Institut Supérieur des Arts Multimédia de la Manouba.
Département Informatique.

Probabilités et Statistiques
($2^{\text{ème}}$ année Licence Informatique)

Ce polycopié est en cours de rédaction. N'hésitez pas à transmettre toutes remarques ou à signaler toutes coquilles ou erreurs à mon adresse électronique : yousri.henchiri@isamm.uma.tn

Yousri Henchiri, MA
Email: yousri.henchiri@isamm.uma.tn
7 octobre 2024

Table des matières

1 Probabilités élémentaires

1.1 Notions de base

☞ **Expérience aléatoire (dite aussi épreuve)** : c'est une expérience dont les résultats sont dûs au hasard et même si elle est répétée dans les mêmes conditions ne donne pas souvent les mêmes résultats.

▶ Exemple :

Nous supposons qu'une population animale est composée à part égale d'individus des deux sexes (`F` : Femelle, `M` : Mâle). Nous considérons l'épreuve suivante : "extraire trois individus de cette population".

☞ **Univers** Ω : C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire noté par Ω.

▶ Exemple :

Les différents résultats possibles de l'épreuve décrite ci-dessus sont

$$\mathtt{FFF}, \mathtt{FFM}, \mathtt{FMF}, \mathtt{MFF}, \mathtt{MMF}, \mathtt{MFM}, \mathtt{FMM}, \mathtt{MMM}.$$

☞ **Événements** :

➨ *Quelques événements particuliers* :

- ⋆ $\varnothing$ est *l'événement impossible* et Ω est *l'événement certain*.
- ⋆ A^c $\left(\bar{A}\right)$ est *l'événement complémentaire (ou contraire)* de A. C'est l'événement qui se réalise si A ne l'est pas. Autrement dit, $A^c = \{x \mid x \in \Omega \text{ mais } x \notin A\}$.

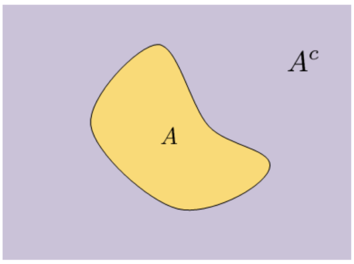

FIGURE 1 – Représentation d'un ensemble A et de son complémentaire A^c.

- ⋆ *L'union* : Si A et B sont deux événements. $A \cup B$ est l'événement qui se réalise dès que A ou B s'est réalisé. Autrement dit, $A \cup B = \{x \mid x \in A \texttt{ ou } x \in B\}$.
- ⋆ *L'intersection* : Si A et B sont deux événements. $A \cap B$ est l'événement qui se réalise dès que A et B s'est réalisé. Autrement dit, $A \cap B = \{x \mid x \in A \texttt{ et } x \in B\}$.
- ⋆ L'événement $A \setminus B$ est défini par l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Autrement dit, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \texttt{ et } x \notin B\}$ $\left(A \setminus B = A \cap B^c\right)$.
- ⋆ *L'inclusion au sens large* : $A \subseteq B$ signifie $(x \in A \Rightarrow x \in B, \forall x)$.

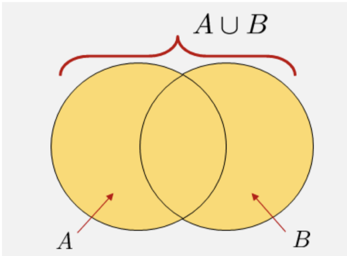

FIGURE 2 – Représentation de l'union de deux ensembles A et B.

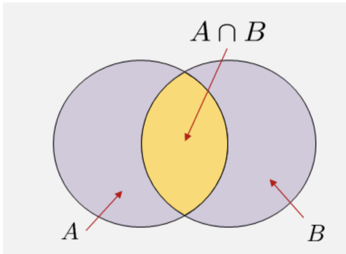

FIGURE 3 – Représentation de l'intersection de deux ensembles A et B.

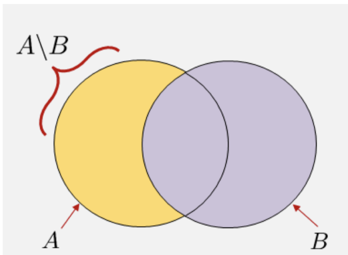

FIGURE 4 – Représentation de $A \setminus B$.

- ⋆ <u>*L'inclusion au sens strict*</u> : $A \subset B$ signifie $(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- ⋆ Les événements A et B sont <u>*disjoints*</u>, <u>*incompatibles ou mutuellement exclusifs*</u> si $A \cap B = \varnothing$.

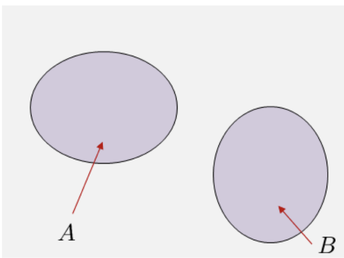

FIGURE 5 – Représentation de deux ensembles, A et B, disjoints.

▶ Exercice :

Soient $\Omega = \{1,3,5,7,9,11,13\}$, $A = \{1,5,7\}$, $B = \{1,5,7,11,13\}$, $C = \{3,5,7,9\}$ et $D = \{11,13\}$. Nous avons,

- ▷ L'événement $A^c = \{3,9,11,13\}$.
- ▷ L'événement A implique l'événement B.
- ▷ $A \cup B = \{1,5,7,11,13\}$.
- ▷ $B \cup C = \Omega$.
- ▷ C et D sont *deux événements mutuellement exclusifs.*

➦ *Classes particulières d'événements* :

Considérons une suite $E_1, E_2, \ldots, E_m$ de sous-ensembles non-vides de Ω et *disjoints deux à deux*, c-à-d

$$E_i \cap E_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,m.$$

et supposons que $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m = \Omega$, nous définissons dans ce cas une classe *d'événements mutuellement exclusifs et exhaustifs* et constitue une partition de l'ensemble fondamental Ω. Une telle classe est encore appelée un *système complet (ou exhaustif) d'événements.*

1.2 Les probabilités d'un événement

La probabilité d'un événement A peut s'obtenir de manière fréquentiste, notamment lorsqu'il est possible de faire une expérience plusieurs fois et de compter le nombre de succès de l'expérience. En effet, si on effectue n fois une expérience indépendamment et que dans n_A fois des cas, l'événement A est réalisé, alors, la probabilité P de l'événement A est alors définie par

$$\mathrm{P}(A) = \lim_{n \uparrow +\infty} \frac{n_A}{n},$$

Cette probabilité, fondée sur l'expérience, est appelée *probabilité empirique.* Sa valeur est comprise entre 0 et 1, c'est à dire entre la probabilité *d'événement impossible* et la probabilité *d'événement certain.*

De manière plus probabiliste, lorsque le nombre de résultats possibles de l'expérience est fini et que ces résultats sont équiprobables, la probabilité P de l'événement A est obtenue par

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{w \in A} \mathrm{P}(w) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas où } A \text{ se réalise}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

▶ Exercice :

Pour tester un vaccin V, nous disposons de 10 volontaires. Trois d'entre eux appartiennent à la même famille. Deux personnes sont tirées au hasard. Quelle est la probabilité que deux personnes tirées soient de la même famille (l'événement est noté par F) ?

$$\mathrm{P}(F) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15},$$

où $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ et $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$.

Axiomes des probabilités

Soit Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire et $\mathscr{F}$ est la collection de tous les événements possibles de Ω. Un événement A est un sous-ensemble de Ω qui définit un résultat ou une combinaison de résultats. Soit $A \in \mathscr{F}$, définir la probabilité $\mathrm{P}(A)$ d'obtenir un événement A consiste à associer à ce dernier un nombre réel sur $[0,1]$ mesurant la vraisemblance (la crédibilité) de sa réalisation et satisfaisant aux axiomes suivants :

`Axiome` 1. (Non-négativité) $0 \leqslant \mathrm{P}(A) \leqslant 1$, pour chaque événement $A \in \mathscr{F}$,

`Axiome` 2. (Normalisation) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

`Axiome` 3. (Additivité) Pour toute suite d'événements $A_1, A_2, \ldots$ deux à deux disjoints (ou incompatibles) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \notin j$,

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ définit un espace probabilisé.

Propriétés

☞ $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

Démonstration. $\Omega = (A \cup A^c)$, d'après l'`axiome` (3). $\mathrm{P}(A \cup A^c) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$ d'après l'`axiome` (2). Donc $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$. □

☞ $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Démonstration.
$\Omega = \Omega \cup \varnothing$, d'après l'`axiome` (3). $\mathrm{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathrm{P}(\Omega) + \mathrm{P}(\varnothing) = 1 = \mathrm{P}(\Omega)$ d'après l'`axiome` (2). Donc $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$. □

☞ Si $A \subset B$, alors $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.

Démonstration.
Du fait que $A \subset B$, nous pouvons exprimer B par

$$B = A \cup (A^c \cap B),$$

A et $A^c \cap B$ étant mutuellement exclusifs, d'après l'`axiome` (3)

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B).$$

Donc $\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A^c \cap B) \geqslant 0$. Alors, $\mathrm{P}(B) \geqslant \mathrm{P}(A)$. □

☞ $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Démonstration.
Pour obtenir une formule donnant $\mathrm{P}(A \cup B)$, remarquant d'abord que $A \cup B$ peut être écrit comme l'union de deux éléments disjoints A et $A^c \cap B$. Nous tirons alors de l'`axiome` (3) que $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A \cup (A^c \cap B)) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c \cap B)$, de plus, comme $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, nous tirons de nouveau de cet axiome

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B),$$

ou encore

$$\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Donc,

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

□

☞ Axiome des probabilités composées : Soient A_1 et A_2, deux résultats possibles d'une même expérience aléatoire, on suppose que A_1 et A_2 sont compatibles ($A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$). Si l'obtention de A_1 ne modifie pas la probabilité d'obtention de A_2, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(A_1 \text{ et } A_2) = \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2).$$

1.3 Probabilité conditionnelle

La probabilité affectée à un événement dépend de l'information fournie par l'ensemble fondamental Ω. Ceci est particulièrement évident lorsqu'on utilise la définition classique de la probabilité. Il se peut cependant que des informations supplémentaires viennent modifier notre connaissance du problème étudié et, par voie de conséquence, les probabilités associées aux événements de Ω. Ainsi, si B et A sont deux événements, la probabilité conditionnelle de B étant donné A, $\mathrm{P}(B \mid A)$, indique la probabilité que B se produise sachant que A s'est déjà produit ($\mathrm{P}(A) \neq 0$)). Elle est définie par

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

L'indépendance est un concept fondamental de la théorie des probabilités. Elle permet de conceptualiser le fait que deux évènements ne peuvent pas interagir l'un sur l'autre.

Définition 1.1. *Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants si seulement si*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B),$$

et on écrit alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Il est équivalent de dire que, si les deux événements sont disjoints,

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A) = 0.$$

Remarque 1.1. *Indépendance et intersection vide n'ont rien à voir. Deux évènement disjoints sont nécessairement dépendants.*

Remarque 1.2. *Si la réalisation ou la non réalisation de A n'affecte pas B, alors*

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(B).$$

En effet, comme A et B sont indépendants $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$, et donc

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)} = \mathrm{P}(B), \quad \big(\mathrm{P}(A) \notin 0\big).$$

Théorème de Bayes

Dans certaines situations, nous ne possédons pas l'information nécessaire pour évaluer directement $\mathrm{P}(A)$ ou même $\mathrm{P}(B_i \mid A)$. En revanche on connait $\mathrm{P}(A \mid B_i)$ et $\mathrm{P}(B_i)$. L'ensemble $\big\{B_1, B_2, \ldots, B_n\big\}$ supposé être une partition de Ω. Par définition, nous avons :

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)}{\mathrm{P}(A)} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(A \mid B_i) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)}{\mathrm{P}(B_i)},$$

comme $\mathrm{P}(A \cap B_i) = \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$, nous avons

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Loi de probabilité totale

Supposons que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ soient des événements mutuellement exclusifs tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega.$$

Cela revient à dire en d'autres termes qu'exactement un des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ se produira. En écrivant,

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

et en utilisant le fait que les événements $A \cap B_i, i = 1, \ldots, n$, mutuellement exclusifs, nous obtenons :

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i).$$

Cette relation est souvent nommée *la loi de probabilité totale* et montre que sachant $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont des événements dont un seul peut se réaliser, nous pouvons calculer $\mathrm{P}(A)$ en commençant par conditionner selon les B_i.

Alors, la formule de Bayes généralisée est la suivante :

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A \mid B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}.$$

► Exercice :

Un laboratoire a mis au point un alcootest. Nous savons que 2% des personnes contrôlées par la police sont réellement en état d'ébriété. Les premiers essais ont conduit aux résultats suivants :

- lorsqu'une personne est réellement en état d'ébriété, 95 fois sur 100 l'alcootest se révèle positif,
- lorsqu'une personne n'est pas en état d'ébriété, 96 fois sur 100 l'alcootest se révèle négatif.

Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif ?

Solution.

Appelons

$$E = \text{"la personne contrôlée est en état d'ébriété"}.$$

et

$$A = \text{"l'alcootest est positif"}.$$

Les indications fournies peuvent s'écrire :

$$\mathrm{P}(E) = 0.02, \quad \mathrm{P}(A \mid E) = 0.95, \quad \mathrm{P}(A^c \mid E^c) = 0.96,$$

et nous cherchons à calculer $\mathrm{P}(E \mid A)$. D'après la formule de Bayes, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \mid A) &= \frac{\mathrm{P}(E)\,\mathrm{P}(A \mid E)}{\mathrm{P}(E)\,\mathrm{P}(A \mid E) + \mathrm{P}(E^c)\,\mathrm{P}(A \mid E^c)} \\ &= \frac{0.02 \times 0.95}{0.02 \times 0.95 + 0.98 \times 0.04} = 0.3265 \end{aligned}$$

□

▶ Exercice :

Dans un élevage de moutons, nous estimons que 30% sont atteints par une certaine maladie. Nous disposons d'un test pour cette maladie. Si un mouton n'est pas atteint, il a 9 chances sur 10 d'avoir une réaction négative au test ; s'il est atteint, il a 8 chances sur 10 d'avoir une réaction positive. Nous soumettons tous les moutons de l'élevage au test.

(a) Quelle est la probabilité qu'un mouton de cet élevage ne soit pas malade ?

(b) Quelle est la probabilité conditionnelle qu'un mouton ait une réaction positive au test sachant qu'il n'est pas malade ?

(c) Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade et ait une réaction positive au test ?

(d) Quelle proportion des moutons de l'élevage réagit positivement au test ?

(e) Quelle est la probabilité qu'un mouton soit malade, sachant qu'il a réagi positivement ?

(f) Quelle est la probabilité qu'un mouton ne soit pas malade, sachant qu'il a réagi négativement ?

Solution.

Nous notons par M l'événement "le mouton est malade" et T l'événement "le mouton a une réaction positive au test". L'énoncé donne :

$$\mathrm{P}(M) = 0.3, \quad \mathrm{P}(T^c \mid M^c) = 0.9, \quad \mathrm{P}(T \mid M) = 0.8,$$

(a)
$$\mathrm{P}(M^c) = 1 - \mathrm{P}(M) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

(b)
$$\mathrm{P}(T \mid M^c) = 1 - \mathrm{P}(T^c \mid M^c) = 1 - 0.9 = 0.1.$$

(c)
$$\mathrm{P}(T \cap M^c) = \mathrm{P}(T \mid M^c)\,\mathrm{P}(M^c) = 0.1 \times 0.7 = 0.07.$$

(d) Nous pouvons utiliser la formule des probabilités totales ou raisonner directement, en distinguant, parmi les moutons ayant réagi positivement, ceux qui sont malades de ceux qui ne le sont pas.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T) &= \mathrm{P}(T \cap M) + \mathrm{P}(T \cap M^c) \\ &= \mathrm{P}(T \mid M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(T \mid M^c)\,\mathrm{P}(M^c) \\ &= 0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7 = 0.24 + 0.07 = 0.31. \end{aligned}$$

(e) Nous pouvons utiliser directement la formule de Bayes ou bien la retrouver comme suit.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M \mid T) &= \frac{\mathrm{P}(T \cap M)}{\mathrm{P}(T)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(T \mid M)\,\mathrm{P}(M)}{\mathrm{P}(T \mid M)\,\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(T \mid M^c)\,\mathrm{P}(M^c)} \\
&= \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7} \simeq 0.774.
\end{aligned}$$

(f) Nous pouvons utiliser directement la formule de Bayes ou bien la retrouver comme suit.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M^c \mid T^c) &= \frac{\mathrm{P}(T^c \cap M^c)}{\mathrm{P}(T^c)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(T^c \mid M^c)\,\mathrm{P}(M^c}{\mathrm{P}(T^c \mid M^c)\,\mathrm{P}(M^c) + \mathrm{P}(T^c \mid M)\,\mathrm{P}(M)} \\
&= \frac{0.9 \times 0.7}{0.9 \times 0.7 + 0.2 \times 0.3} \simeq 0.913.
\end{aligned}$$

□

1.4 Notion de variable aléatoire et distribution de probabilité

Le concept d'une variable aléatoire formalise la notion de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire. C'est donc une variable associée à une expérience ou à un groupe d'expériences aléatoires, et servant à caractériser le résultat de cette expérience ou de ce groupe d'expériences.

Elle est dite *discontinue ou discrète* si elle varie elle-même de façon discontinue. Pour plusieurs répétitions d'une même expérience (par exemple plusieurs jets d'une même pièce de monnaie), le nombre de réalisations d'un événement aléatoire associé à ces expériences (par exemple le nombre de "face") est une variable aléatoire discontinue.

Considérons d'autre part une variable aléatoire susceptible de prendre n'importe quelle valeur réelle appartenant à un intervalle donné. Cet intervalle peut être $(-\infty, +\infty)$. Une telle variable aléatoire est dite *continue*. Le poids d'un individu prélevé au hasard dans une population donnée est une variable aléatoire continue ne pouvant prendre que des valeurs positives.

Les variables aléatoires sont notées par des lettres majuscules $(X, Y, Z, \ldots)$ pour les distinguer des variables déterministes $(x, y, z, \ldots)$.

Définition 1.2. *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire. Une variable aléatoire* X *sur* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ *est une application*

$$\begin{aligned}
X \quad : \quad & \Omega \to \mathbb{R}, \\
& w \mapsto X(w),
\end{aligned}$$

qui associe un nombre à chaque issue $w \in \Omega$ *de l'expérience aléatoire et qui vérifie pour chaque* $B \subset \mathbb{R}$,

$$X^{-1}(B) \triangleq \Big\{ w \in \Omega \mid X(w) \in B \Big\} \in \mathscr{F}.$$

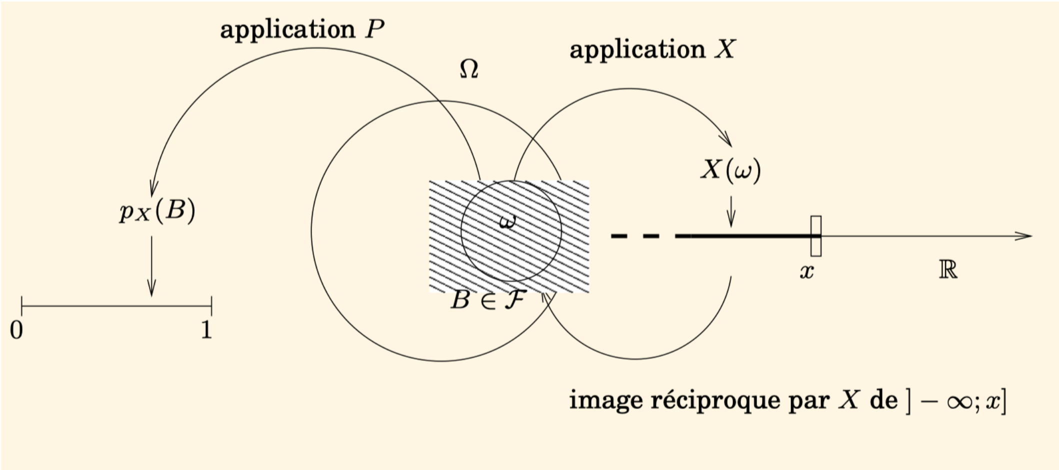

FIGURE 6 – Illustration de l'application X et P.

Définition 1.3. *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé associé à une expérience aléatoire. L'application* p_X

$$\begin{aligned} p_X \quad : \quad & \mathscr{F} \to [0,1], \\ & B \mapsto p_X(B), \end{aligned}$$

est définie par

$$p_X(B) \triangleq \mathrm{P}(X^{-1}(B)) = \mathrm{P}\left(\Big\{w \in \Omega \mid X(w) \in B\Big\}\right) = \mathrm{P}(X \in B),$$

pour chaque $B \in \mathscr{F}$*. Cette application est appelée mesure de probabilité image de* X *ou loi de probabilité de la variable alétoire* X*.*

Quelques notations utiles

- L'ensemble $\Big\{w \in \Omega \mid X(w) = a\Big\}$ est un événement que l'on note par $\Big\{X = a\Big\}$, pour chaque $a \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble $\Big\{w \in \Omega \mid X(w) \leqslant a\Big\}$ est un événement que l'on note par $\Big\{X \leqslant a\Big\}$, pour chaque $a \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble $\Big\{w \in \Omega \mid a \leqslant X(w) \leqslant b\Big\}$ est un événement que l'on note par $\Big\{a \leqslant X \leqslant b\Big\}$, pour chaque $a, b \in \mathbb{R}$.
- On écrit $\mathrm{P}(X = a) = \mathrm{P}\Big(\big\{X(w) = a\big\}\Big) = \mathrm{P}(X^{-1}(a))$.

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est une fonction positive définie, pour toute valeur x de X, par

$$F_X(x) = p_X\big(]-\infty, x]\big) = \mathrm{P}\left(\left\{w \in \Omega \mid X(w) \leqslant x\right\}\right) \triangleq \mathrm{P}(X \leqslant x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Elle satisfait les propriétés suivantes :

- F_X est une fonction non-décroissante,
- F_X est continue à droite en chacun de ses points de discontinuité.
- $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$,
- $F_X(-\infty) = \lim_{x\downarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad F_X(+\infty) = \lim_{x\uparrow +\infty} F_X(x) = 1.$

Remarque 1.3. *Tous les calculs de probabilité concernant X peuvent être fait en utilisant la fonction de répartition. Par exemple :*

- $\mathrm{P}(a < X \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant X < b) = \mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.

  Démonstration.
  $\{X \leqslant b\} = \{X \leqslant a\} + \{a < X \leqslant b\}$ alors

  $$\mathrm{P}(\{X \leqslant b\}) = \mathrm{P}(\{X \leqslant a\}) + \mathrm{P}(\{a < X \leqslant b\}) \Rightarrow \mathrm{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a).$$

  □

- $\mathrm{P}(X < b) = F_X(b^-) = \lim\limits_{n\uparrow +\infty} F_X(b - \frac{1}{n})$.

  Démonstration.

  $$\begin{aligned} \mathrm{P}(X < b) &= \mathrm{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\left\{X \leqslant b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\lim_{n\uparrow +\infty}\left\{X \leqslant b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\uparrow +\infty} \mathrm{P}\left(\left\{X \leqslant b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n\uparrow +\infty} F_X\left(b - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

  □

▶ Exercice :

Nous considérons la fonction de répartition suivante :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0, \\ x/2, & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 2/3, & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ 11/12, & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 1, & \text{si} \quad 3 \leqslant x. \end{cases}$$

a) Calculer $\mathrm{P}(X < 3)$.
b) Calculer $\mathrm{P}(X = 1)$.
c) Calculer $\mathrm{P}(X > 1/2)$.

Solution.
(a) $\mathrm{P}(X < 3) = \lim\limits_{n\uparrow +\infty} F_X(3 - \frac{1}{n}) = F_X(3^-) = \frac{11}{12}$.

(b) $\mathrm{P}(X < 1) = \mathrm{P}(X \leqslant 1) - \mathrm{P}(X = 1)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \uparrow +\infty} F_X\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) &= F_X(1) - \mathrm{P}(X = 1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2}{3} - \mathrm{P}(X = 1) \\ \Leftrightarrow \mathrm{P}(X = 1) &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X > \frac{1}{2}\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

Distribution et densité de probabilité

➦ *La fonction de masse ou la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète* :

Soit X une variable aléatoire discrète dont les valeurs sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pose

$$p_X(x_i) = \mathrm{P}(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

et on appelle *distribution de probabilité*, ou *fonction de masse de* X, ou *loi de probabilité de* X, l'ensemble des couples $(x_i, p_X(x_i))$, où les $p_X(x_i)$ vérifiant

☞ $p_X(x_i) \geqslant 0$.

☞ $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} p_X(x_i) = 1$.

Dans ce cas discret, la fonction de répartition F_X est définie par

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} p_X(x_i) \triangleq \sum_{x_i \leqslant x} \mathrm{P}(X = x_i).$$

Cette fonction est constante par intervalles (ou en escalier).

► Exercice :

Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On pige 5 boules au hasard, sans remise. Calculer la probabilité qu'au moins une boule soit supérieure à 14.

Solution. Posons X : max des boules tirées. On cherche

$$\mathrm{P}(X \geqslant 15) = 1 - \mathrm{P}(X < 15) = 1 - \mathrm{P}(X \leqslant 14) = 1 - \frac{\binom{14}{5}}{\binom{20}{5}}.$$

□

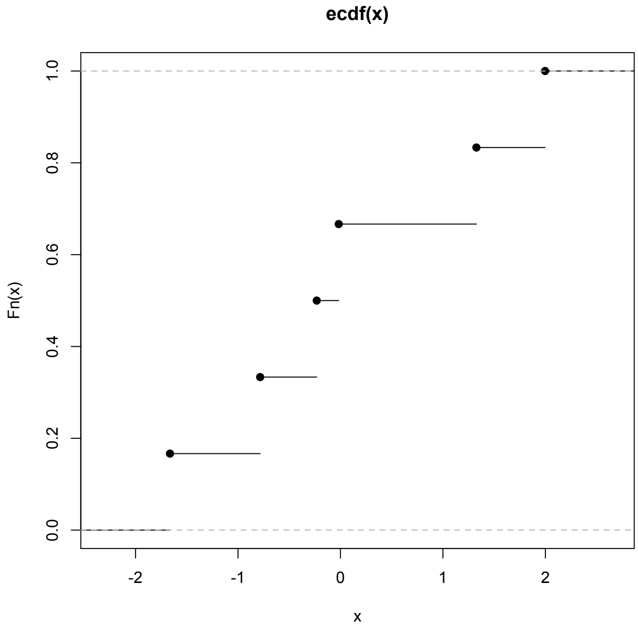

FIGURE 7 – Illustration de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.

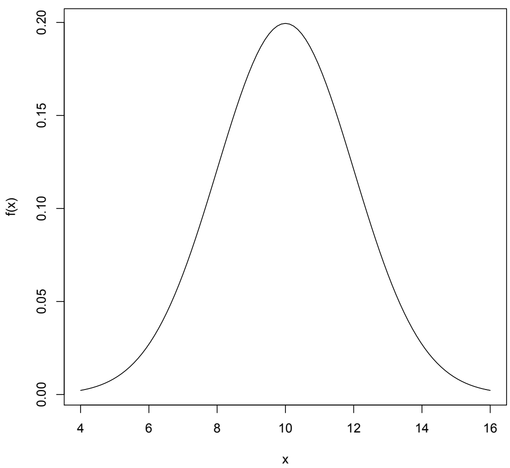

FIGURE 8 – Illustration de la densité d'une variable aléatoire continue.

➡ *Densité de probabilité*

Pour une variable aléatoire continue, la probabilité d'apparition de l'événement $X = x_1$ est nulle, autrement dit, $\mathrm{P}(X = x_1) = 0$, car il est impossible de tomber exactement sur cette valeur. La fonction masse $p_X(x)$ n'a donc aucun sens pour les variables continues. Il faut donc considérer la probabilité que X soit compris dans un intervalle, $\mathrm{P}(x_1 \leqslant X \leqslant x_2)$. Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur de $\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$ tend vers une fonction que l'on appelle *fonction densité de probabilité*. Cette fonction est donc la dérivée de la fonction de répartition. Elle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = F'_X(x) = f_X(x).$$

La densité joue la même rôle qui la joue la fonction de masse dans le cadre discret. Pour résumer, une densité de probabilité est une fonction qui vérifie :

☞ $\forall x, \quad f_X(x) \geqslant 0,$

☞ $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\ \mathrm{d}t = 1.$

Dans ce cas continu, la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = p_X(]-\infty, x]) \triangleq \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

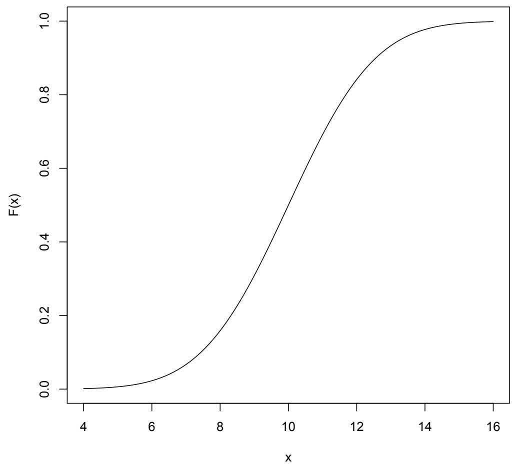

FIGURE 9 – Illustration de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue.

Les moments d'une variable aléatoire

La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut être considérée comme l'analogue sur le plan théorique de la distribution d'un caractère sur le plan expérimental. En conséquence, certaines grandeurs associées à la distribution d'un caractère possèdent leurs analogues pour une loi de probabilité. Nous considérons successivement le cas des variables discrètes et celui des variables continues.

☞ **Variable aléatoire discrète**

Soit X une variable aléatoire discrète pouvant prendre les valeurs x_i avec les probabilités $p_X(x_i),\ i = 1, \ldots, n$, on appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire X le nombre :

$$m_1 \triangleq \mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_X(x_i).$$

La variable $\Big(X - \mathrm{E}(X)\Big)$ est appelée *variable centrée.* Son espérance mathématique est *nulle*, c'est à dire

$$\mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X)) = 0.$$

Nous appelons *moment d'ordre* k de la loi de probabilité de X (ou espérance mathématiques de X^k), le nombre

$$m_k \triangleq \mathrm{E}(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_X(x_i).$$

Nous pouvons aussi considérer le moment centré d'ordre k, c'est à dire :

$$\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^k) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^k p_X(x_i).$$

La variance de la variable X, est le moment centré d'ordre 2 de X, est donnée par

$$Var(X) = \mathrm{E}((X-m)^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_X(x_i) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i p_X(x_i)\Big)^2.$$

► Exercice :

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$, avec

$$p_X(x_i) = 1/n, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Calculer $\mathrm{E}(X)$ et $Var(X)$.

Solution.

$$\mathrm{E}(X) = (1/n)(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{2n^2 + 6n - 1}{6}.$$

$$Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

□

☞ **Variable aléatoire continue**

Nous supposons que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie au moyen d'une densité $f_X(x)$. Les définitions et les résultats qui précèdent se transposent facilement, le symbole de sommation $\sum$ étant remplacé par le symbole d'intégration $\int_{-\infty}^{+\infty}$. Ainsi, nous avons :

$$\mathrm{E}(X) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, \mathrm{d}x,$$

et le *moment d'ordre* k est :

$$\mathrm{E}(X^k) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

► Exercice :

Soit la densité de probabilité de X suivante :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer l'espérance mathématique de X et son moment centré d'ordre 2.

Solution.

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}.$$

$$Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - \Big(\mathrm{E}(X)\Big)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

□

Exemples

▶ Exercice :

Une urne contient 11 boules, dont 3 blanches, 3 rouges et 5 bleues. Vous pigez 3 boules sans remise. Vous gagnez 1$ pour chaque boule rouge choisie et vous perdez 1$ pour chaque boule blanche choisir. Combien espérez-vous gagner d'argent à ce jeu ?

Solution.

Nous posons X : "montant gagné". La fonction de masse de X est

$$\begin{aligned} p_X(-3) = p_X(3) &= \frac{1}{\binom{11}{3}}. \\ p_X(-2) = p_X(2) &= \frac{2.5}{\binom{11}{3}}. \\ p_X(-1) = p_X(1) &= \frac{3.3 + 3.\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}}. \\ p_X(0) &= \frac{\binom{5}{3} + 5.3.3}{\binom{11}{3}}. \end{aligned}$$

Le montant que l'on peut espérer gagner est la moyenne des valeurs de X pondérée par la fonction de $\mathrm{E}(X) = \sum_{x=-3}^{3} x p_X(x) = 0$, par symétrie de la fonction de masse autour de 0, et donc le jeu est parfaitement équitable ici. □

▶ Exercice :

Soit la densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminer c.

(b) Déterminer $\mathrm{P}(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

(c) Déterminer $\mathrm{E}(X)$ et $Var(X)$.

Solution.

(a) f_X est une densité de probabilité alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^4 f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1\\ &\Leftrightarrow \quad \int_0^4 c\,x\ \ \mathrm{d}x = 1\\ &\Leftrightarrow \quad c\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = 1\\ &\Leftrightarrow \quad c\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 1.\\ &\text{donc} \quad c = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

(b) $\mathrm{P}(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{16}$.

(c) $\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$.

$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^4 \frac{x^3}{8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 8$.

$Var(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 8 - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

□

► Exercice :

Nous supposons X admet une densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} 3\,x^2, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Calculer la densité de $f_Y(y)$ où $Y = 1 - X^4$.

Solution.

On a

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) &= \mathrm{P}(1 - X^4 \leqslant y)\\ &= \mathrm{P}(1 - y \leqslant X^4)\\ &= \mathrm{P}((1-y)^{1/4} \leqslant X)\\ &= \int_{(1-y)^{1/4}}^1 3x^2\,\mathrm{d}x\\ &= 3\frac{x^3}{3}\Big|_{(1-y)^{1/4}}^1 = x^3\Big|_{(1-y)^{1/4}}^1 = 1 - (1-y)^{1/4}, \quad \text{avec} \quad y \in (0,1).\end{aligned}$$

Alors

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{3}{4}\frac{1}{(1-y)^{1/4}}\mathbb{1}(y \in (0,1)) = \frac{3}{4}\frac{1}{(1-y)^{1/4}}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

□

► Exercice :

Soit X une variable aléatoire continue, caractérisée par la fonction de répartition F_X et la densité f_X. Trouver la densité de la variable aléatoire Y, avec $Y = 2X$.

Solution.

On a

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) = \mathrm{P}(2X \leqslant y) = \mathrm{P}(X \leqslant y/2) = F_X(y/2).$$

Alors

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F_X(y/2)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2} f_X(y/2).$$

□

▶ Exercice :

Soit la densité de probabilité de X est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver $\mathrm{E}(\exp(X))$.

Solution.

Soit $Y = \exp(X)$. $x \in (0,1)$ et $y \in (1,e)$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leqslant y) &= \mathrm{P}(\exp(X) \leqslant y) \\ &= \mathrm{P}(X \leqslant \log(y)) = F_X(\log(y)) \\ &= \int_0^{\log(y)} f_X(x)\ \mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^{\log(y)} \\ &= \log(y) \quad \text{avec} \quad y \in (1,e). \end{aligned}$$

Donc la densité de la variable Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}F_Y(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}\mathbb{1}(y \in (1,e)) = \frac{1}{y}\mathbb{1}_{(1,e)}(y).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\exp(X)) = \mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\ \mathrm{d}y \\ &= \int_1^e 1\ \mathrm{d}y = y\Big|_1^e = e - 1. \end{aligned}$$

□