  $S(w)$
- (3')  $X(t)$
- (4')  $X(l)$

(1')、(2')、(3')和(4')分别是(1)、(2)、(3)和(4)的符号化。这样的符号化能够展示命题的内部结构。由这些符号化了的命题我们可以清楚地看到，(1')和(2')具有相同的个体词和不同的谓词，(3')和(4')具有相同的谓词和不同的个体词。而这些命题的内部结构在命题逻辑中是得不到反映的。在命题逻辑中，以上每一个命题只能用一个命题常项来符号化。

上面四个命题中的谓词都是表示某一个体的属性，而有些谓词则表示两个或更多个体之间的关系。如：

- (5) 梁山伯爱祝英台。
- (6) 武汉在南京和重庆之间。
- (7) 武汉与南京之间的距离小于重庆与上海之间的距离。

(5) 的谓词“…爱…”表示两个个体之间的关系。(6)中的谓词“…在…和…之间”表示三个个体之间的关系。(7)中的谓词“…与…之间的距离小于…与…之间的距离”表示四个个体之间的关系。一般地，我们把表示  $n$  个个体的属性或关系的谓词叫做“ $n$  目谓词”。这里的“目”也就是空位的意思。命题(1)至(4)中的谓词都是一目谓词，命题(5)中的谓词是二目谓词，命题(6)中的谓词是三目谓词，命题(7)中的谓词是四目谓词。为了把谓词的目数表示出来，我们进一步规定，谓词符号是被一对包含或不包含逗号的括号紧跟其后的大写字母。如， $A(\ )$ 、 $\cdots M_5(\ )$ 、 $\cdots B_2(,)$ 、 $\cdots W(,,)$ 、 $\cdots Z(,,,)$  …。其中不含逗号的谓词是一目谓词；含有一个逗号的谓词是二目谓词；总之，含有  $n$  个逗号的谓词是  $n+1$  目谓词。个体词必须填在谓词的括号中，若有逗号，必须在逗号两边各填一个个体词。

在谓词逻辑中仍然用不带括号的大写字母表示命题常项。不过，由于用谓词常项构成的符号命题能够更准确地表达自然语言命题的意思，因此，在谓词逻辑的语境中较少出现命题常项。为简便起见，在规定谓词常项时，我们可以把谓词常项后边的括号省去。

现对命题(5)、(6)、(7)进行符号化。

令: E: …爱…, B: …在…和…之间, R: …与…之间的距离小于…与…之间的距离, b: 梁山伯, t: 祝英台, h: 武汉, j: 南京, q: 重庆, s: 上海

(5') E (b, t)

(6') B (h, j, q)

(7') R (h, j, q, s)

值得注意的是: 在这些命题的符号化中, 个体常项的先后顺序是重要的。例如, B (h, j, q) 表达一个真命题即(6); 若将它改为 B (j, h, q), 就成为一个假命题, 即: 南京在武汉和重庆之间。可见, 对于出现在一个谓词常项之后的一对括号里的个体常项, 我们不能随意改变它们的先后次序。

以上所讨论的命题都可以用一个 n 目谓词常项和填写在其后一对括号中的 n 个个体常项加以符号化, 这样的命题及其符号化都是关于某些个别事物的, 因而叫做“**单称命题**”。所有单称命题都属于谓词逻辑的基本命题。此外, 所有的命题常项也属于谓词逻辑的基本命题。习惯上, 把基本命题叫做“**原子命题**”, 所有单称命题和所有命题常项就是谓词逻辑的全部原子命题。由原子命题构成的复合命题又叫做“**分子命题**”。

### 5.1.3 量词

请看下面两个命题。

(8) 所有事物都是方形的。

(9) 有的事物是红色的。

(8) 和(9)都不是对个别事物作断定, 因为在这两个命题中没有出现表示个别事物的名称或短语。然而, 这两个命题的真值是确定的。稍加考虑就可以判定, (8)是一个假命题, 而(9)是一个真命题, 对于(8)和(9)这样的命题如何加以符号化呢? 我们先考虑(8)。

(8) 中所谈的“事物”泛指任何对象, 而不指称某一个别对象。因而, 对于(8)中的“事物”我们不能用个体常项来代表, 只能用个体变项来代表。为此, 我们引入个体变项。个体变项是小写字母 x、y 和 z (带或不带正整数下标)。个体变项的变域是宇宙间的任何个体, 除非对它加以特别的限制。我们还引入一个常项 “ $\forall$ ”。 $\forall$  叫做“**全称量词**”, 它的含义相当于日常语言中的“每一”、“任何”、“所有”、“一切”等等。现在, 我们用个体变项 “x” 表示(8)中的“事物”, 用谓词常项 “F” 表示(8)中的谓词“…是方形的”。于是, (8)可以符号化为:

(8')  $\forall x F(x)$

读作: (8') 对每一 x 而言, x 是方形的。

(8'') 和(8)的意思完全一样, 只是表达方式略有不同。虽然(8'')不如(8)接近自然语言的习惯, 但是, 作为符号式(8')的解释, (8'')比(8)更为便当。(8'')被一个逗号分

为两部分，前一部分“对于每一  $x$  而言”是对“ $\forall x$ ”的解释，后一部分“ $x$  是方形的”是对“ $F(x)$ ”的解释。

命题(9)如同命题(8)，其中的“事物”也不能用个体常项来表示，只能用个体变项来表示。命题(9)与命题(8)的量词是不同的，为此，我们再引入一个常项“ $\exists$ ”，“ $\exists$ ”叫做“存在量词”，它的含义相当于自然语言中的“有”、“有的”、“至少有一”等等。现在我们用个体变项  $x$  表示(9)中的“事物”，用谓词常项  $H$  表示(9)中的谓词“…是红色的”。于是，(9)可以被符号化为：

$$(9') \exists xH(x)$$

读作：(9') 至少有一  $x$  使得， $x$  是红色的。

(9') 和(9)虽然表达方式略有不同，但它们的意思是完全一样的。(9')也被一个逗号分为两部分，前一部分“至少有一  $x$  使得”是对(9')中的“ $\exists x$ ”的解释，后一部分“ $x$  是红色的”是对(9')中的“ $H(x)$ ”的解释。

一个量词后边总是紧跟一个个体变项，用以表明这个量词是针对什么而言的。为了讨论方便，以后我们把量词和紧跟其后的一个个体变项一起称作量词。如：“ $\forall x$ ”、“ $\forall y$ ”、“ $\forall z$ ”等是全称量词，“ $\exists x$ ”、“ $\exists y$ ”、“ $\exists z$ ”等是存在量词。需要指出，由于个体变项的指称是不确定的，所以，将一个量词中的个体变项替换为另一个个体变项，量词的含义完全不变。如“ $\forall x$ ”与“ $\forall y$ ”的含义都是“对任一个体而言”，“ $\exists z$ ”和“ $\exists x$ ”的含义都是“至少有一个体使得”。正因为这样，我们对(8)的符号化也可以是：

$$(8'') \forall yF(y)$$

对(9)的符号化也可以是

$$(9'') \exists zH(z)$$

#### 5.1.4 量词的辖域、普遍命题和复合命题

在谓词逻辑中，量词和真值函项联结词可以出现在同一个命题之中，从而构成比较复杂的命题。下面两个命题就属于这类命题。

$$(10) \forall x(F(x) \rightarrow F(e))$$

$$(11) \forall xF(x) \rightarrow F(e)$$

比较(10)和(11)，我们发现，二者的惟一区别是：在(10)中，“ $F(x) \rightarrow F(e)$ ”处于“ $\forall x$ ”之后的一对括号中，但在(11)中，“ $\forall x$ ”之后没有这样一对括号。紧跟量词之后的一对括号标明该量词的作用范围。量词的作用范围叫做“量词的辖域”。

如何确定一个量词的辖域呢？首先，我们沿用习惯的规定，即量词处在它本身的作用范围内。对于量词的辖域，可以分三种情况加以判别：其一，量词后边紧接一个左括号。在这种情况下，量词的辖域从量词开始延续到与该左括号配对的右括号。其二，量词后

边没有紧跟一个左括号，也没有紧跟一个量词。在这种情况下，量词的辖域从量词开始延续到该量词之后的第一个二项真值函项联结词之前（不包括该真值函项联结词）。其三，量词后边紧接一个量词，在这种情况下，该量词的辖域就是它本身加上它后边的量词的辖域。

在(10)中，量词“ $\forall x$ ”之后紧接一个左括号，因此，量词的辖域一直延续到与该左括号配对的右括号；也就是说，量词的辖域包括整个命题。但是在(11)中，量词“ $\forall x$ ”之后没有紧接一个左括号，也没有紧接一个量词，因此，量词的辖域只包括“ $\rightarrow$ ”之前的部分即“ $\forall x F(x)$ ”。我们再看一个命题：

$$(12) \forall x \exists y R(x, y)$$

在(12)中，量词“ $\exists y$ ”之后没有紧跟一个左括号，也没有紧跟一个量词，因此，“ $\exists y$ ”的辖域应当从它本身开始延续到它之后的第一个二项真值函项联结词之前；但由于“ $\exists y$ ”之后没有任何二项真值函项联结词，这就意味着，直到公式的末尾均属“第一个二项真值函项联结词”之前的部分。因此，“ $\exists y$ ”的辖域从它本身开始一直延续到公式的末尾。(12)的另一个量词“ $\forall x$ ”之后紧接量词“ $\exists y$ ”，因此，“ $\forall x$ ”的辖域包括它本身和“ $\exists y$ ”的辖域，亦即包括整个公式。

量词的辖域是一个非常重要的概念，改变量词的辖域常常会改变命题的含义和真值。例如，(10)和(11)除了量词“ $\forall x$ ”的辖域不同以外，其余部分完全相同，然而(10)和(11)所表达的命题是不同的。为了说明这一点，我们设“F”为“活到九十多岁”，“e”为“亚里士多德”。于是，(10)所表达的命题是：

(10') 对于每一个体而言，如果他活到九十多岁，那么亚里士多德活到九十多岁。

(10') 是一个假命题，我们很容易找到它的一个反例。如，罗素活到九十多岁，但亚里士多德却没有活到九十多岁。

(11) 所表达的命题是：

(11') 如果所有个体活到九十多岁，那么亚里士多德活到九十多岁。

(11') 是一个真命题，因为它的前件和后件都是假的。

量词和真值函项联结词统称为“逻辑词”。如果一个量词的辖域包括整个命题，那么我们就称该量词是该命题的“主逻辑词”。以量词为主逻辑词的命题称作“普遍命题”。普遍命题又可分为全称命题和存在命题。全称命题的主逻辑词是全称量词，存在命题的主逻辑词是存在量词。如果一个命题中至少有一个真值函项联结词未包含于量词的辖域内，那么该命题的主逻辑词就是量词辖域之外的某个真值函项联结词。以真值函项联结词为主逻辑词的命题称作“复合命题”。据此，我们可以判定，(10)和(12)是普遍命题，具体地说，是全称命题；而(11)是一个复合命题，具体地说，是一个蕴涵命题。

到目前为止，我们已经讨论的命题可以分为三类，即普遍命题、复合命题和基本命

题（即原子命题）。而这三类命题就是谓词逻辑的全部命题。普遍命题可以包含真值函项联结词，也可不包含真值函项联结词。如：

$$(13) \forall y K(y)$$

$$(14) \exists z (J(z) \wedge H(z) \rightarrow Q(z))$$

(13) 不含真值函项联结词，(14) 含有真值函项联结词，它们均属普遍命题。

复合命题可以含有量词，也可不含量词。如：

$$(15) \exists x C(x) \vee \forall y (B(y) \rightarrow E(y))$$

$$(16) B(b) \rightarrow G(a)$$

(15) 含有量词，而(16)不含量词，它们均属复合命题。

基本命题可以是一个单称命题，即由一个  $n$  目谓词常项和填写在其后的一对括号中的  $n$  个个体常项组成，也可以是一个命题常项。如：

$$(17) R(m, n)$$

$$(18) K$$

(17) 和(18)都是基本命题。(17)是由一个二目谓词和两个个体常项组成的，而(18)只是一个命题常项。值得指出的是，由于命题常项是谓词逻辑的基本命题，所以，由命题常项和真值函项联结词组成的复合命题均属谓词逻辑的复合命题。此外，命题常项还可以和普遍命题组成复合命题。如：

$$(19) \forall z P(z) \rightarrow A$$

命题常项也可以出现在普遍命题之中，如：

$$(20) \exists x (Q(x) \wedge B)$$

### 5.1.5 自由变项和约束变项

比较下面两个表达式（我们用直线标出量词的辖域）：

$$(21) \exists y \underline{(F(y) \wedge G(y))}$$

$$(22) \underline{\exists y} F(y) \wedge G(y)$$

在(21)中，变项  $y$  出现三次，并且这三次出现都在量词  $\exists y$  的辖域内。在(22)中，变项  $y$  也出现三次，但只有前两次出现在  $\exists y$  的辖域内，而第三次出现则不在  $\exists y$  的辖域内。

一个变项在一个公式中的一次出现是约束的，当且仅当，这次出现是在含有该变项的量词的辖域内。

一个变项在一个公式中的一次出现是自由的，当且仅当，该变项的这次出现不是约束的。

根据这个定义，在(21)中， $y$  的三次出现都是约束的，在(22)中， $y$  的前两次出现是约束的，第三次出现是自由的。

再看几个公式：

$$(23) \quad \underline{\forall z (I(z) \rightarrow H(z, x))}$$

$$(24) \quad \underline{\exists y J(y)} \vee \underline{\forall x K(b, x)}$$

$$(25) \quad \underline{\forall x L(x, y)} \leftrightarrow \underline{\forall y L(y, x)}$$

在(23)中， $z$ 的所有三次出现都是约束的；而 $x$ 的惟一的出现是自由的。在(24)中， $y$ 的两次出现都是约束的， $x$ 的两次出现也都是约束的。在(25)中， $x$ 的前两次出现是约束的，而第三次出现是自由的； $y$ 的前一次出现是自由的，而后两次出现是约束的。

现在，我们进而给出约束变项和自由变项的定义：

一个变项在一个公式中是一个约束变项，当且仅当，该变项至少有一次出现是约束的。

一个变项在一个公式中是一个自由变项，当且仅当，该变项至少有一次出现是自由的。

根据这一定义，一个变项在一个公式中可以既是约束的，又是自由的。如，在(25)中， $x$ 和 $y$ 都是约束变项，也都是自由变项。但是，变项的任何一次出现要么是约束的，要么是自由的，而不能二者得兼。

### 5.1.6 开语句、开语句的例示和概括

开语句就是至少含有一个自由变项的公式。

如，前面的表达式(22)、(23)和(25)都是开语句，因为它们都含有自由变项；而(21)和(24)不是开语句，因为它们都不含有自由变项。

开语句的一个重要特征是没有确定的真值，因而开语句不表达命题。为了说明这一点，我们以最简单的开语句为例。

$$(26) \quad G(x)$$

在(26)中， $G$ 代表谓词“…在中国”，故(26)可以读作：“ $x$ 在中国”。不难看出，(26)的真值取决于用怎样的个体常项替换其中的自由变项 $x$ 。如果用“北京”替换 $x$ ，那么，就得到一个真命题。如果用“东京”替换 $x$ ，那么就得到一个假命题。既然(26)没有确定的真值，所以，(26)不表达任何命题。

如果用个体常项替换一个开语句中的所有个体变项，那么，便得到一个命题。我们不妨用个体常项 $b$ 和 $c$ 分别代表“北京”和“东京”，并通过用 $b$ 或 $c$ 分别替换(26)中的自由个体变项 $x$ ，从而得到 $G(b)$ 或 $G(c)$ 。 $G(b)$ 表达一个真命题， $G(c)$ 表达一个假命题。

**【定义】**用一个个体常项替换开语句中的一个个体变项的每一次自由出现，称为对

这个开语句的一次例示；由一次例示得到的结果叫做开语句的一个“替换例子”，用以替换的个体常项叫做“例示常项”。

$G(b)$  和  $G(c)$  就是开语句  $G(x)$  的两个替换例子，它们分别是用  $b$  或  $c$  对  $G(x)$  进行例示所得的结果。下面我们再对一个开语句进行例示。

(27)  $J(x, y)$

(27) 中的  $J$  代表二目谓词“…见过…”。我们用  $d$  代表“亚里士多德”， $b$  代表“柏拉图”， $h$  代表“黑格尔”。(27) 含有两个自由变项，因此，要从(27)得到一个命题，需要对(27)连续进行两次例示。我们先用  $d$  对(27)中的  $x$  进行例示，从而得到  $J(d, y)$ ，读作“亚里士多德见过  $y$ ”，这仍是一个开语句。接下来，我们再用  $b$  对(27)中的  $y$  进行例示，则得到  $J(d, b)$ ，读作“亚里士多德见过柏拉图”，这是一个真命题。如果我们不用  $b$ ，而用  $h$  对(27)中的  $y$  进行例示，则得  $J(d, h)$ ，读作“亚里士多德见过黑格尔”，这是一个假命题。

从一个开语句得出一个命题的另一种方法是对开语句进行概括。

【定义】对一个开语句进行一次概括，就是在这个开语句前边加上一个量词，该量词所含的变项与这个开语句所含的一个自由变项相同，并且该量词的辖域包括整个公式。

用全称量词对开语句进行概括，称作“全称概括”；用存在量词对开语句进行概括，称作“存在概括”。

以开语句(26)为例。对(26)进行全称概括的结果是  $\forall xG(x)$ ，读作“对每一  $x$  而言， $x$  在中国”，即断定一切个体都在中国，这显然是一個假命题。对(26)进行存在概括的结果是  $\exists xG(x)$ ，读作“至少有一  $x$  使得， $x$  在中国”，即断定有个体在中国，这显然是一個真命题。

(27) 含有两个自由个体变项，因此，要从(27)得到一个命题，需要连续进行两次概括。我们不妨先对(27)中的  $y$  进行全称概括，从而得到  $\forall yJ(x, y)$ ；再对其中的  $x$  进行全称概括，从而得到  $\forall x\forall yJ(x, y)$ ，读作“对于每一  $x$  和每一  $y$  而言， $x$  见过  $y$ ”；它断定了任何两个个体都曾见过，这显然是一個假命题。

我们也可对(27)连续进行两次存在概括，其结果是  $\exists x\exists yJ(x, y)$ ，读作“至少有一  $x$  和至少有一  $y$  使得， $x$  见过  $y$ ”；它断定有些个体之间曾经见过，这显然是一個真命题。当然，我们还可以对(27)进行一次存在概括和一次全称概括，而且无论概括的顺序如何。如， $\forall x\exists yJ(x, y)$  和  $\exists y\forall xJ(x, y)$  等都是对(27)进行概括的结果。

总之，开语句不表达任何命题。从一个开语句得到一个命题有两种并且只有两种方法，即例示和概括。开语句和符号化了的命题统称为“公式”。

### 5.1.7 重复约束和空约束

最后，我们提及两种特殊的情况，一是重复约束，另一是空约束。请看下面的例子。

- (28)  $\forall x \exists x K(x, x)$
- (29)  $\exists y(I(y) \wedge \forall y J(y))$
- (30)  $\exists x \forall y(I(x) \rightarrow L(x))$

在(28)和(29)中都出现了重复约束。所谓重复约束，就是一个量词出现在另一个含有相同变项的量词的辖域内。在(28)中， $\exists x$  出现在  $\forall x$  的辖域内，而且这两个量词含有相同的变项  $x$ 。在(29)中， $\forall y$  出现在  $\exists y$  的辖域内，而且这两个量词含有相同的变项  $y$ 。重复约束使得某一变项同时受到两个量词“约束”。我们把出现重复约束的符号序列看作是无意义的，它们不属谓词逻辑的公式，因而不予讨论。

在(30)中出现了空约束。所谓空约束就是在一个量词的辖域内没有第二次出现该量词所含的个体变项。在(30)中， $\forall y$  的辖域内没有第二次出现  $y$ 。空约束的量词实际上是多余的。我们把出现空约束的符号序列也看作是无意义的，它们不属谓词逻辑的公式，因而对它们也不予讨论。<sup>①</sup>

### 习题 5.1

一、用给定的谓词常项和个体常项将下列命题符号化。

- |           |           |
|-----------|-----------|
| E: …爱…,   | B: …帮助…,  |
| M: …蔑视…,  | C: …是聪明的, |
| P: …是漂亮的, | F: …是富有的, |
| J: …是健康的  | L: …是吝啬的, |
| h: 小红,    | f: 小芳,    |
| g: 小钢,    | l: 刘某。    |

1. 小红既聪明又漂亮，但她不健康。
2. 小钢既聪明又健康，但他不漂亮。
3. 小钢和刘某都是健康的，但只有刘某是富有的。
4. 如果刘某是聪明的，那么刘某帮助小红。
5. 小钢聪明或者小芳聪明，但是他们都不富有。

<sup>①</sup> 有些逻辑系统把空约束和重复约束的符号序列作为公式对待，相应地，这样的系统与我们的系统在推理规则上有所不同。

6. 小芳爱小钢但她蔑视刘某。
7. 小红爱刘某，当且仅当，小钢不爱她。
8. 小芳和小红都爱小钢，但小钢都不爱她们。
9. 如果小红爱小钢，并且小钢爱小红，那么刘某蔑视小芳或者不帮助小红。
10. 有些个体是健康的并且有些个体是不健康的。
11. 所有个体是吝啬的或者所有个体是富有的。
12. 如果所有个体是聪明的，那么有些个体是富有的。
13. 如果所有个体是吝啬的，那么并非所有个体是聪明的。
14. 有些个体爱小红。
15. 小红爱有些个体。
16. 小钢蔑视所有个体。
17. 有的个体不蔑视小钢。
18. 如果刘某帮助有的个体，那么所有的个体爱刘某。
19. 如果刘某既富有又吝啬，那么有些个体蔑视刘某。
20. 有的个体爱小红，有的个体爱小芳，但是并非，所有个体爱小红或者所有个体爱小芳。

二、对下列各个公式，用直线标出每个量词的辖域，并指出每个个体变项的每一次出现是约束的还是自由的，每个个体变项是约束的还是自由的。

1.  $\exists x(I(x) \wedge J(x)) \wedge K(x)$
2.  $\forall y R(y, z) \rightarrow L(y, z)$
3.  $\forall x((I(x) \rightarrow J(x)) \vee I(a))$
4.  $\exists y L(y, x) \vee \forall x L(y, x)$
5.  $(\forall z O(z) \wedge \exists x \exists y (P(x) \vee Q(y))) \wedge P(a)$
6.  $\exists x \forall y \forall z K(x, y, z) \rightarrow I(x)$
7.  $\forall x (P(b) \leftrightarrow \exists y (Q(y, x) \vee M(a)))$
8.  $\exists x \exists y ((I(x) \wedge I(y)) \vee R(x, b))$
9.  $(I(a) \rightarrow \exists y I(y)) \wedge \forall x \forall z R(x, b, z)$
10.  $\exists y (M(x) \rightarrow N(y)) \rightarrow \forall x \exists z (K(d, x) \wedge K(x, z))$

三、指出题二中哪些公式是普遍命题，哪些是复合命题，哪些是开语句。

四、根据给定的个体常项和谓词常项，对以下每一个开语句进行例示，从而得到一个真命题和一个假命题。

- |            |           |
|------------|-----------|
| S: …是人，    | C: …是残暴的， |
| K: …是城市，   | N: …在…以南， |
| P: …和…是朋友， | E: …比…长，  |

R: …熟悉…,	J: …在…和…之间,
Z: …尊敬…和…,	t: 天安门,
c: 长江,	h: 黄河,
g: 广州,	m: 马克思,
e: 恩格斯,	l: 列宁,
a: 希特勒。	
1. S(x)	2. C(y)
3. $\neg K(z)$	4. N(z, h)
5. P(m, x)	6. $\neg E(h, y)$
7. J(x, t, c)	8. J(c, h, z)
9. R(x, y)	10. $\neg R(x, y)$
11. Z(x, y, z)	

五、对题四中的每一个开语句进行概括，从而得到一个真命题和一个假命题。

## 5.2 命题的符号化

在这一节我们讨论如何将日常语言中的含有量词的命题进行符号化的问题。让我们从三段论逻辑所讨论的四种直言命题 A、E、I 和 O 的符号化入手。

### 5.2.1 直言命题的符号化

在三段论逻辑中，直言命题是断定主项和谓项之间的关系的命题，或者说，直言命题断定了主项和谓项所表示的两类事物之间的外延关系。在前边我们已经讨论了一些直言命题的符号化，如“所有事物是方形的”、“有些个体是红色的”，等等。这些直言命题有一个特点，它们的主项所表示的是最大的类，即宇宙间一切事物的集合。由于个体变项的变域通常也是宇宙间一切事物的集合，因此对这样的直言命题进行符号化是比较简单的。这样的全称命题和存在命题的一般形式分别是“ $\forall xP(x)$ ”和“ $\exists xP(x)$ ”。在这里， $P()$ 是一个元变项，表示任何一个一目谓词，如 A()、B() 等； $Q()$ 、 $R()$ 等也都是一目谓词的元变项。 $x$ 是一个个体变项的元变项，表示任何一个个体变项，如 x、y 和 z； $y$  和  $z$  也都是个体变项的元变项。相应地， $P(x)$  表示任何一个由一目谓词构成的开语句。

我们知道，大多数直言命题的主项并不是“事物”、“个体”或“东西”等这些表示最大类的语词。例如：

(1) 所有鱼是用鳃呼吸的。

(1) 的主项“鱼”所表示的就不是最大的类，因此，我们不能把(1)解释为：

$\forall x (x \text{ 是用鳃呼吸的})$

因为这种解释等于说，所有事物都是用鳃呼吸的，这显然不符合(1)的原意。对(1)的正确解释应当是：

$\forall x (\text{如果 } x \text{ 是鱼, 那么 } x \text{ 是用鳃呼吸的})$

这一解释是符合(1)的原意的。现在我们用 Y 代表谓词“…是鱼”，用 S 代表谓词“…是用鳃呼吸的”，那么，(1) 可被符号化为：

(1')  $\forall x (Y(x) \rightarrow S(x))$

请注意，在 (1') 中， $\forall x$  之后的开语句是一个蕴涵式。我们知道，即使一个蕴涵式的前件为假，蕴涵式也是真的。因此，由(1')这种方式表达的 A 命题，即便它的主项是一个空词项，它也是真的。例如：

(2) 所有金山都是宝贵的。

这个命题的主项“金山”就是一个空词项，它所表示的是一个空类。我们用 J 代表“…是金山”，用 B 代表“…是宝贵的”，这个命题可以被符号化为：

(2')  $\forall x (J(x) \rightarrow B(x))$

由于不存在具有金山这种性质的个体，用任何个体常项对  $J(x)$  进行例示，所得到的总是一个假命题。因此，用任何个体常项对  $J(x) \rightarrow B(x)$  进行例示，所得到的总是一个真命题；这就意味着  $\forall x (J(x) \rightarrow B(x))$  是一个真命题。

(1) 和(2)都是 A 命题，但是(1)的主项不是一个空词项。如果我们想要把命题(1)的主项不是空词项强调出来，那么，我们可以对(1)作如下的符号化：

(1'')  $\forall x (Y(x) \rightarrow S(x)) \wedge \exists x Y(x)$

(1'') 比(1')多出一个合取支  $\exists x Y(x)$ ，表明了(1)的主项“鱼”不是一个空词项。在三段论逻辑中，我们曾经区别了“强化直言命题”和“基本直言命题”。(1'')就是把(1)作为强化直言命题加以符号化的，而(1')则是把(1)作为基本直言命题加以符号化的。为了便于讨论，以后我们把所有的直言命题都作为基本直言命题，而不作为强化直言命题。因此，对 A 命题的符号化一般采取(1')这种方式，而不采取(1'')这种方式。

以上讨论了 A 命题的符号化，接下来我们讨论 I 命题的符号化。

(3) 有些金属是液体。

命题(3)是一个 I 命题，而且它的主项不表示最大的类。为了对(3)符号化，需要把它重新表述为：

至少有一事物使得，它是金属并且它是液体。

我们用 K 代表“…是金属”，L 代表“…是液体”，于是(3)可以被符号化为：

(3')  $\exists x (K(x) \wedge L(x))$

请注意，在 (3') 中， $\exists x$  之后的开语句是一个合取式，而不是一个蕴涵式。这是因为(3)是一个特称直言命题，而特称直言命题具有主项存在的含义。当主项为一个空

词项时，特称直言命题为假。然而，如果我们把(3)符号化为：

$$\exists x(K(x) \rightarrow L(x))$$

那么，其中的 K 即使是一个空词项，该式仍然是真的。由于这个符号式不具有主项存在的含义，因而，这个符号式不符合(3)的原意。

进一步讲，这个符号式所表达的意思比(3)要弱得多，因为它相当于  $\exists x(\neg K(x) \vee L(x))$ 。我们用任何一个非金属的物体如一块木头都可表明这个符号式是真的，但却不能以此表(3)是真的。

这可能促使我们去考虑，对命题(1)的符号化是否也可以采取合取式而不采取蕴含式，即把(1)符号化为：

$$\forall x(Y(x) \wedge S(x))$$

回答是否定的。因为这个表达式的意思是：宇宙间的一切事物是鱼并且是用鳃呼吸的。这显然违背(1)的原意。总之，对 A 命题符号化时应当用“ $\rightarrow$ ”而不应当用“ $\wedge$ ”，对 I 命题符号化时应当用“ $\wedge$ ”而不应当用“ $\rightarrow$ ”；这是由全称量词和存在量词各自的逻辑性质决定的。

以上我们讨论了对 A 命题和 I 命题的符号化，接下来我们讨论对 E 命题和 O 命题的符号化。

(4) 任何鱼都不是用鳃呼吸的。

(5) 有些金属不是液体。

(4) 是一个 E 命题，通过换质法可以置换为一个 A 命题，即：“任何鱼都是不用鳃呼吸的”。相应地，(4)可以被符号化为：

$$(4') \forall x(Y(x) \rightarrow \neg S(x))$$

(5) 是一个 O 命题，通过换质法，可以置换为一个 I 命题，即：“有些金属是非液体”。相应地，(5)可被符号化为：

$$(5') \exists x(K(x) \wedge \neg L(x))$$

以上讨论了四种直言命题的符号化，其一般形式是：

$$A: \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$E: \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

$$I: \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

$$O: \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

我们曾经讲过，在谓词逻辑中，直言命题是被作为基本直言命题对待的。对于基本直言命题来说，传统逻辑方阵中的差等关系、反对关系和下反对关系均不成立，只有矛盾关系成立。由于 A 与 O 之间有矛盾关系，即 A 与 O 的真值恰恰相反，所以，A 等值于  $\neg O$ ，并且  $\neg A$  等值于 O。同样地，由于 E 与 I 之间有矛盾关系，所以，E 等值于  $\neg I$ ，并且  $\neg E$  等值于 I。于是，我们有如下的等值式：

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) &\leftrightarrow \neg \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) &\leftrightarrow \neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \\ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) &\leftrightarrow \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \\ \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) &\leftrightarrow \neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\end{aligned}$$

## 5.2.2 论域

宇宙间的事物是无限多样的，它包括具体的事物，如人、动物、植物、桌子、椅子等；也包括抽象的事物，如：数、空间、时间、日期、分子、原子等。宇宙间的一切事物构成一个最大的集合，其中包括无数小的集合。这个最大的集合叫做“全集”，这些小集合都是全集的子集。人们谈论的对象范围可以是全集，也可以是全集的某个子集。我们把在特定场合下所谈论的某一类对象的集合叫做在那个场合下的“论域”。

在此之前，我们规定个体变项的变域是宇宙间一切事物的集合，这就规定了我们的论域是全集。相应于全集的论域叫做“全域”。然而，并非在任何场合下我们都得使论域为全域。例如，一本数学著作可以把论域限制为数的集合，一篇关于鱼的论文可以把论域限制为鱼的集合。

在谓词逻辑中，通过限制论域可以使命题的符号化得以简化。例如，我们把论域限制为“鱼”的集合，记为：UD：{鱼}，命题(1)即“所有鱼都是用鳃呼吸的”便可被符号化为：

$$(1'') \forall x S(x)$$

将(1'')与(1')即“ $\forall x(Y(x) \rightarrow S(x))$ ”作比较。我们看到(1'')比(1')少用了一个谓词“Y”即“…是鱼”。这是因为，当论域被限制为鱼的集合之后，个体变项x的变域为鱼的集合，亦即x表示任何一条鱼。这样，关于“x是鱼”的表达式即Y(x)便成为多余的了。

同样的道理，当论域为{鱼}时，命题(4)即“所有的鱼都不是用鳃呼吸的”可以被符号化为“ $\forall x \neg S(x)$ ”。当论域为{金属}时，命题(3)即“有些金属是液体”可以被符号化为“ $\exists x L(x)$ ”；命题5即“有些金属不是液体”可以被符号化为“ $\exists x \neg L(x)$ ”。在这里，不需要关于“x是金属”的表达式即“K(x)”。

在对命题进行符号化时，对论域的限制需要给予明确的标示，即，“UD：{…}”或“论域：{…}”。如果对论域没有标示，那么论域就被看作是全域。由上面的讨论我们看出，通过对论域作适当的限制，可以使命题的符号化得以简化。我们简化命题的最终目的是为了简化推论。因此，对论域作怎样的限制取决于我们面对怎样的推论。至于如何根据具体推论来确定论域，这个问题留待后面讨论。

另外需要指出，既然在适当限制论域之后，A、E、I和O这四种命题可以被分别符号化为：

A:  $\forall x P(x)$

E:  $\forall x \neg P(x)$

I:  $\exists x P(x)$

O:  $\exists x \neg P(x)$

那么，根据 A 与 O、E 与 I 之间的矛盾关系，我们又可得到如下的等值式：

$\forall x P(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$

$\forall x \neg P(x) \leftrightarrow \neg \exists x P(x)$

$\exists x P(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$

$\exists x \neg P(x) \leftrightarrow \neg \forall x P(x)$

以上四个等值式也可推广到全域的情形。当论域为全域时，其中的个体变项 x 泛指任何事物。

我们还可以把以上公式中的  $P(x)$  推广为  $\Psi(x)$ 。二者的不同在于： $P(x)$  表示由一目谓词构成的开语句，因而 x 只能在其中出现一次；而  $\Psi(x)$  表示由任何目谓词构成的开语句，因而 x 可以在其中出现任意多次。二者的共同之处是，它们只含有唯一的自由变项即 x。在这里， $\Psi(\ )$  是一个关于任意目谓词的元变项。这种推广的合理性在于：对于唯一的自由变项 x 而言，一目谓词元变项  $P(\ )$  和任意目谓词的元变项  $\Psi(\ )$  之间并没有本质的区别，因为它们都表达关于同一个对象 x 的属性，而无论这个属性是什么。于是，我们得到如下等值式：

$\forall x \Psi(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg \Psi(x)$

$\forall x \neg \Psi(x) \leftrightarrow \neg \exists x \Psi(x)$

$\exists x \Psi(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg \Psi(x)$

$\exists x \neg \Psi(x) \leftrightarrow \neg \forall x \Psi(x)$

这一推广对于后面关于谓词推理规则的讨论是必要的。

### 5.2.3 一般命题的符号化

直言命题只是普遍命题中最为简单的部分，但是我们对直言命题的处理方法可以推广到一般命题的符号化中去。最重要的一点是，全称命题总是和蕴涵式相联系；存在命题总是和合取式相联系。全称命题的一般结构是：

$\forall x(P(x) \rightarrow (\dots))$

存在命题的一般结构是：

$\exists x(P(x) \wedge (\dots))$

下面，我们对一些命题进行符号化。

(6) 所有狗身上长毛并且嗅觉灵敏。

为了便于对(6)进行符号化，我们以略为不同的方式把(6)重新表述为：“对于每一

$x$  而言，如果  $x$  是狗，那么  $x$  身上长毛并且嗅觉灵敏”。现令： $G$ ：…是狗， $M$ ：…身上长毛， $X$ ：…嗅觉灵敏。于是，(6)可被符号化为：

$$(6') \forall x (G(x) \rightarrow M(x) \wedge X(x))$$

(7) 有的鸟不下蛋或者不会飞。

(7) 可被重新表述为：“至少有一  $y$  使得， $y$  是鸟，并且  $y$  不下蛋或者  $y$  不会飞。”令： $N$ ：…是鸟， $D$ ：…下蛋， $F$ ：…会飞。于是，(7)可被符号化为：

$$(7') \exists y (N(y) \wedge (\neg D(y) \vee \neg F(y)))$$

(8) 一个有成就的科学家是一个光荣的人。

(8) 中虽然没有明显地出现全称量词，但不难看出，它实际上是一个全称命题。令： $A$ ：…是有成就的科学家， $B$ ：…是光荣的人。(8')可被符号化为：

$$(8') \forall z (A(z) \rightarrow B(z))$$

需要指出，谓词“…是有成就的科学家”是由谓词“…是有成就的”和“是…科学家”组合而成的。同样地，谓词“…是光荣的人”是由谓词“…是光荣的”和“…是人”组成的。由多个谓词组合而成的谓词叫做“复合谓词”。复合谓词可以由简单谓词按照各种各样的方式组合而成。最常见的一种复合谓词是由虚词“的”联结两个或两个以上简单谓词而构成。如“…是有成就的科学家”和“…是光荣的人”都属这种复合谓词。这样的复合谓词可以被展开为一个合取式，其中的每一个合取支对应于其中的一个简单谓词。现令： $C$ ：…是有成就的， $K$ ：…是科学家， $G$ ：…是光荣的， $R$ ：…是人，那么，(8)还可被符号化为：

$$(8'') \forall z (C(z) \wedge K(z) \rightarrow G(z) \wedge R(z))$$

(8'') 中的 “ $C(z) \wedge K(z)$ ” 就是对 (8') 中的 “ $A(z)$ ” 的展开，(8'') 中的 “ $G(z) \wedge R(z)$ ” 就是对 (8') 中的 “ $B(z)$ ” 的展开。至于对一个复合谓词什么时候需要展开，什么时候不需要展开，这要根据具体的语言环境来确定。如果在一个推论中，推论关系不涉及复合谓词的内部成分，那么，对该复合谓词不必展开，否则，必须展开。对于这一点，我们以后还将结合具体推论加以说明。

(9) 一头牛顶伤张三。

(9) 中虽然没有明显地出现量词，但稍加分析就可看出，(9)是一个存在命题。现令： $N$ ：…是牛， $S$ ：…顶伤…， $b$ ：张三。(9)可被符号化为：

$$(9') \exists z (N(z) \wedge S(z, b))$$

(8) 和(9)含有“一个”或“一头”这样的量词。这样的量词是不确定的，它有时起全称量词的作用，有时起存在量词的作用。对它们的性质需要根据命题的具体内容来确定。全称命题或存在命题有时甚至没有量词，在这种情况下，命题的性质也需要根据其内容来确定。

接下来我们考察如下五个命题：

(10) 如果任何小学生读懂黑格尔的《逻辑学》，那么，他是聪明的。

(11) 如果任何小学生读懂黑格尔的《逻辑学》，那么，黑格尔的《逻辑学》是容易的。

(12) 如果黑格尔的《逻辑学》是容易的，那么，任何小学生读懂黑格尔的《逻辑学》。

(13) 如果所有小学生读懂黑格尔的《逻辑学》，那么，黑格尔的《逻辑学》是容易的。

(14) 任何读懂黑格尔的《逻辑学》的小学生都是聪明的。

令：S: …是小学生，D: …读懂…，C: …是聪明的，R: …是容易的，h: 黑格尔的《逻辑学》。

(10) 和(11)都含有量词“任何”和联结词“如果…那么…”，但是二者的逻辑性质却是不同的。因为(10)的主逻辑词是“任何”，因而属于普遍命题，而(11)的主逻辑词是“如果…那么…”，因而属于复合命题即蕴涵命题。(10)的主逻辑词之所以是量词“任何”，因为“任何”的辖域从前件延续到后件，其标志就是出现在后件中的代词“他”，这个“他”指的就是前件中的“任何小学生”。与之不同，(11)的后件中没有出现代词“他”，因而前件中的“任何小学生”的作用范围只限于前件，而没有延续到后件。(10)和(11)的这一区别不仅使得前者为普遍命题而后者为复合命题，还使得(10)中的“任何”是一全称量词，而(11)中的“任何”是一存在量词。相应地，(10)和(11)的符号化分别为：

$$(10') \forall x (S(x) \rightarrow (D(x, h) \rightarrow C(x)))$$

$$(11') \exists y (S(y) \wedge D(y, h)) \rightarrow R(h)$$

从上面的分析中我们看到，出现在(10)的后件中的“他”对于我们判别(10)的逻辑性质起着关键作用。这个“他”属于返回量词的代词交叉指称。返回量词的代词交叉指称出现在哪里，量词的辖域就扩展到哪里。由于(11)中的后件没有返回量词的代词交叉指称，所以(11)中的“任何”的辖域未能延续到后件。

需要强调的是，当“任何”的辖域包括整个公式即“任何”作为主逻辑词时，它是全称量词；但是，“任何”的辖域未包括整个公式即“任何”不作为主逻辑词时，它并不一定是存在量词。实际上，在这后一种情况下，“任何”也常常作为全称量词。如，当“任何”的辖域只限于合取命题的一个合取支，或析取命题的一个析取支，甚或一个蕴涵命题的后件时，“任何”仍然是全称量词。使“任何”成为存在量词的少数情况之一是，“任何”的辖域仅仅限于蕴涵命题的前件，正如(11)的情形。总之，在不作为主逻辑词的情况下，“任何”是全称量词还是存在量词的问题不能一概而论，必须具体情况具体分析。为此，我们看一下(12)。

(12) 同(11)相比，二者都是蕴涵命题并且其量词“任何”的辖域都只是部分命

题；所不同的是，(11)中“任何”的辖域限于前件，而(12)中“任何”的辖域限于后件。相应地，(12)中的“任何”是全称量词而不是存在量词。其符号化是：

$$(12') R(h) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow D(y, h))$$

接下来讨论(13)。(13)如同(11)也是一个蕴涵命题，因为它的后件也没有返回量词的代词交叉指称。不过，(13)前件中的量词不是“任何”，而是“所有”，这使得，(13)的前件不是存在命题，而是全称命题。相应地，(13)被符号化为：

$$(13') \forall y (S(y) \wedge D(y, h) \rightarrow R(y))$$

通过对(13)和(11)的比较我们看到，自然语言中的量词“所有”和“任何”在用法上并非完全相同。其区别在于，“所有”总是作为全称量词的，而“任何”则有时作为全称量词，有时作为存在量词。例如，“任何 S 是 P”和“所有 S 是 P”之间没有区别，因为在这两个命题中，“任何”和“所有”都是主逻辑词，因而二者都是全称量词。但是(11)中的“任何”不是主逻辑词，其辖域只限于前件，这使得其中的“任何”是存在量词而不是全称量词。尽管“所有”在相同的情况下即在(13)中仍然是全称量词。

关于(14)，如果我们把其中的“读懂黑格尔的《逻辑学》的小学生”看作一个复合谓词不予展开，那么它就是一个典型的直言命题即全称肯定命题；如果我们把这个复合谓词展开为“…是读懂黑格尔的《逻辑学》的”和“…是小学生”的合取，那么，(14)被符号化为：

$$(14') \forall y (S(y) \wedge D(y, h) \rightarrow C(y))$$

根据移出律，(14')等值于：

$$(14'') \forall y (S(y) \rightarrow (D(y, h) \rightarrow C(y)))$$

(14'')恰恰是(10')。可见，(14)和(10)是两个逻辑等值的命题。

对下面一个命题进行符号化时也需要加以细心的分析。

(15) 只有人是有理性的。

令：R：…是人，L…是有理性的。为了对(15)进行符号化，需要对它加以重新表述。(15)可以被重新表述为：

对于任一事物而言，只有它是人，它才是有理性的。

可见，(15)是一个全称命题，并且断定了“是人”是“是有理性的”必要条件。根据必要条件与充分条件之间的转化关系，(15)又可表述为：

对于每一事物而言，如果它是有理性的，那么它是人。

这样，(15)可以被符号化为：

$$(15') \forall x (L(x) \rightarrow R(x))$$

根据假言易位规则，(15')逻辑等值于

$$(15'') \forall x (\neg R(x) \rightarrow \neg L(x))$$

意为：对于任一事物而言，如果它不是人，那么它没有理性。不难看出，这也是(15)所要表达的意思。可见，对于必要条件命题，可以有不同的符号化。

一般地说，包含“只有”或“只”这样的命题总是和一个全称的必要条件命题相关。对这样的命题进行分析的时候，要注意辨别“只有”或“只”所涉及的范围。在有些场合下，对这类命题可以作多种理解。如：

(16) 聂卫平只同高明的棋手下棋。

令： $S$ ：…是棋手， $G$ ：…是高明的， $Q$ ：…与…下棋， $n$ ：聂卫平，对(16)可以作如下两种解释：

(a) 对于每一棋手而言，只有他是高明的，聂卫平才同他下棋。

(b) 对于每一事物而言，只有它是高明的棋手，聂卫平才同他下棋。

(a) 的论域是“棋手”，它所强调的必要条件仅仅是“高明的”；而(b) 的论域是全域，它所强调的必要条件是“高明的棋手”。(a) 和(b) 的符号化分别为：

(16')  $\forall y (S(y) \rightarrow (Q(n, y) \rightarrow G(y)))$

亦即

$\forall y (S(y) \wedge Q(n, y) \rightarrow G(y))$

(16'')  $\forall y (Q(n, y) \rightarrow S(y) \wedge G(y))$

(16') 与(16'') 的区别是明显的。现假定与聂卫平下棋的是一个不懂事的幼儿，而不是棋手，在这种情况下，(16')是真的，而(16'')是假的。对于象(16)这样的命题，我们只有把它放在具体的语言环境中，才能惟一地确定它的含义。

(17) 老虎和狮子都是猛兽。

令： $H$ ：…是老虎， $S$ ：…是狮子， $M$ ：…是猛兽。乍看上去，(15)似乎可以被符号化为：

(17')  $\forall z (H(z) \wedge S(z) \rightarrow M(z))$

(17') 的意思是：对于每一 $z$ 而言，如果 $z$ 既是老虎又是狮子，那么 $z$ 是猛兽。这显然是不符合原意的。对于(17)正确的符号化是：

(17'')  $\forall z (H(z) \vee S(z) \rightarrow M(z))$

(17'') 的意思是：对于每一 $z$ 而言，如果 $z$ 是老虎或者是狮子，那么 $z$ 是猛兽。这个例子表明，象“和”、“并且”等通常表示合取的联结词，有时却表示析取。对(17)还可作如下的表述：

所有老虎是猛兽并且所有狮子是猛兽。

相应的符号式是：

(17''')  $\forall z (H(z) \rightarrow M(z)) \wedge \forall z (S(z) \rightarrow M(z))$

以后可以证明，(17'')和(17''')是逻辑等值的。

由于自然语言的灵活性、歧义性和不精确性，我们不可能有一套分析一切命题的机

机械化程序。当面对一个有歧义的命题时，我们必须根据命题的内容，甚至根据命题出现于其中的语境来确定其含义。在这种情况下，我们最好对命题作出若干可能的分析，然后将它们加以比较，看哪个最接近命题的原意。在相当多的场合下，我们还是能够对命题作出惟一正确的分析的。此外，需要强调，在任何情况下，对一个命题的符号化都不应含有自由变项，因为含有自由变项的公式是一个开语句而不是一个命题。

### 5.2.4 命题的多重量化

如果在一个命题中，至少有一个量词处于另一个量词的辖域内，那么，我们称这个命题是多重量化的。可以判定

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$$

不是多重量化的，而

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$$

是多重量化的。请注意，多重量化不同于重复约束，二者的区别是：前者所涉及的是含有不同个体变项的量词，而后者所涉及的是含有相同个体变项的量词。

下面两个命题都是多重量化的。

(18) 所有的候选人都有选民选举。

(19) 有的选民选举所有的候选人。

现在我们规定： $M$ : …是选民， $H$ : …是候选人， $J$ : …选举…。于是(18)和(19)可以分别被符号化为：

$$(18') \forall x (H(x) \rightarrow \exists y (M(y) \wedge J(y, x)))$$

$$(19') \exists y (M(y) \wedge \forall x (H(x) \rightarrow (y, x)))$$

(18') 读作：对于每一  $x$  而言，如果  $x$  是候选人，那么，至少有一  $y$  使得， $y$  是选民并且  $y$  选举  $x$ 。

(19') 读作：至少有一  $y$  使得， $y$  是选民并且对于每一  $x$  而言，如果  $x$  是候选人，那么  $y$  选举  $x$ 。

请注意，量词的次序是重要的。我们看到，(18)和(19)都有一个全称量词和一个存在量词。在(18)中，全称量词先于存在量词；但在(19)中，存在量词先于全称量词。这使得(18)和(19)的含义有所不同。显然，当(18)为真时，(19)不一定真。

(20) 有些人不爱有些人。

为了对(20)进行符号化，我们让  $P$  代表“…是人”， $E$  代表“…爱…”。这样，(20)的符号式是：

$$(20') \exists y (P(y) \wedge \exists z (P(z) \wedge \neg E(y, z)))$$

这个命题所断定的具有“不爱”这种关系的两类事物是完全相同的，即均为人。因此，我们可以通过限制论域来简化(20)的符号式。令： $UD$ ：{人}， $E$ ：…爱…。

(20) 可被符号化为：

$$(20'') \exists y \exists z \neg E(y, z)$$

与此不同，(18)和(19)所断定的关系存在于不同的两类事物之间，即“选民”和“候选人”之间，因此对于(18)和(19)不能通过限制论域来简化其符号化。

对于(20)还可以作这样的理解，即：

至少有一  $y$  和至少有一  $z$  使得， $y$  和  $z$  都是人并且  $y$  不爱  $z$ 。相应的符号式是：

$$(20''') \exists y \exists z (P(y) \wedge ((P(z) \wedge \neg E(y, z)))$$

将(20'')与(20')作比较，我们发现，把(20')中处于括号内的“ $\exists z$ ”移至括号外，就是得到(20'''')。这叫做“量词移置”。在谓词逻辑中，以下十二个等值式叫做“量词移置律”。

1.  $P \wedge \exists x \Psi(x) \leftrightarrow \exists x (P \wedge \Psi(x))$
2.  $P \wedge \forall x \Psi(x) \leftrightarrow \forall x (P \wedge \Psi(x))$
3.  $\exists x \Psi(x) \wedge P \leftrightarrow \exists x (\Psi(x) \wedge P)$
4.  $\forall x \Psi(x) \wedge P \leftrightarrow \forall x (\Psi(x) \wedge P)$
5.  $P \vee \exists x \Psi(x) \leftrightarrow \exists x (P \vee \Psi(x))$
6.  $P \vee \forall x \Psi(x) \leftrightarrow \forall x (P \vee \Psi(x))$
7.  $\exists x \Psi(x) \vee P \leftrightarrow \exists x (\Psi(x) \vee P)$
8.  $\forall x \Psi(x) \vee P \leftrightarrow \forall x (\Psi(x) \vee P)$
9.  $(P \rightarrow \exists x \Psi(x)) \leftrightarrow \exists x (P \rightarrow \Psi(x))$
10.  $(P \rightarrow \forall x \Psi(x)) \leftrightarrow \forall x (P \rightarrow \Psi(x))$
11.  $(\exists x \Psi(x) \rightarrow P) \leftrightarrow \forall x (\Psi(x) \rightarrow P)$
12.  $(\forall x \Psi(x) \rightarrow P) \leftrightarrow \exists x (\Psi(x) \rightarrow P)$

需要说明，在以上各个等值式中， $P$  代表不含有个体变项  $x$  的任何公式；或者说， $P$  所代表的公式不含被移置的量词所含的那个个体变项。这一要求使得，量词移到或移开某一部分公式时，其余部分不含有该量词所含的个体变项。

以上各等值式的左右两支可以相互置换。例如，根据第一个等值式，我们可将(20')中的部分公式“ $P(y) \wedge \exists z (P(z) \wedge \neg E(y, z))$ ”置换为“ $\exists z (P(y) \wedge (P(z) \wedge \neg E(y, z)))$ ”从而得出(20'''')。再如，根据以上第9个等值式，我们可由(18')得到：

$$(18'') \forall x \exists y (H(x) \rightarrow (M(y) \wedge J(y, x)))$$

根据第2个等值式，我们可由(19')得到：

$$(19'') \exists y \forall x (M(y) \wedge (H(x) \rightarrow J(y, x)))$$

不过，我们却不能根据第3个等值式由(19')得到：

$$\exists y M(y) \wedge \forall x (H(x) \rightarrow J(y, x))$$

这是因为(19')中相当于第3个等值式中的  $P$  的部分公式“ $\forall x (H(x) \rightarrow J(y, x))$ ”含有

被移置的量词 “ $\exists y$ ” 所含的个体变项。

根据前十个量词移置律，改变量词位置的时候并不改变量词本身。但是根据最后两个量词移置律，改变量词位置的同时也要改变量词本身。对此我们举例加以说明。

(21) 如果任何古代人懂得量子力学，那么所有现代人懂得量子力学。

令：G: …是古代人，D: …是现代人，L: …懂得量子力学。于是(21)的符号式应为（请回忆，当量词“任何”处于前件，并且后件没有返回该量词的代词交叉指称时，“任何”的含义是什么）：

$$(21') \exists x (G(x) \wedge L(x)) \rightarrow \forall y (D(y) \rightarrow L(y))$$

根据量词移置律 11，我们可以由 (21') 得出：

$$(21'') \forall x (G(x) \wedge L(x)) \rightarrow \forall y (D(y) \rightarrow L(y))$$

以上表明，对于同一个命题的符号化可以是多种多样的。在某些情况下，对一个公式中的量词的辖域作一定的改变并不影响命题的真值。

另外需要指出的是，(21')中的两个量词即“ $\exists x$ ”和“ $\forall y$ ”采取了不同的个体变项。其实，我们对(21)的符号化也可采用含有相同变项的两个量词。如：

$$(21''') \exists x (G(x) \wedge L(x)) \rightarrow \forall x (D(x) \rightarrow L(x))$$

一般地说，只要不导致重复约束，那么，对个体变项的选择是任意的。既然 (21''') 没有导致重复约束，所以(21''')也是对(21)的正确符号化。与此不同，对命题 (18)、(19)和(20)进行符号化时，其中的两个量词必须采用不同的个体变项，否则，就会导致重复约束。

(22) 如果任何古代人懂得量子力学，那么所有当代物理学家是他的门徒。

(22) 与(21)相比较，主要区别是，(22)中出现了返回量词的代词交叉指称，而(21)中却没有。因此与(21)不同，(22)不是一个复合命题，而是一个普遍命题，具体地说，是一个全称命题。现令：G: …是古代人，L: …懂得量子力学，W: …是当代物理学家，T: …是…的门徒。于是(22)的符号式是：

$$(22') \forall x (G(x) \rightarrow (L(x) \rightarrow \forall y (W(y) \rightarrow T(y, x))))$$

根据移出律和量词移置律，(22')等值于(22'')，即：

$$(22'') \forall x \forall y (G(x) \wedge L(x) \wedge W(y) \rightarrow T(y, x))$$

(23) 有些男人只同漂亮的女人结婚。

令：M: …是男人，W: …是女人；B: …是漂亮的，J: …同…结婚。(23)含有“只”，因此(23)含有一个全称的必要条件命题；由于对“只”所涉及的范围可以有两种不同的理解，故对(23)可以有两种不同的符号化，即：

$$(23') \exists x (M(x) \wedge \forall y (J(x, y) \rightarrow W(y) \wedge B(y)))$$

$$(23'') \exists x (M(x) \wedge \forall y (W(y) \wedge J(x, y) \rightarrow B(y)))$$

(23') 所断定的是：对于有些男人而言，任何一个与他结婚的个体是女人并且是漂

亮的。 $(23'')$ 所断定的是：对于有些男人而言，任何一个与他结婚的女人是漂亮的。 $(23')$ 与 $(23'')$ 的不同之处在于， $(23')$ 强调了一些男人的结婚对象的必要条件是女人和漂亮这两者，它排除了这些男人与女人以外的对象结婚的可能性；而 $(23'')$ 则没有排除这种可能性。由此可见， $(23')$ 比 $(23'')$ 更合情理。所以，对 $(23)$ 来说，比较贴切的符号化是 $(23')$ 。

接下来，我们考虑一些含有两个量词的命题。

$(24)$  所有懂得一些东西的人同情一些人。

$(25)$  有些人羡慕任何懂得所有东西的人。

$(26)$  所有懂得一些东西的人同情一些不懂任何东西的人。

令：R：…是人，M：…羡慕…，T：…同情…，D：…懂得…。

这三个命题的共同特点之一是包含了一些含有量词的复合谓词。如， $(24)$ 中含有复合谓词“懂得一些东西的人”，其中含有量词“一些”。这个复合谓词可以被展开为“ $R(x) \wedge \exists y D(x,y)$ ”。于是 $(24)$ 的符号化为：

$(24') \forall x (R(x) \wedge \exists y D(x,y)) \rightarrow \exists z (R(z) \wedge T(x,z))$

$(25)$  中含有复合谓词“懂得所有东西的人”，相应于这个复合谓词的符号式是“ $R(y) \wedge \forall z D(y,z)$ ”于是， $(25)$ 可被符号化为：

$(25') \exists x (R(x) \wedge \forall y (R(y) \wedge \forall z D(y,z)) \rightarrow M(x,y))$

$(26)$  含有两个复合谓词即“懂得一些东西的人”和“不懂任何东西的人”，相应于这两个复合谓词的符号式分别是：“ $R(x) \wedge \exists z D(x,z)$ ”和“ $R(y) \wedge \forall z \neg D(y,z)$ ”，于是， $(26)$ 可被符号化为：

$(26') \forall x (R(x) \wedge \exists z D(x,z)) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge \forall z \neg D(y,z) \wedge T(x,y))$

$(27)$  如果一个人没有读过任何书，那么他不精通任何科学。

令：R：…是人，S：…是书，K：…是科学，C：…读过…，D：…精通…。 $(27)$ 中含有返回量词的代词交叉指称，由此可以断定，它是一个普遍命题，并且进而可以判定它是一个全称命题。因此， $(27)$ 可被符号化为：

$(27') \forall x (R(x) \rightarrow (\forall y (S(y) \rightarrow \neg C(x,y)) \rightarrow \forall z (K(z) \rightarrow \neg D(x,z))))$

根据移出律， $(27')$  等值于：

$(27'') \forall x (R(x) \wedge \forall y (S(y) \rightarrow \neg C(x,y)) \rightarrow \forall z (K(z) \rightarrow \neg D(x,z)))$

$(27'')$  读作：

$(27''')$  所有没读过任何书的人不精通任何科学。

$(27''')$  与 $(27)$ 虽然在这字面上有所不同，但是它们表达了相同的意思。

## 习题 5.2

一、根据 A 与 O、E 与 I 之间的矛盾关系，对下列每一个直言命题进行两种不同形式的符号化，符号化时须用给定的谓词常项。

Y: …是英雄，	J: …是坚强的，
X: …牺牲，	P: …是怕死的，
R: …是军人，	N: …是懦夫，
S: …有颜色，	M: …是透明的。

1. 所有英雄是坚强的。
2. 有的英雄牺牲了。
3. 没有英雄是怕死的。
4. 并非所有军人不怕死。
5. 有的军人不坚强。
6. 没有怕死的不是懦夫。
7. 懦夫是不坚强的。
8. 一切事物都是有颜色的。
9. 至少有一事物没有颜色。
10. 没有什么东西是透明的。
11. 存在透明的东西。

二、选择适当的论域，将题一中的每一小题按照最简单的方式进行符号化。

三、根据给定的谓词常项和个体常项，将下面的命题符号化。

X: …是学者，	Q: …是勤奋的，
W: …是文盲，	C: …是聪明的，
J: …是有成就的，	S: …是学生，
R: …是人，	Z: …尊敬…，
L: …与…争论，	H: …喜欢…
e: 爱因斯坦，	b: 波尔。

1. 有些学者不勤奋，然而有些文盲却是勤奋的。
2. 有些文盲是聪明的，但却不勤奋。
3. 任何学者是勤奋的或者是聪明的。
4. 如果所有的学者是勤奋的，那么爱因斯坦是勤奋的。
5. 如果任何文盲是聪明的，那么波尔是聪明的。
6. 所有勤奋的学者都是有成就的。

7. 任何学者有成就，当且仅当，他聪明并且勤奋。
8. 一个学生与爱因斯坦争论。
9. 有些但并非所有学生是聪明和勤奋的。
10. 一个学生是有成就的，仅当他聪明或者勤奋。
11. 如果任何学者是文盲，那么所有学生是文盲。
12. 如果所有学生有成就，那么任何学者有成就。
13. 学者和文盲都尊敬爱因斯坦。
14. 波尔不喜欢有些文盲。
15. 有些文盲不尊敬波尔。
16. 只有文盲不尊敬波尔。
17. 波尔只与学者争论。
18. 有并且只有学者与波尔争论。
19. 爱因斯坦只喜欢聪明并且勤奋的学生。
20. 爱因斯坦和波尔不喜欢任何既不聪明又不勤奋的学生。
21. 波尔不喜欢那样的学生，他们不尊敬爱因斯坦，尽管他们不与爱因斯坦争论。
22. 有些既聪明又勤奋的学者与爱因斯坦争论但不与波尔争论。
23. 爱因斯坦与所有的学者相互尊敬。
24. 所有学者，除了那些没有成就的，都是勤奋的和喜欢爱因斯坦的。
25. 爱因斯坦不仅有成就，而且喜欢任何一个聪明或者勤奋的学生。

#### 四、根据给定的谓词常项和个体常项，对下列命题进行符号化。

A: …是电影演员，	M: …是明星，
D: …是导演，	P: …是运动员，
J: …是剧本，	L: …与…合作，
S: …蔑视…，	H: …喜欢…，
b: 卓别林	

1. 有些电影演员与有些电影演员合作。
2. 有的电影演员与所有的导演合作。
3. 所有的导演与有的导演合作。
4. 所有导演不与任何运动员合作。
5. 有的电影明星不与有的电影演员合作。
6. 有的电影明星与任何明星合作。
7. 所有电影明星和导演蔑视有的剧本。
8. 有的运动员只喜欢电影演员。
9. 所有的电影演员不喜欢任何运动员，除非他们是明星。

10. 有的运动员和有的电影演员相互蔑视。
11. 有的运动员喜欢任何电影演员，如果他们是明星的话。
12. 任何明星只喜欢明星。
13. 如果任何电影明星喜欢所有明星，那么有些电影演员喜欢有些运动员。
14. 如果任何电影明星喜欢所有明星，那么他喜欢有些运动员。
15. 卓别林喜欢任何一个喜欢他的电影演员。
16. 所有卓别林喜欢的电影明星被任何明星喜欢。
17. 有些喜欢卓别林的电影演员却不喜欢有些喜欢卓别林的导演。
18. 有些喜欢任何运动员的电影演员不喜欢卓别林。
19. 卓别林不喜欢这样的电影演员，他们蔑视所有的运动员。
20. 除非有些导演喜欢所有剧本，才能所有的剧本被有些导演喜欢。
21. 如果任何电影演员喜欢所有剧本，那么他被有些导演喜欢。
22. 只有非明星的电影演员才喜欢所有的剧本。
23. 虽然所有电影演员喜欢有些导演，但并非所有导演喜欢所有电影演员。
24. 虽然有些电影演员是明星，但并非所有导演喜欢他们。
25. 有些导演喜欢并且只喜欢所有的电影明星。
26. 有些电影明星不与那些喜欢所有明星的导演合作。
27. 任何喜欢所有剧本的电影演员被有些导演喜欢。
28. 有些蔑视有些事物的电影演员喜欢有些剧本。
29. 所有不蔑视任何事物的电影演员喜欢所有的运动员。
30. 蔑视一切的电影明星蔑视他自己。
31. 蔑视一切的导演不与蔑视一切的明星合作。
32. 有些蔑视所有明星的电影演员却喜欢有些运动员。
33. 所有蔑视一切运动员的导演不喜欢有些明星。
34. 如果任何运动员不喜欢所有电影演员，那么他不喜欢有些明星。
35. 有些蔑视所有运动员的导演却与有些喜欢所有运动员的电影演员合作。

五、对题四中的1、3、5、6、15、16，分别选择适当的论域，将其符号式加以简化。

六、根据量词移置律，将题四中的7~14重新加以符号化，要求所有的量词都处于所有括号的外边。

# 第六章

## 谓词逻辑：解释与推演

### 6.1 解释

#### 6.1.1 命题的解释及其真假

在前一章中我们讨论了命题的符号化，在这一节我们将讨论命题的解释。可以说，对一个命题的解释正是对一个命题的符号化的逆过程。对命题的符号化需要对自然语言表述的谓词、个体词等规定相应的符号，而对命题的解释则需要对其中的符号规定自然语言的对应项。

以“ $F(a)$ ”这个最简单的命题为例。对“ $F(a)$ ”的解释就是规定其中的“ $F$ ”代表什么谓词，“ $a$ ”代表什么个体。显然，“ $F(a)$ ”的真值取决于我们对它所作的解释。如果我们把“ $F$ ”解释为“…是人”，把“ $a$ ”解释为“孔子”，那么，“ $F(a)$ ”就是一个真命题。如果我们仍然把“ $F$ ”解释为“…是人”，但把“ $a$ ”解释为“黄鹤楼”，那么“ $F(a)$ ”就是一个假命题。

对于含有量词的命题，为确定其真假不仅需要对其中的谓词常项和个体常项作解释，而且需要规定论域。同一个命题相对于不同的论域可以有不同的真值。以“ $\forall xG(x)$ ”为例。如果规定论域为树的集合，“ $G$ ”为“…是植物”，那么，该命题是真的。如果对“ $G$ ”的解释不变，而将论域变为狗的集合，那么，该命题是假的。

总之，一个符号化的命题的真值取决于对它的解释，它的解释一旦确定，它的真值就相应地确定了。对一个命题作出一个解释，当且仅当，对该命题：

- a. 规定一个非空论域  $UD$ ；
- b. 给每一个谓词常项指定一个属性；
- c. 给每一个个体常项指定论域中的一个成员；
- d. 给每一个命题常项指定真值。

初看上去，对命题的解释不涉及个体变项，其实，规定论域就是规定个体变项的变域，这也就相当于对个体变项作解释。量词“ $\forall$ ”和“ $\exists$ ”以及五个真值函项联结词，它们的含义都是确定的，因此不需要解释。再次强调，在一个解释中所规定的论域不得为一空论域，这正是以上第一项。由于论域不为空域，由断定论域中的所有成员如何如

何可以推出论域中的有些成员如何如何。这也就是说，直接以论域成员为主项的直言命题属于强化直言命题，而不属于基本直言命题。

下面我们就对一些命题作解释并确定它们的真值。考虑命题“ $\exists xR(x, b) \wedge B$ ”的解释。

### 【解释 1】

UD: {江河}

R: …比…长

b: 黄河

B: T (即: 真)

相对于解释 1，“B”是真的；“ $\exists xR(x, b)$ ”也是真的，因为它的意思是：有些江河比黄河长。这个断定是符合事实的。既然“ $\exists xR(x, b) \wedge B$ ”的两个合取支都是真，因此，该命题相对于解释 1 是真的。

请注意，如果我们将“b”解释为“长城”而解释 1 的其他部分不变，该公式仍然表达一个真命题。其中“ $\exists xR(x, b)$ ”的意思是“有些江河比长城长”。但这样构造的解释是错误的，因为它指派给个体常项“b”的个体即“长城”不是该论域{江河}的一个成员。这种错误解释的弊端在于，它可以使一个有效的推论成为无效的。例如：

$$\forall xF(x)$$

$$\therefore F(a)$$

是一个有效的推论。现在，我们规定论域为{自然数}，“F”为“…是整数”。如果我们把“a”解释为自然数的一个成员，该推论绝不会出现前提真而结论假的情形；但是，如果我们把“a”解释为一个自然数以外的数，如“0.2”，那么，就会出现前提真而结论假的情形。

使命题“ $\exists xR(x, b) \wedge B$ ”为假的另一个解释是

### 【解释 2】

UD: {山峰}

R: …比…高

b: 珠穆朗玛峰

B: T

相对于解释 2，“ $\exists xR(x, b)$ ”的意思是：至少有一山峰比珠穆朗玛峰高。这是一个假命题。由于“ $\exists xR(x, b) \wedge B$ ”的一个合取支是假的，所以该命题是假的。当然，为使该命题为假，我们也可以通过给“B”指定“F(即: 假)”来达到。

一般地说，如果我们要确定一个复合命题相对于一个解释的真值，那么，我们首先确定它的各个支命题对于该解释的真值，然后根据特征真值表确定该复命题相对于该解释的真值。如果我们要确定一个普遍命题相对于一个解释的真值，那么，我们首先考虑

它的量词之后的开语句所确定的条件是否被论域中的成员所满足。所谓论域中的一个成员满足这个条件，就是指，用这个成员对这个开语进行例示而得到的例子是真的；否则，这个成员不满足这个条件。一个全称命题断定，论域中的每一个成员满足其开语句所确定的条件。如果事实上，论域中的每一个成员满足这个条件，那么，相对于该解释，这个全称命题是真的，否则它是假的。一个存在命题断定，论域中至少有一个成员满足其开语句所确定的条件。如果事实上，论域中有些成员满足这个条件，那么，相对于该解释，这个存在命题是真的，否则它是假的。简言之，对于全称命题来说，论域中只要有一个反例，它就是假的，否则它是真的；对于存在命题来说，论域中只要有一个正例，它就是真的，否则，它是假的。

例如，“ $\exists xR(x, b)$ ”中的开语句“ $R(x, b)$ ”就确定了一个条件。相对于解释1，这个条件是：x比黄河长。“ $\exists xR(x, b)$ ”是一个存在命题，它断定了论域{江河}中至少有一成员满足这个条件。既然事实上有些江河如长江满足这个条件，所以，“ $\exists xR(x, b)$ ”相对于解释1是真的。“ $R(x, b)$ ”相对于解释2所确定的条件是：x比珠穆朗玛峰高。然而事实上，论域{山峰}中没有一个成员满足这个条件，所以“ $\exists xR(x, b)$ ”对于解释2是假的。

命题“ $\forall x(J(x) \leftrightarrow K(x))$ ”的一个解释是

#### 【解释3】

UD: {正整数}

J: …是偶数

K: …被2整除

相对于解释3，“ $\forall x$ ”之后的开语句“ $J(x) \leftrightarrow K(x)$ ”所确定的条件是：x是偶数当且仅当x被2整除。全称量词“ $\forall x$ ”表示，论域{正整数}中的所有成员满足这个条件。论域中的成员满足这个条件的情况有二，即(i)它是偶数并且被2整除；(ii)它不是偶数并且不被2整除。正整数中的成员可以分为两类，一类是偶数，一类不是偶数，不是偶数的正整数都是奇数。显然，在正整数中，凡偶数都符合(i)，凡不是偶数的都符合(ii)。这表明，论域{正整数}中的所有成员都满足由开语句“ $J(x) \leftrightarrow K(x)$ ”所确定的条件，故“ $\forall x(J(x) \leftrightarrow K(x))$ ”相对于解释3是真的。

我们再给出一个使该命题为假的解释。

#### 【解释4】

UD: {正整数}

J: 是偶数

K: …被4整除

解释4与解释3的不同之处仅仅在于K，其他解释完全相同。相对于解释4，开语句“ $J(x) \leftrightarrow K(x)$ ”所确定的条件是：“x是偶数当且仅当x被4整除。”论域{正整

数} 中的成员不满足该条件的情况有二：(i) 它是偶数并且不被 4 整除；(ii) 它不是偶数并且被 4 整除。只要我们在该论域中找到一个成员符合这两种情况之一，那么，我们就证明该论域中至少有一个成员不满足这个条件。事实上我们容易在该论域中找到一个成员符合情况(i)，如 6。这表明 “ $\forall x(J(x) \leftrightarrow K(x))$ ” 这个全称命题相对于解释 4 是有反例的，因而是假的。

命题 “ $\exists y(H(y, b) \wedge R(y, y))$ ” 的一个解释是

**【解释 5】**

UD: {人}

H: …是…学生

R: …认识…

b: 柏拉图

该命题是一个存在命题。量词 “ $\exists y$ ” 之后的开语句 “ $H(y, b) \wedge R(y, y)$ ” 确定了一个条件，此条件相对于解释 5 是：y 是柏拉图的学生并且 y 认识他自己。我们知道，亚里士多德满足这个条件，这表明 “ $\exists y(H(y, b) \wedge R(y, y))$ ” 这个存在命题相对于解释 5 有正例，因而是真的。

我们再给出一个使该命题为假的解释。

**【解释 6】**

UD: {正整数}

H: …大于…

R: …大于…

b: 1

相对于解释 6，“ $H(y, b) \wedge R(y, y)$ ” 所确定的条件是：y 大于 1 并且 y 大于它自己。我们知道，在论域 {正整数} 中，没有一个成员大于它自己。这就是说，该论域中没有一个成员满足该条件的右合取支，因而没有一个成员满足该条件。因此，“ $\exists y(H(y, b) \wedge R(y, y))$ ” 相对于解释 6 是假的。

需要指出，在解释 6 中，对 “H” 和 “R” 这两个谓词常项指定了相同的属性，这是允许的，因为这样做并不会导致任何混乱。正如在日常生活中可以用不同的名称代表相同的事物，如，“鲁迅” 和 “周树人” 这两个不同的名称指称同一个人。但是，用同一个名称指不同的事物则容易引起混乱，因此，在逻辑学中，不允许对同一个谓词常项或个体常项指定不同的属性或个体。此外，用具体对象作解释容易引起歧义，而用数学对象作解释既简单又精确。后者称为“算术解释”，在后面的讨论中常常用到。

接下来，我们同时考虑 “ $\forall x \exists y R(x, y)$ ” 和 “ $\exists y \forall x R(x, y)$ ” 这两个命题的解释。

**【解释 7】**

UD: {正整数}

R: …等于…

“ $\forall x \exists y R(x, y)$ ”是一个全称命题，相对于解释 7，“ $\forall x$ ”之后的开语句“ $\exists y R(x, y)$ ”所确定的条件是：x 等于有些正整数。全称量词“ $\forall x$ ”表示，任何一个正整数都满足这个条件。实际情况正是如此，因为任何一个正整数至少等于它自己。可见，“ $\forall x \exists y R(x, y)$ ”相对于解释 7 是一个真命题。“ $\exists y \forall x R(x, y)$ ”是一个存在命题。相对于解释 7，“ $\exists y$ ”之后的开语句“ $\forall x R(x, y)$ ”所确定的条件是：所有正整数等于 y。存在量词“ $\exists y$ ”表示，至少有一正整数 y 满足这个条件。然而，事实上没有一个正整数使得所有正整数都等于它，因而没有一个正整数能满足这个条件。可见，相对于解释 7，“ $\exists y \forall x R(x, y)$ ”是假的。

我们再给出另一个使上面两个命题均为真的解释。

**【解释 8】**

UD: {1}

R: …等于…

相对于解释 8，“ $\forall x \exists y R(x, y)$ ”中的开语句“ $\exists y R(x, y)$ ”所确定的条件是：x 等于有些 y。由于解释 8 的论域中只有一个成员即 1，该条件相当于：x 等于 1。全称量词“ $\forall x$ ”表示，该论域中的所有成员满足这个条件。由于该域中只有 1，“ $\forall x$ ”所表示的只不过是 1 满足条件，即：1 等于 1；显然，“ $\forall x \exists y R(x, y)$ ”相对于解释 8 是一个真命题。根据类似的理由，命题“ $\exists y \forall x R(x, y)$ ”也断定了：1 等于 1。因此，该命题相对于解释 8 也是一个真命题。

一个论域，其成员可以是无穷的，也可以是有穷的，甚至可以是惟一的。我们对论域的惟一限制是不为一个空论域。当论域只包含一个成员时，全称量词和存在量词之间的区别消失了，它们都表示论域中那惟一的成员。在不少情况下，选择只有一个成员的论域更容易达到解释的目的。

### 6.1.2 普遍有效式和不可满足式

有了“解释”的概念，我们便可进一步说明命题的其他逻辑性质。下面我们给出几个定义。

**一个命题是普遍有效式，当且仅当，该命题相对于每一个解释都是真的。**

**一个命题是不可满足式，当且仅当，该命题相对于每一个解释都是假的。**

“ $\exists x (L(x) \vee \neg L(x))$ ”是一个普遍有效式。该式是一个存在命题。我们知道，这个存在命题相对于一个解释是真的，当且仅当，论域中至少有一个成员满足由“ $L(x) \vee \neg L(x)$ ”所确定的条件；即论域中至少有一个成员是 L 或者不是 L。无需知道

“L”的解释是什么，我们就知道论域中的每一个成员都满足这个条件。根据解释的定义，每一个解释的论域都不是空论域，因此，相对于每一个解释，论域中至少有一个成员满足“ $L(x) \vee \neg L(x)$ ”所确定的条件。这表明，“ $\exists x(L(x) \vee \neg L(x))$ ”相对于每一个解释是真的。

“ $\forall y J(y) \wedge \exists y \neg J(y)$ ”是一个不可满足式。我们知道“ $\forall y J(y)$ ”与“ $\exists y \neg J(y)$ ”之间是矛盾关系，二者相对于任何解释都不能同真。因此，该公式相对于任何解释都是假的。

上面的那个普遍有效式和那个不可满足式是容易确定的。然而，在一般情况下，对普遍有效式和不可满足式的确定要复杂得多。困难的原因在于，普遍有效式和不可满足式的定义都涉及到所有的解释，而我们却不可能逐一考察所有的解释，因为解释的数目是无穷多的。为了解这一点，只需注意到论域的数目是无穷的就足够了。

虽然确定一个命题是普遍有效式或不可满足式是比较困难的，但是确定一个命题不是普遍有效式或不是不可满足式却是比较容易的。一个不是普遍有效式的命题叫做“非普遍有效式”，一个不是不可满足的命题叫做“可满足式”。根据定义，要确定一个命题是一个非普遍有效式，我们只需构造一个解释，使该命题相对于这个解释是假的；要确定一个命题是一个可满足式，我们只需构造一个解释，使该命题相对于这个解释是真的。对此我们举例加以明。

命题“ $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y H(x, y))$ ”的一个解释是

#### 【解释9】

UD: {正整数}

H: …小于…

M: …等于1

相对于解释9，开语句“ $M(x) \rightarrow \exists y H(x, y)$ ”所确定的条件是：如果x等于1，那么x小于有些正整数。现在我们检查是否论域{正整数}中的每一个成员满足这一条件。该论域的成员可以分为两类，即不等于1的正整数和等于1的正整数。首先，由于前一类成员都不满足这个条件的前件，故都满足这个条件（当前件为假时蕴涵式为真）；其次，后一类成员也都满足这个条件，因为每一个等于1的正整数都小于某些正整数。这表明，该论域中的每一个成员满足这一条件，因此，“ $\forall x(M(x) \rightarrow \exists y H(x, y))$ ”相对于解释9是真的。既然该命题至少相对于一个解释是真的，所以，该命题是一个可满足式。

我们再给出该命题的另一个解释。

UD: {正整数}

H: …大于…

M: …等于1

相对于解释 10，开语句 “ $M(x) \rightarrow \exists y H(x, y)$ ” 所确定的条件是：如果  $x$  等于 1，那么  $x$  大于有些正整数。我们检查一下，是否论域 {正整数} 中的所有成员都满足这个条件。论域中的成员不满足这个条件的特点是：它等于 1 并且并非大于有些正整数。“1” 恰好符合这种情况。这表明，并非该论域的所有成员满足这个条件。因此，“ $\forall x (M(x) \rightarrow \exists y H(x, y))$ ” 相对于解释 10 是假的。既然该命题至少相对于一个解释是假的，所以，该命题是一个非普遍有效式。我们把相对于有些解释为真而相对于另一些解释为假的命题叫做“可满足而非普遍有效式”。

普遍有效式包括重言式；不可满足式包括矛盾式。或者说，重言式和矛盾式分别是普遍有效式和不可满足式的特殊情形。在命题逻辑中，重言式和矛盾式是通过考察它们在所有真值指派下的真值而被确定的。重言式就是在所有真值指派下都为真的命题，矛盾式就是在所有真值指派下都为假的命题。由于重言式和矛盾式只含有命题常项和真值函项联结词，在命题逻辑中对它们的所有真值指派恰恰相当于在谓词逻辑中对它们的所有解释。因此，重言式符合普遍有效式的定义，矛盾式符合不可满足式的定义。此外，偶然式属于可满足而非普遍有效式。

### 6.1.3 逻辑等值和逻辑蕴涵

**【定义】** 命题 **P** 和 **Q** 是逻辑等值的，当且仅当，相对于每一个解释，**P** 和 **Q** 均为真或者均为假。

$$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \quad \text{和} \quad \forall x(\neg A(x) \vee B(x))$$

是逻辑等值的。我们知道，开语句 “ $A(x) \rightarrow B(x)$ ” 和 “ $\neg A(x) \vee B(x)$ ” 所确定的条件是完全相同的，论域中的任何成员满足前一个条件，当且仅当，它满足后一个条件。因此，相对于任何解释，“ $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ ” 和 “ $\forall x(\neg A(x) \vee B(x))$ ” 或者同真或者同假。

由定义可以看出，我们不能通过构造解释的方法来证明两个命题是逻辑等值的，因为我们不可能给出所有的解释。但是，我们可以通过构造解释的方法证明两个命题不是逻辑等值的；这只需要给出一个解释，使得这两个命题相对于该解释具有不同的真值。例如，在前面我们已经表明，相对于解释 7，命题 “ $\forall x \exists y R(x, y)$ ” 是真的，而命题 “ $\exists y \forall x R(x, y)$ ” 是假的。由此可见，这两个命题不是逻辑等值的。

既然逻辑等值的两个命题 **P** 和 **Q** 相对于每一个解释都具有相同的真值，因而，如果 **P** 逻辑等值 **Q**，那么，等值式  $P \leftrightarrow Q$  相对于每一个解释都是真的；并且，如果  $P \leftrightarrow Q$  相对于每一个解释都是真的，那么，**P** 和 **Q** 是逻辑等值的。于是，我们还可以这样定义“逻辑等值”。

**命题 P 和 Q 是逻辑等值的，当且仅当， $P \leftrightarrow Q$  是一个普遍有效式。**

接下来我们讨论“逻辑蕴涵”。

**【定义】 $P$  逻辑蕴涵  $Q$ ，当且仅当，相对于每一个解释，并非  $P$  真而  $Q$  假。**

命题 “ $F(a)$ ” 逻辑蕴涵命题 “ $\exists x F(x)$ ”。其理由是：所有的解释可以被划分为两类，一类解释使得，“ $F(a)$ ” 相对于它们为真，另一类解释使得，“ $F(a)$ ” 相对于它们为假。如果一个解释使得，“ $F(a)$ ” 相对于它为真，论域中至少有一成员即  $a$  满足开语句 “ $F(x)$ ” 所确定的条件，那么，相对于该解释，“ $\exists x F(x)$ ” 是真的。这表明，相对于该解释，并非 “ $F(a)$ ” 真而 “ $\exists x F(x)$ ” 假。如果一个解释使得，“ $F(a)$ ” 相对于它为假，那么相对于该解释，也并非 “ $F(a)$ ” 真而 “ $\exists x F(x)$ ” 假。因此，相对于每一个解释，并非 “ $F(a)$ ” 真而 “ $\exists x F(x)$ ” 假。

由于“逻辑蕴涵”涉及所有的解释，因此，我们也不能通过构造解释的方法证明一个命题逻辑蕴涵另一个命题。但是，我们却可以通过构造解释的方法证明一个命题不逻辑蕴涵另一个命题。还以解释 7 为例，既然相对于该解释，“ $\forall x \exists y R(x, y)$ ” 为真，而 “ $\exists y \forall x R(x, y)$ ” 为假，这就表明，前者不逻辑蕴涵后者。但要注意，这并不表明后者不逻辑蕴涵前者。事实上，后者是逻辑蕴涵前者的。

由于具有逻辑蕴涵关系的命题  $P$  和  $Q$  相对于每一个解释并非  $P$  真而  $Q$  假，因此，如果  $P$  逻辑蕴涵  $Q$ ，那么  $P \rightarrow Q$  相对于每一个解释都是真的；如果  $P \rightarrow Q$  相对于每一个解释都是真的，那么， $P$  逻辑蕴涵  $Q$ 。于是，我们还可以这样定义“逻辑蕴涵”：

**$P$  逻辑蕴涵  $Q$ ，当且仅当， $P \rightarrow Q$  是一个普遍有效式。**

在命题逻辑中，我们曾经定义了“重言等值”和“重言蕴涵”这两个概念。重言等值或重言蕴涵所涉及的命题  $P$  和  $Q$  只含有命题常项和真值函项联结词，因此，重言等值和重言蕴涵分别是逻辑等值和逻辑蕴涵的特殊情形。

#### 6.1.4 谓词推论的解释及其有效性

我们知道，推论是由命题组成的，因此，对一个谓词推论作解释就是对相应的一组命题作解释，即：对这组命题规定一个共同的论域，并对其中的每一个谓词常项，个体常项和命题常项作出统一的解释。下面，我们给出关于谓词推论的有效性的定义：

一个谓词推论是有效的，当且仅当，它相对于每一个解释并非所有前提真而结论假。

**【推论 1】**

$$\exists x (F(x) \vee G(x))$$

$$\forall x \neg F(x)$$

$$\therefore \exists x G(x)$$

这个谓词推论是有效的。为表明这一点，我们把一切解释分为两类。其中一类解释使得推论 1 的两个前提至少有一为假；因而，相对于这一类解释，推论 1 并非所有前提真而结论假。另一类解释使得推论 1 的两个前提都是真的。第一个前提为真表明，论域

中至少有一成员或者是 F 或者是 G。第二个前提为真表明，论域中的每一个成员都不是 F，当然也包括那些或者是 F 或者是 G 的成员。这使得，论域中至少有一成员或者是 F 或 G，并且它不是 F；由此可以断定，它是 G。所以，推论 1 的结论 “ $\exists xG(x)$ ” 相对于这类解释也是真的。由此可见，相对于每一个解释，推论 1 并非所有前提真而结论假。

由于对一个谓词推论的解释是无数多的，因此，我们不可能通过构造解释的方法证明一个谓词推论是有效的。但是，我们却可以通过构造解释的方法证明一个谓词推论是无效的。这只需给出这样一个解释，相对于它，推论的所有前提为真而结论为假。这种方法叫做“构造反例的方法”。

### 【推论 2】

$$\begin{aligned} & \exists xI(x) \\ & \exists xJ(x) \\ \therefore & \exists x(I(x) \wedge J(x)) \end{aligned}$$

为了证明推论 2 是无效的，我们给出它的一个解释。

### 【解释 11】

UD: {人}，  
I: …是幼儿，  
J: …是老头。

相对于解释 11，推论 2 读作：

有人是幼儿；  
有人是老头；  
所以，有人是幼儿并且是老头。

由于相对于解释 11，推论 2 的两个前提为真而结论为假，所以，推论 2 是无效的。

推论 2 是已经符号化的推论。对于那些用自然语言表达的推论，我们应当首先对它们进行符号化，然后再给出解释。

### 【推论 3】

所有吸毒者是短命的；  
所有吸鸦片者是吸毒者；  
所以，有些吸鸦片者是短命的。

推论 3 是一个基本三段论。为了证明该推论是无效的，我们首先对它进行符号化。

令：D: …是吸毒者，M: …是短命的，Y: …是吸鸦片者。于是，推论 3 可被符号化为：

$$\forall x(D(x) \rightarrow M(x))$$

$$\begin{aligned} & \forall x (Y(x) \rightarrow D(x)) \\ \therefore & \exists x (Y(x) \wedge M(x)) \end{aligned}$$

能够证明推论 3 为无效的一个解释是

解释 12：

UD：{正整数}  
D：…小于 1  
M：…小于 2  
Y：…小于 0

我们注意到，两个前提中的开语句都是蕴涵式。相对于解释 12，第一个前提的开语句的前件“x 小于 1”不为论域 {正整数} 中的任何成员所满足，因而此开语句为论域中的任何成员所满足，故第一个前提是有效的。同样的道理，由于第二个前提中的开语句的前件“x 小于 0”不为论域中的任何成员所满足，故第二个前提也是有效的。结论的开语句是一个合取式，既然它的一个合取支恰好是第二个前提的前件，即“x 小于 0”，因而整个开语句不为论域中的任何成员所满足，故此结论是假的。由此可见，相对于解释 12，推论 3 的所有前提都是有效的而其结论是假的，所以，推论 3 是无效的。

在解释 12 中，谓词常项 “Y” 被解释为 “…小于 0”，这并不违反解释的定义，尽管这里出现了论域之外的对象 “0”。我们的定义仅仅要求不得用论域以外的对象作为个体常项的解释，而这里的 “0” 却是作为谓词常项的解释出现的。当个体词出现在谓词常项的解释中时，该个体词所表达的是某种属性的一部分，而不是个体。

此外，在对一个推论进行符号化时，对其中每一个命题中的个体变项的选择是任意的，只要不出现重复约束即可。我们知道，个体变项的含义取决于论域。相对于同一个论域，不同的个体变项的含义是完全相同的。例如，推论 3 也可被符号化为：

$$\begin{aligned} & \forall x (D(x) \rightarrow M(x)) \\ & \forall y (Y(y) \rightarrow D(y)) \\ \therefore & \exists z (Y(z) \wedge M(z)) \end{aligned}$$

其中的三个命题采用了三个不同的个体变项，即 x、y 和 z。相对于全域，x、y 和 z 都表示宇宙间的任一个体；相对于论域 {正整数}，x、y、z 都表示任一正整数。

对于有些推论，我们可以通过限制论域而使其符号式得以简化，从而使判定其有效性的过程得以简化。

#### 【推论 4】

任何人出名仅当他有成就或者有罪恶；

有些人没有成就；

所以，有些人有罪恶。

令：UD：{人}，M：…出名，C：…有成就，Z：…有罪恶。于是，推论 4 可被符

号化为：

$$\begin{aligned} & \forall x (M(x) \rightarrow C(x) \vee Z(x)) \\ & \exists x \neg C(x) \\ \therefore & \exists x Z(x) \end{aligned}$$

推论 4 是无效的，对此可由下面的解释来证明。

【解释 13】

$$\begin{aligned} UD: & \{ \text{正整数} \} \\ M: & \cdots \text{小于 } 1 \\ C: & \cdots \text{等于 } 0 \\ Z: & \cdots \text{小于 } 0 \end{aligned}$$

推论 4 的第一个前提是全称命题，全称量词之后的开语句是一个蕴涵式。相对于解释 13，此开语句的前件“ $x$  小于 1”不为任何正整数所满足，因而此开语句为任何正整数所满足，故第一个前提是真的。第二个前提是一个存在命题。相对于解释 13，存在量词之后的开语句“ $x$  不等于 0”为所有正整数所满足，因而第二个前提也是真的。结论是一个存在命题，相对于解释 13，存在量词之后的开词句“ $x$  小于 0”不为任何正整数满足，因而结论是假的。所以，推论 4 是无效的。

在对推论进行符号化时，将其论域加以限制是需要满足一定的条件的。这些条件是：

- (i) 论域的成员是所有前提和结论共同谈论的对象；
- (ii) 这类对象不是一个空类。

推论 4 的所有前提和结论所谈论的对象都是人，并且人不是一个空类。因此，推论 4 的论域可以被限制为 {人}。与之不同，在推论 3 中，第一个前提所谈及的对象是吸毒者，第二个前提和结论所谈及的对象是吸鸦片者。无论把论域限制为 {吸毒者} 还是 {吸鸦片者}，都违反条件(i)。当然，我们可以把推论 3 的论域限制为 {人}，或者限制为 {生物} 等，但这不能起到简化推论 3 的符号化的作用，因为这样做不能减少推论 3 所涉及到的任何一个谓词。

最后，我们根据“逻辑蕴涵”的定义给出关于谓词推论的有效性的另一个定义：

**一个谓词推论是有效的，当且仅当，该推论的所有前提的合取  $Pr$  逻辑蕴涵其结论  $C$ 。换言之，一个推论是有效的，当且仅当，“ $Pr \rightarrow C$ ”是一个普遍有效式。**

谓词推论的有效性是命题推论的有效性的推广。命题推论的有效性只涉及前提和结论之间的重言蕴涵关系，而重言蕴涵关系只是逻辑蕴涵关系的一部分。我们知道，在命题逻辑中，我们可以通过真值表来判定一个推论所相应的蕴涵式“ $Pr \rightarrow C$ ”是否为一个重言式，进而判定该推论是否为有效的。真值表方法为我们提供了一种判定程序或能行方法，即：我们根据真值表方法能够机械地在有穷步骤内确定任何一个命题是否为一重

言式或任何一个命题推论是否为有效的。然而，在谓词逻辑中，对于确定一个命题是一普遍有效式或一个谓词推论是有效的，并不存在一种能行方法，因为这涉及无穷多的解释。这是谓词逻辑与命题逻辑的一个重要区别。

## 习题 6.1

一、根据所给出的解释，确定下列命题相对于该解释的真值。

UD: {中国的城市}

J: F

N: …在…以南

B: …在…和…之间

S: …是省会

a: 北京

b: 哈尔滨

c: 杭州

1.  $J \vee (N(a,a) \rightarrow S(b))$
2.  $\exists x S(x) \wedge (B(a,b,c) \rightarrow J)$
3.  $\forall y N(c,y) \vee \exists z B(z,a,b)$
4.  $\forall x (S(x) \rightarrow N(x,b))$
5.  $\exists z ((N(z,a) \vee \neg N(z,b)) \wedge S(z))$
6.  $\forall y (B(y,a,b) \rightarrow \exists z N(z,y))$
7.  $\exists x (N(c,x) \wedge \forall y B(y,b,x))$
8.  $\exists x \exists y (N(x,y) \wedge \forall z \neg B(z,x,y))$
9.  $\forall x \forall y (N(x,y) \rightarrow \exists z B(z,x,y))$
10.  $\forall x \neg S(x) \rightarrow \forall x B(x,a,b)$
11.  $\exists y N(b,y) \rightarrow (\neg J \rightarrow \exists z B(z,b,a))$

二、用构造解释的方法证明下列每一个命题是可满足而非普遍有效的。

1.  $\exists x (F(x) \wedge G(x) \wedge H(x))$
2.  $\forall x (H(x) \vee F(x) \vee G(x))$
3.  $\forall x (I(x) \vee J(x) \rightarrow K(x) \wedge L(x))$
4.  $\forall x R(x,a) \wedge \exists x H(x,a)$
5.  $\forall x (P \vee S(x))$
6.  $\exists x \exists y R(x,y)$
7.  $\forall x R(x,x)$
8.  $\forall x \forall y (H(x,y) \rightarrow H(y,x))$

$$9. \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$

**三、用构造解释的方法证明下列各对命题不是逻辑等值的。**

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ ,            | $\forall x (F(x) \vee G(x))$            |
| 2. $\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$ ,          | $\exists x (F(x) \wedge G(x))$          |
| 3. $\forall x \forall y R(x,y)$ ,                    | $\forall x R(x,x)$                      |
| 4. $\exists x \exists y R(x,y)$ ,                    | $\exists x R(x,x)$                      |
| 5. $\exists x F(x) \leftrightarrow \exists x G(x)$ , | $\forall x (F(x) \leftrightarrow G(x))$ |

**四、根据你在题三中为每一对命题构造的解释，指出每一对命题中哪一个命题不逻辑蕴涵哪一个命题。**

**五、用构造解释的方法证明下列推论是无效的。**

1. 所有酒鬼都是缺乏自制力的；  
有些缺乏自制力的是抽烟的；  
所以，有些酒鬼是抽烟的。
2. 每一个相声演员都是有口才的；  
每一个相声演员都不是哑巴；  
所以，所有哑巴都不是有口才的。
3. 有的男人吸烟；  
有的大学生吸烟；  
所以，有的男大学生吸烟。
4. 所有会飞的鸟都是有翅膀的；  
所以，所有无翅膀的东西都不是会飞的。
5. 任何人是优秀的歌手仅当他有好嗓子；  
有些人是优秀的；  
所以，有些人有好嗓子。
6. 凡舞蹈演员都不是瘸子；  
有些演员是精通音乐的；  
所以，有些演员精通音乐并且不是瘸子。
7. 有些人爱有些人；  
所以，有些人尊敬有些人。
8. 有些学生讨厌所有的酗酒者；  
有些抽烟者不是酗酒者；  
所以，有些学生不讨厌有的抽烟者。
9. 有些观众喜欢所有电影；  
所有的电影是艺术；

所以，有些观众喜欢有些艺术。

10. 有些人受到尊敬仅当他是当权者；

所以，如果有人受到尊敬，那么有人是当权者。

## 6.2 推 演

### 6.2.1 命题推演规则和量词转换规则

我们曾经提到，谓词逻辑是把命题逻辑作为子系统包含在内的，命题逻辑的二十条推演规则均属谓词逻辑的推演规则。因此，命题逻辑的推演可以用来证明某些谓词推论的有效性。例如：

【推论 1】

$$\exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x) \wedge \exists y H(y)$$

$$\exists x F(x)$$

$$\therefore \exists y H(y)$$

对于推论 1 的有效性的证明如下：

$$(1) \exists x F(x) \rightarrow \forall x G(x) \wedge \exists y H(y) \quad \text{前提}$$

$$(2) \exists x F(x) \quad \text{前提}$$

$$(3) \forall x G(x) \wedge \exists y H(y) \quad (1)(2), \text{ 肯前}$$

$$(4) \exists y H(y) \quad (3), \text{ 化简}$$

推论 1 所以能够仅由命题逻辑的推演规则加以证明，是因为该推论仅仅依据真值函项联结词的逻辑性质，而不依据量词的逻辑性质。实际上，我们可以用命题常项 A、B 和 C 分别替换推论 1 中的“ $\exists x F(x)$ ”、“ $\forall x G(x)$ ”和“ $\exists y H(y)$ ”，从而使推论 1 成为一个命题推论，即：

$$A \rightarrow B \wedge C$$

$$A$$

$$\therefore C$$

显然，这个命题推论的有效性可以按照前面证明推论 1 的相同步骤加以证明。

命题逻辑中的二十条推演规则中有十条是置换规则。这十条置换规则作为谓词逻辑的置换规则，其运用范围更广了。它们不仅可以运用于复合命题及其部分公式，而且可以运用于一个普遍命题及其部分公式。如，对于“ $\forall x (B(x) \rightarrow J(x))$ ”，可以通过蕴涵规则将其中的“ $B(x) \rightarrow J(x)$ ”置换为“ $\neg B(x) \rightarrow J(x)$ ”，从而得出“ $\forall x (\neg B(x) \vee J(x))$ ”。值得注意的是，当我们应用置换规则于一个普遍命题的部分公式的时候，不要将主逻辑词和非主逻辑混淆起来。请看一个错误应用结合规则的例子：

$$(1) A(b) \vee \forall x (J(x) \vee K(x)) \quad \text{前提}$$

$$\therefore (2) (A(b) \vee \forall x J(x)) \vee K(x) \quad (1), \text{结合(错误!)}$$

我们知道，应用结合规则的对象是  $P \vee (Q \vee R)$ 。而上面这个推论的前提是  $P \vee Q$ ，其中  $Q$  代表 “ $\forall x (J(x) \vee K(x))$ ”， $Q$  中的主逻辑词是 “ $\forall x$ ” 而不是 “ $\vee$ ”。因而对这个前提不能使用结合规则。上面这个推论之所以对该前提使用结合规则，是因为该前提的右析取支的主逻辑词被误认为是 “ $\vee$ ”，从而该前提被误认为具有形式  $P \vee (Q \vee R)$ 。

我们曾经讲过，谓词推论不仅可以依据真值函项联结词的逻辑性质，也可依据量词的逻辑性质，而且还可既依据真值函项联结词又依据量词的逻辑性质。因此，除了命题逻辑的二十条推演规则以外，谓词逻辑还包含一些新的关于量词的推演规则。在我们的系统中将引进五条新的规则。其中一条是关于量词的置换规则，另外四条是关于量词的整推规则。这二十五条规则为我们证明任何一个有效的谓词推论提供了充分并且必要的条件。这也就是说，一个谓词的推论是有效的，当且仅当，通过这些规则可以从它的前提推出它的结论。

在本小节，我们先介绍关于量词的置换规则，即量词转换规则。我们在 5.2.2 中曾经提到以下四对等值的公式：

$$\begin{aligned} & \forall x \Psi(x) \text{ 和 } \neg \exists x \neg \Psi(x) \\ & \forall x \neg \Psi(x) \text{ 和 } \neg \exists x \Psi(x) \\ & \exists x \Psi(x) \text{ 和 } \neg \forall x \neg \Psi(x) \\ & \exists x \neg \Psi(x) \text{ 和 } \neg \forall x \Psi(x) \end{aligned}$$

其中每一对公式的左右两边可以相互置换。相互置换后的公式与原来的公式相比，除量词不同以外，量词前边和后边的符号也不同。具体地说，若原来量词之前没有（或有）否定号，置换后量词之前有（或没有）否定号；若原来量词之后没有（或有）否定号，置换后量词之后有（或没有）否定号。据此，我们可以把量词转换规则陈述如下：

#### 量词转换规则

一个公式可以置换为这样一个公式，它的量词与原公式的量词相反，它的量词前后的否定号也与原公式的量词前后的否定号相反。

量词转换规则作为一条置换规则既可应用于整个命题。也可应用于命题的一部分，例如，对于命题

$$\neg \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists z \neg H(y, z))$$

我们可以应用量词转换规则于整个命题，从而得到：

$$\exists x \neg \exists y (R(x, y) \rightarrow \exists z \neg H(y, z))$$

也可应用量词转换规则于其中的部分公式，从而得到：

$$\neg \forall x \neg \exists y \neg (R(x, y) \rightarrow \exists z \neg H(y, z))$$

或

$$\neg \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow \neg \forall z H(y, z))$$

在前边我们还提到其他一些关于量词的等值公式，如，量词移置律。如果愿意的话，我们可以引入更多的关于量词的置换规则。然而，我们不打算让本系统的规则太多。因此，我们只引入这条量词转换规则。

## 6.2.2 全称量词的整推规则

我们知道，谓词逻辑和命题逻辑之间最主要的区别是，前者处理量词，而后者不处理量词。如果在进行谓词推论时，先销去量词，得到结论以后再加上量词，那么谓词推论在很大程度上就还原为命题推论了。这就是谓词逻辑的自然演绎系统的基本思想。证明一个谓词推论的一般步骤是：

- (i) 根据有关规则销去量词；
- (ii) 求得不带量词的结论；
- (iii) 如果需要，那么，根据有关规则给结论加上量词。

我们先介绍两条关于全称量词的推论规则。请看下面的推论：

任何人是不会飞的；

所以张飞是不会飞的。

不难看出，这是一个有效推论。一般地说，对于任何一个非空论域，从断定其全体成员具有某种属性，进而可以断定其中某一个别成员具有这一属性。由此我们得到一条销去全称量词的规则，即全称例示规则。全称例示规则可以表述如下：

从一个全称命题可以推得它的一个替换例子。

为了理解这个规则，我们必须弄清什么是全称命题的一个替换例子。所谓全称命题的一个替换例子，就是全称命题的主量词后边的开语句的一个替换例子。具体地说，全称命题的一个替换例子可以这样来得到：先去掉作为主逻辑词的全称量词，然后将由此得到的开语句的自由变项的每一次出现一致地替换为一个个体常项的出现。如，对于全称命题“ $\forall x(F(x) \vee G(x))$ ”来说，“ $F(a) \vee G(a)$ ”和“ $F(b) \vee G(b)$ ”都是它的替换例子；而“ $F(a) \vee G(b)$ ”和“ $F(a) \vee G(x)$ ”都不是它的替换例子。后面两个所以不是该全称命题的替换例子，是因为其中之一用了两个不同的个体常项来替换 $x$ 的各次出现，另一则没有将 $x$ 的所有出现都替换为个体常项的出现。

我们用 $\Psi(x)$ 表示含有惟一自由变项 $x$ 的任何开语句， $x$ 在其中可以出现一次或多次。其中的 $\Psi(\ )$ 相当于前面(5.2.2)所说的关于任意目谓词的元变项，任意目谓词包括复合谓词，复合谓词可以通过去掉任意复杂的普遍命题的主量词和相应的自由变项的每一次出现来得到。用 $\Psi(a/x)$ 表示 $\Psi(x)$ 的一个替换例子，即用 $a$ 替换 $\Psi(x)$ 中的 $x$ 的每一次出现所得到的那个命题， $a$ 叫做“例示常项”。于是，全称例示规则又可

以表述为：

$$\begin{aligned} & \forall x \Psi(x) \\ \therefore & \Psi(a/x) \end{aligned}$$

这里的  $x$  和  $a$  都属于元变项， $x$  的值可以取个体变项  $x$ 、 $y$ 、 $z$  中的任何一个， $a$  的值可以取个体常项  $a$ 、 $b$ 、 $\dots$ 、 $w$  中的任何一个。例示常项  $a$  可以是在全称命题中已经出现的个体常项，也可是在全称命题中没有出现的个体常项。如，下面两个推论都是对全称例示规则的正确应用：

**【推论 2】**

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x R(x, a) && \text{前提} \\ \therefore (2) \quad & R(b, a) && (1), \text{ 全称例示} \end{aligned}$$

**【推论 3】**

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall x R(x, a) && \text{前提} \\ \therefore (2) \quad & R(a, a) && (1), \text{ 全称例示} \end{aligned}$$

推论 2 的一个例子是：

所有的人喜欢牛顿；  
所以，爱因斯坦喜欢牛顿。

推论 3 的一个例子是：

所有的人喜欢牛顿；  
所以，牛顿喜欢牛顿。

这两个推论的有效性是显而易见的。下面我们用全称例示规则证明一个推论。

**【推论 4】**

所有发明家是聪明的；  
所有发明家是勤奋的；  
爱迪生是发明家；  
所以，爱迪生是聪明的并且是勤奋的。

令：F：…是发明家，C：…是聪明的，Q：…是勤奋的，d：爱迪生。

推论 4 可被符号化为：

$$\begin{aligned} & \forall x (F(x) \rightarrow C(x)) \\ & \forall x (F(x) \rightarrow Q(x)) \\ & F(d) \\ \therefore & C(d) \wedge Q(d) \end{aligned}$$

对此推论的有效性证明如下：

- |   |             |
|---|-------------|
| (1) $\forall x (F(x) \rightarrow C(x))$ | 前提          |
| (2) $\forall x (F(x) \rightarrow Q(x))$ | 前提          |
| (3) $F(d)$                              | 前提          |
| (4) $F(d) \rightarrow C(d)$             | (1), 全称例示   |
| (5) $C(d)$                              | (3) (4), 肯前 |
| (6) $F(d) \rightarrow Q(d)$             | (2), 全称例示   |
| (7) $Q(d)$                              | (3) (6), 肯前 |
| (8) $C(d) \wedge Q(d)$                  | (5) (7), 合取 |

上面这个证明中的行(4)和行(6)是应用全称例示规则（以后简称为“全例”）分别从前提(1)和(2)得出的，用以例示的常项都是“d”。这样做为的是与前提(3)中已有的个体常项保持一致。否则，就推不出所需要的结论。

需要注意：正如命题逻辑的整推规则，全称例示规则和将要讨论的其他三条关于量词的推演规则，都只能应用于整个命题，而不能应用于命题的某一部分，因而均属整推规则。如，下面两个推论都是对全称例示规则的误用：

- |  |              |
|--|--------------|
| (1) $\neg \forall x M(x)$              | 前提           |
| $\therefore (2) \neg M(a)$             | (1), 全例（错误！） |
| (1) $\forall x M(x) \rightarrow N(a)$  | 前提           |
| $\therefore (2) M(a) \rightarrow N(a)$ | (1), 全例（错误！） |

在前一个推论中，全称例示规则只应用于前提中的否定号之后的部分，这是一个无效推论。对此我们可以通过构造反例的方法加以证明，即：

UD: {人}，  
M: …是哲学家，  
a: 康德。

在后一个推论中，全称例示规则只应用于前提中的前件，这也是一个无效推论。对此我们也构造一个反例加以证明，即：

UD: {人}，  
M: …是哲学家，  
N: …是军事家，  
a: 康德。

总之，应用量词推论规则销去或引入的量词必须处于公式的前端，并且其辖域延续到公式的末端。

以上所讨论的推论，其结论都是一个单称命题，因而只需应用全称例示规则销去全称量词即可。但是，如果一个推论的结论不是一个单称命题，而是一个全称命题，那么仅仅应用全称例示规则是不够的，还需要引入全称量词的规则，即全称概括规则。

全称概括规则可以初步地表述为：

从一个全称命题的一个替换例子可以推出这个全称命题。

我们还用  $\Psi(x)$  表示含有惟一自由个体变项  $x$  的任何开语句，用  $\Psi(a/x)$  表示  $\Psi(x)$  的一个替换例子，那么，全称概括规则又可初步表述为：

$\Psi(a/x)$

$\therefore \forall x\Psi(x)$

但是稍加考虑就可以发现，这样表述的全称概括规则会导致一些无效的推论。如：

北京是中国的首都；

所以，所有城市是中国的首都。（错误！）

这个推论是无效的，然而，它却符合上述的“全称概括规则”。另一个类似的例子是：

(1) $\neg \forall xF(x)$	前提
(2) $\neg \neg F(a)$	间接假设
(3) $F(a)$	(2), 双否
(4) $\forall xF(x)$	(3), 全称概括（错误！）
(5) $\forall xF(x) \wedge \neg \forall xF(x)$	(1)(4), 合取
(6) $F(a)$	(2) – (5), 间证

相对于本节曾经给出的一个解释，该推论的前提和结论分别是：“并非所有人是哲学家”和“康德不是哲学家”；显然，这个推论是无效的。

在前一个例子中，被概括的个别对象“北京”出现在前提中；在后一个例子中，被概括的那个个体常项“a”出现在尚未撤除的假设即行(2)中。这两个推论的共同特点是，从个别对象具有某种属性推出所有对象具有这种属性。这样的推论在一般情况下是无效的。为了避免这种错误发生，我们必须对上面表述的全称概括规则加以限制。

对全称概括规则的第一条限制：

在进行全称概括时，例示常项不在任何前提中或尚未撤除的假设中出现。

然而，仅有这一条限制是不够的，因为它还不能避免如下的错误推论：

(1) $\forall zH(z, z)$	前提
(2) $H(b, b)$	(1), 全称例示
(3) $\forall zH(z, b)$	(2), 全称概括（错误！）

具有此推论形式的前提和结论的一个例子是：

每一个数都等于它自己；

所以，每一个数都等于3。

请注意，以上推论中的(2)对于(3)来说相当于  $\Psi(a/x)$ ，由(2)到(3)的推演相当于从  $\Psi(a/x)$  得出  $\forall x\Psi(x)$ ，这是符合上述全称概括规则的，然而这个推演却是错误

的。可见，需要对上述全称概括规则加以进一步的限制。

对全称概括规则的第二条限制是：

**在进行全称概括时，例示常项不在结论中出现。**

上面这个推论违反了这一限制，因为例示常项  $b$  出现在结论中。于是，关于全称概括规则的准确表述是：

$\Psi(a/x)$  [ (i)  $a$  不在任何前提中或尚未撤除的假设中出现；

(ii)  $a$  不在  $\forall x \Psi(x)$  中出现。]

第(ii)条限制要求进行全称概括时必须对  $\Psi(a/x)$  中  $a$  的每一次出现替换为  $x$ ，否则， $a$  就会在  $\forall x \Psi(x)$  中出现。为满足第(ii)条要求，我们应当这样进行全称概括：首先将该命题的某个个体常项的每一次出现一致地替换为一个个体变项的出现；然后对这样得到的开语句进行全称概括，即在这个开语句的前端加上全称量词，并且使整个公式处于全称量词的辖域内。如，对于命题“ $A(b) \leftrightarrow D(b)$ ” 的全称概括是“ $\forall y (A(y) \leftrightarrow D(y))$ ”，而“ $\forall y (A(y) \leftrightarrow D(b))$ ” 和“ $\forall x (y) \leftrightarrow D(y)$ ” 都不是它的全称概括；因为前者没有将  $b$  的每一次出现替换为  $y$ ，后者的全称量词的辖域没有包括整个公式。

全称概括规则常常是同全称例示规则结合使用的。下面我们就应用这两条规则证明一些推论的有效性。

### 【推论 5】

所有鸟都是有翅膀的；

没有一个有翅膀的没有羽毛；

所以，所有鸟都有羽毛。

令：N：…是鸟，B：…有翅膀，M：…有羽毛。于是，推论 5 可被符号化为：

$\forall x (N(x) \rightarrow B(x))$

$\neg \exists x (B(x) \wedge \neg M(x))$

$\therefore \forall x (N(x) \rightarrow M(x))$

### 【证明】

(1)  $\forall x (N(x) \rightarrow B(x))$  前提

(2)  $\neg \exists x (B(x) \wedge \neg M(x))$  前提

(3)  $\forall x \neg (B(x) \wedge \neg M(x))$  (2), 量转

(4)  $N(a) \rightarrow B(a)$  (1), 全例

(5)  $\neg (B(a) \wedge \neg M(a))$  (3), 全例

(6)  $\neg B(a) \vee \neg \neg M(a)$  (5), 德摩根

(7)  $\neg B(a) \vee M(a)$  (6), 双否

(8)  $B(a) \rightarrow M(a)$  (7), 蕴涵

(9)  $N(a) \rightarrow M(a)$  (4) (8), 三段论

$$(10) \forall x (N(x) \rightarrow M(x)) \quad (9), \text{全称概括}$$

在上面这个证明中，行(10)是从行(9)通过全称概括规则（以后简称为“全概”）得到的。这一全称概括的个体常项  $a$  不仅没有出现在结论中，而且既未出现在任何前提中，也未出现在任何假设中，而是从作为前提的全称命题通过全称例示得到的。

在此，不妨对这种作法的合理性作一直观的分析：我们知道，通过全称例示规则引入的个体常项是任意的，也就是说，这里的  $a$  可以由其他个体常项来替换，如， $b$ 、 $c$  等。这表明，上面证明中的行(9)不仅对  $a$  成立，而且对任何个体常项都成立。因此，我们对行(9)进行全称概括而得行(10)是有效的。

### 【推论 6】

任何科学家不是研究自然科学就是研究社会科学；

凡对人性不感兴趣的科学家不研究社会科学；

所以，凡对人性不感兴趣的科学家研究自然科学。

令：UD：{科学家}，Z：…研究自然科学，S：…研究社会科学，R：…是对人性感兴趣的。推论 6 被符号化为：

$$\begin{aligned} & \forall y (Z(y) \vee S(y)) \\ & \forall y (\neg R(y) \rightarrow \neg S(y)) \\ \therefore & \forall y (\neg R(y) \rightarrow Z(y)) \end{aligned}$$

对推论 6 的有效性证明如下：

(1)	$\forall y (Z(y) \vee S(y))$	前提
(2)	$\forall y (\neg R(y) \rightarrow \neg S(y))$	前提
(3)	$\neg R(b)$	条件假设
(4)	$\neg R(b) \rightarrow \neg S(b)$	(2), 全例
(5)	$\neg S(b)$	(3) (4), 肯前
(6)	$Z(b) \vee S(b)$	(1), 全例
(7)	$Z(b)$	(5) (6), 否析
(8)	$\neg R(b) \rightarrow Z(b)$	(3) – (7), 条证
(9)	$\forall y (\neg R(y) \rightarrow Z(y))$	(8), 全概

在上面这个证明中，最后一行是通过对行(8)进行全称概括得到的。虽然被概括的个体常项  $b$  出现在假设即行(3)中，但是，当我们对行(8)进行全称概括时，该假设已被撤除了。可见，这里对全称概括规则的使用也是正确的。

最后，让我们举一个人们在实际思维中使用全称概括规则的例子，这也许对于我们进一步了解全称概括规则的实质是有帮助的。如，人们任意地画一个三角形，并表明该三角形的三个内角之和等于  $180^\circ$ ，进而得出结论：所有三角形的三个内角之和等于

180°。这个结论就是通过全称概括规则从被考察的那个个别三角形得出来的。由此我们看到，进行全称概括的关键在于，被概括的那个个别对象必须是任意选择的，从而使该个别对象具有代表性。我们对全称概括规则所加的第一条限制就是为了保证这一点。

### 6.2.3 存在量词的整推规则

请先看一个推论：

诸葛亮是军事家；  
所以，有人是军事家。

显而易见，这是一个有效推论。一般地说，从断定论域中某一个别成员具有某属性，进而可以断定其中至少有一成员具有该属性。由此，我们得到一条引入存在量词的规则，即存在概括规则。存在概括规则可以表述为：

从一个存在命题的一个替换例子可以推出这个存在命题。

还以  $\Psi(x)$  代表含有惟一自由个体变项  $x$  的任何一个开语句， $\Psi(a/x)$  表示  $\Psi(x)$  的一个替换例子，存在概括规则又可以表述为：

$\Psi(a/x)$

$\therefore \exists x\Psi(x)$

存在概括规则与全称概括规则的一个不同之处是：在进行全称概括时，必须将被概括的那个个体常项的每一次出现一致地替换为一个个体变项的出现；而在进行存在概括时，既可以将被概括的个体常项的每一次出现一致地替换为一个个体变项的出现，也可以将该个体常项的仅仅一部分出现一致地替换为一个个体变项的出现。因此，存在概括规则不要求例示常项  $a$  不出现在结论中。此外，存在概括规则不要求例示常项  $a$  不出现在任何前提和尚未撤除的假设中。所以，对于存在概括规则的应用是不受任何限制的。我们举例说明存在概括和全称概括的这种区别。

#### 【推论 7】

- |                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| (1) $R(d, d)$                     | 前提       |
| $\therefore (2) \exists xR(x, x)$ | (1)，存在概括 |

#### 【推论 8】

- |                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| (1) $R(d, d)$                     | 前提       |
| $\therefore (2) \exists xR(x, d)$ | (1)，存在概括 |

推论 7 和推论 8 都是对存在概括规则的正确应用。如果把 “ $R$ ” 解释为 “…与…相同”，把 “ $d$ ” 解释为 “金字塔”，那么推论 7 是从 “金字塔与金字塔相同” 推出 “至少有一事物与它自己相同”；推论 8 是从 “金字塔与金字塔相同” 推出 “至少有一事物与金字塔相同”。显然，这两个推论都是有效的。下面一个推论是对全称概括规则的误

用：

- |                         |               |
|-------------------------|---------------|
| (1) $\forall x R(x, x)$ | 前提            |
| (2) $R(d, d)$           | (1), 全例       |
| (3) $\forall x R(x, d)$ | (2), 全概 (错误!) |

按照上面的解释，这个推论的行(2)到行(3)，相当于从“金字塔与金字塔相同”推出“所有事物与金字塔相同”，这显然是一个无效的推论。

下面，我们应用存在概括规则证明一个推论的有效性。

### 【推论 9】

爱因斯坦谦虚并且有成就；

所有有成就或者有罪恶的人都不是默默无闻的；

所以，有些人是谦虚的但却不是默默无闻的。

令：UD：{人}，Q：…谦虚，C：…有成就，Z：…有罪恶，M：…是默默无闻的，

e：爱因斯坦。推论 9 可被符号化为：

$$\begin{aligned} & Q(e) \wedge C(e) \\ & \forall x (C(x) \vee Z(x) \rightarrow \neg M(x)) \\ \therefore & \exists x (Q(x) \wedge \neg M(x)) \end{aligned}$$

### 【证明】

- |  |             |
|--|-------------|
| (1) $Q(e) \wedge C(e)$                                 | 前提          |
| (2) $\forall x (C(x) \vee Z(x) \rightarrow \neg M(x))$ | 前提          |
| (3) $C(e) \vee Z(e) \rightarrow \neg M(e)$             | (2), 全例     |
| (4) $C(e)$   | (1), 化简     |
| (5) $C(e) \vee Z(e)$                                   | (4), 附加     |
| (6) $\neg M(e)$  | (3) (5), 肯前 |
| (7) $Q(e)$   | (1), 化简     |
| (8) $Q(e) \wedge \neg M(e)$                            | (6) (7), 合取 |
| (9) $\exists x (Q(x) \wedge \neg M(x))$                | (8), 存在概括   |

在上面的证明中，从行(8)到行(9)的推演用到存在概括规则（以后简称为“存概”）。

接下来我们讨论消去存在量词的规则，即存在例示规则。我们知道，在一般情况下，从存在命题推出单称命题是不合理的。例如，我们不能从“有人会游泳”推出“爱因斯坦会游泳”。但是，既然在前提中断定了会游泳的人是存在的，那么，我们可以根据这一断定的启示合理地引进一个假设：“a 会游泳”。只要我们规定，a 并不特指某个已知的对象，而仅仅指称那个存在着的会游泳的人，而无论他是谁。我们把这样规定的个体常项叫做“新名”，把含有新名的假设叫做“新名假设”。不过，新名和新名

假设只能起“敲门砖”的作用，我们最终还得把新名从而把新名假设消除；否则，就不能保证结论仅由前提有效地推出。以上就是存在例示规则的基本思想。

存在例示规则可以表述为：

如果由一个存在命题和它的一个含有新名的替换例子可以推出一个不含新名的命题，那么，仅由这个存在命题可以推得这个不含新名的命题。

还以  $\Psi(x)$  代表含有惟一自由个体变项  $x$  的任何一个开语句， $\Psi(a/x)$  表示  $\Psi(x)$  的一个替换例子。存在例示规则又可以表述为：

$\exists x \Psi(x)$

$\boxed{\neg \Psi(a/x)}$

...

$\boxed{P}$

$\therefore P$

[ (i)  $a$  不出现在任何前提和尚未撤除的假设中；

(ii)  $a$  不出现在  $\exists x \Psi(x)$  中；

(iii)  $a$  不出现在  $P$  中。 ]

上面方括号中的内容是对此规则的限制。此限制分为三部分，前两部分即(i)和(ii)保证了  $a$  是一个新名；后一部分即(iii)保证  $P$  是一个不含新名的命题，从而保证  $P$  仅仅依赖于前提而不依赖于新名假设。存在例示规则也是一条假设引入 - 撤除规则，这是它相对于其他三条量词推论规则的最为显著的区别特征。

下面我们看几个违反存在例示规则的限制而导致无效的推论。

(1) $U(d)$	前提
(2) $\exists x V(x)$	前提
$\boxed{(3) V(d)}$	(2), 新名假设
$\boxed{(4) U(d) \wedge V(d)}$	(1) (3), 合取
$\boxed{(5) \exists x (U(x) \wedge V(x))}$	(4), 存概
(6) $\exists x (U(x) \wedge V(x))$	(3) - (5), 存在例示 (错误! )

这个推论的一个反例是：2 是偶数；有些数是奇数；所以，有些数是偶数非且是奇数。这个推论的错误在于，新名假设即行(3)用  $d$  作新名，而  $d$  已经在前提中出现。

(1) $\forall x \exists y R(y, x)$	前提
(2) $\exists y R(y, a)$	(1), 全例
$\boxed{(3) R(a, a)}$	(2), 新名假设
$\boxed{(4) \exists x R(x, x)}$	(3), 存概
(5) $\exists x R(x, x)$	(3) - (4), 存在例示 (错误! )

此推论的一个反例是：对于每一实数而言，至少有一实数大于它，所以，至少有一实数大于它自己。这个推论的错误在于，新名假设即行(3)用  $a$  作新名，而  $a$  已经出现在被例示的存在命题即行(2)中。

(1) $\exists y D(y)$	前提
(2) $D(b)$	(1), 新名假设
(3) $\neg \neg D(b)$	(2), 双否
(4) $D(b)$	(3), 双否
(5) $D(b)$	(2) - (4), 存在例示 (错误!)

这个推论的一个反例是：有的大学在北京；所以，武汉大学在北京。这个推论的错误在于，新名 b 出现在新名假设的假设域的最后一行即 (4) 中，而这一行就相当于存在例示规则中的 P。

我们再看一个正确应用存在例示规则的推论。

### 【推论 10】

所有乌鸦是黑的；  
有些动物是乌鸦；  
所以，有些动物是黑的。

令：W: …是乌鸦，H: …是黑的，D: …是动物。推论 10 可被符号化为：

$$\begin{aligned} & \forall z (W(z) \rightarrow H(z)) \\ & \exists z (D(z) \wedge W(z)) \\ \therefore & \exists z (D(z) \wedge H(z)) \end{aligned}$$

### 【证明】

(1) $\forall z (W(z) \rightarrow H(z))$	前提
(2) $\exists z (D(z) \wedge W(z))$	前提
(3) $D(e) \wedge W(e)$	(2), 新名假设
(4) $W(e) \rightarrow H(e)$	(1), 全例
(5) $W(e)$	(3), 化简
(6) $H(e)$	(4) (5), 肯前
(7) $D(e)$	(3), 化简
(8) $D(e) \wedge H(e)$	(6) (7), 合取
(9) $\exists z (D(z) \wedge H(z))$	(8), 存概
(10) $\exists z (D(z) \wedge H(z))$	(3) - (9), 存在例示

上面这个证明中的最后一行是通过存在例示规则（以后简称为“存例”）得出来的。新名假设即行(3)中的个体常项 e 不曾在它之前的任何一行中出现，也没有在该假设域的最后一行即(9)中出现，因而满足存在例示规则的要求。对行(3)的说明是“(2)，新名假设”，表明这个新名假设是在行(2)的启示下得出的。需要注意，在这个证明中，先根据(2)作出新名假设，然后再对(1)进行全称例示。这样做了一个好处是，使 e 不在新名假设  $D(e) \wedge W(e)$  之前的任何一行出现，这自然也就保证了 e 的出现不会

违反存在例示规则的前两个限制条件，即保证  $e$  是一个新名。这是一种方便的做法，但不是必需的。作为一种推演策略，在一般情况下，我们最好先作新名假设，然后进行全称例示。

最后，我们可以从另外一个角度阐明存在例示规则的合理性，即表明存在例示规则在一定条件下可以由条件证明规则和其他已有规则推导出来。这个证明是从存在例示规则给定的先决条件得出它的结论  $P$ 。证明如下：

$\exists x \Psi(x)$		
$\boxed{\Psi(a/x)}$	条件假设	[ (i) $a$ 不在任何前提或尚未撤除的假设中出现; (ii) $a$ 不在 $\exists x \Psi(x)$ 中出现; (iii) $a$ 不在 $P$ 出现。 ]
...		
$P$		
$\Psi(a/x) \rightarrow P$	条件证明	
$\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$	全称概括	
$\exists x \Psi(x) \rightarrow P$	量词移置	
$P$	肯定前件	

这个推导过程所依据的推演规则中除“量词移置律”以外都是本系统已有的规则。现在我们只要从语义上说明量词移置律的合理性，这个推演便表明：从一定意义上讲，存在例示规则是由条件证明规则派生出来的；或者说，存在例示规则的假设引入-撤除功能是从条件证明规则继承而来的。这里所用到的量词移置律是： $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  和  $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  是逻辑等值的，因而可以相互推出。语义证明如下：

首先分两种情况来考虑，即  $P$  真和  $P$  假。当  $P$  为真时， $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  由于后件真而为真，无论前件  $\exists x \Psi(x)$  的真假如何。 $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  的每个替换例子如  $\Psi(a) \rightarrow P$  也因其后件真而为真，相应地， $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  是真的。当  $P$  为假时， $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  可能真也可能假：如果  $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  有一个替换例子如  $\Psi(a) \rightarrow P$  是假的，全称命题  $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  就是假的；此时， $\Psi(a)$  是真的（因为此时  $\Psi(a) \rightarrow P$  成为前件真而后件假）。在这种情况下， $\exists x \Psi(x)$  是真的，相应地， $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  是假的（因为前件真而后件假）。当  $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  的所有替换例子都是真的，全称命题  $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  就是真的；此时，没有一个例示常项  $a$  使得  $\Psi(a)$  是真的（否则就会出现前件真而后件假的替换例子）。在这种情况下， $\exists x \Psi(x)$  是假的；相应地， $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  是真的（因为前件假且后件假）。总之，当  $P$  为真时， $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  和  $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  均为真；当  $P$  为假时， $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  和  $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  同真或同假，所以， $\forall x(\Psi(x) \rightarrow P)$  和  $\exists x \Psi(x) \rightarrow P$  是逻辑等值的。

如果我们把这个量词移置律加入推演规则，那么存在例示规则便成为一条可由条件证明规则导出的规则，因而在逻辑上不是必不可少的。不过，就我们所采用的自然演绎

系统而言，并没有把这个量词移置律作为推演规则，因此，在本系统内存在例示规则是独立于条件证明规则的。以上分析只是为了加深我们对存在例示规则的理解。

至此，我们已经逐一介绍了关于量词的四个推论规则。我们再次强调，这四个推论规则属于整推规则，只能应用于整个命题，而不能应用于命题的某一部分。此外，证明的每一行不得出现开语句、重复约束或空约束。这也就是说，证明的每一行必须是一个命题。

### 6.2.4 构造一些推论的证明

构造谓词推论的有效性证明如同构造命题推论有效性证明一样需要使用“逆推”或“目标分析”的方法。推论的结论就是最终的“目标命题”。我们首先寻找一个或几个“过渡命题”，如果我们能够推出这些过渡命题，就能由它们推出目标命题。这些过渡命题又成为新的目标命题，于是我们又为这新的目标命题寻找新的过渡命题。以此类推，直到找到这样一些目标命题，我们能够容易地从前提推出它们。

#### 【推论 11】

$$\begin{aligned} & \forall x (R(x,a) \rightarrow S(a,x)) \\ & \exists x \forall y R(x,y) \\ \therefore & \exists z S(a,z) \end{aligned}$$

#### 【证明】

(1)	$\forall x (R(x,a) \rightarrow S(a,x))$	前提
(2)	$\exists x \forall y R(x,y)$	前提
(3)	$\forall y R(b,y)$	(2), 新名假设
(4)	$R(b,a)$	(3), 全例
(5)	$R(b,a) \rightarrow S(a,b)$	(1), 全例
(6)	$S(a,b)$	(4) (5), 肯前
(7)	$\exists z S(a,z)$	(6), 存概
(8)	$\exists z S(a,z)$	(3) – (7), 存例

上面证明中的新名假设即(3)中的新名 b 没有在(3)以前的任何一行中出现，也没有在假设域的最后一行即(7)中出现。因此，通过存在例示规则得出(8)是正确的。

#### 【推论 12】

所有甲班同学都不熟悉任何合唱队队员；  
有些甲班同学熟悉所有的田径队队员；  
所以，所有田径队队员都不是合唱队队员。

令：J: …是甲班同学，H: …是合唱队队员，T: …是田径队队员，S: …熟悉…。

推论 12 可被符号化为：

$$\begin{aligned} & \forall x (J(x) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg S(x, y))) \\ & \exists x (J(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow S(x, y))) \\ \therefore & \forall x (T(x) \rightarrow \neg H(x)) \end{aligned}$$

【证明】

(1)	$\forall x (J(x) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg S(x, y)))$	前提
(2)	$\exists x (J(x) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow S(x, y)))$	前提
(3)	$J(b) \wedge \forall y (T(y) \rightarrow S(b, y))$	(2), 新名假设
(4)	$J(b)$	(3), 化简
(5)	$J(b) \rightarrow \forall y (H(y) \rightarrow \neg S(b, y))$	(1), 全例
(6)	$\forall y (H(y) \rightarrow \neg S(b, y))$	(4) (5), 肯前
(7)	$H(a) \rightarrow \neg S(b, a)$	(6), 全例
(8)	$\neg \neg S(b, a) \rightarrow \neg H(a)$	(7), 假易
(9)	$S(b, a) \rightarrow \neg H(a)$	(8), 双否
(10)	$\forall y (T(y) \rightarrow S(b, y))$	(3), 化简
(11)	$T(a) \rightarrow S(b, a)$	(10), 全例
(12)	$T(a) \rightarrow \neg H(a)$	(9) (11), 三段论
(13)	$T(a) \rightarrow \neg H(a)$	(3) - (12), 存例
(14)	$\forall x (T(x) \rightarrow \neg H(x))$	(13), 全概

在上面这个证明中，假设域的最后一行(12)虽然含有个体常项 a，但 a 不是由新名假设(3)所引进的新名，新名是 b 而不是 a。因此，通过存在例示规则得出行(13)是正确的。在前面几个证明中，我们消去新名都是通过存在概括规则实现的，在上面这个证明中，我们消去新名是通过假言三段论即行(12)实现的。这表明，消去新名的方法并非只有一种。

【推论 13】

$$\begin{aligned} & \exists x \forall y K(x, x, y) \\ & \exists y \exists z (H(z, y) \wedge J(y)) \\ & \forall z \forall x (K(z, z, x) \wedge J(x) \rightarrow D(z)) \\ \therefore & \exists z D(z) \end{aligned}$$

【证明】

(1) $\exists x \forall y K(x, x, y)$	前提
(2) $\exists y \exists z (H(z, y) \wedge J(y))$	前提
(3) $\forall z \forall x (K(z, z, x) \wedge J(x) \rightarrow D(z))$	前提
(4) $\exists z (H(z, a) \wedge J(a))$	(2), 新名假设
(5) $H(b, a) \wedge J(a)$	(4), 新名假设
(6) $\forall y K(c, c, y)$	(1), 新名假设
(7) $\forall x (K(c, c, x) \wedge J(x) \rightarrow D(c))$	(3), 全例
(8) $K(c, c, a) \wedge J(a) \rightarrow D(c)$	(7), 全例
(9) $K(c, c, a)$	(6), 全例
(10) $J(a)$	(5), 化简
(11) $K(c, c, a) \wedge J(a)$	(9) (10), 合取
(12) $D(c)$	(8) (11), 肯前
(13) $\exists z D(z)$	(12), 存概
(14) $\exists z D(z)$	(6) – (13), 存例
(15) $\exists z D(z)$	(5) – (14), 存例
(16) $\exists z D(z)$	(4) – (15), 存例

最后我们证明普遍有效式。如同证明重言式一样，证明一个命题是一个普遍有效式，就是给出该命题的一个无前提证明。下面，我们就证明  $\exists x F(x) \vee \exists x G(x) \rightarrow \exists x (F(x) \vee G(x))$  是一个普遍有效式。

首先，我们注意到，该命题是一个蕴涵式，因而我们考虑应用条件证明规则，即假设  $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$  来推导  $\exists x (F(x) \vee G(x))$ 。其次，我们注意到，该假设是一个析取式，我们不能直接销去其中的量词，因为销去量词的规则不能应用于命题的某一部分。于是，我们考虑用二难推论规则，即分别由两个析取支  $\exists x F(x)$  和  $\exists x G(x)$  推出  $\exists x (F(x) \vee G(x))$ 。得出  $\exists x (F(x) \vee G(x))$  的过渡命题是  $F(a) \vee G(a)$ ，当然，也可以是  $F(b) \vee G(b)$ 。于是，我们根据  $\exists x F(x)$  作出新名假设  $F(a)$ ，再通过附加规则得出  $F(a) \vee G(a)$ ；对于  $\exists x G(x)$  也是如此。具体证明如下：

(1) $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$	条件假设
(2) $\exists x F(x)$	条件假设
(3) $F(a)$	(2), 新名假设
(4) $F(a) \vee G(a)$	(3), 附加
(5) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(4), 存概
(6) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(3) - (5), 存例
(7) $\exists x F(x) \rightarrow \exists x (F(x) \vee G(x))$	(2) - (6), 条证
(8) $\exists x G(x)$	条件假设
(9) $G(b)$	(8), 新名假设
(10) $F(b) \vee G(b)$	(9), 附加
(11) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(10), 存概
(12) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(9) - (11), 存例
(13) $\exists x G(x) \rightarrow \exists x (F(x) \vee G(x))$	(8) - (12), 条证
(14) $\exists x (F(x) \vee G(x)) \vee \exists x (F(x) \vee G(x))$	(1) (7) (13), 二难
(15) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(14), 重言
(16) $\exists x F(x) \vee \exists x G(x) \rightarrow \exists x (F(x) \vee G(x))$	(1) - (15), 条证

对于上面这个普遍有效式的另一种证明是通过联合使用条件证明规则和间接证明规则来实现的，即：

(1) $\exists x F(x) \vee \exists x G(x)$	条件假设
(2) $\neg \exists x (F(x) \vee G(x))$	间接假设
(3) $\forall x \neg (F(x) \vee G(x))$	(2), 量转
(4) $\neg (F(a) \vee G(a))$	(3), 全例
(5) $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$	(4), 德摩根
(6) $\neg F(a)$	(5), 化简
(7) $\forall x \neg F(x)$	(6), 全概
(8) $\neg \exists x F(x)$	(7), 量转
(9) $\exists x G(x)$	(1) (8), 否析
(10) $\neg G(a)$	(5), 化简
(11) $\forall x \neg G(x)$	(10), 全概
(12) $\neg \exists x G(x)$	(11), 量转
(13) $\exists x G(x) \wedge \neg \exists x G(x)$	(9) (12), 合取
(14) $\exists x (F(x) \vee G(x))$	(2) - (13), 间证
(15) $\exists x F(x) \vee \exists x G(x) \rightarrow \exists x (F(x) \vee G(x))$	(1) - (14), 条证

## 习题 6.2

一、构造下列推论的有效性证明。

1.  $\forall x ((x) \rightarrow G(x))$   
 $\neg G(a)$   
 $\therefore \neg F(a)$
2.  $\forall x (B(x) \rightarrow D(x) \wedge E(x))$   
 $\forall x B(x)$   
 $\therefore \forall x E(x)$
3.  $\neg \exists z (I(z) \wedge K(z))$   
 $\forall z (\neg K(z) \rightarrow L(z, b))$   
 $\therefore \forall z (I(z) \rightarrow L(z, b))$
4.  $\forall x \forall y R(x, y)$   
 $\therefore \forall x R(x, x)$
5.  $\forall x (P(x) \vee S(x) \rightarrow Q(x))$   
 $\forall x (J(x) \rightarrow \neg Q(x))$   
 $\therefore \forall x (P(x) \rightarrow \neg J(x))$
6.  $\forall y (F(y) \rightarrow G(y))$   
 $\forall y (H(y) \rightarrow G(y))$   
 $\therefore \forall y (F(y) \vee H(y) \rightarrow G(y))$
7.  $\forall x (F(x) \rightarrow K(x) \vee \neg I(x))$   
 $\forall x (G(x) \rightarrow I(x) \vee J(x))$   
 $\neg \exists x J(x)$   
 $\therefore \forall x (F(x) \wedge G(x) \rightarrow K(x))$
8.  $\forall x (M(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow H(x, y)))$   
 $\forall y (N(y) \rightarrow I(y))$   
 $\therefore \forall x (M(x) \rightarrow \forall y (N(y) \rightarrow H(x, y) \wedge I(y)))$
9.  $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$   
 $\forall x (F(x) \rightarrow \neg H(x, b))$   
 $\therefore \forall x (F(x) \rightarrow G(b))$
10.  $\forall x (A(x) \wedge B(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow I(x, y)))$   
 $\forall x (B(x) \rightarrow \forall y (S(y) \rightarrow K(x, y)))$   
 $\forall x \forall y (I(x, y) \rightarrow L(x, y))$

$\therefore \forall x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \forall y(S(y) \rightarrow K(x,y) \wedge L(x,y)))$

### 二、先将下列推论符号化，然后构造它们的有效性证明。

1. 所有哺乳动物都是用肺呼吸的；没有鱼是用肺呼吸的；所以，所有鱼都不是哺乳动物。
2. 只有用鳃呼吸的动物是鱼；鱼是脊椎动物；所以，鱼是用鳃呼吸的脊椎动物。
3. 所有大熊猫都是珍贵的哺乳动物；欢欢是大熊猫；所以，欢欢是珍贵动物。
4. 每一个人都喜欢所有的大熊猫；欢欢是大熊猫；所以，每个人喜欢欢欢。
5. 熊猫是稀有动物；凡稀有的都是珍贵的；凡动物都是生物；所以，熊猫是珍贵的生物。
6. 所有用鳃呼吸的动物都是水生动物或者是脊椎动物；虾不是脊椎动物；所以，虾不是水生动物仅当它们不是用鳃呼吸的动物。
7. 没有蟒是有毒的；没有毒就不是眼镜蛇；所以，没有蟒是眼镜蛇。
8. 对于任何两个人，如果第一个人是第二个人的哥哥，那么第二个人就不是第一个人的哥哥；所以，没有人是他自己的哥哥。
9. 对于任何三个数  $x$ ,  $y$  和  $z$ , 如果  $x$  大于  $y$  并且  $y$  大于  $z$ , 那么  $x$  大于  $z$ ; 对于任何数  $x$ , 并非  $x$  大于  $x$ ; 因此, 对于任何两个数  $x$  和  $y$ , 如果  $x$  大于  $y$ , 那么, 并非  $y$  大于  $x$ 。
10. 正数大于负数；没有一个数大于它自己；所以，任何正数都不是负数。
11. 任何士兵崇拜每一个英明的军官；将军是军官；所以，任何士兵崇拜每一个英明的将军。
12. 任何士兵对于每一个将军或者崇拜或者不信服；拿破伦是任何士兵都信服的将军；所以，任何士兵都崇拜拿破伦。
13. 被所有人蔑视的人蔑视一切；张三这个人不蔑视李四；所以，有人不蔑视张三。

### 三、构造下列推论的有效性证明。

1.  $\exists xH(x,x)$
- $\therefore \exists zH(z,z)$
2.  $\exists yB(y,y,y)$
- $\therefore \exists x \exists y \exists zB(x,y,z)$
3.  $\forall y(F(y) \wedge G(y,y) \wedge H(y))$
- $\therefore \exists xG(x,b) \wedge \forall x H(x)$
4.  $\forall x \forall yJ(x,y)$
- $\therefore J(a,a) \wedge J(a,b) \wedge J(b,a) \wedge J(b,b)$
5.  $\forall x(\neg D(x) \rightarrow L(x))$

- $\exists x \neg L(x)$
- $\therefore \exists z (D(z) \vee \neg J(z, d))$
6.  $\forall x (F(x) \vee G(x))$   
 $\neg F(a)$   
 $\therefore \exists x G(x)$
7.  $\forall x (N(x) \wedge M(x) \rightarrow L(x))$   
 $\neg \exists x L(x)$   
 $N(a)$   
 $\therefore \exists x \neg M(x)$
8.  $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$   
 $\forall x (P(x) \rightarrow (S(x) \rightarrow Q(x)))$   
 $\therefore \exists x \neg S(x)$
9.  $\forall x (F(x) \rightarrow \forall y (G(y) \rightarrow R(x, y)))$   
 $\exists x (F(x) \wedge G(x))$   
 $\therefore \exists x R(x, x)$
10.  $\forall x (A(x) \vee \exists y (G(y) \rightarrow H(x, y)))$   
 $\neg \exists y \neg G(y)$   
 $\therefore \forall x (\neg A(x) \rightarrow \exists y H(x, y))$
11.  $\exists x (F(x) \wedge \exists y (G(y) \rightarrow S(x, y)))$   
 $\neg \exists x \exists y S(x, y)$   
 $\therefore \exists x \neg G(x)$
12.  $\forall x (B(x) \vee \forall y (G(y) \rightarrow R(x, y)))$   
 $\exists x (\neg B(x) \wedge G(x))$   
 $\therefore \exists x R(x, x)$
13.  $\exists x (D(x) \wedge \forall y (I(y) \rightarrow H(x, y)))$   
 $\exists x (I(x) \wedge \forall y (D(y) \rightarrow K(y, x)))$   
 $\therefore \exists x \exists y (H(x, y) \wedge K(x, y))$
14.  $\forall x (H(x) \rightarrow \forall y R(x, y, b))$   
 $\forall x \forall z (R(a, z, x) \rightarrow S(x, z, z))$   
 $\therefore H(a) \rightarrow \exists x S(s, c, c)$
15.  $\forall y (M(y) \rightarrow A(y))$   
 $\exists x \exists y (B(x) \wedge M(x) \wedge R(y) \wedge S(y, x))$   
 $\exists x A(x) \rightarrow \forall y \forall z (S(y, z) \rightarrow A(y))$   
 $\therefore \exists x (R(x) \wedge A(x))$

16.  $\forall x \forall y (H(k, y) \wedge H(x, k) \rightarrow H(x, y))$   
 $\forall z (B(z) \rightarrow H(k, z))$   
 $\exists x (B(x) \wedge H(x, k))$   
 $\therefore \exists z (B(z) \wedge \forall y (B(y) \rightarrow H(z, y)))$

#### 四、把下列推论符号化，并证明其有效性。

1. 李白是诗人，李白是浪漫的；所以，有些人是诗人并且是浪漫的。
2. 所有诗人是浪漫的；有些诗人是现实的；所以，有些诗人既浪漫又现实。
3. 所有枪法好的人都不会死于决斗；普希金是一个死于决斗的诗人；所以，有些诗人枪法不好。
4. 如果这支部队能取得胜利，那么它的所有士兵都是枪法好的；张三是该部队的士兵但他枪法不好；所以，这支部队不能取得胜利。（提示：有的命题不必分解，因而可用一个命题常项表示。）
5. 普希金是既有激情又有才华的；普希金是诗人；凡有才华的诗人都有大成就；所以，有些有大成就的诗人是有激情的。
6. 凡哲学家都对认识论感兴趣；凡逻辑学家都对数学基础感兴趣；有人既是哲学家又是逻辑学家；所以，有人既对认识论感兴趣，又对数学基础感兴趣。
7. 没有一个元帅是女人或儿童；有些女人是有军事才能的；所以，有些有军事才能的人不是元帅。
8. 拳击运动员是强壮的或是灵活的；小钢有一个朋友虽然是拳击运动员但不灵活；所以，小钢有一个强壮的朋友。
9. 小明不住任何不高级的旅馆；但所有高级的旅馆不接待小明；小明不住任何不接待他的旅馆；所以，小明不住任何旅馆。
10. 任何军官都喜欢有些机灵的士兵；所有机灵的士兵都是懂战术的士兵；所以，任何军官都喜欢有些懂战术的士兵。
11. 所有军官都不喜欢任何胆小的士兵；有些军官喜欢每一个勇敢的士兵；有些勇敢的士兵是机灵的士兵；所以，有些机灵的士兵不是胆小的士兵。
12. 有的军官是脾气暴躁的；有的军官不喜欢任何脾气暴躁的人；所以，有些军官并非被所有军官喜欢。
13. 任何军官都喜欢每一个他所表扬的士兵；任何军官都不喜欢每一个怕死的士兵；所以，每一个被有些军官表扬的士兵都是不怕死的。
14. 任何军人都不佩服任何怕死的人；有些人佩服有些怕死的人；所有参战的英雄是军人；所以，有些人没有参战或者不是英雄。
15. 每一个人爱每一个爱人者；梁山伯爱祝英台；所以，每一个人爱每一个人。
16. 所有马是动物；所以，所有马头是动物头。

五、构造下列普遍有效式的证明。

1.  $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$
2.  $\exists x(A(x) \wedge D(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x D(x)$
3.  $\forall x B(x) \vee \forall x D(x) \rightarrow \forall x(B(x) \vee D(x))$
4.  $\forall x(B(x) \wedge D(x)) \leftrightarrow \forall x B(x) \wedge \forall x D(x)$
5.  $\exists x(B(x) \vee D(x)) \leftrightarrow \exists x B(x) \vee \exists x D(x)$
6.  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))$
7.  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\exists x F(x) \rightarrow \exists x G(x))$
8.  $\forall x(J \rightarrow K(x)) \leftrightarrow (J \rightarrow \forall x K(x))$
9.  $\forall x(K(x) \rightarrow J) \leftrightarrow (\exists x K(x) \rightarrow J)$
10.  $\exists x(K(x) \rightarrow J) \leftrightarrow (\forall x K(x) \rightarrow J)$
11.  $\exists x(J \rightarrow K(x)) \leftrightarrow (J \rightarrow \exists x K(x))$
12.  $(\exists x F(x) \rightarrow \exists x G(x)) \rightarrow \exists x(F(x) \rightarrow G(x))$

# 第七章 模态逻辑

模态逻辑是关于模态推论的逻辑。模态推论是那些依据模态词即“必然”或“可能”的推论。如：

## 【推论 1】

正义的事业必然胜利；  
所以，正义事业可能胜利。

## 【推论 2】

如果地球爆炸，必然导致人类灭亡；  
地球爆炸是可能的；  
所以，人类灭亡是可能的。

## 【推论 3】

凡人皆有死，这是必然的；  
所以，有些人不可能不死。

推论 1、2 和 3 均属模态推论，因为它们依据了模态词“必然”或“可能”的逻辑性质。我们看到，一个模态推论除了依据模态词以外，还可以依据真值函项联结词如推论 2，或依据量词如推论 3。因此，模态推论又可分为模态命题推论和模态谓词推论。相应地，模态逻辑又可分为模态命题逻辑和模态谓词逻辑。模态命题逻辑的研究对象是那些只依据模态词和真值函项联结词的推论，而模态谓词逻辑的研究对象，则除此之外还包括那些既依据模态词和真值函项联结词又依据量词的推论。在本书中，我们只讨论模态命题逻辑。

## 7.1 一些基本概念

### 7.1.1 命题的模态

在命题逻辑中，一个命题有两个真值，即真或假，而没有进一步区分一个命题为真的模态或为假的模态。模态命题逻辑的任务之一就是要弥补命题逻辑的这一不足。

一个命题的真值模态是指一个命题为真或为假的方式。真值模态有三种，即必然、偶然和可能。这三种模态是互相关联的。因而它们之间可以相互定义。下面我们结合一

些具体命题来说明如何用“可能”定义“偶然”和“必然”。

- (1) 美国挑战者号航天飞机在空中爆炸。
- (2) 美国挑战者号航天飞机或者在空中爆炸或者没有在空中爆炸。
- (3) 华罗庚是舞蹈家。
- (4) 华罗庚是舞蹈家并且华罗庚不是舞蹈家。

命题(1)和(2)都是真的。不过，(1)虽然真但却有可能假。(2)是一个逻辑真理，因而不可能假。(3)和(4)都是假的。不过，(3)虽然假但却有可能真。而(4)是一个逻辑谬误，因而不可能真。

#### 【定义】

一个命题是偶然真的，当且仅当，它是真的但却可能假。

一个命题是必然真的，当且仅当，它不可能假。

一个命题是偶然假的，当且仅当，它是假的但却可能真。

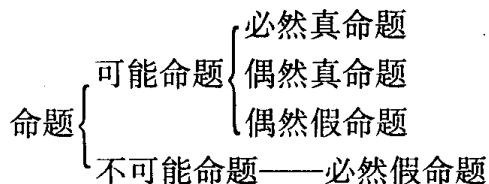
一个命题是必然假的，当且仅当，它不可能真。

根据以上定义，(1)是偶然真的，(2)是必然真的，(3)是偶然假的，(4)是必然假的。

在模态命题逻辑中，可对命题作如下划分：



值得注意的是，偶然命题并不等同于可能命题，这是因为，可能真的命题除了包括所有偶然真的命题以外，还包括偶然假的命题和必然真的命题；换句话说，除了必然假的命题是不可能命题外，其余的都是可能命题。这种情况可以图示如下：



亦即：

	真	假
必然	可能	不可能
偶然	可能	可能

### 7.1.2 必然命题

我们知道，逻辑真的命题不可能假，根据定义，逻辑真的命题是必然真的；逻辑假

的命题不可能真，根据定义，逻辑假的命题是必然假的。由此可见，逻辑命题都是必然命题。然而，并非所有的必然命题都是逻辑命题。请看下面的例子：

- (1)  $2 + 3 = 4 + 1$
- (2) 集合 A 与集合 B 的并等于集合 B 与集合 A 的并。
- (3) 单身汉是未婚成年男子。
- (4) 如果甲是乙的母亲，那么乙不是甲的母亲。
- (5) 有些命题是真的。

其中(1)和(2)是数学真命题。(3)和(4)通常叫做“分析命题”，即它们的真实性只需通过对其中所含词项的意义进行分析便可确定，而无需与事实对照。(5)的真实性在于它不可能被否定，因为它的否定命题是：所有命题是假的；既然该命题也是一个命题，因而该命题也是假的。故(5)是真的。(5)也属于分析命题，因为它的真实性也是来自语义分析。

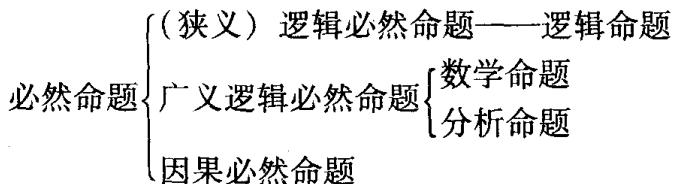
虽然以上五个命题都不是逻辑命题，但是它们通常都被看作必然命题。它们的共同特点是，对它们的否定会导致明显的矛盾，我们把数学命题和分析命题叫做“广义逻辑必然命题”，而只把逻辑命题叫做“逻辑必然命题”，必要时叫做“狭义逻辑必然命题”。

除了广义逻辑必然命题和（狭义）逻辑必然命题，还有另外一些必然命题。如

- (6) 摩擦生热。
- (7) 热胀冷缩。

(6)和(7)通常被叫做“因果必然命题”。因果必然命题不同于狭义的或广义的逻辑必然命题，因为对因果必然命题的否定并不会导致自相矛盾。因果必然性的必然性不是来自语义分析，而是在很大程度上来自经验，尽管这种经验不是普通的经验，而是被纳入一个被普遍接受的科学理论之中的。

以上所讨论的几种必然命题可以图示如下：



### 7.1.3 可能世界

从最宽泛的意义上讲，凡是能够被无矛盾地想象的世界都是可能世界。例如，我们可以无矛盾地想象一个世界，在那里人长着翅膀，河里流着石油，山是金子构成的……，这样设想的世界就是一个可能世界。现实世界是可能世界的一个特例。因为现实世界不仅能被无矛盾地想象，而且它是现实存在着的。

借助于“可能世界”这个概念，我们可以对“可能命题”、“必然命题”和“偶然命题”给出进一步的定义，即：

一个命题是可能真的，当且仅当，该命题至少相对于一个可能世界是真的。如“人长翅膀”、“河里流着石油”、“山是金子构成的”，就是可能真的命题，因为这些命题相对于刚才设想的那个可能世界是真的。

一个命题是可能假的，当且仅当，该命题至少相对于一个可能世界是假的。例如，刚才所说的那三个命题都是可能假的，因为它们相对于现实世界是假的，而现实世界也是一个可能世界。

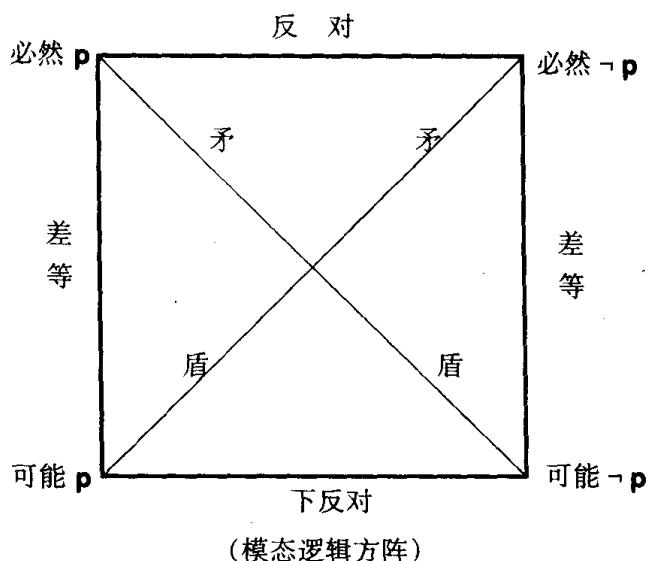
一个命题是必然真的，当且仅当，该命题相对于所有可能世界是真的。例如“人长翅膀或者人不长翅膀”就是必然真的，因为这个命题相对于所有可能世界都是真的。

一个命题是必然假的，当且仅当，该命题相对于所有可能世界是假的。例如“人长翅膀并且人不长翅膀”就是必然假的，因为这个命题相对于所有可能世界都是假的。

一个命题是偶然真的，当且仅当，该命题相对于现实世界是真的，但是至少相对于一个可能世界是假的。例如，“河里流水”就是一个偶然真命题。因为它相对于现实世界是真的，而相对于前边所设想的那个可能世界是假的。

一个命题是偶然假的，当且仅当，该命题相对于现实世界是假的，但是至少相对于一个可能世界是真的。例如“河里流着石油”就是偶然假的，因为它相对于现实世界是假的，但相对于前边所设想的那个可能世界是真的。

由以上定义我们看到，必然命题与全称命题有着某种联系，即必然命题对所有可能世界有所断定。可能命题与特称命题有着某种联系，即可能命题对有些可能世界有所断定。正因为这样，必然命题和可能命题之间的逻辑关系类似于全称命题和特称命题之间的逻辑关系，从而可以表示为一个类似的逻辑方阵，即：



根据模态逻辑方阵可以进行一些模态推论。如，已知：“正义的事业必然胜利”是真的，根据差等关系可推出：“正义的事业可能胜利”是真的；根据矛盾关系可推出：“正义的事业可能不胜利”是假的；根据反对关系可推出：“正义的事业必然不胜利”是假的。

### 7.1.4 严格蕴涵

在命题逻辑中，我们将“如果  $P$  那么  $Q$ ”符号为“ $P \rightarrow Q$ ”。“ $P \rightarrow Q$ ”叫做“实质蕴涵”。实质蕴涵的逻辑性质完全由“ $\rightarrow$ ”的特征真值表决定。一个明显的事是，“ $\rightarrow$ ”与日常语言的“如果…那么…”的含义并不完全相同，有时相去甚远。例如：

(1) 李白是诗人  $\rightarrow 2 + 2 = 4$

是一个真命题，既然它的前件和后件都是真的。但是

(2) 如果李白是诗人，那么  $2 + 2 = 4$

在日常语言中则是一个假命题甚至是无意义的。这是因为日常语言中的蕴涵命题的真值不仅取决于前件和后件的真值，而且取决于前件和后件之间的关系。具体地说，仅当前件和后件之间具有某种必然联系时，日常语言中的蕴涵命题才为真。命题(2)之所以常常被人们看作假的，就是因为它的前件和后件之间没有必然联系。

模态命题逻辑的一个重要目标是要较好地反映日常语言的蕴涵命题。为了做到这一点，模态命题逻辑提出一种不同于实质蕴涵的蕴涵关系，即“严格蕴涵”，其定义是：

$P$  严格蕴涵  $Q$ ，当且仅当， $P \rightarrow Q$  是必然的。

从这个定义我们可以看出，严格蕴涵命题比实质蕴涵命题断定得更多更强。因此，如果一个命题作为严格蕴涵命题是真的，那么，该命题作为实质蕴涵命题也是真的；换言之，如果一个命题作为实质蕴涵命题是假的，那么，该命题作为严格蕴涵命题也是假的。请注意，此论断的逆论断不成立。我们考察几个具体的例子。

(3) 如果 3 被 2 整除，那么 9 被 2 整除。

(4) 如果美国有核武器，那么美国立即发动第三次世界大战。

(3) 作为严格蕴涵命题是真的。因为它的前件和后件之间的蕴涵关系具有必然性；(3) 作为实质蕴涵命题也是真的，既然它的前件是假的。(4) 作为实质蕴涵命题是假的，因为(4)的前件真而后件假；同时，(4)的前件真而后件假这一事实足以表明(4)的前件和后件之间没有必然联系，因而(4)作为严格蕴涵命题也是假的。

(5) 如果太阳从东边升起，那么  $2 + 2 = 4$ 。

(6) 如果太阳从东边升起，那么早晨东方先亮。

(5) 和(6)的前件和后件都是真的，因而它们作为实质蕴涵命题都是真的；但是，作为严格蕴涵命题，只有(6)是真的，而(5)是假的，既然(5)的前件和后件之间没有必然联系。

总之，如果一个蕴涵命题的前件真而后件假，那么该命题无论作为实质蕴涵命题还作为严格蕴涵命题都是假的。如果一个蕴涵命题并非前件真而后件假，那么该命题作为实质蕴涵命题是真的；但作为严格蕴涵命题则可能真也可能假，这取决于前件和后件之间有无必然联系：若有则真，若无则假。应该说，比起实质蕴涵命题，严格蕴涵命题更接近于日常语言的蕴涵命题。

### 7.1.5 逻辑独立

我们知道，任何两个命题  $P$  和  $Q$  之间都具有实质蕴涵关系，不是  $P$  实质蕴涵  $Q$ ，就是  $Q$  实质蕴涵  $P$ 。因为  $P$  不实质蕴涵  $Q$  只有一种情况，即  $P$  真而  $Q$  假。而在这种情况下， $Q$  实质蕴涵  $P$ 。与实质蕴涵关系不同，严格蕴涵关系并非存在于任何一对命题之间。如“太阳从东边升起”和“ $2+2=4$ ”之间就不存在严格蕴涵关系。为了刻画像这对命题之间的这种关系，我们引入一个新概念，即“逻辑独立”，其定义是：

**一对命题  $P$  和  $Q$  是逻辑独立的，当且仅当， $P$  不严格蕴涵  $Q$ ，并且， $Q$  不严格蕴涵  $P$ 。**

根据此定义，“太阳从东边升起”和“ $2+2=4$ ”是逻辑独立的。再次强调，逻辑独立是相对于严格蕴涵而言的，而不是相对于实质蕴涵而言的。对于实质蕴涵来说，任何两个命题都不独立。

### 7.1.6 严格等值

在命题逻辑中除了有实质蕴涵外还有实质等值，即“ $P \leftrightarrow Q$ ”。相应地，在模态命题逻辑中除了有严格蕴涵外还有严格等值，其定义是：

**$P$  严格等值  $Q$ ，当且仅当， $P \leftrightarrow Q$  是必然的。**

正如严格蕴涵与实质蕴涵之间的关系，严格等值命题比实质等值命题断定得更多更强。因此，如果一个命题作为严格等值命题是真的，那么，它作为实质等值命题也一定是真的；换言之，如果一个命题作为实质等值命题是假的，那么，它作为严格等值命题也一定是假的。但是，此论断的逆论断不成立。让我们考察以下几个命题：

(7) 爱因斯坦是中国公民，当且仅当，爱因斯坦有中国国籍。

(8) 中国发射人造卫星，当且仅当，中国是一个超级大国。

(7) 的左右两支不仅真值相等，而且它们之间具有必然联系。因此，(7)作为严格等值命题是真的，当然作为实质等值命题也是真的。(8)的左支是真的而右支是假的，故(8)作为实质等值命题是假的。这一事实足以表明(8)的左右两支之间没有必然联系。因此，(8)作为严格等值命题也是假的。

(9) 雪是白的，当且仅当，珠江经过广州。

(10) 中国人民取得抗日战争的胜利，当且仅当，日本帝国主义在这场战争中失

败。

虽然(9)和(10)的支命题都是真的，但由于(9)的两支之间没有必然联系，所以(9)作为严格等值命题是假的，尽管它作为实质等值命题是真的。由于(10)的左右两支之间具有必然联系，所以(10)无论作为严格等值命题还是作为实质等值命题都是真的。

总之，如果一个等值命题的左右两支的真值不同，那么该命题无论作为实质等值命题还是作为严格等值命题都是假的。如果一个等值命题的左右两支的真值相同，那么，该命题作为实质等值命题是真的；但作为严格等值命题则可能真也可能假，这取决于其左右两支之间有无必然联系：若有则真，若无则假。应该说，严格等值命题比起实质等值命题更好地反映了日常语言中的等值命题的含义。

我们在命题逻辑和谓词逻辑中曾谈到“逻辑蕴涵”和“逻辑等值”（包括“重言蕴涵”和“重言等值”）。现在，我们简单地看一下逻辑蕴涵和严格蕴涵、逻辑等值与严格等值之间的关系。

我们知道，逻辑蕴涵命题和逻辑等值命题分别是逻辑真的蕴涵命题和逻辑真的等值命题，而一切逻辑真的命题都是逻辑必然命题。因此，逻辑蕴涵命题和逻辑等值命题分别属于严格蕴涵命题和严格等值命题。或者说，逻辑蕴涵和逻辑等值分别是严格蕴涵和严格等值的特例。如：

- (11) 如果明天下雨，那么明天刮风或者明天下雨。
- (12) 物美价廉，当且仅当，并非物不美或价不廉。

(11)是一个逻辑蕴涵命题（即附加律的一个例子），因而也是一个严格蕴涵命题；(12)是一个逻辑等值命题（即德摩根律的一个例子），因而也是一个严格等值命题。

## 习题 7.1

一、指出下列各命题是必然真或必然假的，还是偶然真或偶然假的；是可能的还是不可能的；如果是必然命题，请指出是何种必然命题。

1. 戈尔巴乔夫当选苏联第一届总统。
2. 如果戈尔巴乔夫当选苏联第一届总统，那么，并非戈尔巴乔夫没有当选苏联第一届总统。
3. 戈尔巴乔夫没有当选苏联第一届总统。
4. 戈尔巴乔夫既当选又未当选苏联第一届总统。
5. 红旗是红色的。
6. 中国国旗是红色的。
7. 两个奇数之和是偶数。
8. 两个偶数之和是奇数。

9. 所有哲学家都是懂哲学的。
10. 康德是单身汉。
11. 这瓶溶剂可以溶化一切。
12. 在导体的电阻值不变的情况下，如果导体两端的电压增加，那么导体内的电流增加。
13. S 村的理发师给并且只给那些不自己刮胡子的 S 村人刮胡子。

## 二、根据模态逻辑方阵，由以下各命题可以推出哪些命题？

1. “事物发展变化是必然的” 是真的。
2. “外星球上有生物是可能的” 是假的。
3. “人必然不犯错误” 是假的。
4. “太阳系可能没有第十颗行星” 是真的。

## 三、对于下列每一命题，先作为实质蕴涵命题或实质等值命题，指出其真假；再作为严格蕴涵命题或严格等值命题，指出其真假。

1. 如果地球上没有空气，那么地球上没有生物。
2. 如果天安门在北京，那么黄鹤楼在武汉。
3. 如果地球至今没有爆炸，那么孔子至今仍然活着。
4. 如果中国人民在抗日战争中没有取得胜利，那么中国人民成为亡国奴。
5. 中国人是黄种人，当且仅当，月球围绕地球旋转。
6. 月球是地球的卫星，当且仅当，月球围绕地球旋转。
7. 美国人是白种人，当且仅当，美国人的头发是白色的。
8. 5 是偶数，当且仅当，5 被 2 整除。
9. 鲁迅是坚强的，当且仅当，鲁迅不是不坚强的。
10. 如果鲁迅是坚强的，那么，鲁迅是坚强的或者是软弱的。

## 7.2 模态命题的表达

### 7.2.1 基本符号与定义

为了对模态命题进行符号化，我们引入两个符号“ $\Box$ ”和“ $\Diamond$ ”，分别代表模态词“必然”和“可能”。将 $\Box$ 或 $\Diamond$ 加在任何一个命题  $P$  之前，便构成一个新命题，即 $\Box P$  或 $\Diamond P$ 。 $\Box P$  读作：必然  $P$ ；或： $P$  是必然真的， $\Diamond P$  读作：可能  $P$ ；或： $P$  是可能真的。

$\Box$  和  $\Diamond$  可以根据如下定义相互转换：

$\Box P$  定义为  $\neg \Diamond \neg P$ 。

$\Diamond P$  定义为  $\neg \Box \neg P$ 。

例如，说“必然下雨”等于说“不可能不下雨”；说“可能下雨”等于说“并非必然不下雨”。

我们再引入两个符号“ $\Rightarrow$ ”和“ $\Leftrightarrow$ ”，分别代表模态词“严格蕴涵”和“严格等值”。我们在第一小节谈到，严格蕴涵命题是必然真的实质蕴涵命题，严格等值命题是必然真的实质等值命题。因此，我们又有如下定义：

$P \Rightarrow Q$  定义为  $\Box(P \rightarrow Q)$ ；

$P \Leftrightarrow Q$  定义为  $\Box(P \leftrightarrow Q)$ 。

以上四个定义也可表达为：

$\Box P \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$

$\Diamond P \Leftrightarrow \neg \Box \neg P$

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \Box(P \rightarrow Q)$

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \Box(P \leftrightarrow Q)$

包含否定命题的模态命题的基本形式是：

$\Box \neg P$ 。读作：必然非  $P$ ；或： $P$  是必然假的。

$\Diamond \neg P$ 。读作：可能非  $P$ ；或： $P$  是可能假的。

我们知道，在模态命题逻辑中，命题可分为四类，即必然真的、必然假的、偶然真的和偶然假的。我们也可概括为两类，即必然命题和偶然命题。必然命题是必然真或必然假的命题。即：

$\Box P \vee \Box \neg P$

凡不是必然命题的都是偶然命题。因而偶然命题为  $\neg(\Box P \vee \Box \neg P)$ ，亦即  $\neg \Box P \wedge \neg \Box \neg P$ 。根据  $\Box$  和  $\Diamond$  的转换关系，偶然命题还可表达为：

$\Diamond \neg P \wedge \Diamond P$

这就是说，任何偶然命题，无论是偶然真还是偶然假，都是既可能真也可能假的命题。

至于偶然真和偶然假的命题，它们可被分别表示为：

$P \wedge \Diamond P \wedge \Diamond \neg P$

$\neg P \wedge \Diamond P \wedge \Diamond \neg P$

或者：

$P \wedge \Diamond \neg P$

$\neg P \wedge \Diamond P$

我们以后很容易证明：

$P \wedge \Diamond P \wedge \Diamond \neg P \Leftrightarrow P \wedge \Diamond \neg P$

$\neg P \wedge \Diamond P \wedge \Diamond \neg P \Leftrightarrow \neg P \wedge \Diamond \neg P$

以上关于偶然真命题和偶然假命题的定义与前一节关于偶然命题的讨论是相符合的，即：偶然真命题是（现实）真而可能假的，偶然假命题是（现实）假而可能真的。

### 7.2.2 整体模态与部分模态

用自然语言表达的模态命题常常是有歧义的，产生歧义的原因主要在于模态词的辖域不确定。例如，对于

(1) 必然明天下雨并且明天刮风。

可以有两种理解。一是让“必然”的辖域包括整个公式；二是把(1)看作一个合取命题，而“必然”的辖域只包括其中的左合取支。相应地，对(1)可以给出两种符号化，即：

(1')  $\Box(A \wedge B)$

(1'')  $\Box A \wedge B$

在这里，“A”和“B”分别表示“明天下雨”和“明天刮风”。

我们把其辖域包括整个公式的模态词所表达的模态叫做“整体模态”，而把其辖域只包括部分公式的模态词所表达的模态叫做“部分模态”。把具有整体模态的命题叫做“整体模态命题”，而把仅仅具有部分模态的命题叫做“部分模态命题”。

在一个公式中，一个模态词的辖域是：

(i) 当一个模态词之后紧跟一个左括号时，该模态词的辖域从该模态词开始，延续到与该左括号相配的那个右括号。

(ii) 当一个模态词之后没有紧跟一个左括号时，该模态词的辖域从该模态词开始，延续到第一个二项真值函项联接词之前。

据此，(1')的模态词“ $\Box$ ”的辖域是整个公式，因而“ $\Box$ ”在(1')中表达了整体模态；相应地，(1')是一个整体模态命题。(1'')的模态词“ $\Box$ ”的辖域是部分公式即“ $\Box A$ ”，因而“ $\Box$ ”在(1'')中表达了部分模态；相应地，(1'')是一个部分模态命题。

### 7.2.3 模态命题的自然语言表达

在自然语言中，模态词的辖域常常是靠模态词和标点符号在命题中的位置来暗示的，如果模态命题中含有复合命题，那么，表达整体模态的模态词一般出现在命题的最前或最后，必要时用逗号将模态词和其他部分隔开。如：

(2) 必然地，明天下雨并且明天刮风。

或

(3) 明天下雨并且明天刮风，这是必然的。

如果一个模态命题不含复合命题，而只含一个简单命题，那么，其中的模态词总是表达整体模态，而无论模态词在命题中的位置如何。如：

(4) 可能明天下雨。

(5) 明天可能下雨。

(6) 明天下雨是可能的。

(4)、(5)、(6)都是整体模态命题，尽管模态词“可能”出现在其中的位置是不同的（需要指出，这种情况是模态命题逻辑所特有的，而模态谓词逻辑并非如此）。

既然简单模态命题一般都是整体模态命题，那么部分模态一般只涉及含有复合命题的模态命题。在汉语中，为了表达部分模态，一般地，模态词出现在属于其辖域的那部分命题之前或之中（二者之间没有逗号），并且其辖域延续到其后第一个逗号或句号之前。如：

(7) 可能明天下雨，并且明天刮风。

(8) 明天下雨并且可能明天刮风。

不难看出，(7)和(8)都是部分模态命题，相应的符号式是：

(7')  $\Diamond A \wedge B$

(8')  $A \wedge \Diamond B$

不过，以上方法对于蕴涵命题中的模态词常常是不适用的，因为蕴涵命题中的模态词的辖域常常不能由该模态词的位置来确定。如

(9) 如果这个数大于 10，必然地，这个数大于 5。

我们用“C”和“D”分别代表“这个数大于 10”和“这个数大于 5”，按照刚才讲的一般方法，(9)中模态词的辖域似乎只包括后件，因而(9)被符号化为：

(9')  $C \rightarrow \Box D$

但是，人们一般更倾向于把(9)中的“必然地”看作是对前件和后件之间的蕴涵关系的修饰，而不是仅仅对后件的修饰，因而把(9)看作一个严格蕴涵命题。这样，(9)便被看作整体模态命题而不是部分模态命题，相应地，(9)被符号化为：

(9'')  $\Box (C \rightarrow D)$  [即： $C \Rightarrow D$ ]

在自然语言中，严格蕴涵命题的模态常常是靠前件和后件之间在内容上的某种必然联系暗示的，因此，严格蕴涵命题的模态词甚至可以省略。不过，在本书中，为了避免将严格蕴涵命题和实质蕴涵命题混淆起来，我们还是要通过有或没有必然模态词，将二者明确地区分开来。

此外，在自然语言中，模态词在表达方式上是多种多样的。如，表示必然模态的词还有：“肯定”、“无疑”、“理所当然”等等；表示可能模态的词还有：“或许”、“大概”、“不一定”等等。由于自然语言的高度灵活性，我们在对命题进行形式化的过程中，既要依据一般原则，又要作具体地分析；既要考虑命题的形式结构，必要时还要考虑命题的内容，甚至考虑上下文关系。

## 习题 7.2

**一、将下列陈述符号化。**

1. A 是必然真的。
2. A 是必然假的。
3. A 是一个必然命题。
4. A 是偶然真的。
5. A 是偶然假的。
6. A 是一个偶然命题。
7. A 不可能是假的。
8. A 可能不是假的。
9. A 不必然是假的。
10. A 必然不是假的。
11. A 实质蕴涵 B 但 A 不严格蕴涵 B。
12. 如果 A 严格等值 B, 那么 A 实质等值 B。
13. A 和 B 是逻辑独立的。

**二、用给定的命题常项将下列模态命题符号化。**

A: 小赵去旅游;      B: 小郑去旅游;  
C: 小孙去旅游。

1. 小赵肯定去旅游而小郑可能不去。
2. 如果小郑去旅游, 毫无疑问, 小孙也去旅游。
3. 虽然小赵或小孙去旅游, 但小郑肯定不去。
4. 小赵、小孙和小郑都去旅游, 这是毫无疑问的。
5. 小赵、小孙和小郑可能都去旅游。
6. 小赵、小孙和小郑都可能去旅游。
7. 如果小郑肯定不去旅游, 那么小赵也许不去旅游。
8. 如果小郑不去旅游, 必然地, 小赵也不去旅游。
9. 小郑必然去旅游或者小赵不可能不去旅游。
10. 并非必然小郑或小赵不去旅游。

## 7.3 模态命题逻辑发展概况

模态逻辑的最早研究者是古希腊的亚里士多德。亚里士多德发现了模态逻辑的一些

基本原理。如：

$$\neg \diamond \neg P \Leftrightarrow \Box P$$

$$\Box P, \therefore \diamond P$$

$$P, \therefore \diamond P$$

等等。然而遗憾的是，由于亚里士多德没有区分“可能”和“偶然”这两个模态词，以致他的模态理论含有不少混乱之处。中世纪的哲学家并未澄清亚里士多德的模态理论的混乱。不过，他们较为深入地研究了模态命题之间的逻辑关系，从而建立了模态逻辑方阵。

现代模态逻辑的创始人是刘易斯（C. I. Lewis）。刘易斯创立模态逻辑的直接动力来自对罗素等人的实质蕴涵的不满。在他看来，实质蕴涵的不恰当性集中体现在所谓的“实质蕴涵怪论”上，即：

$$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

和

$$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

前者说的是，一个真命题被任何命题实质蕴涵；后者说的是，一个假命题实质蕴涵任何命题。刘易斯觉得这两命题是荒唐可笑的。

为了克服实质蕴涵的这些缺陷，刘易斯于1914年提出“严格蕴涵”的概念，并建立了关于严格蕴涵的逻辑体系即模态逻辑。在刘易斯的模态逻辑体系中，虽然在某种意义上避免了实质蕴涵怪论，即  $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$  和  $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$  都不是该体系的定理，但却出现了“严格蕴涵怪论”，即：

$$\Box P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$$

$$\Box \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

前者说的是，一个必然真的命题被任何命题严格蕴涵；后者说的是，一个必然假的命题严格蕴涵任何命题。这样，刘易斯对实质蕴涵的嘲笑真可谓“五十步笑百步”了。

按刘易斯的本意，他并不喜欢严格蕴涵怪论。但是，为要避免这种怪论，就必须放弃一些明显有效的推论规则，这是他更加不愿意做的。权衡之下，刘易斯不得不保留严格蕴涵怪论。

安德森（A. R. Anderson）和贝尔纳普（N. Belnap）则以刘易斯对待实质蕴涵的态度对待严格蕴涵。他们试图把严格蕴涵怪论以及实质蕴涵怪论一起消除。为此，他们建立了一种新的逻辑体系即相干逻辑（其代表作是：*Entailment*, 1957）。

然而，无论新的逻辑体系是否有价值，刘易斯的严格蕴涵正如罗素的实质蕴涵已经在一定范围内揭示了蕴涵关系的某种逻辑性质，它的相对正确性是毋庸置疑的。至于严格蕴涵怪论得以保留的某种合理性，我们可以从罗素为实质蕴涵怪论所作的辩护得到某

种启示。<sup>①</sup>

刘易斯一共提出五个模态命题逻辑系统，分别叫做  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$  和  $S_5$ 。其中每一个系统是它前一系统的扩展，或者说，每一个系统是它后一系统的子系统。然而，刘易斯本人最偏爱的是  $S_2$ ，而不是其中最强的系统  $S_4$  和  $S_5$ 。这是因为  $S_4$  和  $S_5$  中有一个他所不喜欢的定理，即：

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

这个定理意味着， $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$  可以从  $(P \Rightarrow Q)$  演绎地推出。而这在刘易斯看来是难以置信的。 $S_2$  没有这一定理，却有另外一个颇为相似的定理，即：

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R))$$

亦即：

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

这一定理在刘易斯看来是可信的。

刘易斯不太相信  $S_4$  和  $S_5$  的那个定理的根本原因在于他对“严格蕴涵”或“必然性”有着某种特殊的理解，而他的这种理解现在看来是有局限性的。目前，人们一般更感兴趣于  $S_4$  和  $S_5$ 。 $S_4$  和  $S_5$  以及另一个非刘易斯建立的系统 T 就是我们将要讨论的三个模态命题逻辑系统。

## 7.4 系统 T

这个系统不是由刘易斯提出，而是由冯·赖特（von Wright）于 1951 年和费斯（Robert Feys）于更早提出，费斯把该系统称为 T。我们将要表述的系统 T 在形式上与他们二人的表述有所不同，但在内容上是完全一样的。

### 7.4.1 置换规则

根据前边已经介绍的四个严格等值式即：

$$\Box P \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$$

$$\Diamond P \Leftrightarrow \neg \Box \neg P$$

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \Box(P \rightarrow Q)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \Box(P \leftrightarrow Q)$$

<sup>①</sup> 有人曾向罗素提出挑战，让他从“ $2 + 2 = 5$ ”这个假命题推出“罗素和某主教是同一个人”，以证明一个假命题蕴涵任何命题。罗素接受了挑战，给出如下论证：假定  $2 + 2 = 5$ ，已知  $2 + 2 = 4$ ，因此  $5 = 4$ 。两边同减去 1，则  $4 = 3$ ；两边再减 1，则  $3 = 2$ ；两边再减 1，则  $2 = 1$ 。我们知道，罗素和某主教是两个人，所以他们是同一个人。证毕。

可以得出相应的四个置换规则，即以上每一个严格等值式的左右两支可以相互置换。这四个等值式对应于四个定义，根据这四个等值式所作的置换可以说明为：定义。

### 7.4.2 必然模态词的整推规则

模态命题推论与命题推论的区别在于，前者涉及模态词之间的逻辑关系，而后者却没有涉及。我们知道，在谓词逻辑的自然演绎系统中，通过销去量词和引入量词的方法，在很大程度上把谓词推论还原为命题推论。类似地，在模态逻辑的自然演绎系统中，则通过销去模态词和引入模态词的方法，在很大程度上把模态命题推论还原为命题推论。在模态命题逻辑中也有四个相应的推演规则，即：必然销去规则、必然引入规则、可能销去规则和可能引入规则。正如销去量词和引入量词的规则一样，关于模态词的这四条推演规则也都属于整推规则，即：只能用于整个命题，而不能用于命题的某一部分。下面我们先介绍关于必然模态词的整推规则。

□销规则（必然销去规则）可以表述为：

从“ $\square P$ ”可以推得“ $P$ ”

其模式是：

$\square P$

$\therefore P \quad \square \text{销}$

□销规则的合理性是显而易见的。我们曾谈到，一个真命题或者是必然真的或者是偶然真的。因此，已知一个命题是必然真的，可以推知该命题是真的。

以下推论的有效性可以通过□销规则来证明。

【推论 1】

如果月球上没有空气或没有水，必然地，月球上没有生命；

月球上没有水；

所以，月球上没有生命。

令：K：月球上没有空气；S：月球上没有水；M：月球上没有生命。我们注意到，第一个前提含有模态词“必然地”，而“必然地”在蕴涵命题中一般表达整体模态。因此，推论 1 可被符号化为：

$K \vee S \Rightarrow M$

S

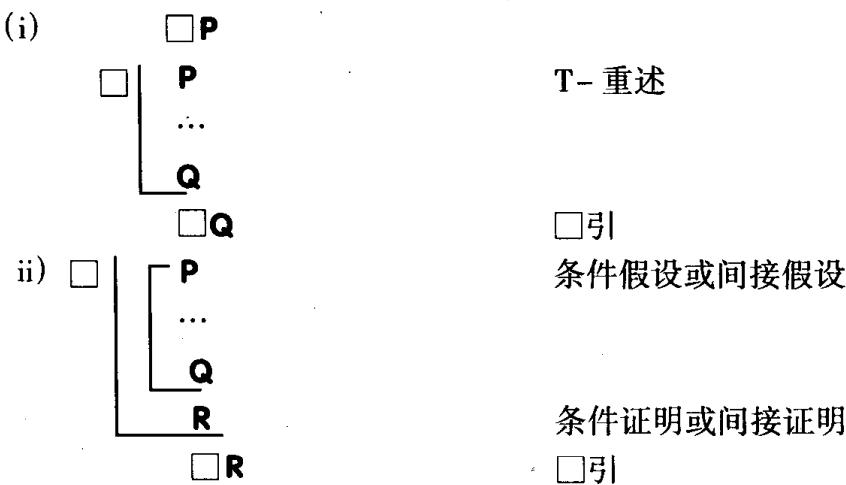
$\therefore M$

【证明】

- |  |         |
|--|---------|
| (1) $K \vee S \Rightarrow M$           | 前提      |
| (2) S                                  | 前提      |
| (3) $\square (K \vee S \Rightarrow M)$ | (1), 定义 |

- (4)  $K \vee S \rightarrow M$       (3),  $\Box$  销  
 (5)  $K \vee S$                 (2), 附加  
 (6)  $M$                     (4) (5), 肯前

$\Box$  引规则（必然引入规则）的基本思想是：如果一个或一些命题是必然的，那么，由这个或这些命题推出的结论也是必然的。这一思想也可用公式表述为： $(P \Rightarrow Q) \wedge \Box P \rightarrow \Box Q$ 。 $\Box$  引规则有两个基本模式，即：



(i) 和 (ii) 中都含有  $\Box$  |，其中竖线的长度标示 $\Box$ 引规则的应用范围即 $\Box$ 引域。模式 (i) 中还应用了 T - 重述规则。

#### T - 重述规则：

在证明过程中，如果 $\Box P$  出现，那么 P 可以进入一个 $\Box$ 引域 ( $\Box P$  的这一出现不在任何已被撤除的假设域内)。

在(i)中， $\Box$ 引域中的一些命题是通过 T - 重述规则引入的。这样引入的命题以及由它们推得的命题随时可以退出 $\Box$ 引域，退出后在它们的前边加上“ $\Box$ ”。

在(ii)中， $\Box$ 引域中的一些命题是通过假设引入的，一旦假设被撤除，假设域外的命题可以退出 $\Box$ 引域，退出后在它们的前边加上“ $\Box$ ”。(ii)的合理性在于， $\Box$ 引域内的假设 P 一旦撤除，假设域外的 R 便在该 $\Box$ 引域中得到无前提证明，因而具有必然性。

一个 $\Box$ 引域中的任何一行，必须满足下列条件之一：

- (i) 是应用重述规则得到的；
- (ii) 是一个假设；
- (iii) 是由该 $\Box$ 引域中的其他命题推出的。

这就是说，不满足以上条件的公式不得进入 $\Box$ 引域。

下面是应用 $\Box$ 引规则的一些例子。

## 【推论 2】

明天刮风或者下雨，这是必然的；  
 明天不可能下雨；  
 所以，明天必然刮风。

令：G：明天刮风；Y：明天下雨。推论 2 可被符号化为：

$$\square (G \vee Y)$$

$$\neg \diamond Y$$

$$\therefore \square G$$

## 【证明】

(1) $\square(G \vee Y)$	前提
(2) $\neg \diamond Y$	前提
(3) $\square \neg Y$	(2), 定义
$\square$ (4) $G \vee Y$	(1), T - 重述
(5) $\neg Y$	(3), T - 重述
(6) G	(4) (5), 否析
(7) $\square G$	(6), $\square$ 引

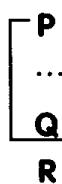
## 【定理 1】

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

## 【证明】

$\square$ (1) $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$	条件假设
(2) $P \Rightarrow Q$	(1), 化简
(3) $\square(P \Rightarrow Q)$	(2), 定义
(4) $P \Rightarrow Q$	(3), $\square$ 销
(5) $\neg Q$	(1), 化简
(6) $\neg P$	(4) (5), 否析
(7) $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$	(1) - (6), 条证
(8) $\square((P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P)$	(7), $\square$ 引
(9) $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$	(8), 定义

以上公式被称为模态命题逻辑的定理。我们知道，在命题逻辑中，所有定理在原则上都能被无前提证明，即在证明过程中先引入假设然后撤除所有假设。现在我们看到，命题逻辑的每一个无前提证明即：

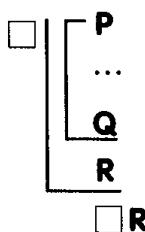


条件假设或间接假设

R

条件证明或间接证明

都对应于模态命题逻辑的一个无前提证明，即：



条件假设或间接假设

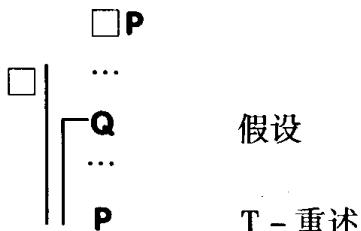
条件证明或间接证明

□R

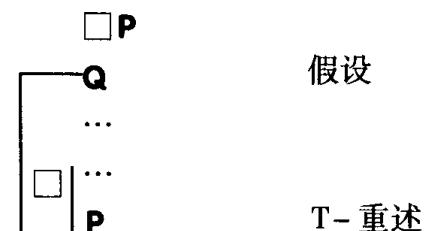
□引

因此，命题逻辑的任何定理 **R** 都对应于模态命题逻辑的一个定理  $\Box R$ 。这一结论的合理性是很明显的。既然命题逻辑的定理都是逻辑真理，那么，断定一个逻辑真理是必然真的这样一个模态命题无疑也是真的。

在应用  $\Box$  引规则的时候，(i) 和 (ii) 这两种模式也可结合起来使用。这样的推演可以归结为以下两种形式：



假设



假设

T - 重述

在以上两种形式中，当  $\Box P$  出现时，通过 T - 重述规则将 **P** 引入一个  $\Box$  引域，同时还引入一个（或几个）假设域。请注意，对 T - 重述规则的一次应用，“ $\Box P$ ”中的“**P**”被引入的  $\Box$  引域只能是一个，但是，“**P**”同时被引入的假设域却可以多于一个。其合理性是明显的，因为在命题逻辑的证明中，在前的命题是可以在以后的步骤中被使用的，而无论跨跃多少假设域，只要这个命题没有处在已被撤除的假设域中。

### 【推论 3】

如果甲队骄傲，必然导致甲队落后；

如果甲队落后，必然导致甲队失败；

所以，如果甲队骄傲，必然导致甲队失败或解散。

令：J：甲队骄傲；L：甲队落后；B：甲队失败；S：甲队解散。推论 3 可符号化为：

$$J \Rightarrow L$$

$$L \Rightarrow B$$

$\therefore J \Rightarrow B \vee S$

【证明】

(1) $J \Rightarrow L$	前提
(2) $L \Rightarrow B$	前提
(3) $\Box(J \Rightarrow L)$	(1), 定义
(4) $\Box(L \Rightarrow B)$	(2), 定义
$\Box$ (5) $J$	条件假设
(6) $J \Rightarrow L$	(3), T-重述
(7) $L$	(5) (6), 肯前
(8) $L \Rightarrow B$	(4), T-重述
(9) $B$	(7) (8), 肯前
(10) $B \vee S$	(9), 附加
(11) $J \Rightarrow B \vee S$	(5) - (10), 条证
(12) $\Box(J \Rightarrow B \vee S)$	(11), $\Box$ 引
(13) $J \Rightarrow B \vee S$	(12), 定义

【推论 4】

如果天气冷并且湖面结冰，必然地，小明去滑冰并且感到快活；

如果天气不冷，那么小明感到快活，这也是必然的；

所以，如果小明必然不快活，那么湖面上必然不结冰。

令：A：天气冷；I：湖面结冰；K：小明去滑冰；S：小明感到快活。推论 4 可符号化为：

$$A \wedge I \Rightarrow K \wedge S$$

$$\neg A \Rightarrow S$$

$$\therefore \Box \neg S \rightarrow \Box \neg I$$

【证明】

(1) $A \wedge I \rightarrow K \wedge S$	前提
(2) $\neg A \rightarrow S$	前提
(3) $\Box(A \wedge I \rightarrow K \wedge S)$	(1), 定义
(4) $\Box(\neg A \rightarrow S)$	(2), 定义
(5) $\Box \neg S$	条件假设
□ (6) $\neg S$	(5), T- 重述
(7) $\neg A \rightarrow S$	(4), T 肯前
(8) $\neg \neg A$	(6)(7), 否后
(9) $A \wedge I \rightarrow K \wedge S$	(3), T- 重述
(10) $\neg K \vee \neg S$	(6), 附加
(11) $\neg(K \wedge S)$	(10), 德摩根
(12) $\neg(A \wedge I)$	(9)(11), 否后
(13) $\neg A \vee \neg I$	(12), 德摩根
(14) $\neg I$	(8)(13), 否析
(15) $\Box \neg I$	(14), $\Box$ 引
(16) $\Box \neg S \rightarrow \Box \neg I$	(5)-(15), 条证

有时我们需要连续多次使用 $\Box$ 引规则，因而需要在一个 $\Box$ 引域内构造另一个 $\Box$ 引域。如：

### 【定理 2】

$$\Box(P \wedge Q) \Rightarrow \Box P \wedge \Box Q$$

### 【证明】

□ (1) $\Box(P \wedge Q)$	条件假设
□ (2) $P \wedge Q$	(1), T- 重述
(3) $P$	(2), 化简
(4) $Q$	(2), 化简
(5) $\Box P$	(3), $\Box$ 引
(6) $\Box Q$	(4), $\Box$ 引
(7) $\Box P \wedge \Box Q$	(5)(6), 合取
(8) $\Box(P \wedge Q) \rightarrow \Box P \wedge \Box Q$	(1)-(7), 条证
(9) $\Box(\Box(P \wedge Q) \rightarrow \Box P \wedge \Box Q)$	(8), $\Box$ 引
(10) $\Box(P \wedge Q) \Rightarrow \Box P \wedge \Box Q$	(9), 定义

在上面这个证明中，对最里边的 $\Box$ 引域中的两行(3)和(4)连续使用 $\Box$ 引规则，从而得到(5)和(6)，这表明， $\Box$ 引规则并不限于应用于 $\Box$ 引域中的最后一行，而可应

用于□引域中的任何一行或若干行。

【定理 3】

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R))$$

【证明】

$\square$ <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>P \Rightarrow Q</math></li> <li>(2) <math>\square(P \Rightarrow Q)</math></li> <li>(3) <math>Q \Rightarrow R</math></li> <li>(4) <math>\square(Q \Rightarrow R)</math></li> <li><math>\square</math> <ul style="list-style-type: none"> <li>(5) <math>Q \Rightarrow R</math></li> <li>(6) <math>P \Rightarrow Q</math></li> <li>(7) <math>P \Rightarrow R</math></li> <li>(8) <math>\square(P \Rightarrow R)</math></li> <li>(9) <math>P \Rightarrow R</math></li> </ul> </li> <li>(10) <math>(Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R)</math></li> <li>(11) <math>(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R))</math></li> <li>(12) <math>\square((P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R)))</math></li> <li>(13) <math>(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R))</math></li> </ul>	条件假设 (1), 定义 条件假设 (3), 定义 (4), T- 重述 (2), T- 重述 (5) (6), 三段论 (7), □引 (8), 定义 (3) - (9), 条证 (1) - (10), 条证 (11), □引 (12), 定义
--	---

定理 3 也是刘易斯的  $S_2$  中的定理。属于  $S_4$  和  $S_5$  而不属于  $S_2$  的那条定理是

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

这条定理也不属于 T。现在我们看一下，为什么这个公式在 T 中得不到证明。初看上去，这一公式似乎可以这样来证明：

(1) $P \Rightarrow Q$	条件假设
(2) $\Box(P \Rightarrow Q)$	(1), 定义
(3) $Q \Rightarrow R$	条件假设
(4) $\Box(Q \Rightarrow R)$	(3), 定义
(5) $Q \Rightarrow R$	(4), T- 重述
(6) $P \Rightarrow Q$	(2), T- 重述(错误! )
(7) $P \Rightarrow R$	(5) (6), 三段论
(8) $\Box(P \Rightarrow R)$	(7), $\Box$ 引
(9) $P \Rightarrow R$	(8), 定义
(10) $(Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R)$	(3) - (9), 条证
(11) $\Box((Q \Rightarrow R) \rightarrow ((P \Rightarrow R)))$	(10), $\Box$ 引
(12) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	(11), 定义
(13) $(P \Rightarrow Q) \rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	(1) - (12), 条证
(14) $\Box((P \Rightarrow Q) \rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$	(13), $\Box$ 引
(15) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	(14), 定义

但是，以上证明是错误的；具体地说，通过 T - 重述规则由(2)得出(6)是错误的。这是因为，T - 重述规则的一次应用所得到的一个命题只能进入一个 $\Box$ 引域，而不能进入两个以上 $\Box$ 引域。而以上证明中，通过 T - 重述规则的一次使用，由(2)得出的(6)进入两个 $\Box$ 引域，这是对 T - 重述规则的误用。要想使以上所讨论的那个公式得到证明，必须借助于另外的重述规则。而这另外的重述规则正是  $S_4$  和  $S_5$  所特有的。

### 7.4.3 可能模态词的整推规则

可能模态词的整推规则也有两条，即可能引入规则和可能销去规则。

$\Diamond$ 引规则（可能引入规则）：

从  $P$  可推得  $\Diamond P$

其模式是：

$P$

$\therefore \Diamond P$        $\Diamond$ 引

这个规则的合理性是显而易见的。说  $P$  是真的，就是说， $P$  或者必然真的，或者是偶然真的。说  $P$  是可能真的，就是说， $P$  或者是必然真的，或者是偶然真的，或者是偶然假的。因此， $P$  是真的，逻辑蕴涵， $P$  是可能真的。让我们看一个应用 $\Diamond$ 引规则的例子。

**【推论 5】**

如果人到达月球是可能的，那么人到达火星也是可能的；  
人到达了月球；

所以，人到达火星是可能的。

令：Y：人到达月球；H：人到达火星。推论 5 被符号化为：

$$\diamond Y \rightarrow \diamond H$$

Y

$\therefore \diamond H$

**【证明】**

- (1)  $\diamond Y \rightarrow \diamond H$  前提
- (2) Y 前提
- (3)  $\diamond Y$  (2),  $\diamond$ 引
- (4)  $\diamond H$  (1)(3), 肯前

$\diamond$ 销规则(可能销去规则)的基本思想是：如果一个命题是可能的，那么，由这个命题推出的结论也是可能的。这一思想也可用公式表述为： $(P \Rightarrow Q) \wedge \diamond P \rightarrow \diamond Q$ 。 $\diamond$ 销规则的模式是：



这条规则的一些特征类似于谓词逻辑的存在例示规则。存在例示规则的“例示”体现在新名假设上，而它的结论往往不是一个例示，而是一个“概括”。类似地， $\diamond$ 销规则的“ $\diamond$ 销”体现在 $\diamond$ 销假设上，而它的结论却更像“ $\diamond$ 引”。对我们来说，重要的是记住这条规则的用法，而不要被它的名称所迷惑。

$\diamond$ 销规则包含  $\square \quad \boxed{\quad}$ ，其中竖线的长度标示出 $\diamond$ 销规则的应用范围即 $\diamond$ 销域。 $\diamond$ 销域的第一行是 $\diamond$ 销假设。 $\diamond$ 销假设是它之前的一个可能命题去掉 $\diamond$ 的那一部分。 $\diamond$ 销域中的任何一行或几行都可退出，退出后在它们前边加上 $\diamond$ 。以下是应用 $\diamond$ 销规则的几个例子。

**【推论 5】**

明天可能既刮风又下雨；  
所以，明天可能刮风并且明天可能下雨。

令: F: 明天刮风; Y: 明天下雨。推论 5 被符号化为:

$$\diamond (F \wedge Y)$$

$$\therefore \diamond F \wedge \diamond Y$$

### 【证明】

(1) $\diamond(F \wedge Y)$	提前
$\square \boxed{(2) F \wedge Y}$	(1), $\diamond$ 销假设
$\boxed{(3) F}$	(2), 化简
$\boxed{(4) Y}$	(2), 化简
(5) $\diamond F$	(3), $\diamond$ 销
(6) $\diamond Y$	(4), $\diamond$ 销
(7) $\diamond F \wedge \diamond Y$	(5) (6), 合取

### 【推论 6】

社会生产力向前发展是必然的;

社会生产力受到阻碍是可能的;

所以, 社会生产力向前发展并且受到阻碍是可能的。

令: Q: 社会生产力向前发展; Z: 社会生产力受到阻碍。推论 6 可被符号化为:

$$\square Q$$

$$\diamond Z$$

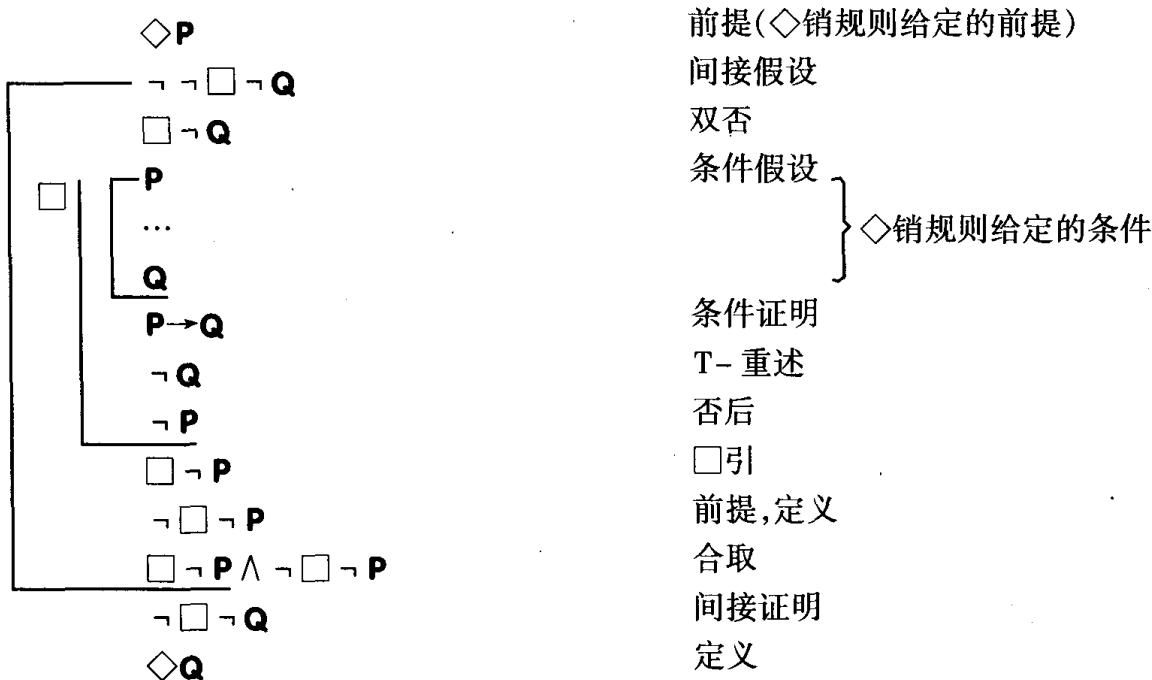
$$\therefore \diamond (Q \wedge Z)$$

### 【证明】

(1) $\square Q$	提前
(2) $\diamond Z$	提前
$\square \boxed{(3) Z}$	(2), $\diamond$ 销假设
$\boxed{(4) Q}$	(1), T - 重述
$\boxed{(5) Q \wedge Z}$	(3)(4), 合取
(6) $\diamond(Q \wedge Z)$	(5), $\diamond$ 销

请注意, 在上面的证明中, 我们通过 T - 重述规则将(1)即  $\square Q$  中的 Q 引入  $\diamond$  销域, 这一做法似乎不符合 T - 重述规则的用法, 因为 T - 重述规则只适用于  $\square$  引域。其实, 这一做法并没有错, 因为  $\diamond$  销域实质上就是  $\square$  引域。具体地说,  $\diamond$  销规则可用  $\square$  引规则和其他一些规则来取代。其证明如下:

假定 P 是可能的即  $\diamond P$ , 并且假定由 P 可以推出 Q,  $\diamond$  销规则允许得出  $\diamond Q$ 。现在我们要证明, 在同样的假定下, 由  $\square$  引规则和其他规则也可推出  $\diamond Q$ 。



以上表明， $\diamond$ 销规则不是必不可少的，它的作用仅仅在于，使以上证明过程得以简化。从以上证明中我们看到， $\diamond$ 销规则中的 $\diamond$ 销域实际上正是 $\square$ 引规则中的 $\square$ 引域，因此，T-重述规则也适用于 $\diamond$ 销域。顺便指出， $\diamond$ 引规则也不是必不可少的，这一点留给读者自己证明。（提示：证明过程中只需依据间接证明规则和 $\square$ 销规则。）

#### 【定理4】

$$\diamond (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \Leftrightarrow \diamond \mathbf{P} \vee \diamond \mathbf{Q}$$

对这个定理我们分两步来证明。先证：

$$\diamond (\mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \Rightarrow \diamond \mathbf{P} \vee \diamond \mathbf{Q}$$

$\square$	(1) $\diamond(P \vee Q)$	条件假设
	(2) $\neg(\diamond P \vee \diamond Q)$	间接假设
	(3) $\neg\diamond P \wedge \neg\diamond Q$	(2), 德摩根
	(4) $\neg\diamond P$	(3), 化简
	(5) $\square \neg P$	4), 定义, 双否
$\square$	(6) $P \vee Q$	(1), $\diamond$ 销假设
	(7) $\neg P$	(5), T-重述
	(8) $Q$	(6), (7), 否析
	(9) $\diamond Q$	(8), $\diamond$ 销
	(10) $\neg\diamond Q$	(3), 化简
	(11) $\diamond Q \wedge \neg\diamond Q$	(9), (10), 合取
	(12) $\diamond P \vee \diamond Q$	(2) - (10), 间证
	(13) $\diamond(P \vee Q) \rightarrow \diamond P \vee \diamond Q$	(1) - (12), 条证
	(14) $\square(\diamond(P \vee Q) \rightarrow \diamond P \vee \diamond Q)$	(13), $\square$ 引
	(15) $\diamond(P \vee Q) \Rightarrow \diamond P \vee \diamond Q$	(14), 定义

再证明:  $\diamond P \vee \diamond Q \Rightarrow \diamond(P \vee Q)$

$\square$	(1) $\diamond P \vee \diamond Q$	条件假设
	(2) $\neg\diamond(P \vee Q)$	间接假设
	(3) $\square \neg(P \vee Q)$	(2), 定义, 双否
$\square$	(4) $\neg(P \vee Q)$	(3), T-重述
	(5) $\neg P \wedge \neg Q$	(4), 德摩根
	(6) $\neg P$	(5), 化简
	(7) $\neg Q$	(5), 化简
	(8) $\square \neg P$	(6), $\square$ 引
	(9) $\square \neg Q$	(7), $\square$ 引
	(10) $\neg\diamond P$	(8), 定义, 双否
	(11) $\neg\diamond Q$	(9), 定义, 双否
	(12) $\diamond Q$	(1) (10), 否析
	(13) $\diamond Q \wedge \neg\diamond Q$	(11), (12), 合取
	(14) $\diamond(P \vee Q)$	(2) - (13), 间证
	(15) $\diamond P \vee \diamond Q \rightarrow \diamond(P \vee Q)$	(1) - (14), 条证
	(16) $\square(\diamond P \vee \diamond Q \rightarrow \diamond(P \vee Q))$	(15), $\square$ 引
	(17) $\diamond P \vee \diamond Q \Rightarrow \diamond(P \vee Q)$	(16), 定义

我们知道，以上所证的两个定理合取起来等值于定理4，因而定理4得证。（这最后一步用到定理“ $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ ”，该定理请读者自证。）

### 习题 7.4

一、用给定的命题常项将以下推论符号化，然后证明其有效性（只用□引规则或□消规则）。

A: 甲队胜 ( $\neg A$ : 甲队败);      B: 乙队胜;

C: 丙队胜;      D: 丁队胜。

1. 如果甲队胜，必然导致乙队败；

甲队胜；

所以，乙队败。

2. 如果甲队胜，必然导致乙队败；

甲队必然胜；

所以，乙队必然败。

3. 如果甲队胜，必然导致乙队败；

如果乙队败，必然导致丙队败；

所以，如果甲队胜，必然导致丙队败。

4. 甲队胜或乙队胜，这是必然的；

甲队必败；

所以，乙队必胜。

5. 甲队胜或乙队败，这是必然的；

甲队胜必然导致乙队败；

所以，乙队必败。

6. 甲队胜必然导致丙队败；

乙队胜必然导致丁队败；

甲队必胜并且乙队必胜；

所以，丙队和丁队都必败。

二、证明以下推论的有效性（只用□引规则或□消规则）。

1.  $A \vee I \Rightarrow K \vee S$

$\therefore \neg S \Rightarrow \neg A \vee K$

2.  $A \Leftrightarrow B$

$\therefore \neg A \Leftrightarrow \neg B$

3.  $\Box(C \vee (D \vee E))$

$D \Rightarrow S$

4.  $P \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow \Box R$

$C \vee E \Rightarrow T$

$Q \Rightarrow \Box \neg R$

$\therefore \Box(S \vee T)$

$\therefore \Box \neg P$

$$5. (I \Rightarrow M) \wedge (T \Rightarrow M)$$

$$\Box(I \vee T)$$

$$\therefore \Box M$$

$$6. \neg L \Rightarrow \neg(F \vee G)$$

$$\neg F \Rightarrow \neg K$$

$$\therefore G \vee K \Rightarrow L$$

三、证明以下定理（只用 $\Box$ 引规则或 $\Box$ 销规则）。

$$1. \Box \Box P \Rightarrow P$$

$$2. \Box(P \vee \neg P)$$

$$3. \neg \Diamond P \Rightarrow \neg \Box P$$

$$4. \Box P \Rightarrow (Q \Rightarrow P) \quad (\text{严格蕴涵怪论})$$

$$5. \Box \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \quad (\text{严格蕴涵怪论})$$

$$6. (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

$$7. (P \Rightarrow Q \wedge \neg Q) \Rightarrow \Box \neg P$$

$$8. (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow \Box Q$$

$$9. (P \Leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

$$10. \Box P \wedge \Box Q \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

$$11. \Box(P \wedge Q) \Leftrightarrow \Box P \wedge \Box Q$$

四、证明以下定理。

$$1. \Diamond P \rightarrow \Diamond(P \vee Q)$$

$$2. (P \Rightarrow Q) \rightarrow (\neg \Diamond Q \rightarrow \neg \Diamond P)$$

$$3. (P \Rightarrow Q) \rightarrow (\Diamond \neg Q \rightarrow \Diamond \neg P)$$

$$4. \Box P \rightarrow \Diamond(P \vee Q)$$

$$5. \Diamond P \wedge \neg \Diamond Q \Rightarrow \Diamond(P \vee Q)$$

$$6. \Box P \wedge \Diamond Q \Rightarrow \Diamond(P \wedge Q)$$

$$7. \Diamond P \wedge \neg \Diamond Q \Rightarrow \neg \Diamond(P \wedge Q)$$

$$8. \Box P \vee \Box Q \Rightarrow \Box(P \vee Q)$$

$$9. (P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$$

五、用给定的命题常项将以下推论符号化，再证明其有效性。

A: 甲队胜 ( $\neg A$ : 甲队败);      B: 乙队胜;

C: 丙队胜;      D: 丁队胜;

1. 甲队可能胜也可能败;

如果甲队败，必然地，乙队也败；

所以，乙队可能败。

2. 甲队胜或乙队胜，这是可能的；

甲队胜必然导致丙队败；

乙队胜必然导致丁队败；

所以，丙队败或丁队败，这是可能的。

3. 甲队必胜或乙队必胜；

甲队没有胜；

所以，乙队可能胜。

4. 甲队胜或乙队胜，这是必然的；

如果丙队胜必然导致乙队败；

所以，如果丙队胜，必然导致甲队胜。

5. 必然地，乙队败当且仅当丁队败；

如果丁队败必然导致甲队胜；

乙队败或丁队败，这是可能的；

所以，甲队可能胜。

6. 甲队和乙队都可能胜；

乙队和丙队之中至少有一必然败；

丙队败当且仅当丁队胜；

所以，丁队可能胜。

## 六、证明以下推论的有效性。

$$1. \diamond F \Rightarrow \diamond(G \wedge S)$$

$$\Box F$$

$$\therefore \diamond(H \vee G)$$

$$2. P \rightarrow \diamond Q$$

$$\neg(\diamond \neg P \vee R)$$

$$\diamond \neg R \rightarrow \Box S$$

$$\therefore \diamond(Q \wedge S)$$

$$3. \Box(\neg \Box M \wedge \neg \diamond N)$$

$$L \Rightarrow M$$

$$\therefore \neg \Box(L \vee N)$$

$$4. \diamond(\Box H \vee \neg \diamond I)$$

$$R \Rightarrow \neg H \wedge I$$

$$\therefore \diamond \neg R$$

$$5. (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow D)$$

$$\Box A \vee \Box B$$

$$\therefore \Box(C \vee D)$$

$$6. (J \Rightarrow L) \vee (K \Rightarrow L)$$

$$\Box(J \wedge K)$$

$$\therefore \Box L$$

## 7.5 系统 $S_4$

系统  $S_4$  和  $S_5$  与系统 T 的区别表现在对重迭模态词的处理上。因此，我们首先从重迭模态词谈起。

### 7.5.1 重迭模态词

两个以上连续出现的模态词构成重迭模态词。如：

$\square\square P$

$P \rightarrow \square\Diamond\square\Diamond Q$

$\Diamond\square\Diamond(P \vee \Diamond Q)$

中都含有重迭模态词。

有些公式虽然初看上去不含有重迭模态词，但是很容易看出，这些公式与另一些含有重迭模态词的公式是逻辑等值的。如：

(1)  $\square(\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q})$

(2)  $\Diamond\neg\Diamond P$

(1) 只含有一个模态词。(2) 虽然含有两个模态词，但是两个模态词被“ $\neg$ ”隔开，不连续出现。从表面上看，这两个公式都不含有重迭模态词。然而，我们一眼便可看出，(1)和(2)分别逻辑等值于：

(1')  $\square\square(P \rightarrow Q)$

(2')  $\neg\square\Diamond P$

而(1')和(2')都含有重迭模态词。由此可见：一个由“ $\Rightarrow$ ”或“ $\Leftrightarrow$ ”表达的严格蕴涵命题或严格等值命题前边只要有一个模态词，则间接地含有重迭模态词；被“ $\neg$ ”隔开的两个模态词间接地构成重迭模态词。

### 7.5.2 $S_4$ – 重述规则

含有重迭模态词的命题在日常语言中是很少出现的，即使出现，也是颇为费解的。如， $\square\square P$ 用自然语言表达为“ $P$ 必然真是必然真的”。现在我们要问：“ $P$ 必然真是必然真的”和“ $P$ 是必然真的”这两句话之间是否有实质性的区别？如果没有， $\square\square P$ 就应化归为 $\square P$ 。把 $\square\square P$ 化归为 $\square P$ 就是系统 $S_4$ 的一个特点。

所谓“化归”就是一种“等值替换”。因此： $\square\square P$ 可以化归为 $\square P$ ，当且仅当， $\square\square P \Leftrightarrow \square P$ 。我们知道，在系统 $T$ 中，可以证明 $\square\square P \Rightarrow \square P$ ，但却不能证明 $\square P \Rightarrow \square\square P$ 。这是由 $T$ -重述规则决定的。根据 $T$ -重述规则，如果 $\square P$ 出现，那么只能把 $P$ 引入一个 $\square$ 引域，而不能把 $\square P$ 引入一个 $\square$ 引域。可以设想，如果一种新的重述规则允许当 $\square P$ 出现时把 $\square P$ 引入一个 $\square$ 引域，那么，就可以证明 $\square P \Rightarrow \square\square P$ 。这一重述规则正是系统 $S_4$ 所采纳的。

#### $S_4$ – 重述规则：

在证明过程中，如果 $\square P$ 出现，那么， $\square P$ 可进入一个 $\square$ 引域。（ $\square P$ 的这一出现不在任何已被撤除的假设域内。）

正如 $T$ -重述规则， $S_4$ -重述规则是 $\square$ 引规则的一部分。这就是说，仅当应用 $\square$ 引规则的时候，才应用 $S_4$ -重述规则。现在我们就应用 $S_4$ -重述规则证明定理 $\square P \Rightarrow \square\square P$ ，证明如下：

$\square$	(1) $\square P$	条件假设
$\square$	$\square \sqcup (2) \square P$	$S_4$ - 重述
	(3) $\square \square P$	(2), $\square$ 引
	(4) $\square P \rightarrow \square \square P$	(1) - (3), 条证
	(5) $\square (\square P \rightarrow \square \square P)$	(4), $\square$ 引
	(6) $\square P \Rightarrow \square \square P$	(5), 定义

由于这一公式体现了  $S_4$  区别于 T 的基本特征，因此，这一公式叫做  $S_4$  的特征公式。

在  $S_4$  中，为了证明方便，T - 重述规则仍然保留，不过该规则不是必不可少的，因为  $S_4$  - 重述规则和  $\square$  销规则可以取代 T - 重述规则。证明如下：

$\square P$		
$\square$	$\square P$	$S_4$ - 重述
	P	$\square$ 销
	...	

系统  $S_4$  与系统 T 的惟一区别就是增加了一条重述规则；即  $S_4$  - 重述规则。因此，凡是 T 的定理也是  $S_4$  的定理；凡是 T 的有效推论也是  $S_4$  的有效推论。然而，有些  $S_4$  的定理和有效推论却是 T 所没有的。例如，刘易斯不太喜欢的那个公式即

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$$

就是  $S_4$  的定理而不是 T 的定理。在前一小节中我们已分析过了，该公式为什么在 T 中得不到证明。现在我们讨论，该公式在  $S_4$  中是如何被证明的。

【证明】

(1) $P \Rightarrow Q$	条件假设
(2) $\Box(P \Rightarrow Q)$	(1), 定义
(3) $Q \Rightarrow R$	条件假设
(4) $\Box(Q \Rightarrow R)$	(3), 定义
(5) $\Box(P \Rightarrow Q)$	(2), $S_4$ - 重述
(6) $P$	条件假设
(7) $P \Rightarrow Q$	(5), $T$ - 重述
(8) $Q$	(6)(7), 肯前
(9) $Q \Rightarrow R$	(4), $T$ - 重述
(10) $R$	(8)(9)肯前
(11) $P \Rightarrow R$	(6) - (10), 条证
(12) $\Box(P \Rightarrow R)$	(11), $\Box$ 引
(13) $P \Rightarrow R$	(12), 定义
(14) $(Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R)$	(3) - (13), 条证
(15) $\Box((Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R))$	(14), $\Box$ 引
(16) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	(15), 定义
(17) $(P \Rightarrow Q) \rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	(1) - (16), 条证
(18) $\Box((P \Rightarrow Q) \rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)))$	(17), $\Box$ 引
(19) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	(18), 定义

以上证明中行(5)是由  $S_4$  - 重述规则引入的，这一步就是该定理在  $S_4$  中得以证明的关键所在。

以下几个公式也都是属于  $S_4$  但不属于  $T$  的定理：

- (1)  $\Box \Diamond P \Rightarrow \Box \Diamond \Box \Diamond P$
- (2)  $\Box \Diamond \Box \Diamond P \Rightarrow \Box \Diamond P$
- (3)  $\Diamond \Box P \Rightarrow \Diamond \Box \Diamond \Box P$
- (4)  $\Diamond \Box \Diamond \Box P \Rightarrow \Diamond \Box P$

在这里我们只给出(1)和(2)的证明，(3)和(4)作为习题留给读者自证。

【证明】

$\square$	(1) $\square \diamond P$	条件假设
	(2) $\square \diamond P$	(1), $S_4$ - 重述
	(3) $\diamond \square \diamond P$	(2), $\diamond$ 引
	(4) $\square \diamond \square \diamond P$	(3), $\square$ 引
	(5) $\square \diamond P \rightarrow \square \diamond \square \diamond P$	(1) - (4), 条证
	(6) $\square(\square \diamond P \rightarrow \square \diamond \square \diamond P)$	(5), $\square$ 引
	(7) $\square \diamond P \Rightarrow \square \diamond \square \diamond P$	(6), 定义

证明(2)的一种方便的方法是,首先证明“ $\diamond \square \neg P \rightarrow \diamond \square \diamond \square \neg P$ ”,然后,通过假言易位和模态词的定义得出所证公式。

### 【证明】

$\square$	(1) $\diamond \square \neg P$	条件假设
	(2) $\square \neg P$	(1), $\diamond$ 销假设
	(3) $\square \neg P$	$S_4$ - 重述
	(4) $\diamond \square \neg P$	(3), $\diamond$ 引
	(5) $\square \diamond \square \neg P$	(4), $\square$ 引
	(6) $\diamond \square \diamond \square \neg P$	(5), $\diamond$ 销
	(7) $\diamond \square \neg P \rightarrow \diamond \square \diamond \square \neg P$	(1) - (6), 条证
	(8) $\neg \diamond \square \diamond \square \neg P \rightarrow \neg \diamond \square \neg P$	(7), 假言易位
	(9) $\square \diamond \square \diamond P \rightarrow \square \diamond P$	定义, 双否
	(10) $\square(\square \diamond \square \diamond P \rightarrow \square \diamond P)$	(9), $\square$ 引
	(11) $\square \diamond \square \diamond \Rightarrow \square \diamond P$	(10), 定义

把以上两个证明结合起来,就构成对定理  $\square \diamond P \Leftrightarrow \square \diamond \square \diamond P$  的证明。这个定理在下一小节将要用到。

### 7.5.3 模态词的化归

在  $S_4$  中有定理:

- (i)  $\square P \Leftrightarrow \square \square P$
- (ii)  $\diamond P \Leftrightarrow \diamond \diamond P$

(i) 已在前一小节中证明,(ii)也是不难证明的(请读者自证)。(i)和(ii)都是严格等值式,因此,(i)和(ii)的左右两边可以相互置换。这使得,由两个相同模态词组成的重迭模态词可以化归为非重迭模态词。(i)和(ii)叫做  $S_4$  的“化归律”。

我们进而要问,对于由不同模态词组成的重迭模态词,这些化归律的作用如何呢?回答是,对于任何重迭模态词,通过  $S_4$  的化归律可以将它化归为至多包含三个模态词

的重迭模态词。

包含三个模态词而不能进一步化归的重迭模态词不外乎以下两种形式：

$$a: \square \diamond \square P$$

$$b: \diamond \square \diamond P$$

在 a 或 b 上增加一个模态词而构成的重迭模态词不外乎：

$$a': \square \square \diamond \square P$$

$$a'': \diamond \square \diamond \square P$$

$$b': \diamond \diamond \square \diamond P$$

$$b'': \square \diamond \square \diamond P$$

a' 和 b' 可以直接通过  $S_4$  的化归律化归为 a 和 b。a'' 和 b'' 则可通过  $S_4$  的推演规则化归为：

$$c: \diamond \square P$$

$$d: \square \diamond P$$

这是因为在  $S_4$  中有定理：

$$\diamond \square P \Leftrightarrow \diamond \square \diamond \square P$$

$$\square \diamond P \Leftrightarrow \square \diamond \square \diamond P$$

其中后一定理已在前一小节给出证明，前一定理也已作为习题请读者自证。

现在我们看到，在  $S_4$  中，含有 4 个模态词的重迭模态词可以化归为最多包含 3 个模态词的重迭模态词。相应地，含有 5 个模态词的重迭模态词可以化归为最多含有 4 个模态词的重迭模态词，进而可以化归为最多含有 3 个模态词的重迭模态词。以此类推，便可得出结论，在  $S_4$  中，任何重迭模态词均可化归为最多含有三个模态词的重迭模态词。这些不能进一步化归的重迭模态词有四种形式，即上面的 a、b、c、和 d。我们即将看到，在  $S_5$  中，所有的重迭模态词都可化归为非重迭模态词。

## 习题 7.5

一、证明下列定理。

1.  $\square P \rightarrow (\mathbf{Q} \Rightarrow \square P)$
2.  $(P \rightarrow \square Q) \rightarrow (P \rightarrow (R \Rightarrow \square Q))$
3.  $(P \Rightarrow Q) \rightarrow (R \Rightarrow (P \Rightarrow Q))$
4.  $\diamond \diamond P \rightarrow \diamond P$
5.  $\diamond \square P \Rightarrow \diamond \square \diamond \square P$
6.  $\diamond \square \diamond \square P \Rightarrow \diamond \square P$

## 7.6 系统 $S_5$

### 7.6.1 $S_5$ - 重述规则

系统  $S_4$  与系统 T 之间的区别仅仅在于重述规则。类似地，系统  $S_5$  与系统  $S_4$  之间的区别也仅仅在于重述规则。根据  $S_4$  - 重述规则，虽然当  $\Box P$  出现时可将  $\Box P$  引入一个  $\Box$  引域，但是，当  $\Diamond P$  出现时，却不可将  $\Diamond P$  引入一个  $\Box$  引域。而  $S_5$  - 重述规则既允许前者，也允许后者。

#### $S_5$ - 重述规则：

在证明过程中，如果  $\Box P$  或  $\Diamond P$  出现，那么， $\Box P$  或  $\Diamond P$  可进入一个  $\Box$  引域（ $\Box P$  或  $\Diamond P$  的这一出现不在任何被撤除的假设域内）。

显然， $S_5$  - 重述规则直接包括了  $S_4$  - 重述规则。因此，在  $S_5$  中，“ $S_4$  - 重述规则”这一名称被“ $S_5$  - 重述规则”所代替。 $T$  - 重述规则在  $S_5$  中也不是必不可少的，不过为了证明方便起见，在  $S_5$  中仍然保留了  $T$  - 重述规则。我们看到， $S_4$  是  $T$  的扩展， $S_5$  又是  $S_4$  的扩展。这也就是说， $T$  的定理是  $S_4$  的定理的一个子集， $S_4$  的定理又是  $S_5$  的定理的一个子集。

公式  $\Diamond P \Rightarrow \Box \Diamond P$  是  $S_5$  所特有的一个定理，它反映了  $S_5$  区别于  $S_4$  的基本特征，因此叫做  $S_5$  的特征公式。这一定理在  $S_5$  中是很容易证明的，即：

$\Box$	(1) $\Diamond P$	条件假设
	(2) $\Diamond P$	(1), $S_5$ - 重述
	(3) $\Box \Diamond P$	(2), $\Box$ 引
	(4) $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$	(1) - (3), 条证
	(5) $\Box(\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P)$	(4), $\Box$ 引
	(6) $\Diamond P \Rightarrow \Box \Diamond P$	(5), 定义

此公式的逆公式  $\Box \Diamond P \Rightarrow \Diamond P$  通过  $\Box$  销规则很容易证明。因此， $S_5$  中有定理：

$$\Diamond P \Leftrightarrow \Box \Diamond P$$

我们再证明一个重要的定理： $\Diamond \Box P \Leftrightarrow \Box \Diamond P$ 。

$\square$	(1) $\diamond \square P$	条件假设
	(2) $\neg \square P$	间接假设
	(3) $\diamond \neg P$	(2), 定义, 双否
	(4) $\diamond \neg P$	(3), $S_5$ - 重述
	(5) $\square \diamond \neg P$	(4), $\square$ 引
	(6) $\neg \diamond \square P$	(5), 定义、双否
	(7) $\diamond \square P \wedge \neg \diamond \square P$	(1)(6), 合取
	(8) $\square P$	(2) - (7), 间证
	(9) $\diamond \square P \rightarrow \square P$	(1) - (8), 条证
	(10) $\square(\diamond \square P \rightarrow \square P)$	(9), $\square$ 引
	(11) $\diamond \square P \Rightarrow \square P$	(10), 定义

该定理的逆定理即“ $\square P \Rightarrow \diamond \square P$ ”通过 $\diamond$ 引规则很容易证明。因此,  $S_5$  中有定理:

$$\square P \Leftrightarrow \diamond \square P$$

## 7.6.2 模态词的化归

$S_5$  中一共有四条化归律, 即

- (i)  $\square P \Leftrightarrow \square \square P$
- (ii)  $\diamond P \Leftrightarrow \diamond \diamond P$
- (iii)  $\diamond P \Leftrightarrow \square \diamond P$
- (iv)  $\square P \Leftrightarrow \diamond \square P$

其中(iii)和(iv)正是前一小节证明了的那两个定理。由于  $S_4$  只有化归律(i)和(ii)而没有(iii)和(iv), 因而  $S_4$  中有四种重迭模态词不能化归, 即:

$$\begin{aligned} & \diamond \square P \\ & \square \diamond P \\ & \square \diamond \square P \\ & \diamond \square \diamond P \end{aligned}$$

在  $S_5$  中, 根据化归律(iii)和(iv),  $\diamond \square P$  和  $\square \diamond P$  可以立即化归为  $\square P$  和  $\diamond P$ 。而  $\square \diamond \square P$  和  $\diamond \square \diamond P$  可以先化归为  $\square \square P$  (或  $\diamond \square P$ ) 和  $\diamond \diamond P$  (或  $\square \diamond P$ ), 再化归为  $\square P$  和  $\diamond P$ 。这样, 在  $S_5$  中, 所有的重迭模态词都可以化归为非重迭模态词。

从以上四条化归律我们还注意到, 一个重迭模态词化归为非重迭模态词后, 这个非重迭模态词总是重迭模态词最里边的那个模态词, 这意味着, 在  $S_5$  中, 重迭模态词中除了最里边的那个模态词外, 其他模态词都不起作用。为了简化证明过程, 我们再引入一条规则, 即:

化归规则：

“ $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n P$ ” 和 “ $\Delta_n P$ ” 可以相互置换。

在这里，希腊字母 “ $\Delta$ ” 是关于模态词的元变项，它的值是模态词 “ $\Box$ ” 或 “ $\Diamond$ ”。 “ $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n$ ” 是重迭模态词。这一化归规则只属于  $S_5$ ，而不属于  $S_4$  和  $T$ 。由于化归规则是一条等值置换规则，所以既可将它用于整个公式，也可将它用于部分公式。

### 7.6.3 一些定理和推论的证明

证明以下推论的有效性：

$$\Diamond(P \Rightarrow \Box Q)$$

$$\neg \Box Q$$

$$\therefore \neg \Diamond P$$

$$(1) \Diamond(P \Rightarrow \Box Q)$$

前提

$$(2) \neg \Box Q$$

前提

$$(3) \Diamond \Box(P \Rightarrow \Box Q)$$

(1), 定义

$$(4) \Box(P \Rightarrow \Box Q)$$

(3), 化归

$$(5) \Diamond \neg Q$$

(2), 定义, 双否

$$\Box | (6) P \Rightarrow \Box Q$$

(4), T - 重述

$$(7) \Diamond \neg Q$$

(5),  $S_5$  - 重述

$$(8) \neg \Box Q$$

(7), 定义, 双否

$$(9) \neg P$$

(6) (8), 否后

$$(10) \Box \neg P$$

(9),  $\Box$  引

$$(11) \neg \Diamond P$$

(10), 定义, 双否

证明定理： $\Diamond(\Diamond P \rightarrow Q) \rightarrow (\Diamond P \rightarrow \Diamond Q)$

(1) $\Diamond(\Diamond P \rightarrow Q)$	条件假设
(2) $\Diamond P$	条件假设
$\Box$   (3) $\Diamond P \rightarrow Q$	(1), $\Diamond$ 销假设
(4) $\Diamond P$	(2), $S_5$ - 重述
(5) $Q$	(3) (4), 肯前
(6) $\Diamond Q$	(5), $\Diamond$ 销
(7) $\Diamond P \rightarrow \Diamond Q$	(2) - (6), 条证
(8) $\Diamond(\Diamond P \rightarrow Q) \rightarrow (\Diamond P \rightarrow \Diamond Q)$	(1) - (7), 条证

在上面这个证明中，通过  $S_5$  - 重述规则将  $\Diamond P$  直接引入  $\Diamond$  销域，即由(2)得出(4)，这是允许的。正如 T - 重述规则既可应用于  $\Box$  引域也可应用于  $\Diamond$  销域。这是因为， $\Diamond$  销

域实质上就是 $\Box$ 引域。

证明定理:  $\Box\Diamond\Box\Diamond(P \Rightarrow \Box\Diamond Q) \rightarrow (\Box\neg P \vee \Diamond Q)$

(1) $\Box\Diamond\Box\Diamond(P \Rightarrow \Box\Diamond Q)$	条件假设
(2) $\Box\Diamond\Box\Diamond\Box(P \Rightarrow \Box\Diamond Q)$	(1), 定义
(3) $\Box(P \Rightarrow \Box\Diamond Q)$	(2), 化归
(4) $\neg(\Box\neg P \vee \Diamond Q)$	间接假设
(5) $\neg\Box\neg P \wedge \neg\Diamond Q$	(4), 德摩根
(6) $\neg\Box\neg P$	(5), 化简
(7) $\neg\Diamond Q$	(5), 化简
(8) $\Box\neg Q$	(7), 定义, 双否
$\Box$ (9) $\Box\neg Q$	(8), S-重述
(10) $\neg\Diamond Q$	(9), 定义, 双否
(11) $P \Rightarrow \Box\Diamond Q$	(3), T-重述
(12) $P \Rightarrow \Diamond Q$	(11), 化归
(13) $\neg P$	(10)(12), 否后
(14) $\Box\neg P$	(13), $\Box$ 引
(15) $\Box\neg P \wedge \neg\Box\neg P$	(6)(14), 合取
(16) $\Box\neg P \vee \Diamond Q$	(4)-(15), 间证
(17) $\Box\Diamond\Box\Diamond(P \Rightarrow \Box\Diamond Q) \rightarrow (\Box\neg P \vee \Diamond Q)$	(1)-(16), 条证

#### 7.6.4 构造反例

正如在命题逻辑和谓词逻辑中一样, 为证明一个模态命题推论是无效的, 我们只需给出该推论形式的一个反例。给出一个模态命题推论形式的反例, 就是对该推论形式作出一种解释, 即对其中的命题常项作出规定, 从而使得该推论形式的所有前提为真而结论为假。下面我们就构造一些无效的模态命题推论的反例。

##### 【推论 1】

中国实现工业现代化是可能的;

中国实现农业现代化是可能的;

所以, 中国实现工业现代化并且实现农业现代化是可能的。

令: G: 中国实现工业现代化; N: 中国实现农业现代化。于是, 推论 1 可被符号化为:

$\Diamond G$

$\Diamond N$

$\therefore \Diamond (G \wedge N)$

为证明此推论形式无效，我们给出如下解释：

【解释 1】

G：明天下雨；

N：明天不下雨。

由此解释我们得到该推论形式的一个反例，即：

明天下雨是可能的；

明天不下雨是可能的；

所以，明天既下雨又不下雨是可能的。

显然，该推论的两个前提都是真的，而结论是假的。由此可以断定，推论 1 是无效的。

【推论 2】

如果小刚专业好并且英语好，那么他考上研究生，这是必然的；

小刚英语好；

所以，如果小刚专业好，必然地，他将考上研究生。

令：Z：小刚专业好；Y：小刚英语好；K：小刚考上研究生。推论 2 可符号化为：

$Z \wedge Y \rightarrow K$

Y

$\therefore Z \rightarrow K$

【解释 2】

Z：雪是白的；

Y：煤是黑的；

K：煤是黑的。

相对于该解释，该推论形式的反例是：

如果雪是白的并且煤是黑的，那么煤是黑的，这是必然的；

煤是黑的；

所以，如果雪是白的，必然地，煤是黑的。

不难看出，这个推论的两个前提都是真的而结论是假的。由此可以判定，推论 2 是无效的。

在以上两个反例中，我们是用具体命题对命题常项作解释的。这样构造的反例叫做**具体反例**。除了具体反例以外，在模态逻辑中还可以构造**抽象反例**。构造抽象反例时，不是用具体命题而是用其他命题常项对某些命题常项作解释。构造抽象反例需要依据模态逻辑的一些基本假设。这些假设是：

(i) 至少有一命题是偶然真的。具体地说，至少有一命题 P 是真的并且满足  $\Diamond \neg P \wedge \Diamond P$ 。这同时意味着，至少有一命题是偶然假的；即，至少有一命题  $\neg P$  是假的并且

满足  $\Diamond P \wedge \Diamond \neg P$ 。

(ii) 至少有一对命题是逻辑独立的；亦即至少有一对命题 **P** 和 **Q** 满足  $\neg(P \Rightarrow Q) \wedge \neg(Q \Rightarrow P)$ 。

根据以上假设，我们在构造反例时，可以不给出具体的偶然真的命题，具体的偶然假的命题，或具体的逻辑独立的命题，而仅仅规定某些命题常项具有这些性质。如，对于推论 1 和推论 2，我们还可构造如下的抽象反例：

【解释 1'】：

**A** 是一个偶然命题；

**G**: **A**；

**N**:  $\neg A$ 。

在该解释下，推论 1 成为：

$\Diamond A$

$\Diamond \neg A$

$\therefore \Diamond(A \wedge \neg A)$

既然 **A** 是一个偶然命题，所以  $\Diamond A$  和  $\Diamond \neg A$  都是真的；而结论中的  $A \wedge \neg A$  是一个矛盾式，故  $\Diamond(A \wedge \neg A)$  是假的。

【解释 2'】：

**A** 和 **B** 是一对逻辑独立的命题，并且 **B** 是一个真命题；

**Z**: **A**；

**Y**: **B**；

**K**: **B**。

在该解释下，推论 2 成为：

$A \wedge B \Rightarrow B$

**B**

$\therefore A \Rightarrow B$

由于  $A \wedge B$  逻辑蕴涵 **B**，并且 **B** 是真的，故两个前提都是真的。既然在该解释中，**A** 和 **B** 是逻辑独立的，故此结论是假的。

抽象反例和具体反例各有利弊。具体反例比较直观，但构造起来比较麻烦，有时还会在确定某个具体命题的模态性质上遇到疑难。与此相反，抽象反例不够直观，但构造起来比较方便，并且可以避免对具体命题的模态性质的关注。有时把构造反例的这两种方法结合起来似乎更为合适。如：

【推论 3】

$(L \Rightarrow K) \vee (H \Rightarrow K)$

$\Box(L \vee H)$

$\therefore \Box K$

【解释3】

L:  $A \vee \neg A$ ;

H: 煤是白的;

K: 煤是白的;

在该解释下,  $H \Rightarrow K$  为真, 故第一个前提为真。第二个前提相当于  $\Box (A \vee \neg A \vee H)$ , 逻辑等值于  $\Box (A \vee \neg A)$ , 而  $A \vee \neg A$  是一个逻辑真理, 故第二个前提也真。而结论  $\Box K$  为假。在这一解释中, 对 L 的解释用了命题常项, 对 H 和 K 的解释用了具体命题。

以上所构造的都是无效推论的反例, 我们还可构造无效公式的反例。通过构造一个公式的反例可以证明该公式不是模态逻辑的定理。如, 为证明

$$\Box(P \vee Q) \rightarrow \Box P \vee \Box Q$$

不是一个定理, 我们给出如下的解释:

【解释4】

A 是一个偶然的命题;

P: A;

Q:  $\neg A$ 。

相对于该解释, 上述公式的前件成为  $\Box (A \vee \neg A)$ , 显然是真的。而后件成为  $\Box A \vee \Box \neg A$ , 这等于说 A 不是必然真的就是必然假的。这与我们的解释即 A 是一个偶然命题相冲突, 故此后的件相对于该解释是假的。由于相对于该解释, 上述公式的前件为真而后件为假, 故上述公式是假的。这就证明了上述公式不是模态逻辑的定理。

在构造抽象反例时, 以下重言式常常被用到:

$$(A \vee \neg A) \vee B \leftrightarrow A \vee \neg A$$

$$(A \vee \neg A) \wedge B \leftrightarrow B$$

$$(A \wedge \neg A) \wedge B \leftrightarrow A \wedge \neg A$$

$$(A \wedge \neg A) \vee B \leftrightarrow B$$

以上第一个公式在通过解释3构造反例的过程中已经用到。

最后需要指出两点。其一是, 以上介绍的构造反例的方法不能将 T、S<sub>4</sub> 和 S<sub>5</sub> 这三个不同的模态命题逻辑系统区别开来。这就是说, 这种方法只能用于构造某些推论和公式的反例, 即这些推论和公式在这三个系统中都是无效的。构造反例的进一步的方法必须借助于可能世界模型。关于这一点将在下一节中有所讨论。其二是, 构造抽象反例所依据的基本假设的不可拒绝性在于, 如果拒绝这些基本假设, 那么就意味着否认偶然命题和逻辑独立命题的存在; 如果没有偶然命题和逻辑独立命题, 那么, 模态逻辑也就没有必要建立了。

## 习题 7.6

**一、证明下列推论的有效性。**

$$1. \diamond M$$

$$\therefore \Box(\diamond M \vee \diamond N)$$

$$2. \diamond A$$

$$\diamond B$$

$$\therefore \Box(\diamond A \wedge \diamond B)$$

$$3. \diamond D \Rightarrow C$$

$$\diamond D$$

$$\therefore \Box C$$

$$4. \Box(\Box R \vee S)$$

$$\neg \Box R$$

$$\therefore \Box S$$

$$5. \Box \diamond (J \Rightarrow \Box \neg K)$$

$$\diamond \diamond K$$

$$\therefore \Box \neg J$$

$$6. \diamond(L \vee \Box \neg T)$$

$$\diamond T$$

$$\therefore \diamond L$$

$$7. \diamond F \Rightarrow G$$

$$\diamond G \Rightarrow H$$

$$F$$

$$8. \Box \diamond(P \leftrightarrow \diamond Q)$$

$$\diamond \Box \neg Q$$

$$\therefore \neg \Box P$$

$$\therefore \Box H$$

$$9. \Box(\Box I \vee D)$$

$$\diamond(\neg I \wedge C)$$

$$\therefore \Box D$$

$$10. \Box \diamond(K \Rightarrow \Box(H \wedge F))$$

$$\Box \diamond \Box \neg H$$

$$\therefore \Box \neg K$$

**二、证明以下定理。**

$$1. \Box(P \vee \Box Q) \rightarrow \Box P \vee \Box Q$$

$$2. \Box P \vee \Box Q \rightarrow \Box(P \vee \Box Q)$$

$$3. \diamond(\Box P \vee \diamond Q) \rightarrow \Box P \vee \diamond Q$$

$$4. \Box(P \vee Q) \rightarrow \Box(\Box P \vee \diamond Q)$$

$$5. \diamond(\diamond P \rightarrow \diamond Q) \rightarrow (\diamond P \rightarrow \diamond Q)$$

$$6. \diamond(\diamond P \rightarrow \diamond Q) \rightarrow (\diamond P \rightarrow \diamond(Q \vee R))$$

$$7. \diamond(\diamond P \rightarrow \diamond(Q \vee R)) \rightarrow (\diamond P \rightarrow \diamond(\Box \neg Q \rightarrow \diamond R))$$

**三、用构造反例的方法证明以下推论是无效的。**

1. 事物具有内在矛盾性是必然的；

事物发展变化是可能的；

所以，事物具有内在矛盾性并且发展变化是必然的。

2. 如果太阳从东方升起，那么  $2+2=4$ ；

太阳从东方升起是必然的；

所以， $2+2=4$  是必然的。

3. 如果太阳从东方升起，那么  $2+2=4$ ；

太阳从东方升起是可能的；

所以， $2+2=4$  是可能的。

4.  $\Box(M \vee N)$

$\neg M$

$\therefore \Box N$

5.  $\Box(D \vee E)$

$\Diamond \neg D$

$\therefore E$

6.  $(J \Rightarrow K) \vee (H \Rightarrow O)$

$\Box J \vee \Box H$

$\therefore \Box(K \vee O)$

7.  $(W \Rightarrow V) \vee (T \Rightarrow V)$

$\Box(W \vee T)$

$\therefore \Box V$

四、构造下列公式的反例。

1.  $\Box P \rightarrow \Box(P \wedge Q)$

2.  $\Diamond(P \vee Q) \rightarrow \Diamond P$

3.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg \Diamond Q \rightarrow \neg \Diamond P)$

4.  $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Diamond \neg Q \rightarrow \Diamond \neg P)$

5.  $(\neg \Diamond P \wedge \neg \Diamond Q) \rightarrow \Diamond(P \vee Q)$

6.  $\Diamond P \wedge \neg \Diamond Q \rightarrow \neg \Diamond(P \vee Q)$

7.  $P \rightarrow (Q \Rightarrow P)$

8.  $\neg P \rightarrow (P \Rightarrow Q)$

9.  $(P \wedge Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$

10.  $(P \wedge Q \Rightarrow R) \rightarrow (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$

## 7.7 各个系统的可能世界模型

我们已经讨论了三个模态命题逻辑系统即  $T$ 、 $S_4$  和  $S_5$ ，并且指出这三个系统在推演规则方面的联系和区别。然而，我们尚未讨论这三个系统在直观意义上的联系和区别。一个模态逻辑系统的直观意义在一定程度上可以显示为一个可能世界模型。

### 7.7.1 可能世界之间的可达性关系

在本章第一节中，我们曾借助于“可能世界”给出命题的必然性和可能性的定义。说一个命题是必然真的，就是说，该命题在所有可能世界中是真的；说一个命题是可能真的，就是说，该命题至少在一个可能世界中是真的。然而，这些定义还不够严格。要给出严格的定义，还须考虑可能世界之间的可达性关系。

在模态逻辑中，可能世界之间的最基本关系是“可达性”（accessibility）。一个可能世界  $W_1$  可达另一个可能世界  $W_2$ ，当且仅当， $W_2$  中的真命题在  $W_1$  中是可能真的。这也就是说， $W_2$  相对于  $W_1$  是可能的。请注意，说  $W_1$  可达  $W_2$ ，并不意味着， $W_2$  可达  $W_1$ 。这就是说，可能世界之间的可达性关系并不一定是对称的。在已知  $W_1$  可达  $W_2$  的情况下，其逆关系有两种可能性，即  $W_2$  可达  $W_1$  或者  $W_2$  不可达  $W_1$ 。对于三个以上的可能世界，它们之间的可达性关系还有可传递性方面的区别。由于可能世界的数目以及可能世界之间的可达性关系可以是不同的，这就决定了可能世界的模型是多种多样的。

有了“可达性”概念，我们就可以更为精确地定义命题的必然性和可能性。即：

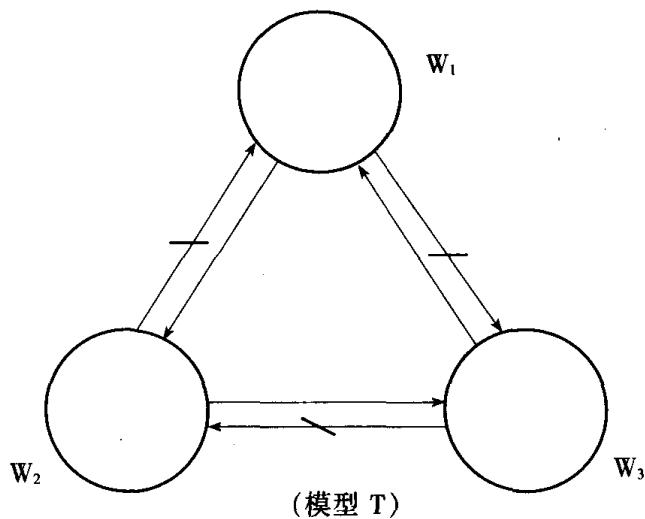
一个命题相对于一个可能世界是必然的，当且仅当，在该可能世界可达的每一个可能世界中，该命题是真的。

一个命题相对于一个可能世界是可能的，当且仅当，至少在一个该可能世界可达的可能世界中，该命题是真的。

由于不同的世界所可达的世界可以是不同的，所以，一个世界中的必然命题或可能命题在另一个世界中可以成为不必然或不可能的。这就决定了，对于不同的可能世界模型，模态逻辑关系也是有所不同的。 $T$ 、 $S_4$  和  $S_5$  这三个不同的模态逻辑系统分别反映了三类不同的可能世界模型。

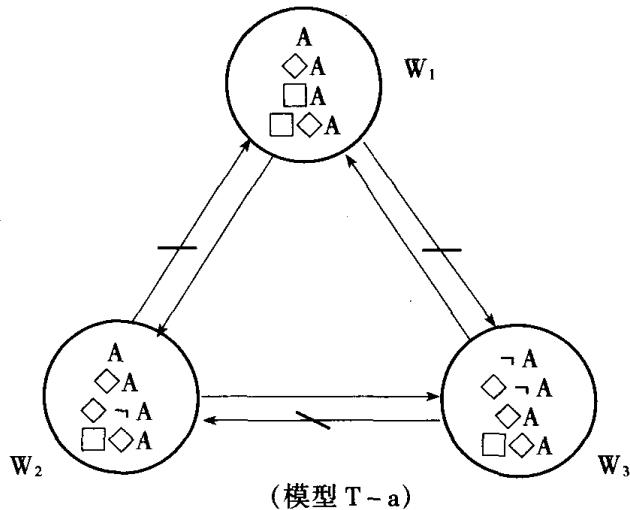
### 7.7.2 系统 T 的可能世界模型

一个系统的可能世界模型具有这样的性质：该系统的所有定理在该模型中都是真的，而其他不同系统的定理，至少有一部分在该模型中是假的。我们先考虑系统  $T$  的可能世界模型即模型  $T$ 。模型  $T$  是：



以上模型中的三个圆表示三个可能世界，即  $W_1$ 、 $W_2$  和  $W_3$ 。可能世界之间的“ $\rightarrow$ ”表示“可达”关系，“ $\not\rightarrow$ ”表示“不可达”关系。从这一模型中我们看到，每两个可能世界之间的可达性关系不是对称性的：如果第一个可达第二个，那么并非第二个可达第一个。而且，这三个可能世界之间的关系也不是传递性的：如果第一个可达第二个，第二个可达第三个，那么，并非第一个可达第三个。在这个模型中，可达性关系具有自返性，即一个可能世界可达它自己。在这样一个既非对称性又非传递性但却具有自返性的可能世界模型中，系统 T 的所有定理都成立。但是， $S_4$  和  $S_5$  的一些定理却不能成立。我们不妨在这一模型中构造  $S_4$  和  $S_5$  的一些定理的反例。

我们知道， $S_4$  区别于 T 的特征的公式是“ $\Box P \rightarrow \Box \Box P$ ”， $S_5$  区别于 T 和  $S_4$  的特征公式是“ $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$ ”。然而，在模型  $T - a$  中，这两个公式均不成立，我们先看一下，模型  $T - a$  是怎样构造的。



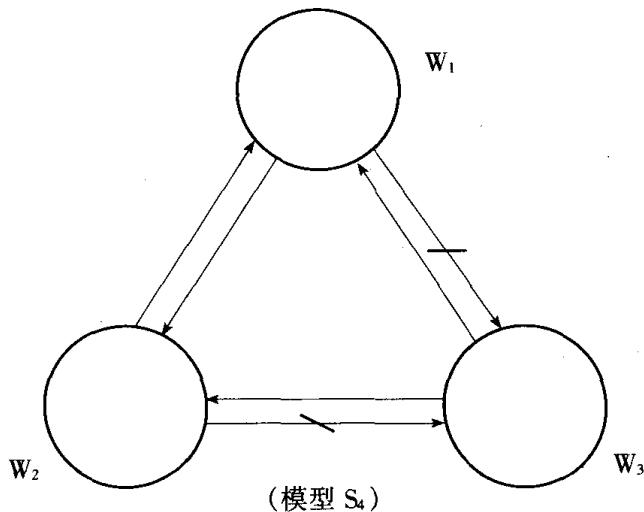
首先规定，命题 A 在  $W_1$  和  $W_2$  中为真而在  $W_3$  中为假，故  $W_1$  和  $W_2$  有命题 A，而  $W_2$  有命题 A，而  $W_3$  有命题  $\neg A$ 。既然在  $W_1$  中 A 真，并且  $W_1$  可达自己，因此在  $W_1$  的可达世界中，至少有一使得 A 真，故在  $W_1$  中 A 可能真，因而有  $\Diamond A$ 。同理， $W_2$  中也有  $\Diamond A$ ， $W_3$  中则有  $\Diamond \neg A$ 。 $W_1$  可达的不同于自身的可能世界只有  $W_2$ ，而  $W_1$  和  $W_2$  中都有 A，即  $W_1$  的所有可达世界都有 A，故在  $W_1$  中 A 必然真，因而有  $\Box A$ 。但是  $W_2$  中没有  $\Box A$ ，因为它的可达世界  $W_3$  中没有 A。不过  $W_2$  中有  $\Diamond \neg A$ ，既然  $W_3$  中有  $\neg A$ 。 $W_3$  中有  $\Diamond A$ ，而无  $\Box \neg A$ ，因为它的可达世界  $W_1$  中有 A 而无  $\neg A$ 。由于这三个可能世界中都有  $\Diamond A$ ，故三个可能世界中都有  $\Box \Diamond A$ 。当然，我们还可以继续在这些可能世界中填入新的命题，如  $\Diamond \Diamond A$ 、 $\Diamond \Box \Diamond A$  等。但这对构造  $S_4$  和  $S_5$  的特征公式的反例来说已经没有必要。

我们看到，在  $W_1$  中，有  $\Box A$  而无  $\Box \Box A$ 。 $W_1$  中之所以无  $\Box \Box A$ ，是因为它的可达世界  $W_2$  中没有  $\Box A$ 。这一事实表明， $S_4$  的特征公式  $\Box P \rightarrow \Box \Box P$  在该模型中不成立。我们还看到，在  $W_3$  中有  $\Diamond \neg A$  却没有  $\Box \Diamond \neg A$ 。 $W_3$  中之所以没有  $\Box \Diamond \neg A$ ，是因为  $W_3$  的可达世界  $W_1$  中没有  $\Diamond \neg A$ 。 $W_1$  中没有  $\Diamond \neg A$  是因为  $W_1$  的所有可达世界中都没有  $\neg A$ 。这表明， $S_5$  的特征公式  $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$  在该模型中不成立。值得指出的是，在这三个世界中都有  $\Diamond A$  和  $\Box \Diamond A$ ，但这并不表明  $S_5$  的特征公式成立。因为要证明该公式在此模型中不成立，只要给出一个反例就够了。

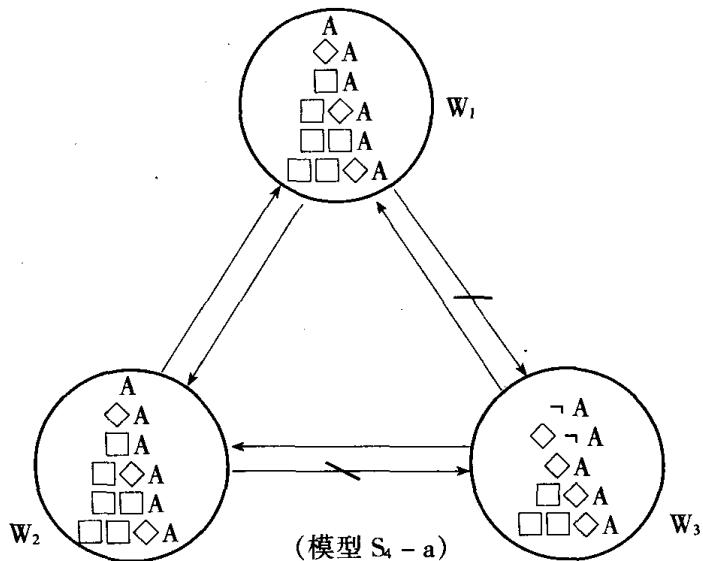
模型  $T - a$  使得  $S_4$  和  $S_5$  的特征公式在其中不成立。我们把模型  $T - a$  叫做  $S_4$  和  $S_5$  的特征公式的模型反例。模型  $T - a$  是模型 T 的一个特殊例子，即在模型 T 中填入适当的命题形成的。模型 T 则是系统 T 的一般模型，它是一个模型类， $T - a$  只是其中的一个成员。我们通过模型  $T - a$  证明了  $S_4$  和  $S_5$  的特征公式在模型 T 中有反例，因而对于模型 T 不具有普遍性，这也表明  $S_4$  和  $S_5$  不能反映模型 T 的模态逻辑关系。

### 7.7.3 系统 $S_4$ 和 $S_5$ 的可能世界模型

系统  $S_4$  和  $S_5$  的可能世界模型分别称为模型  $S_4$  和模型  $S_5$ 。模型  $S_4$  是：



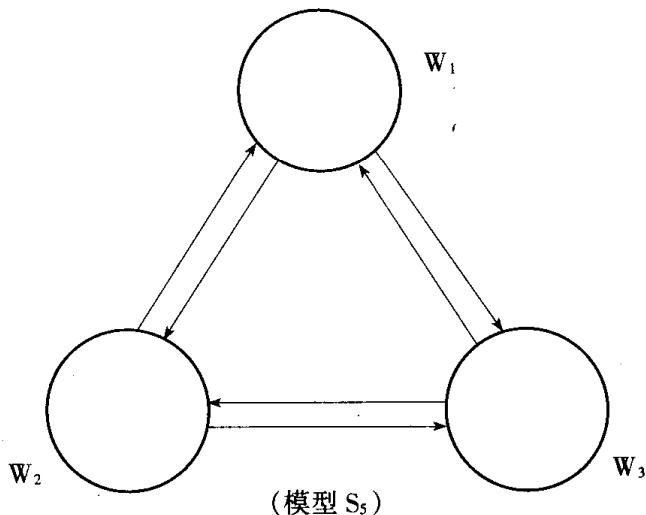
模型  $S_4$  与模型 T 的共同之处是，二者的可达性关系都具有自返性和非对称性。它们的区别是，模型 T 的可达性关系具有非传递性，而模型  $S_4$  的可达性关系则具有传递性，即： $W_3$  可达  $W_2$ ， $W_2$  可达  $W_1$ ，因而  $W_3$  可达  $W_1$ ； $W_3$  可达  $W_1$ ， $W_1$  可达  $W_2$ ，因而  $W_3$  可达  $W_2$ 。在模型  $S_4$  中是不能构造出系统  $S_5$  的任何定理的反例的，但却可以构造出  $S_5$  的一些定理反例。下面是一个关于  $S_5$  的特征公式“ $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$ ”的模型反例即  $S_4 - a$ 。



在模型  $S_4 - a$  中， $W_3$  中有  $\Diamond \neg A$  而无  $\Box \Diamond \neg A$ 。 $W_3$  中之所以没有  $\Box \Diamond \neg A$ ，是因为它的两个可达世界中均无  $\Diamond \neg A$ 。由此可见， $S_5$  的特征公式  $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$  在此模型中不成立；这表明， $S_5$  不能反映模型  $S_4$  的模态逻辑关系。与此相反，我们在该模型中却看到  $S_4$  的特征公式  $\Box P \rightarrow \Box \Box P$  的两个正例，即凡有  $\Box A$  的世界 ( $W_1$  和  $W_2$ ) 中都有  $\Box \Box A$ ，凡有  $\Box \Diamond A$  的世界 ( $W_1$ 、 $W_2$  和  $W_3$ ) 中都有  $\Box \Box \Diamond A$ ；但却没有发现该公式的

任何反例。

模型  $S_5$  是：



模型  $S_5$  区别于模型  $T$  和模型  $S_4$  的特征在于，它的可达性关系同时具有自返性、对称性和传递性。系统  $S_5$  的所有定理在此模型中都成立。下面我们给出特征公式 “ $\Box P \rightarrow \Box \Box P$ ” 和 “ $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$ ” 在此模型中都成立的证明。

在模型  $S_5$ ，说  $\Box P \rightarrow \Box \Box P$  在一个可能世界如  $W_1$  中不成立，就是说，在  $W_1$  中  $\Box P$  真而  $\Box \Box P$  假。在  $W_1$  中  $\Box P$  真，当且仅当，在  $W_1$  的每一可达世界中  $P$  真。在  $W_1$  中  $\Box \Box P$  假，当且仅当，至少在  $W_1$  的一个可达世界  $W_i$  ( $W_1$  或  $W_2$  或  $W_3$ ) 中  $\Box P$  假。在  $W_i$  中  $\Box P$  假，当且仅当，至少在  $W_i$  的一个可达世界中  $P$  假。在模型  $S_5$  中，任何世界的可达世界都是相同的，当然  $W_1$  和  $W_i$  的可达世界也是相同的。因此，上面带有重点符的两个结论构成一个逻辑矛盾，即：在所有世界中  $P$  真并且至少在一个世界中  $P$  假。这表明，说  $\Box P \rightarrow \Box \Box P$  在  $W_1$  中不成立，就会导致逻辑矛盾，因此  $\Box P \rightarrow \Box \Box P$  在  $W_1$  中成立。同理，该公式在  $W_2$  和  $W_3$  中也成立。

说  $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$  在  $W_1$  中不成立，就是说，在  $W_1$  中  $\Diamond P$  真而  $\Box \Diamond P$  假。在  $W_1$  中  $\Diamond P$  真，当且仅当，至少在  $W_1$  的一个可达世界中  $P$  真。在  $W_1$  中  $\Box \Diamond P$  假，当且仅当，至少在  $W_1$  的一个可达世界  $W_i$  中  $\Diamond P$  假。在  $W_i$  中  $\Diamond P$  假，当且仅当，在  $W_i$  的每一可达世界中  $P$  假。在模型  $S_5$  中，任何世界的可达世界都是相同的，当然  $W_1$  和  $W_i$  的可达世界也相同。因此，以上带重点符的两个结论构成一个逻辑矛盾，即至少在一个世界中  $P$  真并且在所有世界中  $P$  假。这表明，说  $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$  在  $W_1$  中不成立会导致逻辑矛盾，因而该公式在  $W_1$  中成立。同理，该公式在  $W_2$  和  $W_3$  中也成立。

从以上讨论我们看到，系统  $T$  的可能世界模型的特征是，其可能世界之间的可达性关系只具有自返性而不具有对称性和传递性。系统  $S_4$  的可能世界模型的特征是，其

可能世界之间的可达性关系具有自返性和传递性但却不具有对称性。系统  $S_5$  的可能世界模型的特征是，其可能世界之间的可达性关系同时具有自返性、对称性和传递性。<sup>①</sup>

至此，我们已经讨论了三个模态命题逻辑系统。事实上，现已建立的模态命题逻辑系统已经超过十个。人们不禁要问，在这众多的模态逻辑系统中，是否存在一个最好的系统呢？对于这一问题需要从两个方面来回答。从纯形式方面来看，这些系统一样好，因为它们不会导致逻辑矛盾。但是从应用方面来看，这些系统往往会有优劣之分。当然，相对于不同的应用领域，评价的结果往往是不同的。

---

<sup>①</sup> 顺便提及另一重要的模态逻辑系统，其特征公式是“ $P \rightarrow \Box \Diamond P$ ”，其可能世界模型与模型  $S_4$  是对称的，即：其可能世界之间的可达性关系具有自返性和对称性而不具有传递性。这一模态逻辑系统通常被称为“系统 B”。

# 第八章 命题逻辑的元理论

## 8.1 对象语言与元语言、常项变项与变项变项

### 8.1.1 对象语言与元语言

在通常情况下，用一个语词表示语言之外的事物时，我们说这个语词被使用；当谈论这个语词本身时，则这个语词被提及。这个语词被提及是借助于这个语词的名称，表示一个语词的名称的惯用方法是把这个语词放在引号之中。如：

北京是中国首都。

这句话中的“北京”是被使用，因为它表示语言之外的某一城市。

“北京”由两个字组成。

这句话中“北京”是被提及，因为所谈论的是北京的名称，亦即“北京”这个语词本身。

然而，在有些时候，我们根本不讨论语言之外的东西，而是讨论某种语言。这时便涉及两种语言即对象语言和元语言。对象语言是被讨论的语言，元语言是用于讨论对象语言的语言。相应地，上面关于语词的使用和提及的区分变成为：当一个符号表示对象语言的语词或语句时，这个符号被使用；当谈论这个符号本身时，这个符号被提及；被提及的符号属于元语言，而不属于对象语言。这里谈的是“符号”的提及和使用，符号包括语词或语句，因而更具普遍性和抽象性，这对于对象语言和元语言的讨论是适合的。

例如，用汉语写的英语课本，英语是对象语言而汉语是元语言。其中可能有如下内容：

英语的不定冠词包括 a 和 an，在这里，“a”不表示英文的第一个字母，而是表示“一个”、“某个”等意思。

在这段话中，“a”的第一次出现是被使用，因而没有放在引号中；“a”的第二次出现是被提及，因而被放在引号中。这是因为，前者是指对象语言即英语中的一个语词，而后者则是指 a 这个符号本身。放在引号中的 a 只是元语言中的一个成分，而不属于对象语言。没有放在引号中的 a 虽然是对象语言的成分，但却出现在汉语表述的语境之中；这也就是说，没有放在引号中的 a 是出现在元语言中的对象语言成分。请注意，

对象语言不含元语言的成分，但元语言可以包含对象语言的成分。正如一本英文书不包含汉语，但用汉语写的英语课本既包含汉语，又包含英语。

对象语言的某一个成分通过加引号的方法成为元语言成分，这个元语言成分是相应的对象语言成分的专名。除此之外，对象语言的一类成分可以由元语言的一个变项来表示，这个变项被称为元变项 (metavariable)，它是相应的那一类对象语言成分的通名。元变项的值域是对象语言中与之相对应的那类成分，但元变项本身不属对象语言，而属于元语言。在以下讨论中，我们将用对象语言某个成分的黑体字表示相应的元变项，其值域是相应的那一类对象语言成分。如“P”和“Q”等是对象语言的命题常项，我们把“**P**”和“**Q**”等作为元变项，它们各自表示对象语言的任何一个命题常项。**P**不仅可以表示 P，也可表示 Q、R 和 S 等；**Q**也是如此。再如，“x”“y”“z”表示对象语言（如谓词逻辑）的个体变项，“**x**”“**y**”“**z**”则是元变项，它们各自表示对象语言的任何一个个体变项。**x**不仅可以表示 x，还可表示 y 或 z；**y**也是如此。另外，还有一些元变项的值域不在对象语言，而在元语言。对于这样的元变项，我们用一个全新的字母而不用黑体字。如以集合为变域的元变项通常记为“ $\Gamma$ ”。

### 8.1.2 常项变项与变项变项

现在，我们有必要区分常项变项和变项变项。对二者的区分和使用在前面的章节中实际上都已涉及，只是把它们简称为“常项”和“变项”。从自然语言的角度讲，常项相当于专有名词即专名，如“北京”；变项相当于普通名词即通名，如“城市”。在符号逻辑中，无论专名还是通名都被加以符号化，而每一个符号一般不会只代表惟一的名称，因而它们都具有了变项的性质。相应地，通常所说的常项和变项在符号逻辑中成为常项变项和变项变项。下面我们将进一步讨论常项变项和变项变项之间的区别特征。先以数学中的圆方程为例。圆方程是：

$$x^2 + y^2 = r^2$$

其中  $r$  是常项变项，它代表某一圆半径的长度； $x$  和  $y$  是变项变项，它们可以在变域  $[-r, r]$  中任意取值，而无需用某一特定值代入。如，令  $r=5$ ，那么圆方程成为：

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

它表示一个圆心在原点、半径为 5 的圆。但是，如果用某一特定值如 3 和 4 分别代入  $x$  和  $y$ ，上式成为：

$$3^2 + 4^2 = r^2$$

这便不是一个圆方程了。我们看到，对于不同半径的圆，圆方程中的  $r$  可以代表不同的数值，在这个意义上，它是一个变项；但就某一特定圆而言，它的数值是确定的，在这个意义上，它是一个常项。总之，圆方程中的  $r$  是一个代表常项的变项，即常项变项。与之不同，圆方程中的  $x$  和  $y$  在任何情况下都不能被某一特定值取代，它们的本性就在

于同时考虑变域中的所有值；在这个意义上， $x$  和  $y$  是代表变项的变项，即变项变项。

以上是常项变项和变项变项在内容上的区别。常项变项和变项变项在形式上的区别是：常项变项不可以受量词的约束，而变项变项却可以受量词的约束（为了行文方便，我们把常项变项简称为“常项”，把变项变项简称为“变项”）。变项可以受量词的约束，但并非总是受量词的约束。被量词约束的变项被称为“约束变项”，未受量词约束的变项被称为“自由变项”。

常项的作用仅仅是在不同的语境下代表不同的具体对象，而不涉及诸多具体对象的整体情况。与之不同，变项是相对于变域而言的，离开变域的变项就失去意义，因此，变项总是涉及变域的整体情况，特别是当一个变项被量词约束的时候。一个变项一旦被量词约束，相应的命题便成为全称命题或存在命题，统称为“普遍命题”。普遍命题是对论域中的成员做出整体性的断定。正因为此，对普遍命题中的约束变项是不能作代入的。有时所说的对约束变项作代入，实际上是把约束变项变成自由变项之后再作代入，其代入过程是对普遍命题的一次例示（instantiation），其代入结果是普遍命题的一个例子。

含有自由变项的公式叫做“开语句”，开语句不是一个命题而是一个命题函项，其中的自由变项相当于一个空位，是有待填充的。当把常项代入自由变项之后，一个开语句便成为一个命题。与之不同，一个约束变项不是一个空位，因而对它不能作代入；另一方面，一个包含约束变项而不包含自由变项的公式是一个命题，因而对约束变项也不必作代入。

还以圆方程为例。从逻辑上讲，对这个方程的严格表达应是：在区间  $[-r, r]$  上

$$\forall x \exists y (x^2 + y^2 = r^2)$$

意为：对于闭区间  $[-r, r]$  中的任一  $x$ ，都有  $y$  使得， $x^2 + y^2 = r^2$  成立。在这里， $x$  和  $y$  都是约束变项。只有从这一公式去掉量词  $\forall x$  和  $\exists y$  之后的  $x^2 + y^2 = r^2$  才是一个开语句，其中的  $x$  和  $y$  成为自由变项。也只有在这时，才能用 3 和 4（或其他什么数字）分别代入  $x$  和  $y$ ，从而得到  $3^2 + 4^2 = r^2$ 。这后一个公式只是通过对圆方程进行例示所得的一个例子，不再是圆方程。就圆方程而言，其中的  $x$  和  $y$  是约束变项，因而永远不能被常项代入。

在一般的数学文献中，圆方程以及其他一些方程或定理的量词  $\forall x$  和  $\exists y$  常常被省略掉，但量词实际上是存在的，否则，圆方程或定理就不表达命题，因而没有真假可言。数学文献和日常语言时常省略量词的做法给人们造成一种错觉，似乎含有自由变项的公式可以独立存在。但从逻辑上讲，含有自由变项的公式只是一个开语句亦即一个命题函项，而不是一个命题，因而不能作为一个命题而独立存在。开语句的逻辑功能是：当由一个含有常项的单称命题转化为一个含有约束变项的普遍命题的时候，开语句成为这一转化的中介或过渡；反之亦然。正因为这样，在本书所采纳的逻辑系统中，一个推

演或证明中的每一行都不允许出现开语句。<sup>①</sup>

常项不可以受量词的约束，因为它的惟一作用是代表某个具体对象，而不涉及变域的整体情况。正如圆方程中的  $r$  不能被量词约束。如果对象语言中的一个符号在任何时候都没有相应的量词可以约束它，<sup>②</sup> 那么它就不是对象语言的一个变项，而只能是对象语言的一个常项。但是，对象语言的一类常项可以成为元语言某个变项的值，这个变项就是元变项了。反之，如果一个符号在对象语言中可以被约束，那么它就是对象语言的一个变项，而不是元变项。

本书的讨论范围（即对象语言）限于一阶逻辑，并且只有一部分个体词可被量词加以约束，而另一部分个体词以及所有命题符号和谓词符号都不可以被量词约束。因此，只有个体词分为个体变项和个体常项，而命题符号和谓词符号只能作为常项，而不能作为变项（确切地说，只能作为常项变项而不能作为变项变项）。<sup>③</sup> 不过，在元语言中，相应于命题符号和谓词符号的元变项都是存在的，因为在元语言中，它们都可以被“所有”、“有些”这类量词加以约束。如，在讨论一阶逻辑的元语言中，我们可以说“所有命题如何如何”，也可以说“有些谓词如何如何”；但在一阶逻辑系统中却没有量词能够约束命题符号或谓词符号。

我们在前一小节中谈到一个语词或符号被使用和被提及的区别。就对象语言和元语言而言，当一个符号表示对象语言的语词或语句时，这个符号被使用；当谈论这个符号本身时，这个符号被提及；表示一个符号被提及的惯用方法是把这符号放在引号中；被提及的符号属于元语言，而不属于对象语言。现在我们进一步说，被放在引号中的符号是这个符号在元语言中的专名即元专名，亦即元常项。与之不同，元变项不是表示对象语言的某一个符号，而是表示对象语言的某一类符号。相应地，元变项不是被放在引号中，而是用与对象语言某类符号相应的黑体字（或用其他什么方式）来体现。元变项也就是元通名。<sup>④</sup>

① 也有不少逻辑系统是允许开语句出现在证明过程中的，但是必须附加相应的条件限制，因而使推演变得复杂。本书不采用这种复杂的做法。

② 这里强调“在任何时候”是为了把常项和自由变项相区别。自由变项虽然也不受量词约束，但是自由变项可以受量词约束从而成为约束变项。

③ 由于常项实际上是常项变项，因此，在某种意义上常项也可作为自由变项来对待，同时系统的其他部分必须作相应的调整。有些逻辑系统正是这样做的，在那里，我们所说的个体常项、谓词常项和命题常项都被作为自由变项。

④ 这里只把加引号的作用限定为对一个词句的提及。然而，在自然语言中，对一个词句加引号除了提及的作用外还有分组的作用。区分加引号的这两种不同的作用，对于我们澄清某些问题是十分重要的。具体分析请参阅本书第二版前言关于变项和常项的讨论。

## 习题 8.1

**一、指出以下哪些命题是真的，哪些命题是假的。**

1. 在通常情况下，用一个语词表示语言之外的事物时，我们说这个语词被使用；当谈论这个语词本身时，则这个语词被提及。
2. 对象语言和元语言都讨论语言之外的事物。
3. 对象语言和元语言而言，当一个符号表示对象语言的语词或语句时，这个符号被使用；当谈论这个符号本身时，这个符号被提及；被提及的符号属于元语言。
4. “马”是马的名称。
5. “蛇”是一种爬行动物。
6. 林由两个木组成。
7. 众由许多人组成，而不限于三个人。
8. “沪”是上海的简称，与“上海”意义相同。

**二、回答下列问题。**

1. 变项变项和常项变项的区别是什么？在什么意义上，常项变项也是一种变项？
2. 指出以下数学公式中哪些符号是常项变项，哪些符号是变项变项。
  - a.  $ax + bx = (a + b)x$  (合并同类项)
  - b.  $y = kx + b$  (斜截式直线方程)
3. 以上数学公式是开语句还是普遍命题？若是普遍命题，请把其中被省略了的量词补上，从而使其中的“自由变项”成为约束变项。
4.  $x$ 是一个元变项，现将上面的合并同类项公式改为： $a\mathbf{x} + b\mathbf{x} = (a + b)\mathbf{x}$ 。请问其意义有何变化？
5. 谜语“目字加两点，不做贝字猜”的谜底是“賀”。这个谜语的惑人之处在哪里？

## 8.2 SL 的语法

### 8.2.1 SL 的基本语法

本书的第二章和第三章讨论命题逻辑。在那里我们着重讨论命题逻辑的具体技术，而没有对命题逻辑系统的整体性质给以详细地说明。本章则专门讨论命题逻辑系统的整体性质。关于一个逻辑系统的整体性质的理论叫做这个逻辑系统的元理论。

我们给出的命题逻辑系统是一种符号系统，它的一个突出特征是借助于人工符号语

言来讨论自然语言的命题推论。与自然语言相比，符号语言的优点是具有较高程度的精确性和可操作性，从而成为研究自然语言的一种有效途径；它的缺点是损失了自然语言的一部分丰富性。为了扬长避短，每一符号逻辑系统都把自己的研究目标限定于自然语言推论的某一领域，而不奢望覆盖自然语言推论的全部逻辑功能。命题逻辑系统只研究以命题为最小单位的推论，而不深入到命题常项内部的词项之间的结构。为此，它有一套相应的符号语言。这种为命题逻辑而设的符号语言记为“SL”（即“Sentential Logic”的缩写）。<sup>①</sup>

符号语言有语法（syntax）和语义（semantics）之分。语法只涉及符号语言的纯粹形式，而不涉及它的内容；语义则在一定程度上涉及符号语言的内容。符号语言的语法包括：初始符号、由初始符号构成适当的符号序列的规则即形成规则、由一种形状的符号序列变为另一种形状的符号序列的规则即变形规则等。一种符号语言中的适当的符号序列叫做该语言的“合式公式”（well-formed formula，缩写为“wff”）。符号语言的初始符号相当于自然语言的语词，合式公式相当于自然语言的合乎句法的语句，符号语言的变形规则相当于自然语言的推论规则。自然语言的语法规则一般不把推论规则包含在内，这使得一些关于符号逻辑的文献只把初始符号和形成规则放在语法的范围内，而把变形规则单独列出来。我们则把变形规则及其相应的元定理也放在语法的范围之内。

尽管从原则上讲，符号语言的语法可以完全独立于语义，但是实际上人们构造符号语言的时候总是以某种语义为目标的，即让这种符号语言可以精确地表达某种语义；这也就是说，相对于某一逻辑系统，人们实际给出的语法往往或多或少地包含着语义。就命题逻辑的符号语言 SL 来说，初始符号包括代表简单命题的符号、由以构造复合命题的联结词的符号和一些辅助性符号。形成规则就是由简单命题构成复合命题的递归定义，变形规则就是由一组命题得出另一命题的推演规则。这里所涉及的“命题”、“复合命题”、“联结词”等都含有语义的成分。以下是 SL 的语法的具体内容。

### 一、初始符号：

1. 命题常项：从 A 到 Z 的大写字母（带或不带正整数下标）。
2. 联结词： $\neg$ ， $\vee$ ， $\wedge$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$ 。
3. 辅助符号：(, )。

### 二、形成规则：

1. 每一个命题常项是一个命题。
2. 如果  $P$  是一个命题，那么  $\neg P$  是一个命题。

<sup>①</sup> 关于逻辑系统的标记并无一定之规。有些文献把命题逻辑的符号语言记为“PL”，即“Propositional Logic”的缩写。我们则把“PL”作为谓词逻辑的符号语言的标记，即“Predicate Logic”的缩写，而把“SL”作为命题逻辑的符号语言的标记。

3. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \wedge Q)$  是一个命题。
4. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \vee Q)$  是一个命题。
5. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \rightarrow Q)$  是一个命题。
6. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \leftrightarrow Q)$  是一个命题。
7. 只有通过应用或重复应用以上项目的一条或多条而形成的符号式是命题。（习惯上，由此构成的公式的最外边一对括号可以省去。）

### 三、推演规则（变形规则）：

包括八条整推规则、十条置换规则、条件证明规则和间接证明规则。这些规则在第三章中都已给出，故在此从略。不过，我们有必要以更为严格的方式对这个推演系统给予进一步的讨论和说明。

那二十条推演规则在 SL 之内构成一个推演系统，我们把这个推演系统记为“SC”（即“Sentential Calculus”的缩写）。不同命题逻辑系统采用不同的推演规则，SC 只是诸多命题逻辑系统中的一个。SC 的一个推演是由 SL 的一系列命题构成的，其中每一个命题以三种方式之一出现：作为一个前提，作为一个假设，或者由在先的命题通过应用 SC 的推演规则得出。每一个假设的出现伴随一个由两条短横线连接一条竖线构成的区域，这个区域叫做该假设的假设域。一个假设以及处于该假设域的每一个命题都隶属于该假设。每一个假设的假设域内的推演构成一个由该假设引导的子推演。如果由一个假设  $P$  引导的子推演处于另一假设  $Q$  的假设域之内，那么隶属于  $P$  的所有命题也都隶属于  $Q$ 。

这里涉及命题集合的概念。SL 的一个命题集是以 SL 的命题为其成员的。表达一个命题集合的惯常方式是把该集合的命题逐一列出，用逗号隔开，并放在一对曲括号中。如： $\{B, A \vee D, D \rightarrow B\}$  表示由  $B$ 、 $A \vee D$  和  $D \rightarrow B$  这三个命题构成的命题集，这三个命题是这个命题集的全部成员。至少有一个成员的集合叫非空集，没有任何成员的集合叫空集，记为“ $\emptyset$ ”。我们用“ $\Gamma$ ”（gamma）或  $\Gamma'$  表示 SL 的任一命题集。

令  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  分别表示两个集合。如果  $\Gamma$  的每一成员都是  $\Gamma'$  的成员，那么， $\Gamma$  是  $\Gamma'$  的一个子集。请注意：①每一个集合是它自己的一个子集；②空集是任何集合的子集，既然空集没有一个成员不是其他集合的成员。此外，如果集合  $\Gamma$  是集合  $\Gamma'$  的一个子集，那么  $\Gamma'$  就是  $\Gamma$  的一个母集。例如，命题集合  $\{A, B, C\}$  有如下八个子集，即， $\{A, B, C\}$ 、 $\{A, B\}$ 、 $\{B, C\}$ 、 $\{A, C\}$ 、 $\{A\}$ 、 $\{B\}$ 、 $\{C\}$  和空集  $\emptyset$ 。 $\{A, B, C\}$  是这八个集合的共同母集，当然，每一集合都还有它们各自的母集。

以下证明还涉及“并集”的概念。集合  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  的并集表示为：

$$\Gamma \cup \Gamma'$$

一个命题  $P$  属于命题集  $\Gamma \cup \Gamma'$ ，当且仅当， $P$  属于  $\Gamma$  或者属于  $\Gamma'$ 。这也就是说， $\Gamma \cup \Gamma'$  既包含  $\Gamma$  的成员又包含  $\Gamma'$  的成员。因此， $\Gamma$  和  $\Gamma'$  都是其并集的子集。例如， $\Gamma =$

$\{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ ,  $\Gamma' = \{\mathbf{R}, \mathbf{S}\}$ , 那么,  $\Gamma \cup \Gamma' = \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}\}$ ; 再如,  $\Gamma = \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ ,  $\Gamma' = \{\mathbf{P}\}$ , 那么,  $\Gamma \cup \Gamma' = \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ 。这后一个例子表明, 当一个集合的成员全都属于另一个集合时, 这两个集合的并等于那个大的集合。由于空集  $\emptyset$  包含于任何集合, 所以, 对于任何集合  $\Gamma$ ,  $\emptyset \cup \Gamma = \Gamma$ 。

【定义】SL 的一个命题  $\mathbf{P}$  在 SC 中是从命题集  $\Gamma$  可推演的, 当且仅当, 存在一个 SC 的推演, 它的所有前提都是  $\Gamma$  的成员, 并且  $\mathbf{P}$  在该推演中至少有一次出现不隶属于任何假设, 亦即  $\mathbf{P}$  至少有一次出现不在任何假设域中。

这是关于“SC 可推演”的定义。 $\mathbf{P}$  是从  $\Gamma$  可推演的, 可以表示为:

$\Gamma \vdash \mathbf{P}$

$\mathbf{P}$  是从  $\Gamma$  不可推演的, 可以表示为:

$\Gamma \not\vdash \mathbf{P}$

例如, 我们有如下推演:

(1) $(A \rightarrow B) \vee C$	前提
(2) $\neg C$	前提
(3) A	假设
(4) $A \rightarrow B$	(1)(2), 否定析取支
(5) B	(3)(4), 肯定前件
(6) $B \vee D$	(5), 附加
(7) $A \rightarrow (B \vee D)$	(3) – (6), 条件证明
(8) $(A \vee A) \rightarrow (B \vee D)$	(7), 重言

由于此推演的前提都是命题集  $\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C\}$  的成员,  $A \rightarrow (B \vee D)$  不出现在任何假设的假设域内, 所以,

$$\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C\} \vdash A \rightarrow (B \vee D)$$

同理:

$$\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C\} \vdash (A \vee A) \rightarrow (B \vee D)$$

请注意, 这里并不要求从前提可推演的命题一定出现于最后一行。另外, 以上定义只要求前提属于  $\Gamma$ , 并不要求  $\Gamma$  的所有成员都是前提。现令  $\Gamma$  为  $\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C, H\}$ , 由于以上推演的所有前提也都是该命题集的成员, 尽管并非该命题集的全部成员, 根据“SC 可推演”的定义, 仍然有:

$$\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C, H\} \vdash A \rightarrow (B \vee D)$$

$$\{(A \rightarrow B) \vee C, \neg C, H\} \vdash (A \vee A) \rightarrow (B \vee D)$$

【定义】SL 的一个命题  $\mathbf{P}$  是 SC 的一个定理, 当且仅当,  $\mathbf{P}$  在 SC 中是从空集  $\emptyset$  可推演的, 即  $\emptyset \vdash \mathbf{P}$ 。

这样的推演就是我们在第三章中所说的“无前提证明”，即前提为空集的证明。断定 SL 的一个命题  $P$  是 SC 的一个定理，亦可简略地表达为：

$\vdash P$

### 8.2.2 一些语法元定理及其证明

【元定理8.2.1】在 SC 中，如果  $\Gamma \vdash P$ ，那么对于  $\Gamma$  的每一个母集  $\Gamma'$  而言， $\Gamma' \vdash P$ 。

这个定理断言：如果从一命题集合  $\Gamma$  可以推出  $P$ ，那么，从  $\Gamma$  的每一母集  $\Gamma'$  也可推出  $P$ 。

【证明】假定在 SC 中  $\Gamma \vdash P$  并且  $\Gamma'$  是  $\Gamma$  的一个母集。根据上面关于“SC 可推演”的定义，在 SC 中存在一个推演，其前提是  $\Gamma$  的成员并且  $P$  的出现不在任何假设域中。由于  $\Gamma$  的所有成员都是  $\Gamma'$  的成员，所以，在 SC 中也存在一个推演，其前提是  $\Gamma'$  的成员并且  $P$  的出现不在任何假设域中。根据“SC 可推演”的定义， $\Gamma' \vdash P$ 。

【定义】SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的，当且仅当，SL 的一个命题  $P$  及其否定  $\neg P$  在 SC 中都是从  $\Gamma$  可推演的。SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 一致的，当且仅当， $\Gamma$  不是 SC 不一致的。

请注意，这里所定义的是“SC 不一致”。SC 不一致是一种语法不一致，而不是语义不一致，因为它只涉及纯形式的推演，而不涉及命题的真假。与之不同，语义不一致是真值函项地不一致，这将在下一节讨论。不过，语义不一致与语法不一致之间具有对应关系，这一点在后面第七节关于 SC 的完全性的讨论中将会涉及。

【元定理 8.2.2】如果 SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的，那么，SL 的任一命题  $Q$  在 SC 中是从  $\Gamma$  可推演的。

【证明】假定 SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的。根据定义，SC 中必有一推演，其前提是  $\Gamma$  的全体成员，并且 SL 的某一命题  $P$  及  $\neg P$  的出现不在任何假设域中。于是，通过以下步骤可使 SL 的任一命题  $Q$  成为从  $\Gamma$  可推演的：

(i) $P$	由 $\Gamma$ 推得
(j) $\neg P$	由 $\Gamma$ 推得
(n) $\neg Q$	假设
$\boxed{(n+1) P \wedge \neg P}$	(i)(j), 合取
(n+2) $Q$	(n) - (n+1), 间接证明

由于从一个 SC 不一致的命题集可以推演出任一命题，所以我们应当避免用一组不一致的命题来表达我们的信念，尤其要避免用一组不一致的命题作为一个理论系统的公理。否则，这一信念或理论系统将是毫无意义的。这就是语法不一致性的概念的重要性所在。

下面几条元定理在关于 SC 的完全性讨论中都是有用的。

【元定理 8.2.3】对于任何命题集  $\Gamma$  和任何命题  $P$ , 在 SC 中  $\Gamma P$ , 当且仅当,  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。

【证明】令  $P_1, P_2 \dots P_n$  是命题集  $\Gamma$  的成员。假定在 SC 中  $\Gamma P$ , 因而在 SC 中有如下推演:

$$\begin{array}{l} (1) P_1 \\ (2) P_2 \\ (\dots) \dots \\ (n) P_n \\ (\dots) \dots \\ (m) P \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{前提} \quad \text{由前提推得}$$

为表明  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的, 只需从它推出  $Q$  和  $\neg Q$ 。由于  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是  $\Gamma$  的母集, 根据元定理 8.2.1,  $\Gamma \cup \{\neg P\} \vdash P$ , 因而有如下推演:

$$\begin{array}{l} (1) P_1 \\ (2) P_2 \\ (\dots) \dots \\ (n) P_n \\ (n+1) \neg P \\ (\dots) \dots \\ (m+1) P \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{前提} \quad \text{由前提推得}$$

$$(m+2) P \wedge \neg P \quad (n+1) (m+1), \text{ 合取}$$

$$(m+3) \neg P \quad (m+2), \text{ 化简}$$

由于从  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  可以推出  $P$  和  $\neg P$ , 所以,  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。

再假定  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。根据“SC 不一致”的定义, 在 SC 中存在如下推演:

$$\begin{array}{l} (1) P_1 \\ (2) P_2 \\ (\dots) \dots \\ (n) P_n \\ (n+1) \neg P \\ (\dots) \dots \\ (m) Q \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{前提} \quad \text{由前提推得}$$

$$(m+1) \neg Q \quad \text{由前提推得}$$

为表明在 SC 中  $\Gamma P$ , 只需构造一个推演, 其前提只包括  $\Gamma$  的成员,  $P$  的出现不在任

何假设域之中。为此，只需把上面推演中的 $\neg P$ 由前提改为假设，然后构造一个间接证明的子推演即可：

(1) $P_1$	前提
(2) $P_2$	
(...) ...	
(n) $P_n$	
$\neg(n+1) \neg P$	假设
(...) ...	
(m) $Q$	由前提或假设推得
(m+1) $\neg Q$	由前提或假设推得
$(m+2)Q \wedge \neg Q$	(m)(m+1), 合取
(m+3) $P$	(n+1) - (m+2), 间接证明

这表明：在 SC 中  $\Gamma \vdash P$ 。

**【元定理8.2.4】** 如果命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的，那么， $\Gamma$  的每一个母集  $\Gamma'$  是 SC 不一致的。

证明：假定命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的。根据“SC 不一致”的定义， $\Gamma \vdash P$  并且  $\Gamma \vdash \neg P$ 。根据元定理 8.2.1， $\Gamma' \vdash P$  并且  $\Gamma' \vdash \neg P$ 。所以， $\Gamma'$  是 SC 不一致的。

**【元定理8.2.5】** 如果命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的，那么，至少有一  $\Gamma$  的有限子集是 SC 不一致的。

**【证明】** 假定  $\Gamma$  是 SC 不一致的，那么 SC 中存在一个推演，其前提都是  $\Gamma$  的成员，其结论包含  $P$  和  $\neg P$ 。根据 SC 可推演的定义，任何推演的长度都是有限的，因此这个推演的前提是一有限命题集同时它是  $\Gamma$  的子集，并且它是 SC 不一致的。

下一条定理是这条定理的逆命题。

**【元定理8.2.6】** 如果至少有一  $\Gamma$  的有限子集  $\Gamma'$  是 SC 不一致的，那么， $\Gamma$  是 SC 不一致的。

**【证明】** 假定有一  $\Gamma$  的有限子集  $\Gamma'$  是 SC 不一致的。根据定义， $\Gamma' \vdash P$  并且  $\Gamma' \vdash \neg P$ 。根据元定理 8.2.1， $\Gamma \vdash P$  并且  $\Gamma \vdash \neg P$ 。所以， $\Gamma$  是 SC 不一致的。

由元定理 8.2.5 和 8.2.6 可以直接得出下一条定理。

**【元定理8.2.7】** 一个命题集  $\Gamma$  是 SC 一致的，当且仅当， $\Gamma$  的每一有限子集是 SC 一致的。

元定理 8.2.7 允许我们用有限集的 SC 一致性来定义无限集的 SC 一致性。一个无限集就是其成员数目为无穷大的集合。根据元定理 8.2.7，一个无限集是 SC 一致的，当且仅当，它的每一有限子集是 SC 一致的。

## 习题 8.2

一、列出以下每一个集合的所有子集。

1.  $\{A \vee B, D \rightarrow C\}$
2.  $\{K \leftrightarrow J, \neg D \wedge E, E \wedge \neg D\}$
3.  $\{(S \rightarrow B) \rightarrow G\}$
4.  $\phi$

二、下面哪些集合的母集是  $\{C \wedge H, F \leftrightarrow C, D \rightarrow F\}$ ?

1.  $\{C \wedge H\}$
2.  $\{D \rightarrow F, C \wedge H\}$
3.  $\phi$
4.  $\{F \leftrightarrow C, F \rightarrow D\}$
5.  $\{D \rightarrow F, C \wedge H, F \leftrightarrow C\}$

三、令  $\Gamma = \{F, G\}$ ,  $\Gamma' = \{R, S, F\}$ , 下面哪些集合是  $\Gamma \cup \Gamma'$  的子集?

1.  $\{R, G\}$
2.  $\{F, S, R\}$
3.  $\{F, G, C\}$
4.  $\{F, G, R, S\}$
5.  $\{G\} \cup \phi$

四、证明元定理(演绎定理): 对于 SL 的命题集  $\Gamma$  以及命题  $P$  和  $Q$  而言, 在 SC 中, 如果  $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ , 那么  $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$ 。

五、证明元定理(逆演绎定理): 对于 SL 的命题集  $\Gamma$  以及命题  $P$  和  $Q$  而言, 在 SC 中, 如果  $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$ , 那么  $\Gamma \cup \{P\} \vdash Q$ 。

六、证明元定理: 对于 SL 的命题  $P$  和  $Q$  而言, 在 SC 中,  $\{P\} \vdash Q$ , 当且仅当,  $\vdash P \rightarrow Q$ 。

七、证明元定理: 对于 SL 的命题  $P$  和  $\vdash Q$  而言, 在 SC 中, 如果  $\{P\} \vdash Q$  并且  $\{\neg P\} \vdash Q$ , 那么,  $\vdash Q$ 。

八、证明元定理: 空集  $\phi$  是 SC 一致的。

## 8.3 SL 的语义

### 8.3.1 SL 的基本语义

前边谈到，SL 的语法只涉及符号语言的纯粹形式，而不涉及它的内容；语义则在一定程度上涉及符号语言的内容。SL 是一个命题逻辑系统，命题逻辑是以命题为最小单位的。从语义上讲，SL 的核心是讨论复合命题相对于它的支命题的真值函项关系。所有的真值函项关系都可还原为五个真值函项联结词的特征真值表，因此，五个真值函项联结词的特征真值表就是 SL 的最基本的语义。

在第二章中我们着重讨论如何根据真值表来判定命题的真假性质和推论的有效性，这些都属于语义学的范围，只是在那里没有明确地将语义和语法区分开来。我们之所以那样做，是因为那样更符合人们的实际思维因而更易理解，也更符合自然演绎逻辑的哲学宗旨。在对自然演绎推论方法有了基本了解和掌握之后，我们现在回过头来将语义和语法区分开来，并详加讨论，这将有益于我们把逻辑学教学的可接受性和严格性统一起来。

在这里，我们不打算重复第二章关于语义的那些讨论，只打算作一些新的补充。我们首先讨论命题集的一个重要性质即真值函项一致性。

**【定义】** SL 的一个命题集  $\Gamma$  是真值函项地一致的，当且仅当，至少有一真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员是真的。SL 的一个命题集  $\Gamma$  是真值函项地不一致的，当且仅当， $\Gamma$  不是真值函项地一致的。

例如， $\{B, A \vee D, D \rightarrow B\}$  是真值函项地一致的，因为至少在“B 真，A 真和 D 真”这一真值指派下，它的每一个成员都是真的。 $\{F \leftrightarrow G, F \wedge \neg G\}$  是真值函项地不一致的，因为没有一种真值指派使它们都为真，即：

F	G	$F \leftrightarrow G$	$F \wedge \neg G$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	F

在第二章中我们借助真值表讨论了两个命题之间的重言蕴涵关系，并通过把推论还原为两个命题之间（即所有前提的合取命题和结论之间）的蕴涵关系来讨论推论的有

有效性。现在，我们讨论一个命题集与一个命题之间的重言蕴涵关系，从而更方便地讨论推论的有效性。

**【定义】** SL 的一个命题集  $\Gamma$  重言蕴涵一个命题  $P$ ，当且仅当，没有一个真值指派使得， $\Gamma$  的每一成员为真而  $P$  为假。

我们引入一个符号即“ $\models$ ”表达重言蕴涵关系：

$\Gamma \models P$

读作： $\Gamma$  重言蕴涵  $P$ 。为表示  $\Gamma$  不重言蕴涵  $P$ ，可以写为：

$\Gamma \not\models P$

例如， $\{\neg H, J \wedge K\} \models J$ ， $\{N \vee L, N\} \not\models L$ 。当  $\Gamma$  为一空集时，重言蕴涵关系表达为：

$\models P$

“ $\models P$ ”是对“ $\emptyset \models P$ ”的缩写。本节末尾将证明：一个命题是重言式，当且仅当，它被空命题集所重言蕴涵（即元定理 8.3.7）。

我们知道，SL 的一个推论是重言有效的，当且仅当，没有一种真值指派使得，它的所有前提为真而结论为假。这就是说，由其前提组成的命题集  $\Gamma$  重言蕴涵其结论  $P$ 。可见，“ $\Gamma \models P$ ”这种重言蕴涵的表达方式是对重言有效推论的直接表达。重言有效也叫做“真值函项地有效”。

### 8.3.2 一些语义元定理及其证明

接下来，我们用命题集的真值函项一致性来定义或阐明 SL 的命题和推论的其他重要性质，从而得到一系列语义元定理，这对于后边关于 SC 的可靠性和完全性的证明是必要的。

**【元定理 8.3.1】** SL 的一个命题  $P$  是矛盾式，当且仅当， $\{P\}$  是真值函项地不一致的。

$\{P\}$  是只有一个成员的集合，这种集合被叫做“单元集”。对这一元定理证明如下：

**【证明】** 假定  $P$  是一个矛盾式。根据矛盾式的定义，没有一个真值指派使得  $P$  是真的。既然  $P$  是单元集  $\{P\}$  的惟一的成员，那么，没有一个真值指派使得  $\{P\}$  的所有成员是真的。所以， $\{P\}$  是真值函项地不一致的。再假定  $\{P\}$  是真值函项地不一致的。根据定义，没有一个真值指派使得  $\{P\}$  的所有成员是真的。既然  $P$  是  $\{P\}$  的惟一成员，那么，没有一个真值指派使得  $P$  是真的。所以， $P$  是一个矛盾式。

**【元定理 8.3.2】** SL 的一个命题  $P$  是重言式，当且仅当， $\{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。

**【证明】** 假定  $P$  是一个重言式，根据定义，没有一个真值指派使得  $P$  是假的，即

没有一个真值指派使得  $\neg P$  是真的。既然  $\neg P$  是  $\{\neg P\}$  的惟一成员，那么没有一个真值指派使得  $\{\neg P\}$  的所有成员是真的，所以， $\{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。再假定  $\{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。根据定义，没有一个真值指派使得  $\{\neg P\}$  的所有成员是真的。既然  $\neg P$  是  $\{\neg P\}$  的惟一成员，故没有一个真值指派使得  $\neg P$  是真的，亦即没有一个真值指派使得  $P$  是假的。所以， $P$  是一个重言式。

**【元定理 8.3.3】** SL 的一个命题  $P$  是偶然式，当且仅当， $\{P\}$  和  $\{\neg P\}$  都是真值函项地一致的。

**【证明】**  $P$  是一个偶然式，根据定义，当且仅当  $P$  既不是一个重言式又不是一个矛盾式。再根据元定理 8.3.1 和 8.3.2， $\{P\}$  和  $\{\neg P\}$  都不是真值函项地不一致的，所以， $\{P\}$  和  $\{\neg P\}$  都是真值函项地一致的。

**【元定理 8.3.4】** SL 的命题  $P$  和  $Q$  是重言等值的，当且仅当， $\{\neg(P \leftrightarrow Q)\}$  是真值函项地不一致的。

**【证明】**  $P$  和  $Q$  是重言等值的，根据定义，当且仅当在每一个真值指派下  $P$  和  $Q$  的真值是相同的。因此，由“ $\leftrightarrow$ ”的特征真值表可知，在每一真值指派下  $P \leftrightarrow Q$  是真的，即  $P \leftrightarrow Q$  是一个重言式。根据定理 8.3.2， $P \leftrightarrow Q$  是一个重言式，当且仅当  $\{\neg(P \leftrightarrow Q)\}$  是真值函项地不一致的。

接下来我们考查重言蕴涵与真值函项一致性之间的关系，证明如下两个定理：

**【元定理 8.3.5】** 对于 SL 的一个命题集  $\Gamma$  和一个命题  $P$ ，如果  $\Gamma \models P$ ，那么  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。

**【证明】** 假定  $\Gamma \models P$ ，根据“ $\models$ ”的定义，没有一个真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员为真而  $P$  却是假的，因而没有一个真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员为真而  $\neg P$  也是真的。这表明，没有一个真值指派使得  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  这个并集的所有成员是真的。所以， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。

**【元定理 8.3.6】** 对于 SL 的一个命题集  $\Gamma$  和一个命题  $P$ ，如果  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的，那么  $\Gamma \not\models P$ 。

**【证明】** 假定  $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。这就是说，没有一种真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员和  $\neg P$  都是真的。因此，在使  $\Gamma$  的每一成员都真的那些真值指派上  $\neg P$  都是假的，因而  $P$  都是真的。所以， $\Gamma \models P$ 。

**【元定理 8.3.7】** SL 的一个命题  $P$  是重言式，当且仅当， $\phi \models P$ 。

**【证明】**  $P$  是一个重言式，根据元定理 8.3.2，当且仅当  $\{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。由于  $\{\neg P\}$  等于  $\phi \cup \{\neg P\}$ ，因此， $P$  是一个重言式，当且仅当， $\phi \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。根据元定理 8.3.5 和 8.3.6， $\phi \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的，当且仅当， $\phi \not\models P$ 。所以， $P$  是一个重言式，当且仅当， $\phi \models P$ 。

### 习题 8.3

1. 求证：对于 SL 的一个命题集  $\Gamma$  而言，如果  $\Gamma$  是真值函项地不一致的，那么， $\Gamma$  重言蕴涵 SL 的每一个命题。
2. 求证：对于 SL 的任一命题集合  $\Gamma$  和任一矛盾命题  $P$ ， $\Gamma \cup \{P\}$  是真值函项地不一致的。
3. 求证：如果 SL 的一个命题集  $\Gamma$  是真值函项地一致的，并且  $P$  是一个重言命题，那么， $\Gamma \cup \{P\}$  真值函项地一致的。
4. 求证：对于 SL 的命题  $P$ 、 $Q$  和  $R$ ，如果  $\{P\} \models Q$  并且  $\{\neg P\} \models R$ ，那么， $Q \vee R$  是一个重言式。
5. 求证：如果 SL 的两个命题  $P$  和  $Q$  是重言等值的，那么， $\{P\} \models R$ ，当且仅当， $\{Q\} \models R$ 。
6. 求证：令  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  是 SL 的命题集并且  $\Gamma'$  是  $\Gamma$  的母集，对于 SL 的命题  $P$ ，如果  $\Gamma \models P$ ，那么， $\Gamma' \models P$ 。
7. 求证：对 SL 的命题集  $\Gamma$  和  $\Gamma'$  以及命题  $P$  和  $Q$ ，如果  $\Gamma \models P$  并且  $\Gamma' \models Q$ ，那么， $\Gamma \cup \Gamma' \models P \wedge Q$ 。

## 8.4 数学归纳法

### 8.4.1 什么是数学归纳法

在建立命题逻辑、谓词逻辑以及其他逻辑系统的元理论时，需要借助于一种重要的逻辑方法即数学归纳法。数学归纳法的前提和结论之间具有必然性，因而是一种演绎推论。这种演绎推论之所以叫做“数学归纳法”，这是因为它的结论具有普遍性而其前提之一即奠基命题却是个别性的。这种由个别推得一般的“归纳推论”何以具有演绎推论的必然性呢？其关键在于它借助于自然数的递归性质：自然数的结构使人一旦得知其第一项，便可得知其第二项；一旦得知其第二项，便可得知其第三项；……由此便可得知任意多的自然数的项。在这个意义上，我们便知自然数的全部。

数学归纳法的基本原理是：为证明某一定理对于某一领域的所有对象都成立，把该类对象以某种方式进行排序，然后分两步进行证明：①证明定理对该序列的第一项成立；②证明如果定理对第  $K$  项成立，那么它对  $K+1$  项也成立。前者证明的是奠基命题 (basis clause)，即“定理对该序列的第一项成立”；后者证明的是归纳步骤 (inductive step)，归纳步骤的前件即“定理对第  $K$  项成立”叫做归纳假设 (inductive hypothesis)。

这两个步骤一旦完成，该定理便被证明对该领域的所有对象成立。因为，根据步骤一，该定理对第一项成立，根据步骤二，该定理对第二项也成立。由于该定理对第二项成立，根据步骤二，它对第三项成立，再根据步骤二，它对第四项成立。以此类推，该定理对所有项成立。

### 8.4.2 数学归纳法的例示 1

现在让我们先以命题逻辑的某些简单的元定理为例来说明数学归纳法的具体应用。

在命题逻辑中一个显然的事实是：SL 的任一命题中，左括号的数目与右括号的数目是相等的。这一命题不是 SC 的定理，而是关于 SC 的元理论的一个命题。如果这个命题得到证明，它便成为元定理。下面我们用数学归纳法来证明这个命题。

在命题逻辑中使用数学归纳法需要以 SL 中关于命题的递归定义为依据（递归规则的特征是，它能重复地运用于它自己所产生的结果）。这个递归定义在 SC 的语法中已经给出，这里重述如下：

1. 每一个命题常项是一个命题。
2. 如果  $P$  是一个命题，那么  $\neg P$  是一个命题。
3. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \wedge Q)$  是一个命题。
4. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \vee Q)$  是一个命题。
5. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \rightarrow Q)$  是一个命题。
6. 如果  $P$  和  $Q$  是命题，那么  $(P \leftrightarrow Q)$  是一个命题。
7. 只有通过应用或重复应用以上项目的一条或多条而形成的符号式是命题。

从这个递归定义中我们看到，根据第 1 条形成的最简单的命题即命题常项（也叫“原子命题”）满足此元命题，即左括号的数目等于右括号的数目，因为二者的数目均为 0。SL 的其他命题都是根据 2–6 形成的复合命题（也叫“分子命题”），这些命题的最外边被加上相同数目的左括号和右括号：在第 2 条中公式  $\neg P$  的最外边被加上的左括号和右括号的数目均为 0，在第 3 条至第 6 条中公式的最外边被加上的左括号和右括号的数目均为 1。因此，只要这些命题的直接支命题  $P$  和  $Q$  的左括号和右括号的数目是相等的，那么由此形成的复合命题其左括号和右括号的数目也是相等的。现在的问题是：一个复合命题的直接支命题  $P$  和  $Q$  的左括号和右括号的数目是相等的吗？对这个问题的回答可以归结到第 1 条，即命题常项的左括号和右括号的数目是相等的，即均为 0。

以上可以看作是对这一元命题的直观证明，但还不够严格。下面应用数学归纳法给出其严格证明。这一证明是将数学归纳法应用于联结词出现的数目（同一个联结词在一个命题中可以有多次出现）。请注意这样一个事实：每一命题常项含有联结词的 0 个出现，包含联结词的 0 个出现的命题只有命题常项。包含联结词的一个出现的复合命题，其直接支命题都是命题常项，亦即其直接支命题包含联结词的 0 个出现。包含联结

词的两个出现的命题，其直接支命题不外乎两类：一是包含联结词的一个出现的复合命题，另一是包含联结词的0个出现的命题常项。包含联结词的三个出现的命题，其直接支命题不外乎三类：一是包含联结词的两个出现的复合命题，二是包含联结词的一个出现的复合命题，三是包含联结词的0个出现的命题常项。总之，包含联结词的  $K+1$  个出现的命题，其直接支命题包含联结词的  $K$  个或少于  $K$  个出现。

求证元命题：SL 的每一命题的左括号和右括号的数目是相等的。

### 一、奠基命题：

SL 的每一个只含联结词的0个出现的命题满足该元命题。

### 二、归纳步骤：

如果 SL 中含有联结词的  $K$  或少于  $K$  个出现的每一命题  $P$  满足元命题，那么 SL 中含有联结词的  $K+1$  个出现的每一命题  $P$  也满足元命题。（ $K$  是一个变项，其变域为非负整数，即0加上正整数。）

证明奠基命题：SL 的每一个只含联结词的0个出现的命题只有命题常项，而命题常项的左括号和右括号的数目都为0，故满足元命题。

证明归纳步骤：既然  $K$  是非负整数， $K+1$  是正整数。SL 中含有联结词的  $K+1$  个出现的命题  $P$  至少含有联结词的一次出现，因而是一复合命题。现将其分为两种情况：

【情况1】  $P$  具有形式  $\neg Q$ 。既然  $P$  即  $\neg Q$  含有联结词的  $K+1$  个出现，那么  $Q$  含有联结词的  $K$  个出现。根据归纳假设， $Q$  满足元命题。 $\neg Q$  对于  $Q$  既未增加也未减少任何括号，因此， $\neg Q$  也满足元命题。

【情况2】  $P$  具有如下形式之一： $(Q \wedge R)$ 、 $(Q \vee R)$ 、 $(Q \rightarrow R)$  和  $(Q \leftrightarrow R)$ 。既然  $P$  含有联结词的  $K+1$  个出现，那么  $Q$  和  $R$  分别含有联结词的  $K$  或少于  $K$  个出现。根据归纳假设， $Q$  和  $R$  满足元命题。 $P$  只是在公式的最外边同时加上一个左括号和一个右括号，这使得， $P$  的左括号和右括号的数目分别为： $Q$  的左括号数目 +  $R$  的左括号数目 + 1， $Q$  的右括号数目 +  $R$  的右括号数目 + 1，故  $P$  满足元定理。

证毕。

### 8.4.3 数学归纳法的例示 2

我们再举一个应用数学归纳法的例子。假定  $P$  是只包含  $\neg$ 、 $\vee$ 、 $\wedge$  这三种联结词的命题，不妨称之为“与或非命题”（在开关逻辑中主要讨论这类命题，“与”相当于“合取”，“或”相当于“析取”，“非”相当于“否定”）。 $P'$  是由如下步骤得到的命题：

1. 用  $\wedge$  替换  $P$  中  $\vee$  的每一次出现。
2. 用  $\vee$  替换  $P$  中  $\wedge$  的每一次出现。
3. 在  $P$  中每一个命题常项的前边加上  $\neg$ 。

我们把这样得到的  $P'$  称为  $P$  的“对偶”(dual of  $P$ )。<sup>①</sup> 下面给出一些与或非命题及其对偶的例子：

$P$	$P'$
A	$\neg A$
$(F \wedge (G \vee H))$	$(\neg F \vee (\neg G \wedge \neg H))$
$\neg ((J \wedge K) \wedge (\neg K \vee \neg L))$	$\neg ((\neg J \vee \neg K) \vee (\neg \neg K \wedge \neg \neg L))$

我们按照命题中所包含的联结词的出现的数目给 SL 的与或非命题进行排序，并将数学归纳法应用于这一序列。

求证：SL 的每一与或非命题  $P$  与其对偶  $P'$  之间具有相反的真值（ $P$  真当且仅当  $P'$  假）。

奠基命题：在 SL 中，包含联结词的 0 个出现的与或非命题  $P$  与其对偶  $P'$  之间具有相反的真值。

归纳步骤：在 SL 中，如果包含联结词的  $K$  个或少于  $K$  个出现的与或非命题  $P$  与其对偶  $P'$  之间具有相反的真值，那么，包含联结词的  $K+1$  个出现的与或非命题  $P$  与其对偶  $P'$  之间也具有相反的真值。

证明奠基命题：在 SL 中，包含联结词的 0 个出现的与或非命题  $P$  是一个命题常项，根据命题对偶的定义，其对偶  $P'$  是  $\neg P$ 。根据  $\neg$  的特征真值表， $P$  与  $\neg P$  的真值是相反的。

证明归纳步骤：既然  $K$  是一个非负整数， $K+1$  是一正整数，包含联结词的  $K+1$  个出现的与或非命题  $P$  是一个复合命题，并且具有如下三种形式之一： $\neg Q$ 、 $(Q \vee R)$  和  $(Q \wedge R)$ 。于是，我们分三种情况考查：

情况 1：与或非命题  $P$  具有形式  $\neg Q$ 。既然  $P$  包含联结词的  $K+1$  个出现，则  $Q$  包含联结词的  $K$  个出现，并且  $Q$  是一个与或非命题（否则  $P$  即  $\neg Q$  也不是一个与或非命题）。令  $Q'$  是  $Q$  的对偶，则  $P$  的对偶  $P'$  是  $\neg Q'$ 。这是因为根据命题对偶的定义，由  $P$  即  $\neg Q$  得出其对偶的变换只在  $Q$  内进行，而  $Q$  前边的  $\neg$  保持不变。根据  $\neg$  的特征真值表， $P$  即  $\neg Q$  与  $Q$  的真值相反，又根据归纳假设， $Q$  与其对偶  $Q'$  的真值相反，因此  $P$  与  $Q'$  的真值相同而与  $\neg Q'$  的真值相反。 $\neg Q'$  正是  $P$  的对偶  $P'$ 。

情况 2：与或非命题  $P$  具有形式  $(Q \vee R)$ 。既然  $P$  包含联结词的  $K+1$  个出现， $Q$

<sup>①</sup> 文献中常常把只由前两项得出的命题叫做原命题的对偶命题，而由这三项得到的命题实际上是原命题的否定命题。

和  $\mathbf{R}$  各自包含联结词的  $K$  或少于  $K$  个出现，并且  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  都是与或非命题。令  $\mathbf{Q}'$  和  $\mathbf{R}'$  分别是  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的对偶，则  $\mathbf{P}$  的对偶是  $(\mathbf{Q}' \wedge \mathbf{R}')$ 。如果  $\mathbf{P}$  即  $(\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$  在某一真值指派下为真，根据  $\vee$  的特征真值表， $\mathbf{Q}$  为真或者是  $\mathbf{R}$  为真。根据归纳假设， $\mathbf{Q}$  的对偶  $\mathbf{Q}'$  为假或  $\mathbf{R}$  的对偶  $\mathbf{R}'$  为假。根据  $\wedge$  特征真值表，在这种真值指派下， $\mathbf{P}$  的对偶  $(\mathbf{Q}' \wedge \mathbf{R}')$  为假。反之，如果  $\mathbf{P}$  即  $(\mathbf{Q} \vee \mathbf{R})$  在某一真值指派下为假，根据  $\vee$  的特征真值表， $\mathbf{Q}$  为假并且  $\mathbf{R}$  为假。根据归纳假设， $\mathbf{Q}$  的对偶  $\mathbf{Q}'$  为真并且  $\mathbf{R}$  的对偶  $\mathbf{R}'$  为真。根据  $\wedge$  特征真值表，在这种真值指派下， $\mathbf{P}$  的对偶  $(\mathbf{Q}' \wedge \mathbf{R}')$  为真。由此可见， $\mathbf{P}$  与其对偶的真值是相反的。

情况 3：与或非命题  $\mathbf{P}$  具有形式  $(\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$ 。既然  $\mathbf{P}$  包含联结词的  $K+1$  个出现， $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  各自包含联结词的  $K$  或少于  $K$  个出现，并且  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  都是与或非命题。令  $\mathbf{Q}'$  和  $\mathbf{R}'$  分别是  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  的对偶，则  $\mathbf{P}$  的对偶是  $(\mathbf{Q}' \vee \mathbf{R}')$ 。如果  $\mathbf{P}$  即  $(\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$  在某一真值指派下为真，根据  $\wedge$  的特征真值表， $\mathbf{Q}$  为真并且  $\mathbf{R}$  为真。根据归纳假设， $\mathbf{Q}$  的对偶  $\mathbf{Q}'$  为假并且  $\mathbf{R}$  的对偶  $\mathbf{R}'$  为假。根据  $\vee$  特征真值表，在这种真值指派下， $\mathbf{P}$  的对偶  $(\mathbf{Q}' \vee \mathbf{R}')$  为假。反之，如果  $\mathbf{P}$  即  $(\mathbf{Q} \wedge \mathbf{R})$  在某一真值指派下为假，根据  $\wedge$  的特征真值表， $\mathbf{Q}$  为假或者  $\mathbf{R}$  为假。根据归纳假设， $\mathbf{Q}$  的对偶  $\mathbf{Q}'$  为真或者  $\mathbf{R}$  的对偶  $\mathbf{R}'$  为真。根据  $\vee$  特征真值表，在这种真值指派下， $\mathbf{P}$  的对偶  $(\mathbf{Q}' \vee \mathbf{R}')$  为真。由此可见， $\mathbf{P}$  与其对偶的真值是相反的。

证毕。

## 习题 8.4

- 用数学归纳法证明：SL 中所有不含否定词的命题都不是矛盾命题（永假命题）。  
(提示：考虑一种特殊的真值指派，它把命题常项的真值都赋予真。)
- 用数学归纳法证明：在 SL 中，每一个不含二项联结词的命题都是偶然命题。
- 用数学归纳法证明：SL 中的一个重复合取命题  $(\cdots (P_1 \wedge P_2) \wedge \cdots P_n)$  相对于某个真值指派是真的，当且仅当， $P_1, P_2, \dots, P_n$  相对于该真值指派都是真的。  
(提示：将数学归纳法用于一个重复合取命题的合取支的数目会更方便一些。)

## 8.5 联结词的真值函项完全性

### 8.5.1 什么是真值函项完全性

在第二章中，我们指出，命题逻辑所讨论的联结词只是那些被真值函项地使用的联结词，这种联结词被叫做“真值函项联结词”。由真值函项联结词所产生的复合命题叫

做“真值函项复合命题”，其特征是：一个复合命题的真值完全决定于其支命题的真值。这就是说，这种复合命题是一个真值函项，其自变项是其支命题的真值，其依变项是这个复合命题的真值。

一个真值函项复合命题无论多么复杂，我们都有一种刻画它的能行方法，即用一种机械的方法在有穷步骤内构造它的真值表。一个真值表刻画一种映射关系，即从一个复合命题所包含  $n$  个命题常项的所有的真值组合映射到该复合命题的真值。如， $A \rightarrow B$  的真值表是：

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这个表中的后四行就是这样一种映射。每一行的左边两个真值是  $A \rightarrow B$  所包含的两个命题常项的一种真值组合，一共有四种真值组合。每一行的右边的一个真值是对应于左边那种真值组合的一次映射，这四次映射合起来刻画出一种映射关系，这种映射关系就是一种函项。由于它是从真值组合到真值的映射，所以叫做“真值函项”。这个表的第一行指出，SL 的命题  $A \rightarrow B$  可以表达这个真值函项。

但是，能够表达同一个真值函项的 SL 命题不止一个。如，能够表达上面这个真值函项的命题还有  $\neg A \vee B$  和  $\neg(A \wedge \neg B)$  等，相应的真值表是：

A	B	$\neg A \vee B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

由此可见，一个真值函项与可以表达它的 SL 命题并不是一一对应的。上面三个真值表中的后四行是相同的，因而包含同一个真值函项，即：

T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

这种被掐头的真值表叫做“真值函项模式”(truth-function schema)，每—真值函项模式惟一地刻画一种映射关系，从而惟一地表达一个真值函项。

现在，我们关心的问题不是一个真值函项可被多少个 SL 命题来表达，而是：对于每一个真值函项，SL 中是否至少有一个命题可以表达它？这个问题就是 SL 的联结词是否具有真值函项完全性的问题，亦即形式语言 SL 对于真值函项是否具有表达的完全性的问题。

这个问题之所以重要，那是因为：如果 SL 的联结词不具有真值函项完全性，那将使得一些真值函项地有效（重言有效）的推论和一些重言命题在 SL 中表达不出来，尽管我们可以借助于真值函项模式刻画出相应的逻辑性质；对于一些逻辑谬误和矛盾命题也是如此。如果这样，SL 作为基于真值函项的命题逻辑的符号语言就是不能令人满意的。

令人欣慰的是，SL 的联结词具有真值函项完全性。下面将给出这一证明。证明的基本思路是：找出一种能行的算法，使得对于每一真值函项都能产生一个相应的 SL 命题。

### 8.5.2 对 SL 的真值函项完全性的证明

真值函项是从自变项的各种真值组合到一个真值的映射。一个真值函项有多少真值组合取决于它包含多少真值自变项（即命题常项）。让  $n$  代表自变项的数目， $n$  个自变项有  $2^n$  个真值组合。对于每一真值组合有两个可能的映射值（真和假），所以，由  $n$  个真值自变项可以产生  $2^{(2^n)}$  个不同的函项。如包含一个自变项的真值函项共有 4 个，即：

P		P		P		P	
T	F	T	T	T	T	T	F
F	T	F	F	F	T	F	F

包含 2、3、4……个自变项的真值函项分别有 16、256、65536……个真值函项。现在我们要证明：

【元定理8.5.1】对于每一个包含有限多个自变项的真值函项，都有一个 SL 命题可以表达它，并且该命题只含有联结词“ $\neg$ ”“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”。

证明这个定理也就是证明 SL 的三个联结词“ $\neg$ ”“ $\wedge$ ”“ $\vee$ ”合起来具有真值函

项完全性。由于 SL 的另外两个联结词 “ $\rightarrow$ ” “ $\leftrightarrow$ ” 可以用这三个联结词来定义，显然，这个定理也就表明 SL 的联结词具有真值函项完全性。

为了表述方便，我们约定，对于一个包含  $n$  个自变项的真值函项，我们用 SL 的前  $n$  个命题常项与之对应。对于其  $2^n$  个真值组合，我们构造相应的  $2^n$  个命题，这个命题是一个重复合取命题，即：

$$(\cdots (P_1 \wedge P_2) \wedge \cdots \wedge P_n)$$

让  $P_j$  代表其中第  $j$  个命题常项，如果这个命题常项在这一真值组合中被指派为真；反之， $\neg P_j$  代表第  $j$  个命题常项的否定，如果这个命题常项在这一真值组合中被指派为假。这一命题叫做这一真值组合的“特征命题”。例如，对于前边那个包含两个自变项的真值函项模式，与其四种真值组合相对应的特征命题分别是  $A \wedge B$ 、 $A \wedge \neg B$ 、 $\neg A \wedge B$  和  $\neg A \wedge \neg B$ 。不难看出，每一特征命题是真的，当且仅当，其中的命题常项的真值与其在相应的真值组合中的真值是相同的。如  $A \wedge \neg B$  是该真值函项模式的第二行的特征命题，它是真的，当且仅当， $A$  和  $B$  的真值与它们在第二行的真值相同，即  $A$  是真的而  $B$  是假的。

最后，我们检查一下真值函项模式中有哪些真值组合对应于真，即哪些行的右边被赋予“真”值，并以相应的特征命题为支命题而构成一个重析取命题。在上面那个真值函项模式中，被赋予真的三个真值组合分别是第一、三、四行，于是，与之相应的重析取命题是：

$$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

这个重析取命题是真的，当且仅当： $A$  是真的并且  $B$  是真的，或者， $A$  是假的并且  $B$  是真的，或者， $A$  是假的并且  $B$  是假的。“当且仅当”之后的真值组合恰恰是这个真值函项模式中被赋予“真”值的那些行，因此说，这个重析取命题表达了这个真值函项，从而我们有如下真值表：

A	B	$((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

有两种特殊情况需要提及。一是只有一行被赋予“真”值的真值函项模式，表达它的 SL 命题正是这一行的特征命题，因而这个命题可以看作是由 0 个析取词构成的重析取命题。如，表达如下真值函项的命题是  $\neg A \wedge \neg B$ ：

T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

另一种情况是没有一行被予“真”值的真值函数模式。对于这种真值函数，我们可以把第一行（也可把其他任何一行）的特征命题与其否定合取起来，便构成表达它的SL命题。这实际上就是构成一个矛盾命题，而矛盾命题的真值总是假的。如，对于如下真值函数

T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表达它的命题是 $(A \wedge B) \wedge \neg(A \wedge B)$ 。

以上算法使我们对于任何一个真值函数都能构造出一个表达它的SL命题。这表明，对于任何一个真值函数，至少有一个SL命题能够表达它；这也就是说，SL这种符号语言对于表达真值函数是充分的。由这一算法构造的命题只包含“ $\neg$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”这三个联结词，这便证明了元定理8.3.1，即：SL的三个联结词“ $\neg$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”合起来具有真值函数完全性。

再次提及，既然“ $\neg$ ”、“ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”合起来具有真值函数完全性，那么，SL的另外两个真值函数联结词“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftrightarrow$ ”从逻辑上讲便是不必要的。事实上，“ $A \rightarrow B$ ”和“ $A \leftrightarrow B$ ”可以分别定义为“ $\neg A \vee B$ ”和“(A  $\wedge$  B)  $\vee$  (\neg A  $\wedge$  \neg B)”。不过，为了表述人们的实际思维过程，引入“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftrightarrow$ ”会更加方便。可见，逻辑上的必要性和实用上的必要性尽管密切相关，但不是一回事。我们可以进一步证明，仅从逻辑上讲，为表达所有的真值函数，只要两个联结词就够了：“ $\neg$ ”和“ $\vee$ ”，或者“ $\neg$ ”和“ $\wedge$ ”，或者“ $\neg$ ”和“ $\rightarrow$ ”。这是因为，用其中的任何一对联结词都可定义SL的其他三个联结词。

### 习题 8.5

一、用在证明元定理 8.5.1 中所用的算法构造以下真值函项的特征命题。

$$1. \begin{array}{cc|c} T & T & F \\ T & F & F \\ F & T & T \\ F & F & T \end{array}$$

$$2. \begin{array}{cc|c} T & T \\ F & T \end{array}$$

$$3. \begin{array}{cc|c} T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & T \\ F & F & F \end{array}$$

$$4. \begin{array}{ccc|c} T & T & T & F \\ T & T & F & F \\ T & F & T & T \\ T & F & F & F \\ F & T & T & T \\ F & T & F & F \\ F & F & T & F \\ F & F & F & T \end{array}$$

二、借助于元定理 8.5.1 证明：

1. 联结词 “ $\neg$ ” 和 “ $\wedge$ ” 是真值函项地完全的。
2. 联结词 “ $\neg$ ” 和 “ $\vee$ ” 是真值函项地完全的。
3. 联结词 “ $\neg$ ” 和 “ $\rightarrow$ ” 是真值函项地完全的。

三、借助于习题 8.4 第一题和第二题的结果证明：

1. 联结词 “ $\wedge$ ”、“ $\vee$ ”、“ $\rightarrow$ ” 和 “ $\leftrightarrow$ ” 不是真值函项地完全的。
2. 联结词 “ $\neg$ ” 不是真值函项地完全的。

## 8.6 SC 的可靠性

### 8.6.1 什么是 SC 的可靠性

在本节我们将要证明，对于 SL 的一个命题  $P$  和一个命题集  $\Gamma$ ，如果在 SC 中可以从  $\Gamma$  推演出  $P$ ，那么  $\Gamma$  重言蕴涵  $P$ 。这就是说，从  $\Gamma$  到  $P$  的推演是（真值函项地）有效的；亦即，当  $\Gamma$  的每一成员为真时  $P$  不可能为假。一个具有这种性质的自然演绎系统，我们说它作为命题逻辑是可靠的。下一节我们将要证明这个命题的逆命题，即：如果 SL 的一个命题集  $\Gamma$  重言蕴涵一个命题  $P$ ，那么在 SC 中  $P$  可由  $\Gamma$  推演出来。这也就是说，SL 中的所有（真值函项地）有效的推论都可成为 SC 中的一个推演。一个具有这后一性质的自然演绎系统，我们说它作为命题逻辑是完全的。可靠性（soundness）和完全性（completeness）是自然演绎系统的两个重要性质。<sup>①</sup> 一个不具备可靠性的自然演绎系统有时将从真前提推出假结论，也就是说，它的某些推演是无效的。一个不具备完全性的自然演绎系统将使一些有效的推论在其中得不到表达，即不能成为它的一个推演。这两种自然演绎系统对于我们建立命题逻辑的目的来说都是不恰当的。

上一节我们已经证明 SL 的联结词具备真值函项完全性，SL 的这一性质不同于这里所说的 SC 的完全性，前者只是后者的必要条件。SL 的联结词具备真值函项完全性，使得所有真值函项在 SL 中得以表达。SC 具备完全性，使得所有具有重言蕴涵关系的推论亦即所有有效的推论在 SC 中得以表达。一个推论的前提和结论之间具有重言蕴涵关系的一个必要条件是：它的前提和结论都表达真值函项；相应地，一个命题逻辑系统具有完全性的必要条件是：对于所有的真值函项它都能表达。在着手证明 SC 的完全性之前，我们先证明 SC 的可靠性。为证明 SC 的可靠性，我们需要先证明其他一些重要的元定理。

### 8.6.2 一些元定理及其证明

【元定理 8.6.1】在 SC 中，如果  $\Gamma \vdash P$ ，那么  $\Gamma \models P$ 。

这条元定理是关于 SC 的可靠性定理，其中  $\Gamma \vdash P$  表示  $\Gamma$  对  $P$  的语法推出，即 SC 的一个推演； $\Gamma \models P$  表示  $\Gamma$  重言蕴涵  $P$ ，亦即由  $\Gamma$  到  $P$  的推论是真值函项地有效的。这条元定理表明 SC 的推演规则具有保真性（truth-preserving），即，当我们正确地使用这些规则时，不会从真命题推出假命题。对这条定理的证明需要使用数学归纳法，其基本

<sup>①</sup> 可靠性和完全性也是其他一切逻辑系统的重要性质，不过，对于不同的逻辑系统如公理系统，对这两个性质的表述有所不同。

思想是要表明：在 SC 的任何一个推演中，如果一个命题所隶属的假设都是真的，那么，这个命题也是真的，而无论这个推演有多么长。

在证明过程中将用到若干语义元定理，现在我们对这些语义元定理给以证明。

**【元定理 8.6.2】** 如果  $\Gamma \models P$ ，那么对于  $\Gamma$  的每一个母集  $\Gamma'$  而言， $\Gamma' \models P$ 。

这个定理断言：如果一命题集合  $\Gamma$  重言蕴涵  $P$ ，即当  $\Gamma$  的每一命题为真时  $P$  也为真，那么， $\Gamma$  的每一母集  $\Gamma'$  也重言蕴涵  $P$ 。

证明：假定  $\Gamma \models P$  并且  $\Gamma'$  是  $\Gamma$  的一个母集。如果  $\Gamma'$  的每一成员是真的，那么  $\Gamma$  的每一成员也是真的。由于  $\Gamma \models P$ ，故  $P$  是真的。所以， $\Gamma' \models P$ 。

**【元定理 8.6.3】** 如果  $\Gamma \cup \{Q\} \models R$ ，那么  $\Gamma \models Q \rightarrow R$ 。

在这个定理中， $\Gamma \cup \{Q\}$  是命题集  $\Gamma$  和单元集  $\{Q\}$  构成的并集。这个定理断言：如果这个并集重言蕴涵命题  $R$ ，那么， $\Gamma$  重言蕴涵  $Q \rightarrow R$ 。

**【证明】** 假定  $\Gamma \cup \{Q\} \models R$ ，这就是说，没有一种真值指派使得  $\Gamma$  的所有成员和  $Q$  都是真的而  $R$  是假的；因此，在使  $\Gamma$  的所有成员为真的那些真值指派中，没有一种真值指派使得  $Q$  真而  $R$  假，亦即没有一种真值指派使得  $Q \rightarrow R$  是假的。这表明， $\Gamma \models Q \rightarrow R$ 。

这条定理的逆定理也成立，即：

**【元定理 8.6.4】** 如果  $\Gamma \models Q \rightarrow R$ ，那么  $\Gamma \cup \{Q\} \models R$ 。

**【证明】** 假定  $\Gamma \models Q \rightarrow R$ 。这就是说，没有一种真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员是真的而  $Q \rightarrow R$  是假的。 $Q \rightarrow R$  是假的，当且仅当  $Q$  真而  $R$  假。因此，没有一种真值指派使得  $\Gamma$  的每一成员和  $Q$  都是真的而  $R$  是假的。这表明， $\Gamma \cup \{Q\} \models R$ 。

**【元定理 8.6.5】** 如果  $\Gamma \models Q$  并且  $\Gamma \models \neg Q$ ，那么  $\Gamma$  是真值函项地不一致的。

**【证明】** 假定  $\Gamma \models Q$  并且  $\Gamma \models \neg Q$ 。再作一个与此定理相反的假设即： $\Gamma$  是真值函项地一致的。基于这一假设，至少有一种真值指派使得  $\Gamma$  的所有成员都是真的；既然  $\Gamma \models Q$  并且  $\Gamma \models \neg Q$ ，那么  $Q$  和  $\neg Q$  在这一真值指派上也都是真的。然而根据  $\neg$  的特征真值表，在任何真值指派下  $Q$  和  $\neg Q$  不会均为真的。所以，以上与定理相反的那个假设是假的，故定理是真的，即  $\Gamma$  是真值函项地不一致的。

**【元定理 8.6.6】** 如果  $\Gamma \cup \{\neg Q\}$  是真值函项地不一致的，那么  $\Gamma \models Q$ 。

这条定理正是本章第三节的元定理 8.3.6，其证明在那里已经给出，在此从略。

为证明元定理 8.6.1 (SC 的可靠性定理)，我们还需要另一条元定理 8.6.7，它涉及置换规则的保真性。令  $P$  是 SL 的一个命题并且  $Q$  是它的一个支命题。 $P(Q_1/Q)$  是通过用  $Q_1$  替换  $P$  中  $Q$  的至少一次出现而得到的那个命题。请注意，一个命题的支命题也可以是这个命题本身，我们把一个命题的非自身的支命题叫做它的“真支命题”。

**【元定理 8.6.7】** 如果  $Q$  和  $Q_1$  是重言等值的，那么  $P$  和  $P(Q_1/Q)$  也是重言等值的。

求证这一元定理，我们将数学归纳法运用于  $P$  中的联结词出现的数目。

奠基命题：当  $P$  中的联结词出现的数目为 0 时，即  $P$  为命题常项时，该定理成立。

归纳步骤：如果  $P$  中的联结词出现的数目是  $k$  或少于  $k$  时该定理成立，那么  $P$  中的联结词出现的数目是  $K+1$  时该定理也成立。

证明奠基命题：如果  $P$  是一命题常项，那么  $Q$  作为  $P$  的支命题就是  $P$  本身（既然命题常项只以它本身为其支命题）。相应地，用命题  $Q_1$  替换  $P$  中的  $Q$  就是替换  $P$  本身，因此  $P(Q_1/Q)$  就是  $Q_1$ 。显然，如果  $Q$  和  $Q_1$  是重言等值的，那么  $P$ （即  $Q$ ）和  $P(Q_1/Q)$ （即  $Q_1$ ）也是重言等值的。

证明归纳步骤：令  $P$  中的联结词出现的数目为  $K+1$ 。 $Q$  是  $P$  的支命题， $Q_1$  与  $Q$  是重言等值的。先假定  $Q$  就是  $P$  本身，按照证明奠基命题的同样思路可以证明： $P$ （即  $Q$ ）和  $P(Q_1/Q)$ （即  $Q_1$ ）是重言等值的。再假定  $Q$  是  $P$  的真支命题，对此我们分两种情况来看：

情况 1： $P$  具有  $\neg R$  的形式。既然  $Q$  是  $P$  的真支命题， $Q$  一定是  $R$  的支命题，因而  $P(Q_1/Q)$  就是  $\neg R(Q_1/Q)$ 。 $R$  中联结词出现的数目为  $k$ ，根据归纳假设， $R$  重言等值于  $R(Q_1/Q)$ 。相应地， $\neg R$  重言等值于  $\neg R(Q_1/Q)$ 。所以， $P$  重言等值于  $P(Q_1/Q)$ 。

情况 2： $P$  具有如下形式之一： $R \wedge S$ 、 $R \vee S$ 、 $R \rightarrow S$ 、 $R \leftrightarrow S$ 。既然  $Q$  是  $P$  的真支命题， $P(Q_1/Q)$  不外乎由以下三种途径得到：其左支命题由  $R$  替换为  $R(Q_1/Q)$ ，或者，其右支命题由  $S$  替换为  $S(Q_1/Q)$ ，或者，两个支命题  $R$  和  $S$  同时做相应的替换。由于  $R$  和  $S$  各自所包含的联结词的出现的数目少于  $k+1$ ，根据归纳假设， $R$  重言等值于  $R(Q_1/Q)$ ， $S$  重言等值于  $S(Q_1/Q)$ 。既然  $R \wedge S$ 、 $R \vee S$ 、 $R \rightarrow S$  和  $R \leftrightarrow S$  作为真值函项复合命题，其真值只取决于其直接支命题的真值，而不取决于其直接支命题的形式，那么，无论  $P(Q_1/Q)$  由以上哪一种途径得出，都有  $P$  重言等值于  $P(Q_1/Q)$ 。证毕。

### 8.6.3 对 SC 的可靠性的证明

现在我们着手证明：出现在  $SC$  的一个推演中的每一个命题都被它所隶属的假设集重言蕴涵。说一个命题隶属于某个假设，就是说该命题处于该假设的假设域之内。一个假设处于它自己的假设域之内，因而隶属于它本身。一个命题可以处于一个或多个假设域之内，从而隶属于一个或多个假设；其中一个假设是为该命题所直接隶属的，即它所隶属的最后一个假设。在  $SC$  的一个推演中，如果一个命题  $P$  同另一命题  $Q$  进行推演并且所得命题处于  $P$  所直接隶属的假设域内，那么命题  $Q$  所隶属的假设必须是尚未撤除的，亦即  $P$  所隶属的假设必须出现于  $Q$  所隶属的假设域之内。这也就是说，命题  $Q$  所隶属的假设必须均为  $P$  所直接或间接地隶属，因此， $Q$  所隶属的假设集是  $P$  所隶属的假设集的一个子集。简言之，对于任一参与命题  $P$  所直接隶属的假设域内的推演的命题  $Q$

而言， $\mathbf{Q}$  所隶属的命题集是  $\mathbf{P}$  所隶属的命题集的一个子集。

我们知道，SC 中的一个推演可以是有前提的，也可以是无前提的。在此，为了论述的简明扼要，我们不妨把一个推演的所有前提看作永不撤除的假设，因而所有前提具有同一个假设域即无限大的假设域。对于有前提的推演，任何命题都隶属于前提，即在前提的假设域之内，包括前提本身。正因为这样，前提的假设域不能也不必用线段来标示。在这个意义上，SC 的所有推演都是借助于假设的。无前提推演也是借助于假设的，即先通过条件证明规则或间接证明规则引入假设，然后撤除所引入的假设。其结论仍可看作处于前提的永不撤除的假设域中，只不过这个前提集是一个空集。因此，证明 SC 的可靠性就是证明出现在 SC 的一个推演中的每一个命题都被它所隶属的假设集重言蕴涵。

我们引入如下符号：对于 SC 的任一推演，令  $\mathbf{P}_k$  代表那个推演中的第  $k$  个命题， $\Gamma_k$  代表  $\mathbf{P}_k$  所隶属的假设的集合。我们将数学归纳法用于命题在一个推演中的位置  $k$ 。

求证：对每一个正整数  $k$ ， $\Gamma_k \models \mathbf{P}_k$ 。

奠基命题： $\Gamma_1 \models \mathbf{P}_1$ 。

归纳步骤：如果对于每一个正整数  $i \leq k$  都有  $\Gamma_i \models \mathbf{P}_i$ ，那么  $\Gamma_{k+1} \models \mathbf{P}_{k+1}$ 。

证明奠基命题： $\mathbf{P}_1$  是一个推演的第一个命题。在 SC 中每一个推演都从一个或多个假设（前提也是假设）开始，第一个命题就是该推演的第一个假设即  $\Gamma_1 = \{\mathbf{P}_1\}$ ，并且  $\mathbf{P}_1$  处于它自己的假设域中。由于  $\Gamma_1$  的成员和  $\mathbf{P}_1$  是同一个命题，显然，当  $\Gamma_1$  的所有成员为真时  $\mathbf{P}_1$  也为真，即  $\Gamma_1 \models \mathbf{P}_1$ 。

证明归纳步骤：在 SC 的每一个推演中，得出  $\mathbf{P}_{k+1}$  的方法不外乎通过引入假设或应用推演规则。在 SC 中共有 20 条推演规则：八条整推规则，两条假设引入 - 撤除规则和十条置换规则。我们在第三章第四节末尾证明了八条整推规则中有三条——否定后件、否定析取支和假言三段论——是可以由其他推演规则导出的。此外，十条置换规则可以作为一类规则。因此在这里只需考虑以下九种情况，即应用肯定前件规则、化简规则、合取规则、二难推论规则、附加规则、条件证明规则、间接证明规则、置换规则和引入假设。下面我们逐一地考察这九种情况。

情况 1： $\mathbf{P}_{k+1}$  是一个被引入的假设。这时  $\mathbf{P}_{k+1}$  隶属于它自己，因而是  $\Gamma_{k+1}$  的一个成员。 $\Gamma_{k+1}$  作为  $\mathbf{P}_{k+1}$  所隶属假设的集合，当其每一个成员为真时， $\mathbf{P}_{k+1}$  作为其中的一个成员自然也是真的，因此： $\Gamma_{k+1} \models \mathbf{P}_{k+1}$ 。

情况 2： $\mathbf{P}_{k+1}$  通过十条置换规则之一得出。令  $\mathbf{P}_{k+1}$  是  $\mathbf{P} (\mathbf{Q}_1 / \mathbf{Q})$ ，即通过用  $\mathbf{Q}_1$  替换在先的命题  $\mathbf{P}$  的支命题  $\mathbf{Q}$  的至少一次出现而得到的。并且  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{Q}_1$  具有十条置换规则所依据的十对相互置换的命题形式之一。由真值表可以证明，这十对相互置换的命题形式中的每一对命题都是重言等值的，因此  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{Q}_1$  是重言等值的。 $\mathbf{P}$  在推演中的位置是  $h$  ( $h \leq k$ )，即：

(h)  $P$

(k+1)  $P(Q_1/Q)$  (h), 置换

根据归纳假设,  $\Gamma_h \models P$ 。既然位置  $h$  上的命题可以参与位置  $k+1$  上的推演, 那么, 对于  $k+1$  位置上的命题  $P(Q_1/Q)$ ,  $\Gamma_h$  的成员均为它所隶属的假设, 因此,  $\Gamma_h$  是  $\Gamma_{k+1}$  的一个子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models P$ 。又根据元定理 8.6.7, 既然  $Q$  和  $Q_1$  是重言等值的, 那么  $P$  和  $P(Q_1/Q)$  也是重言等值的。所以,  $\Gamma_{k+1} \models P(Q_1/Q)$ , 即  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

【情况 3】 $P_{k+1}$  通过肯定前件规则得出。由此得出  $P_{k+1}$  的在先的两个命题是  $Q \rightarrow P_{k+1}$  和  $Q$ , 二者在推演中的位置分别是  $h$  和  $j$  ( $h, j \leq k$ )。即:

(h)  $Q \rightarrow P_{k+1}$

(j)  $Q$

(k+1)  $P_{k+1}$  (h) (j), 肯定前件

根据归纳假设,  $\Gamma_h \models Q \rightarrow P_{k+1}$  和  $\Gamma_j \models Q$ 。既然位置  $h$  和  $j$  上的命题可以参与位置  $k+1$  上的推演, 那么,  $\Gamma_h$  和  $\Gamma_j$  均属  $\Gamma_{k+1}$  的子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models Q \rightarrow P_{k+1}$  和  $\Gamma_{k+1} \models Q$ 。由 “ $\rightarrow$ ” 的特征真值表可知, 当  $Q \rightarrow P_{k+1}$  和  $Q$  都为真的时候  $P_{k+1}$  一定也为真, 所以,  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

【情况 4】 $P_{k+1}$  通过化简规则得出。即:

(h)  $P_{k+1} \wedge Q$

或 (h)  $Q \wedge P_{k+1}$

(k+1)  $P_{k+1}$

(h), 化简

(k+1)  $P_{k+1}$

(h), 化简

先考虑左边。由于  $h \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_h \models P_{k+1} \wedge Q$ 。既然 (h) 位置上的命题可以参与 (k+1) 位置上的推演, 那么,  $\Gamma_h$  是  $\Gamma_{k+1}$  的子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1} \wedge Q$ 。由 “ $\wedge$ ” 的特征真值表可知, 当  $P_{k+1} \wedge Q$  为真时  $P_{k+1}$  一定也为真。所以,  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

对右边的证明可以按照相同的思路。

【情况 5】 $P_{k+1}$  通过合取规则得出。令  $P_{k+1}$  是  $Q \wedge R$ , 此推演是:

(h)  $Q$

(j)  $R$

(k+1)  $Q \wedge R$  (h) (j), 合取

由于  $h, j \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_h \models Q$  并且  $\Gamma_j \models R$ 。既然 (h) 和 (j) 位置上的命题可以参与 (k+1) 位置上的推演, 那么,  $\Gamma_h$  和  $\Gamma_j$  均属  $\Gamma_{k+1}$  的子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models Q$  并且  $\Gamma_{k+1} \models R$ 。由 “ $\wedge$ ” 的特征真值表可知, 当  $Q$  和  $R$  为真时  $Q \wedge R$  一定也为真。所以,  $\Gamma_{k+1} \models Q \wedge R$ , 即  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

【情况 6】 $P_{k+1}$  通过二难推论规则得出。令  $P_{k+1}$  是  $R \vee T$ , 此推演是:

(h)  $Q \rightarrow R$

(j)  $S \rightarrow T$ (m)  $Q \vee S$ (k+1)  $R \vee T$  (h) (j) (m), 二难推论

由于  $h, j, m \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_h \models Q \rightarrow R$ ,  $\Gamma_j \models S \rightarrow T$  和  $\Gamma_m \models Q \vee S$ 。既然 (h)、(j) 和 (m) 位置上的命题可以参与 (k+1) 位置上的推演, 那么,  $\Gamma_h$ 、 $\Gamma_j$  和  $\Gamma_m$  均属  $\Gamma_{k+1}$  的子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models Q \rightarrow R$ ,  $\Gamma_{k+1} \models S \rightarrow T$ ,  $\Gamma_{k+1} \models Q \vee S$ 。用真值表很容易表明, 当  $Q \rightarrow R$ ,  $S \rightarrow T$  和  $Q \vee S$  均为真时  $R \vee T$  一定为真, 因此  $\Gamma_{k+1} \models R \vee T$ , 即  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

【情况 7】  $P_{k+1}$  通过附加规则得出。令  $P_{k+1}$  是  $Q \vee R$ , 此推演是:(h)  $Q$  或 (h)  $R$ (k+1)  $Q \vee R$  (h), 附加 (k+1)  $Q \vee R$  (h), 附加

先考虑左边。由于  $h \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_h \models Q$ 。既然 (h) 位置上的命题可以参与 (k+1) 位置上的推演, 那么,  $\Gamma_h$  是  $\Gamma_{k+1}$  的子集。根据元定理 8.6.2,  $\Gamma_{k+1} \models Q$ 。由“ $\vee$ ”的特征真值表可知, 当  $Q$  为真时  $Q \vee R$  一定也为真。所以,  $\Gamma_{k+1} \models Q \vee R$ , 即  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

对右边的证明可以按照相同的思路。

【情况 8】  $P_{k+1}$  通过条件证明规则得出。令  $P_{k+1}$  是  $Q \rightarrow R$ , 此推演是:

$\boxed{(h) Q}$	假设
$\boxed{(j) R}$	

(k+1)  $Q \rightarrow R$  (h) - (j), 条件证明

由于  $j \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_j \models R$ 。尽管 (k+1) 位置上的命题  $Q \rightarrow R$  并不隶属于 (h) 位置上的假设  $Q$ , 但它却是从 (h) 到 (j) 位置上的子推演直接得出的, 因而  $\Gamma_{k+1}$  比起  $\Gamma_j$  只缺少假设  $Q$ , 即  $\Gamma_j = \Gamma_{k+1} \cup \{Q\}$ 。于是,  $\Gamma_{k+1} \cup \{Q\} \models R$ 。根据元定理 8.6.3,  $\Gamma_{k+1} \models Q \rightarrow R$ , 即  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

【情况 9】  $P_{k+1}$  通过间接证明规则得出。此推演是:

$\boxed{(h) \neg P_{k+1}}$	假设
$\boxed{(j) Q}$	
$\boxed{(m) \neg Q}$	
(k+1) $P_{k+1}$	(h) - (m), 间接证明

由于  $j \leq k$ , 根据归纳假设,  $\Gamma_j \models Q$ 。尽管 (k+1) 位置上的命题  $P_{k+1}$  并不隶属于 (h) 位置上的假设  $\neg P_{k+1}$ , 但它却是从 (h) 到 (m) 位置上的子推演直接得出的, 因而  $\Gamma_{k+1}$  比起  $\Gamma_j$  只缺少假设  $\neg P_{k+1}$ , 即  $\Gamma_j = \Gamma_{k+1} \cup \{\neg P_{k+1}\}$ 。于是,  $\Gamma_{k+1} \cup \{\neg P_{k+1}\} \models Q$ 。同理可得,  $\Gamma_{k+1} \cup \{\neg P_{k+1}\} \models \neg Q$ 。根据元定理 8.6.5,  $\Gamma_{k+1} \cup \{\neg P_{k+1}\}$  是真

值函项不一致的。再根据元定理 8.6.6,  $\Gamma_{k+1} \models P_{k+1}$ 。

至此, 我们考查了全部九种情况, 从而完成了对归纳步骤的证明, 进而完成了对元定理 8.6.1 的证明。元定理 8.6.1 是关于 SC 的可靠性定理, 它断言: 在 SC 中, 如果  $\Gamma \vdash P$ , 那么  $\Gamma \models P$ ; 即 SC 的任何一个推演都具有保真性, 因而 SC 的任何一个推演都是真值函项地有效的。现在, 我们很容易得到另一条元定理。

【元定理 8.6.8】SC 的每一定理都是一个重言式。

【证明】假定 SL 的一个命题  $P$  是 SC 的一个定理。根据 SC 关于定理的定义, 在 SC 中有:  $\phi \vdash P$  (即  $\vdash P$ )。根据可靠性定理即元定理 8.6.1, 则有:  $\phi \models P$  (即  $\models P$ )。再根据元定理 8.3.7 (本章第三节给出),  $P$  是一个重言式。

## 习题 8.6

一、设一系统  $SC^*$  比  $SC$  多出一条推演规则, 其他规则完全一样。这条多出的规则是:

 $P$ 
 $\neg Q$ 
 $\therefore \neg(P \leftrightarrow Q)$ 

请证明系统  $SC^*$  对于命题逻辑而言是可靠的, 即证明在系统  $SC^*$  中, 如果  $\Gamma \vdash P$ , 那么  $\Gamma \models P$ 。

(提示: 证明系统  $SC^*$  与  $SC$  是逻辑等价的。)

二、设一系统  $SC^*$  比  $SC$  多出一条推演规则, 其他规则完全一样。这条多出的规则是:

 $P \vee Q$ 
 $P$ 
 $\therefore Q$ 

请证明系统  $SC^*$  对于命题逻辑而言是不可靠的, 即证明在系统  $SC^*$  中, 有  $\Gamma$  使得,  $\Gamma \vdash P$  而  $\Gamma \not\models P$ 。(提示: 通过给出这一新推演规则的一个反例加以证明。)

三、假定系统  $SC^*$  的推演规则是系统  $SC$  的推演规则的一个子集, 系统  $SC^*$  对于命题逻辑是可靠的吗? 为什么?

四、假定在 SL 的语义中, 除 “ $\wedge$ ” 以外的其他联结词的特征真值表保持不变, 只是 “ $\wedge$ ” 的特征真值表变为:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

对于这种语义，推演系统 SC 具有可靠性吗？为什么？

## 8.7 SC 的完全性<sup>①</sup>

### 8.7.1 不一致性引理和最大一致性集合

在上一节我们证明了 SC 的可靠性，即 SC 的任何一个推演都不会导致无效推论，即不会导致前提真而结论假的推论。尽管这个结论非常重要，但是，只有它还不能使我们对 SC 完全满意。因为我们还希望 SC 能够具有另一种性质，即任何一个真值函项地有效推论或保真性推论都在 SC 中有一个相应的推演，即在 SC 中能够从其前提推出其结论；相应地，任何一个重言式都是 SC 的一个定理。如果 SC 具有这一性质，那么 SC 对于命题逻辑而言就是完全的。在本节中我们将要证明 SC 确实具有这种性质，这一结论叫做 SC 的完全性定理。

**【元定理8.7.1】** 如果  $\Gamma \models P$ ，那么，在 SC 中  $\Gamma \vdash P$ 。

元定理 8.7.1 就是 SC 的完全性定理，它是 SC 的可靠性定理即元定理 8.6.1 的逆定理。本节将给出关于这一定理的证明，为此，需要首先给出其他一些重要定理及其证明。

**【元定理 8.7.2】** 对于 SL 的一个命题集  $\Gamma$  和一个命题  $P$ ， $\Gamma \models P$ ，当且仅当， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。

这条定理可由本章第三节的元定理 8.3.5 和 8.3.6 直接得出。

**【元定理 8.7.3】** 对于任一命题集  $\Gamma$  和任一命题  $P$ ，在 SC 中  $\Gamma \vdash P$ ，当且仅当， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。

<sup>①</sup> 这里论证完全性的方法出自 Leon Henkin，“The Completeness of the First-Order Functional Calculus”，in *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), 159 ~ 166. 并由 M. Bergmann & J. Moor & J Nelson 在表述上加以改进，见 Chapter 6, in *The Logic Book*, McGraw-Hill, 2004。这里为使之适合 SC 系统的需要而作了必要的调整和改动。

这条定理在本章第二节已经给出证明，在此只是为了使用起来方便而将它重述一遍。

**【元定理 8.7.3】**（不一致性引理）如果 SL 的一个命题集  $\Gamma$  是真值函项地不一致的，那么  $\Gamma$  也是 SC 不一致的。

SC 的完全性定理可由以上三条元定理即 8.7.2、8.2.3 和 8.7.3 加以证明，即：如果 SC 的完全性定理即元定理 8.7.1 的前件为真，即  $\Gamma \models P$ ，那么，根据元定理 8.7.2， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是真值函项地不一致的。根据元定理 8.7.3（不一致性引理）， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。再根据元定理 8.2.3，在 SC 中  $\Gamma \vdash P$ 。到目前为止，只有元定理 8.7.3 即不一致性引理没有得到证明；因此，只需完成对这一定理的证明，SC 的完全性定理便得以证明。

不一致性引理把语义不一致性和语法不一致性联系起来，这是 SC 的完全性证明中的关键所在。不一致性引理的一个等价命题是：如果 SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 一致的，那么， $\Gamma$  是真值函项地一致的。我们证明这个命题的基本策略在于表明：对于任何一个 SC 一致的命题集  $\Gamma$ ，都可构造一个真值指派，使得  $\Gamma$  的所有成员为真。为要构造这样一种真值指派，我们需要借助于一种特殊的具有 SC 一致性的命题集，即 SC 最大一致性集合。

**【定义】** SL 的一个命题集  $\Gamma$  是 SC 最大一致的，当且仅当， $\Gamma$  是 SC 一致的，并且对于 SL 的任一不属于  $\Gamma$  的命题  $P$ ， $\Gamma \cup \{P\}$  是 SC 不一致的。

直观上讲，SC 最大一致性集合就是在保持 SC 一致性的前提下容纳最多的 SL 的命题，以至于任何不属于它的 SL 命题一旦加入就会导致 SC 不一致性。请注意，对于 SL 的命题，SC 最大一致性集合并非只有一个，而是有多个甚至无穷多个，这取决于一个 SC 最大一致性集合是以哪些集合为其子集的。如，分别以  $\{P\}$  和  $\{\neg P\}$  为其子集的两个 SC 最大一致性集合就是不同的，其中一个以  $P$  而不以  $\neg P$  为其成员，另一个则相反。对于 SL 的任一命题集  $\Gamma$ ，我们之所以对以  $\Gamma$  为其子集的 SC 最大一致性集合感兴趣，是因为我们有一种方法可以为每一个 SC 最大一致性集合构造相应的真值指派，使得它的每一成员为真，当然也可使其子集  $\Gamma$  的每一成员为真。在介绍这一方法之前，需要先证明如下定理：

**【元定理 8.7.4】**（最大一致性引理）如果  $\Gamma$  是 SL 的一个命题集并且是 SC 一致的，那么，至少有一个 SC 最大一致性集合使得， $\Gamma$  是它的子集。

这个定理是重要的，因为它将使我们可以通过以  $\Gamma$  为子集的 SC 最大一致性集合来讨论任一命题集  $\Gamma$ 。为证明这一定理，我们首先给出一种对 SL 的任何命题进行排序的可行方法。这个方法是给 SL 的每一个符号指定一个两位数字，从而使得 SL 的每一个命题对应于一个有限的正整数。SL 的每一个符号所对应的两位数字列表如下：

符号	数字	符号	数字
$\neg$	10	A	30
$\vee$	11	B	31
$\wedge$	12	C	32
$\rightarrow$	13	D	33
$\leftrightarrow$	14	E	34
(	15	F	35
)	16	G	36
0	20	H	37
1	21	I	38
...	...	...	...
9	29	Z	55

接下来，我们对 SL 的每一命题赋予一个正整数编码，即：按照一个命题中符号出现的顺序逐一写上相应的数字。如以下两个命题

$(A \vee C_2)$  和  $\neg \neg (A \rightarrow (B \wedge \neg C))$

的编码分别是：

153011322216 和 101015301315311210321616

显然，SL 的每一个命题都有一个独一无二的编码。于是，我们可以按照编码的顺序把 SL 的所有命题一一列举出来：第一个命题是具有最小编码的，第二个命题是具有次小编码的，依此类推。按照这种排序，SL 的第一个命题是 A，因为命题中只有命题常项具有两位数的编码，而且 A 的两位数编码是最小的。第二个命题是 B。依此类推。请注意，虽然 “ $\neg$ ” 等符号也具有两位数字的编码，但是它不是命题；由它一旦构成最简单的命题如  $\neg A$ ，其编码就成为四位数，即 1030。

现在我们可以为任何一个 SC 一致的命题集  $\Gamma$  构造以其为子集的 SC 最大一致性集合。现以  $\Gamma$  为出发点，按顺序逐一考虑 SL 的所有命题，并通过以下方式构造  $\Gamma$  的 SC 一致的母集序列  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$ ：

1.  $\Gamma_1$  是原始集  $\Gamma$ 。

2. 如果  $P_i$  是第  $i$  个命题，那么： $\Gamma_{i+1}$  是  $\Gamma_i \cup \{P_i\}$  当  $\Gamma_i \cup \{P_i\}$  是 SC 一致的，否则  $\Gamma_{i+1}$  是  $\Gamma_i$ （但序号仍然是两个）。

例如，如果  $\Gamma_i$  是  $\{\neg B, \neg C \vee \neg B\}$  并且  $P_i$  是 A，那么  $\Gamma_i \cup \{P_i\}$  是  $\{\neg B, \neg C \vee \neg B, A\}$  因而是 SC 一致的；在这种情况下， $\Gamma_{i+1}$  是扩展了的集合  $\Gamma_i \cup \{P_i\}$ 。如

果  $\Gamma_i$  是  $\{A, \neg B, \neg C \vee \neg B\}$  并且  $P_i$  是  $B$ , 那么  $\Gamma_i \cup \{P_i\}$  是  $\{A, \neg B, \neg C \vee \neg B, B\}$  因而是 SC 不一致的; 在这种情况下,  $P_i$  不被加入集合,  $\Gamma_{i+1}$  是  $\Gamma_i$  即  $\{A, \neg B, \neg C \vee \neg B\}$ , 亦即这同一个集合有两个不同的序号:  $\Gamma_{i+1}$  和  $\Gamma_i$ 。

按照这种方法构造的集合序列是无穷的, 因此我们不能把这个序列的最后一个集合作为所需要的那个 SC 最大一致性集合, 因为这个序列的最后一个集合并不存在。作为代替, 我们构造一个集合  $\Gamma^*$ ,  $\Gamma^*$  是这个序列所有集合的并集, 即  $\Gamma^*$  包含任何一个命题, 如果这个命题是这个序列中至少一个集合的成员, 并且不包含此外的任何其他命题。 $\Gamma^*$  是  $\Gamma$  的母集, 因为根据定义  $\Gamma^*$  包含  $\Gamma_1$  (以及  $\Gamma_2, \Gamma_3 \dots$ ) 的每一成员, 而  $\Gamma_1$  正是原始集  $\Gamma$ 。

有了  $\Gamma^*$  以后, 接下来的问题就是要证明  $\Gamma^*$  是 SC 一致的并且是 SC 最大一致的。为证明前者, 我们注意到, 集合序列  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$  中的每一集合是 SC 一致的。对此, 我们通过数学归纳法证明如下:

**奠基命题:** 该序列的第一个成员  $\Gamma_1$  是 SC 一致的。

**【证明】**  $\Gamma_1$  被定义为原始集  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  是 SC 一致的。

**归纳步骤:** 如果该序列中先于  $\Gamma_{k+1}$  的每一个集合是 SC 一致的, 那么  $\Gamma_{k+1}$  是 SC 一致的。

**【证明】**  $\Gamma_{k+1}$  被定义为  $\Gamma_k \cup \{P_k\}$  如果这个并集是 SC 一致的, 否则  $\Gamma_{k+1}$  是  $\Gamma_k$ 。在前一种情况下,  $\Gamma_{k+1}$  显然是 SC 一致的; 在后一种情况下,  $\Gamma_{k+1}$  也是 SC 一致的, 因为根据归纳假设,  $\Gamma_k$  是 SC 一致的。

在证明集合序列  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$  中的每一集合是 SC 一致的之后, 我们注意到本章第二节证明的一条元定理, 即: 一个命题集  $\Gamma$  是 SC 一致的, 当且仅当,  $\Gamma$  的每一有限子集是 SC 一致的。(元定理 8.2.7)

似乎据此便可证明  $\Gamma^*$  是 SC 一致的。然而并非如此, 因为尽管  $\Gamma^*$  是集合序列  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$  中的所有集合的并集, 但是并非  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots$  是  $\Gamma^*$  的全部有限子集。如  $\Gamma_1$  的一个真子集也是  $\Gamma^*$  的一个子集但却不在该序列中。因此, 为证明  $\Gamma^*$  是 SC 一致的, 我们必须走得更远些。

现作一个与所求命题相反的假定, 即  $\Gamma^*$  是 SC 不一致的。根据第二节证明了的一条定理(元定理 8.2.5): 如果命题集  $\Gamma$  是 SC 不一致的, 那么, 至少有一  $\Gamma$  的有限子集是 SC 不一致的。因此, 存在一个  $\Gamma^*$  的有限子集  $\Gamma'$  是 SC 不一致的。 $\Gamma'$  必须是一个非空集, 因为空集是 SC 一致的(这一结论已在习题 8.6 中出现并要求证明)。此外, 由于  $\Gamma'$  是有限的, 按照前面给出的编序方法, 其中必有一命题的编号后于  $\Gamma'$  中所有其他命题, 我们把这一命题记为  $P_j$  (对于  $\Gamma'$  中的任何其他命题  $P_h$ ,  $h < j$ )。这样,  $\Gamma'$  的每一成员都是  $\Gamma_{j+1}$  的成员, 因为我们构造该集合序列的方法使得,  $\Gamma_{j+1}$  包含了  $\Gamma$  和  $P_j$  以及所有先于  $P_j$  并且已经属于  $\Gamma^*$  的命题  $P_h$ 。如果  $\Gamma'$  是 SC 不一致的, 根据本章第二节证明

了的元定理 8.2.4：如果命题集  $\Gamma'$  是 SC 不一致的，那么， $\Gamma'$  的每一个母集  $\Gamma$  是 SC 不一致的。那么  $\Gamma_{j+1}$  是 SC 不一致的，既然  $\Gamma_{j+1}$  是  $\Gamma'$  的一个母集。然而我们已经通过数学归纳法证明，该集合序列的每一个集合都是 SC 一致的，其中包括  $\Gamma_{j+1}$ 。由此可见， $\Gamma'$  不可能是 SC 不一致的；所以， $\Gamma^*$  是 SC 一致的。

我们接着证明， $\Gamma^*$  是 SC 最大一致的。

假定  $\Gamma^*$  不是 SC 最大一致的。那么，至少存在一个 SL 的命题  $P_k$ ， $P_k$  不是  $\Gamma^*$  的成员并且  $\Gamma^* \cup \{P_k\}$  是 SC 一致的。根据元定理 8.2.7， $\Gamma_k \cup \{P_k\}$  作为  $\Gamma^* \cup \{P_k\}$  的一个子集是 SC 一致的。又根据我们构造该集合序列的步骤， $\Gamma_k \cup \{P_k\}$  正是  $\Gamma_{k+1}$ ，因而  $P_k$  是  $\Gamma_{k+1}$  的一个成员，进而  $P_k$  是  $\Gamma^*$  的一个成员。这与我们的假定相矛盾。可见， $\Gamma^*$  是 SC 最大一致的。

至此，我们证明了最大一致性引理即元定理 8.7.4。这表明，对于任何一个 SC 一致的命题集，我们都可以说造一个它的母集并且该母集是 SC 最大一致的。

## 8.7.2 对 SC 的完全性的证明

上一小节指出，为证明 SC 的完全性，需要给出关于不一致性引理即元定理 8.7.3 的证明；为证明不一致性引理，需要借助于 SC 最大一致性集合。现在我们有了关于最大一致性集合的存在性定理即元定理 8.7.4 以后，还需证明：对于每一个 SC 最大一致性集合，我们能够构造一个真值指派，使得该集合的每一个命题是真的。

**【元定理 8.7.5】**（一致性引理）每一个 SC 最大一致性集合都是真值函项地一致的。

为证明一致性引理，我们需要求助于以下涉及最大一致性集合的定理。

**【元定理 8.7.6】** 如果在 SC 中  $\Gamma \vdash P$  并且  $\Gamma^*$  是  $\Gamma$  的最大一致性母集，那么  $P$  是  $\Gamma^*$  的成员。

**【证明】** 假定在 SC 中  $\Gamma \vdash P$  并且  $\Gamma^*$  是  $\Gamma$  的最大一致性母集，根据元定理 8.2.1 即：在 SC 中，如果  $\Gamma \vdash P$ ，那么对于  $\Gamma$  的每一个母集  $\Gamma'$  而言， $\Gamma' \vdash P$ 。可得  $\Gamma^* \vdash P$ 。现作一个与所证命题相反的假设即  $P$  不是  $\Gamma^*$  的成员。根据 SC 最大一致性集合的定义， $\Gamma^* \cup \{P\}$  是 SC 不一致的。又根据本章第二节证明的元定理 8.2.3 即：对于任何命题集  $\Gamma$  和任何命题  $P$ ，在 SC 中  $\Gamma \vdash P$ ，当且仅当， $\Gamma \cup \{\neg P\}$  是 SC 不一致的。（只需将定理中的“ $P$ ”替换成“ $\neg P$ ”）可得  $\Gamma^* \vdash \neg P$ 。由于  $P$  和  $\neg P$  都可从  $\Gamma^*$  推出， $\Gamma^*$  是 SC 不一致的。但是，这与“ $\Gamma^*$  是一个最大一致性集合”的假定相矛盾。这表明“ $P$  不是  $\Gamma^*$  的成员”的假定是假的，故  $P$  是  $\Gamma^*$  的成员。

在以上讨论中，我们常常说到“ $P$  是  $\Gamma$  的成员”。接下来的讨论我们将采用这句话的标准表达方式，即：

$$P \in \Gamma$$

读做“ $P$  属于  $\Gamma$ ”。相应地，“ $P$  不是  $\Gamma$  的成员”的标准表达方式是：

$P \notin \Gamma$

读做“ $P$  不属于  $\Gamma$ ”。下面一组定理涉及 SC 最大一致性集合的成员的构成关系。

【元定理 8.7.7】如果  $\Gamma^*$  是 SC 最大一致性集合并且  $P$  和  $Q$  是 SL 的命题，那么：

- a.  $\neg P \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \notin \Gamma^*$ 。
- b.  $P \wedge Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ 。
- c.  $P \vee Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \in \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$ 。
- d.  $P \rightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \notin \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$ 。
- e.  $P \leftrightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当:  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ , 或者,  $P \notin \Gamma^*$  并且  $Q \notin \Gamma^*$ 。

【证明 a】假定  $\Gamma^*$  是 SC 最大一致性集合并且  $\neg P \in \Gamma^*$ 。如果  $P \in \Gamma^*$ , 那么  $\Gamma^*$  有一有限子集即  $\{P, \neg P\}$  是 SC 不一致的。根据元定理 8.2.7,  $\Gamma^*$  是 SC 不一致的。但这与假定相冲突。可见,  $P \notin \Gamma^*$ 。再假定  $\Gamma^*$  是 SC 最大一致性集合并且  $P \notin \Gamma^*$ 。根据 SC 最大不一致性集合的定义,  $\Gamma^* \cup \{P\}$  是 SC 不一致的。根据元定理 8.2.3,  $\Gamma^* \vdash \neg P$ 。又根据元定理 8.7.6,  $\neg P \in \Gamma^*$ , 既然  $\Gamma^*$  是它自己的一个子集。

【证明 b】假定  $P \wedge Q \in \Gamma^*$ 。 $\{P \wedge Q\}$  是  $\Gamma^*$  的子集。由于  $\{P \wedge Q\} \vdash P$  并且  $\{P \wedge Q\} \vdash Q$  (化简规则), 根据元定理 8.7.6,  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ 。再假定  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ , 那么  $\{P, Q\}$  是  $\Gamma^*$  的子集。 $\{P, Q\} \vdash P \wedge Q$  (合取规则), 根据元定理 8.7.6,  $P \wedge Q \in \Gamma^*$ 。

【证明 c】假定  $P \vee Q \in \Gamma^*$ , 并且假定一个与我们所要结论相反的命题:  $P \notin \Gamma^*$  并且  $Q \notin \Gamma^*$ 。根据 a,  $\neg P \in \Gamma^*$  并且  $\neg Q \in \Gamma^*$ 。于是,  $\Gamma^*$  有一子集为  $\{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$ 。显然,  $\{P \vee Q, \neg P, \neg Q\} \vdash Q$  (通过否定析取支规则) 并且  $\{P \vee Q, \neg P, \neg Q\} \vdash \neg Q$  (对该集合的三个成员先合取再化简)。因此,  $\{P \vee Q, \neg P, \neg Q\}$  是 SC 不一致的。根据元定理 8.2.4,  $\Gamma^*$  是 SC 不一致的。然而, 这与  $\Gamma^*$  的定义相违。可见, “ $P \notin \Gamma^*$  并且  $Q \notin \Gamma^*$ ” 的假定是假的, 所以,  $P \in \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$ 。

再假定:  $P \in \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$ 。如果  $P \in \Gamma^*$ ,  $\{P\}$  是  $\Gamma^*$  的子集并且  $\{P\} \vdash P \vee Q$  (通过附加规则), 根据元定理 8.7.6,  $P \vee Q \in \Gamma^*$ 。如果  $Q \in \Gamma^*$ , 同理可得,  $P \vee Q \in \Gamma^*$ 。所以,  $P \vee Q \in \Gamma^*$ 。

【证明 d】假定  $P \rightarrow Q \in \Gamma^*$ 。 $\{P \rightarrow Q\}$  是  $\Gamma^*$  的一个子集。显然,  $\{P \rightarrow Q\} \vdash \neg P \vee Q$ 。(根据蕴涵规则进行置换。) 根据元定理 8.7.6,  $\neg P \vee Q \in \Gamma^*$ 。又假定  $\neg P \vee Q \in \Gamma^*$ , 同理可得,  $P \rightarrow Q \in \Gamma^*$ 。因此,  $P \rightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $\neg P \vee Q \in \Gamma$ 。根据 c,  $\neg P \vee Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $\neg P \in \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$  (用  $\neg P$  代换 c 中的  $P$ )。根据 a,  $\neg P \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \notin \Gamma^*$ 。所以,  $P \rightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \notin \Gamma^*$  或者  $Q \in \Gamma^*$ 。

证明 e: 根据 SC 的等值规则, 用类似于证明 d 的推论可得:  $P \leftrightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \in \Gamma^*$ 。进而容易证明:  $P \leftrightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \in \Gamma^*$ 。根据 c,  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \wedge Q \in \Gamma^*$  或者  $\neg P \wedge \neg Q \in \Gamma^*$ 。

$\neg Q \in \Gamma^*$ 。根据 b,  $P \wedge Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ ;  $\neg P \wedge \neg Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $\neg P \in \Gamma^*$  并且  $\neg Q \in \Gamma^*$ 。根据 a,  $\neg P \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \notin \Gamma^*$ ;  $\neg Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $Q \notin \Gamma^*$ 。所以,  $P \leftrightarrow Q \in \Gamma^*$ , 当且仅当,  $P \in \Gamma^*$  并且  $Q \in \Gamma^*$ , 或者,  $P \notin \Gamma^*$  并且  $Q \notin \Gamma^*$ 。

现在我们转向一致性引理即元定理 8.7.5 的证明。令  $\Gamma^*$  是一个 SC 最大一致性集合,  $A^*$  是这样一种真值指派: 对于任何一个属于  $\Gamma^*$  的命题常项赋予真值 T, 对于其他不属于  $\Gamma^*$  的命题常项赋予真值 F。我们将用数学归纳法证明, 相对于真值指派  $A^*$ , SL 的一个命题  $P$  是真的, 当且仅当,  $P$  属于  $\Gamma^*$ ; 否则,  $P$  是假的。我们将数学归纳用于命题的联结词出现的数目。

**奠基命题:** 相对于真值指派  $A^*$ , SL 的每一个命题常项是真的, 当且仅当, 它属于  $\Gamma^*$ 。

**归纳步骤:** 在 SL 中, 如果每一个包含联结词的 k 个或少于 k 个出现的命题相对于  $A^*$  是真的当且仅当它属于  $\Gamma^*$ , 那么, 每一个包含联结词的  $k+1$  个出现的命题相对于  $A^*$  是真的当且仅当它属于  $\Gamma^*$ 。

**证明奠基命题:** 由  $A^*$  的定义可知, SL 的一个命题常项被赋予真值, 当且仅当, 它属于  $\Gamma^*$ 。

**证明归纳步骤:** 由于构成复合命题的基本方式就是借助于五个真值函项联结词, 因此, 我们分五种情况来考虑。首先假定命题  $P$  包含联结词的  $k+1$  个出现。

**【情况 1】**  $P$  具有形式  $\neg Q$ 。如果  $\neg Q$  相对于  $A^*$  是真的, 那么  $Q$  相对于  $A^*$  是假的。由于  $Q$  所包含的联结词的出现少于  $k+1$ , 根据归纳假设,  $Q \notin \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7a,  $\neg Q \in \Gamma^*$ 。如果  $\neg Q$  相对于  $A^*$  是假的, 那么  $Q$  相对于  $A^*$  是真的。根据归纳假设,  $Q \in \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7a,  $\neg Q \notin \Gamma^*$ 。

**【情况 2】**  $P$  具有形式  $Q \wedge R$ 。如果  $Q \wedge R$  相对于  $A^*$  是真的, 那么,  $Q$  相对于  $A^*$  是真的并且  $R$  相对于  $A^*$  是真的。由于  $Q$  和  $R$  各自所包含的联结词的出现少于  $k+1$ , 根据归纳假设,  $Q \in \Gamma^*$  并且  $R \in \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7b,  $Q \wedge R \in \Gamma^*$ 。如果  $Q \wedge R$  相对于  $A^*$  是假的, 那么,  $Q$  相对于  $A^*$  是假的或者  $R$  相对于  $A^*$  是假的。根据归纳假设,  $Q \notin \Gamma^*$  或者  $R \notin \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7b,  $Q \wedge R \notin \Gamma^*$ 。

**【情况 3】**  $P$  具有形式  $Q \vee R$ 。如果  $Q \vee R$  相对于  $A^*$  是真的, 那么,  $Q$  相对于  $A^*$  是真的或者  $R$  相对于  $A^*$  是真的。由于  $Q$  和  $R$  各自所包含的联结词的出现少于  $k+1$ , 根据归纳假设,  $Q \in \Gamma^*$  或者  $R \in \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7c,  $Q \vee R \in \Gamma^*$ 。如果  $Q \vee R$  相对于  $A^*$  是假的, 那么,  $Q$  相对于  $A^*$  是假的并且  $R$  相对于  $A^*$  是假的。根据归纳假设,  $Q \notin \Gamma^*$  并且  $R \notin \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7c,  $Q \vee R \notin \Gamma^*$ 。

**【情况 4】**  $P$  具有形式  $Q \rightarrow R$ 。如果  $Q \rightarrow R$  相对于  $A^*$  是真的, 那么,  $Q$  相对于  $A^*$  是假的或者  $R$  相对于  $A^*$  是真的。由于  $Q$  和  $R$  各自所包含的联结词的出现少于  $k+1$ , 根据

归纳假设， $\mathbf{Q} \notin \Gamma^*$  或者  $\mathbf{R} \in \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7d， $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R} \in \Gamma^*$ 。如果  $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是假的，那么， $\mathbf{Q}$  相对于  $A^*$  是真的并且  $\mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是假的。根据归纳假设， $\mathbf{Q} \in \Gamma^*$  并且  $\mathbf{R} \notin \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7d， $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R} \notin \Gamma^*$ 。

【情况 5】 $\mathbf{P}$  具有形式  $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R}$ 。如果  $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是真的，那么， $\mathbf{Q}$  相对于  $A^*$  是真的并且  $\mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是真的，或者， $\mathbf{Q}$  相对于  $A^*$  是假的并且  $\mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是假的。由于  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  各自所包含的联结词的出现少于  $k+1$ ，根据归纳假设， $\mathbf{Q} \in \Gamma^*$  并且  $\mathbf{R} \in \Gamma^*$ ，或者， $\mathbf{Q} \notin \Gamma^*$  并且  $\mathbf{R} \notin \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7e， $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R} \in \Gamma^*$ 。如果  $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是假的，那么， $\mathbf{Q}$  相对于  $A^*$  是真的并且  $\mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是假的，或者， $\mathbf{Q}$  相对于  $A^*$  是假的并且  $\mathbf{R}$  相对于  $A^*$  是真的。根据归纳假设， $\mathbf{Q} \in \Gamma^*$  并且  $\mathbf{R} \notin \Gamma^*$ ，或者， $\mathbf{Q} \notin \Gamma^*$  并且  $\mathbf{R} \in \Gamma^*$ 。根据元定理 8.7.7e， $\mathbf{Q} \leftrightarrow \mathbf{R} \notin \Gamma^*$

证毕。

基于以上证明，我们得出结论：对于 SL 的任一命题  $\mathbf{P}$ ， $\mathbf{P} \in \Gamma^*$  当且仅当  $\mathbf{P}$  相对于  $A^*$  是真的。因此， $\Gamma^*$  的每一成员相对于  $A^*$  是真的，因而  $\Gamma^*$  是真值函项地一致的。至此，一致性引理即元定理 8.7.5 得到证明。

相应地，不一致性引理即元定理 8.7.3 也得到证明。因为，根据最大一致性引理即元定理 8.7.4，每一个 SC 一致的命题集  $\Gamma$  一定是某个 SC 最大一致性集合的子集，由于每一个 SC 最大一致性集合都是真值函项地一致的（一致性引理即元定理 8.7.5），作为某个 SC 最大一致性集合的子集的  $\Gamma$  也是真值函项地一致的。所以，如果一个 SL 的命题集  $\Gamma$  是真值函项地不一致的，那么  $\Gamma$  也是 SC 不一致的。

正如本节开头指出的，不一致性引理即元定理 8.7.3 一旦得到证明，SC 完全性定理即元定理 8.7.1 便得到证明，即：

如果  $\Gamma \models \mathbf{P}$ ，那么，在 SC 中  $\Gamma \vdash \mathbf{P}$ 。

由此，我们得出结论，自然演绎系统 SC 对于基于真值函项的命题逻辑来说是完全的，即任何一个真值函项地有效的推论都在 SC 中至少有一推演与之对应。结合上一节给出的 SC 可靠性定理，即 SC 的任一推演都是真值函项地有效的，我们进而得出结论：自然演绎系统 SC 对于基于真值函项的命题逻辑来说是完全恰当的。

## 习题 8.7

1. 设一推演系统  $SC^*$  缺少化简规则，其他规则与 SC 的推演规则完全相同。请借助于我们对 SC 完全性定理的证明过程，指出为什么对于系统  $SC^*$  完全性定理不成立。

2. 证明 SC 的紧致性 (compactness) 定理，即：

SL 的一个命题集  $\Gamma$  是真值函项地一致的，当且仅当， $\Gamma$  的每一有限子集是真值函项地一致的。

[ G e n e r a l I n f o r m a t i o n ]

书名 = 自然演绎逻辑导论

作者 = 陈晓平著

页数 = 281

S S 号 = 11663047

出版日期 = 2006年05月第2版