Uma breve introdução à topologia das superfícies

Taciana Oliveira Souza

FAMAT - UFU

Superfícies

Uma superfície é um objeto matemático *bidimensional*, isto significa, de modo intuitivo, que um ponto em movimento numa superfície tem somente *dois graus de liberdade* para mover-se.

Superfícies

O movimento em *dois graus de liberdade* significa que o movimento pode ser realizado *para cima*, *para baixo*, *para a direita* e *para a esquerda*, não sendo permitido o movimento *para a frente* ou *para trás*, pois para realizar esses movimentos é necessário sair da superfície.

Superfícies

Exemplos bem conhecidos de superfícies são:

- elipsoide;
- superfície cônica;
- hiperboloide de uma folha;
- hiperboloide de duas folhas;
- paraboloide elíptico;
- paraboloide hiperbólico;
- superfície cilíndrica.

Superfícies

Figura: Hiperboloide de uma folha usado nas torres de refrigeração de usinas nucleares.

Superfícies

Figura: Paraboloide elíptico em uma antena parabólica.

Superfícies

Figura: Paraboloide hiperbólico em uma sela de cavalo.

Superfícies

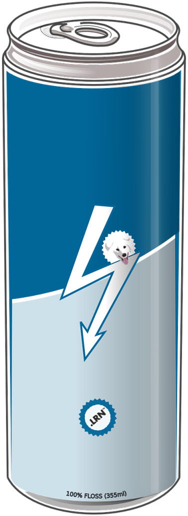

Figura: Superfície cilíndrica na lata de refrigerante.

Superfícies

Pode-se construir modelos físicos de superfícies fazendo uso de uma película de material maleável e elástico. Por exemplo, bolas de futebol americano são modelos de elipsoides.

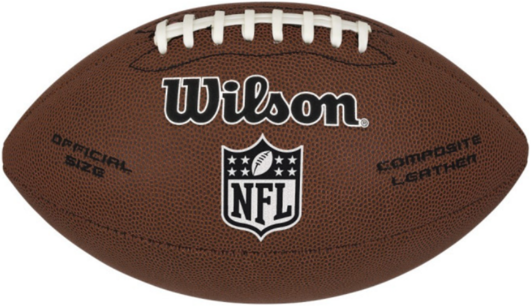

Figura: Bola de futebol americano.

Topologia de uma superfície

Define-se a topologia de uma superfície como sendo o conjunto de aspectos geométricos dessa superfície que permanecem inalterados quando a ela aplicam-se qualquer uma das seguintes transformações:

1. Esticar ou inflar a superfície ou partes dela.
2. Encolher a superfície ou partes dela.
3. Entortar a superfície ou partes dela.
4. Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e, posteriormente, colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse corte. Este procedimento é denominado *recorte e colagem*.

Topologia de uma superfície

Se uma superfície é obtida de outra por uma combinação de um número finito das quatro transformações listadas anteriormente, então elas são ditas homeomorfas ou topologicamente equivalentes.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

Algumas superfícies são definidas de modo abstrato, a partir de *colagens* de pares de arestas de regiões poligonais planas.

Neste minicurso, estudaremos a construção por meio de *colagens* das seguintes superfícies:

- Toro.
- Faixa de Möbius.
- Garrafa de Klein.
- Plano projetivo.
- Superfície esférica.

A construção do toro

Considera-se um retângulo plano. Para produzir o toro são *coladas*, aos pares, as arestas opostas do retângulo.

O toro será indicado pela notação: T^2.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

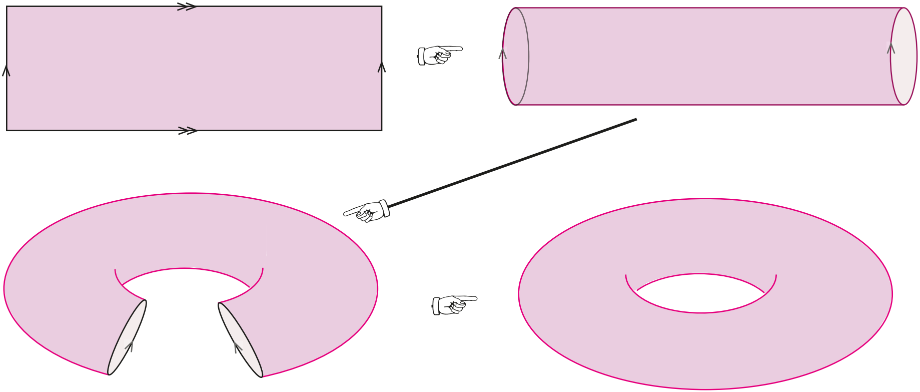

Figura: Construindo o toro.

A construção da faixa de Möbius

Considera-se uma faixa retangular plana. Para produzir a faixa de Möbius são *coladas* um par de arestas opostas. No entanto, antes de efetuar a colagem aplica-se uma rotação de 180° a uma das extremidades da faixa.

A faixa de Möbius será indicada pela notação: M^2.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

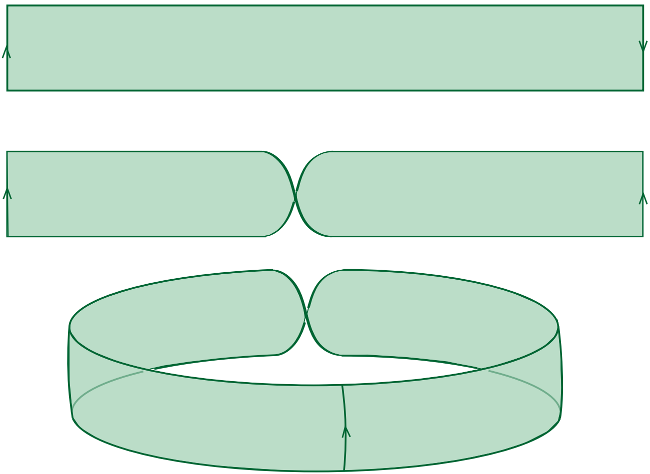

Figura: Construindo a faixa de Möbius.

A construção da garrafa de Klein

Considera-se um retângulo plano. Para produzir a garrafa de Klein cola-se a aresta superior na inferior. Em seguida, cola-se a aresta esquerda na direita, após a aplicação de uma rotação de 180° a uma das extremidades do retângulo.

A garrafa de Klein será indicada pela notação: K^2.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

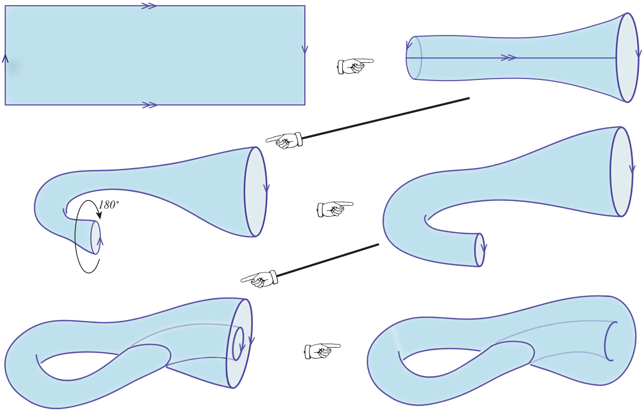

Figura: Construindo a garrafa de Klein.

A construção do plano projetivo

Considera-se uma região circular plana. Para produzir o plano projetivo cola-se cada ponto do bordo circular no ponto diametralmente oposto. Após as colagens, dois pontos diametralmente opostos na região circular plana tornam-se um só no plano projetivo.

O plano projetivo será indicado pela notação: P^2.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

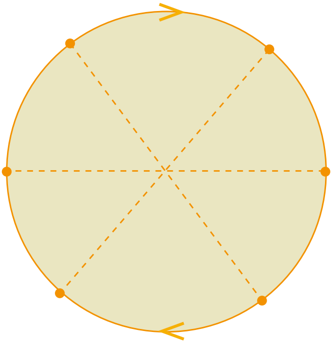

Figura: A construção do plano projetivo.

A construção da superfície esférica

Considera-se uma região circular plana. Para produzir a superfície esférica cola-se cada ponto do bordo circular no ponto simétrico com relação a um diâmetro fixado.

A superfície esférica será indicada pela notação: S^2.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

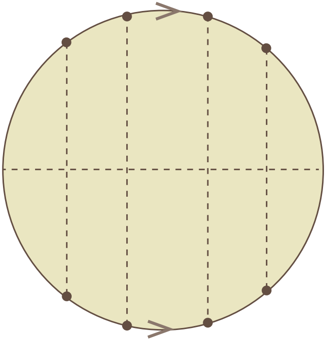

Figura: A construção da superfície esférica.

Superfícies definidas de modo abstrato e seus mapas planos

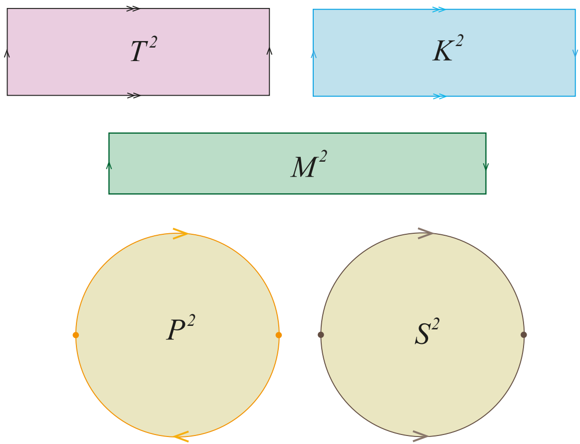

Figura: Representação planar das superfíces.

Superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis

Uma superfície é chamada não orientável se contém uma faixa de Möbius.

Uma superfície que não contém uma faixa de Möbius é chamada orientável.

O toro e a superfície esférica são exemplos de superfícies orientáveis.

A garrafa de Klein e o plano projetivo são exemplos de superfícies não orientáveis.

Superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis

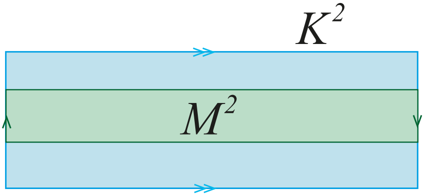

Figura: Uma faixa de Möbius contida na garrafa de Klein.

Superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis

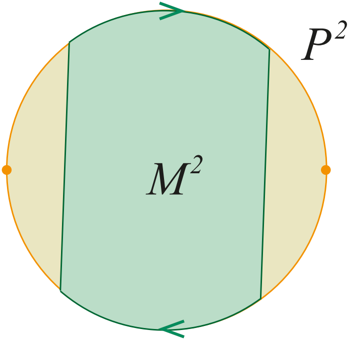

Figura: Uma faixa de Möbius contida no plano projetivo.

Superfícies orientáveis e superfícies não orientáveis

Como a faixa de Möbius possui somente um lado, podemos dizer que as superfícies não orientáveis possuem somente um lado. Assim, as superfícies orientáveis são identificadas como aquelas que possuem dois lados.

Superfícies fechadas

Uma superfície é chamada *superfície fechada* quando não tem bordo e, ao mesmo tempo, pode ser subdividida em um número finito de pedaços cada um dos quais é homeomorfo a uma região triangular plana.

O toro, a garrafa de Klein, o plano projetivo e a superfície esférica são exemplos de superfícies fechadas.

A faixa de Möebius é um exemplo de superfície não fechada, pois possui bordo.

Superfícies fechadas

Toda superfície fechada W possui um diagrama poligonal convexo plano que a representa. Para construir essa representação planar de W seguimos os seguintes passos:

1. Decompomos W em um número finito de pedaços homeomorfos a triângulos (isso é possível pois W é fechada).
2. Dispomos, separadamente, os pedaços dessa decomposição, num plano euclidiano, deformando-os em triângulos euclidianos planos (caso necessário).

Superfícies fechadas

3. Etiquetamos as arestas desses triângulos por letras *a*, *b*, *c*, etc., de modo a guardar as informações da colagem. Se duas arestas devem ser coladas uma na outra para recuperar a superfície, etiquetamos ambas com a mesma letra.
4. Etiquetamos as arestas com setas, para guardar a informação de como são colados dois triângulos que têm uma aresta em comum

Superfícies fechadas

5. Tomamos um dos triângulos da decomposição, digamos que ele tenha arestas a, b e c, e procuramos, dentre os demais triângulos, um que tenha também uma aresta etiquetada com uma dessas três letras.
6. Colamos os dois triângulos, um no outro, ao longo de uma aresta com etiqueta comum, respeitando a orientação de colagem indicada pelas setas demarcadas.

Superfícies fechadas

7. O quadrilátero plano formado pela colagem desses dois triângulos é então deformado, caso necessário, para tornar-se convexo.
8. Em seguida, procuramos, dentre os triângulos restantes, um que tenha uma aresta com mesma etiqueta de um dos lados desse quadrilátero.
9. Repetimos esse processo de colagem até que não haja triângulos remanescentes.

Superfícies fechadas

Como exemplificação, vamos planificar uma pirâmide de base quadrada.

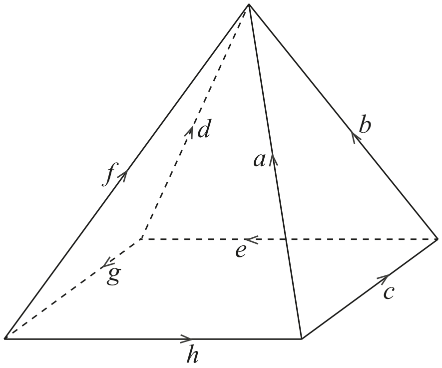

Figura: Etiquetação das arestas da pirâmide com letras e setas.

Superfícies fechadas

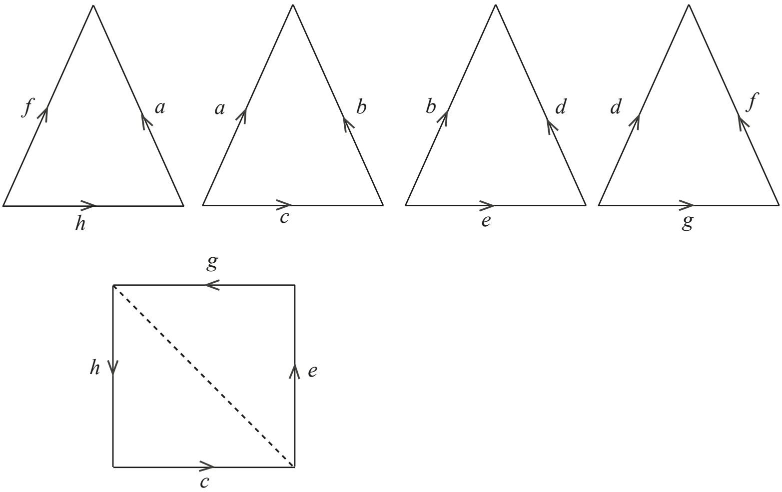

Figura: Decomposição da pirâmide em partes triangulares.

Superfícies fechadas

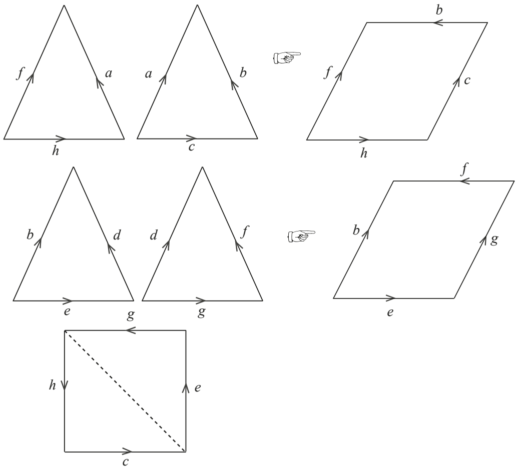

Figura: Planificando a pirâmide.

Superfícies fechadas

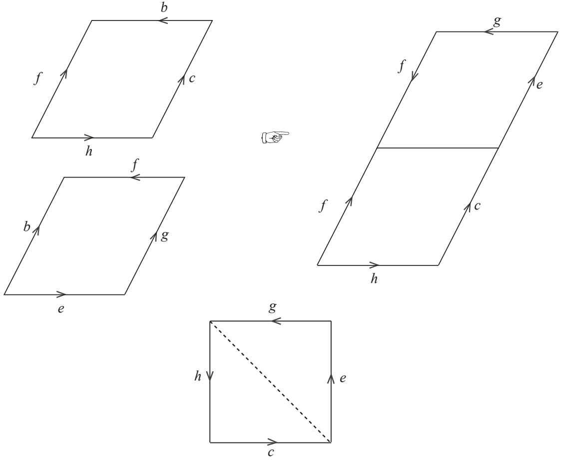

Figura: Planificando a pirâmide.

Superfícies fechadas

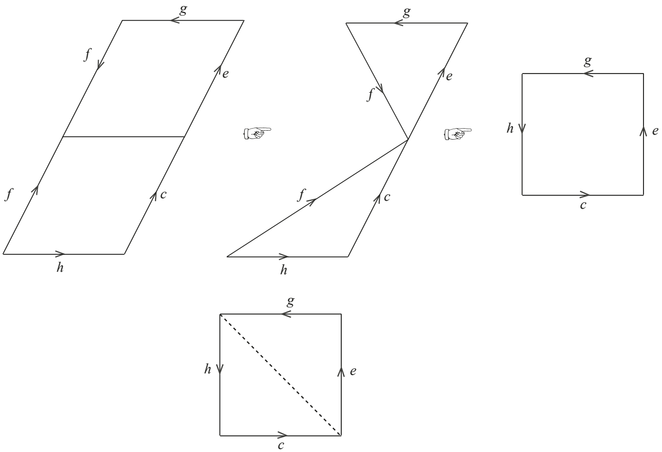

Figura: Planificando a pirâmide.

Superfícies fechadas

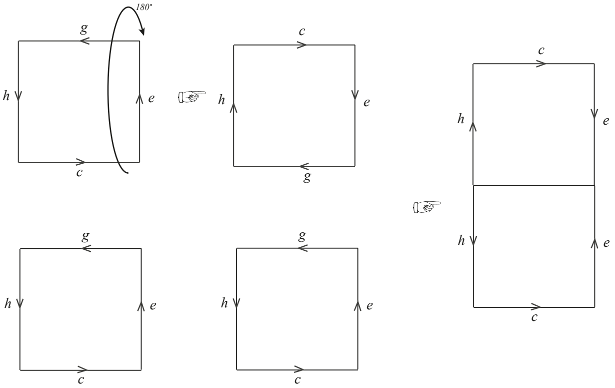

Figura: Planificando a pirâmide.

Superfícies fechadas

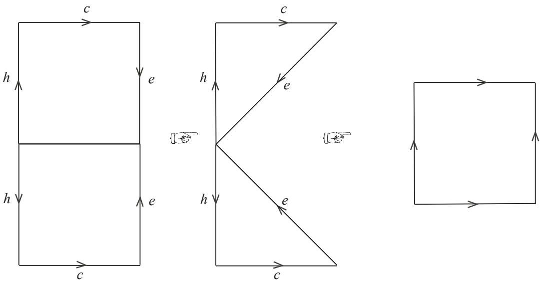

Figura: Planificando a pirâmide.

Somas conexas de superfícies

Sejam R e W duas superfícies, próximas uma da outra mas sem pontos em comum. A soma conexa de R e W é uma nova superfície, denotada por $R\#W$, construída da seguinte maneira:

i) corte e remova uma pequena região circular de cada uma das duas superfícies. Assim, cada superfície ficará com um pequeno bordo circular.

ii) Cole os bordos circulares um no outro.

Somas conexas de superfícies

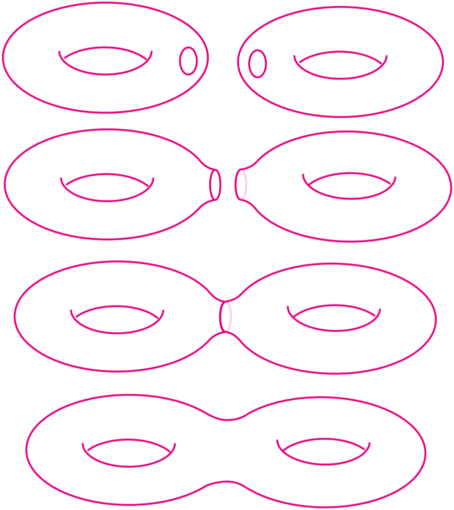

Figura: A soma conexa de dois toros $T^2 \# T^2$.

Somas conexas de superfícies

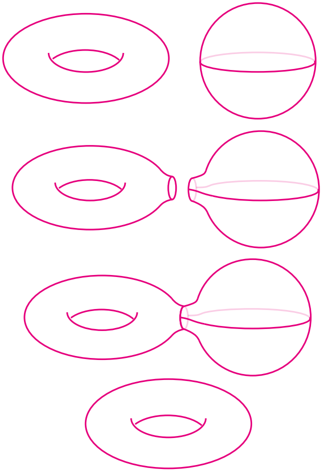

Figura: A superfície esférica é neutra na soma conexa.

Somas conexas de superfícies

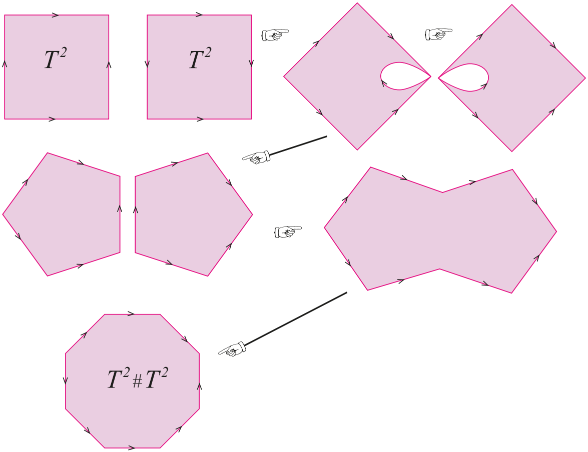

Figura: A soma conexa feita com diagramas planares.

Somas conexas de superfícies

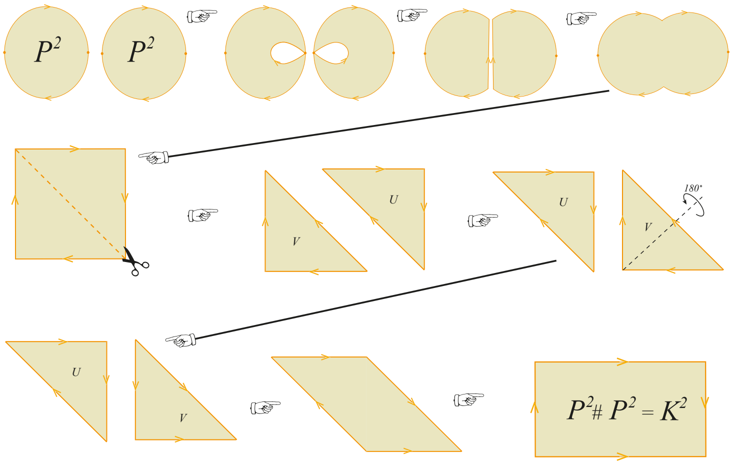

Figura: A soma conexa de dois planos projetivos resulta em uma garrafa de Klein.

Somas conexas de superfícies

Teorema (Classificação das superfíes fechadas)

1. *Toda superfície fechada orientável é uma esfera ou um toro ou uma soma conexa de toros.*
2. *Toda superfície fechada não orientável é um plano projetivo ou uma soma conexa de planos projetivos.*