ストロガッツ 非線形ダイナミクスとカオス

第4章 円周上の流れ 3.0-3.2

多田 瑛貴
公立はこだて未来大学 システム情報科学部
複雑系知能学科 複雑系コース 3年

写真: 北海道茅部郡鹿部町

円周上のベクトル場

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

θを円周上の点とし、上記の方程式を考える
($\dot{\theta}$はθの速度ベクトル)

- 直線のベクトル場と同じ1次元
- **振動することができる系の最も基本的なモデル**を与える
  - 例: ホタルの周期的な発光

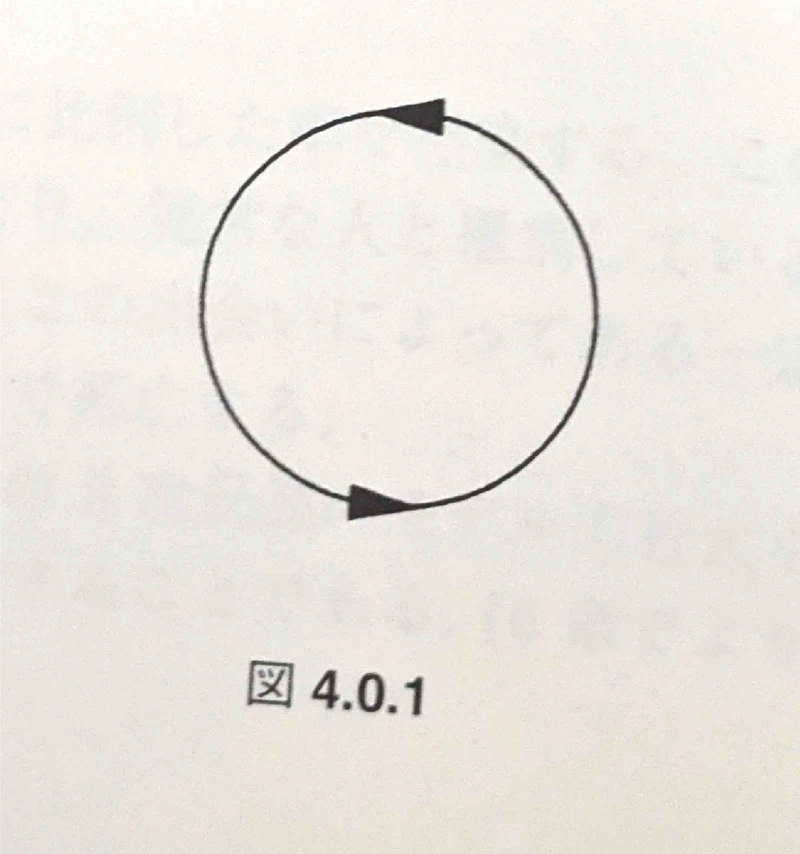

図 4.0.1

例題4.1.1

$\dot{\theta} = sin\theta$に対応する円周上のベクトル場を描け。

θは反時計回りに増加するとする

- $\dot{\theta} = 0$で与えられる固定点を探す
- 各固定点間の速度を考える
    - $-\pi < \theta \leq \pi$ と仮置きすると
        - $-\pi < \theta < 0$ (上半円)では $\dot{\theta} < 0$
        - $0 < \theta \leq \pi$ (下半円)では $\dot{\theta} > 0$

よって、解答は右図となる

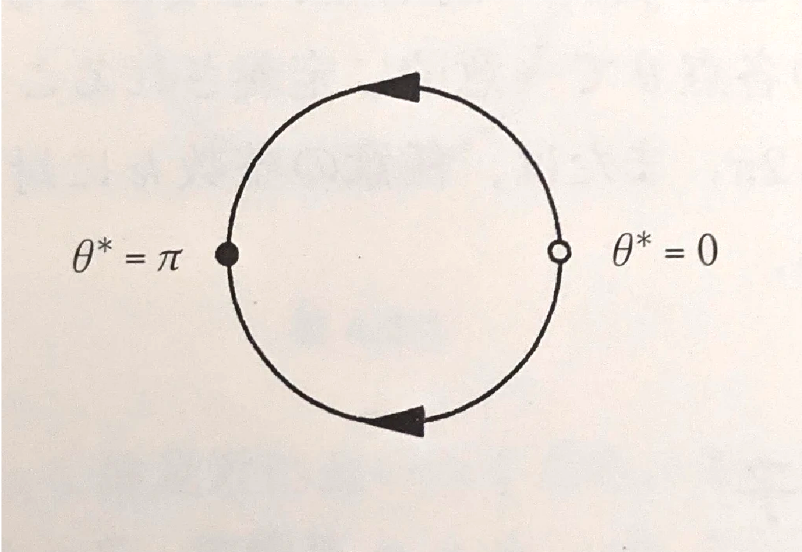

図 4.1.1

円周上のベクトル場の幾何学的定義

円周上のベクトル場とは、
円周の各点に一意的に速度ベクトルを割り当てるルール

例題4.1.2の式は、直線上のベクトル場と見なすのであれば何ら問題ない

例題4.1.2

なぜ $\dot{\theta} = \theta$ を $-\infty < \theta < \infty$ の範囲で円周上のベクトル場と見なすことができないのかを説明せよ

例題4.1.2

なぜ$\dot{\theta} = \theta$を$-\infty < \theta < \infty$の範囲で円周上のベクトル場と見なすことができないのかを説明せよ

(解) 速度が一意的に定義できないからである

- 例: $f(0) \neq f(2\pi)$
  $\theta = 0$と$\theta = 2\pi$は円周上の同一の点を表す

定義

- 円周上の点の位置は、**角度(angle)** あるいは **位相(phase)** と呼ばれる

一様な振動子

簡単な振動子として

$$\dot{\theta} = \omega$$

を考えると、その解は

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

円周上での角振動数ωでの一様な運動に対応

ここでは振幅は考慮せず、一定であるとみなす

例題4.2.1

駿足君と鈍足君の2人が円形のトラックを一定のペースでジョギングしている。
1周毎の速度はそれぞれT_1, T_2 $(T_1 > T_2)$とする。
2人が一緒にスタートしたとき、駿足君が1周余分に回って鈍足君に追いつくにはどれくらいかかる？

例題4.2.1

(解)
駿足君の位置$\theta_1(t)$とすると、$\omega_1 = 2\pi/T_1$ として $\dot{\theta}_1 = \omega_1$
鈍足君も同様に $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ とする

駿足君が1周余分に回って鈍足君に追いつくとき
2人の位相差が2π

位相差を $\phi = \theta_1 - \theta_2$ とすると、
$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2$

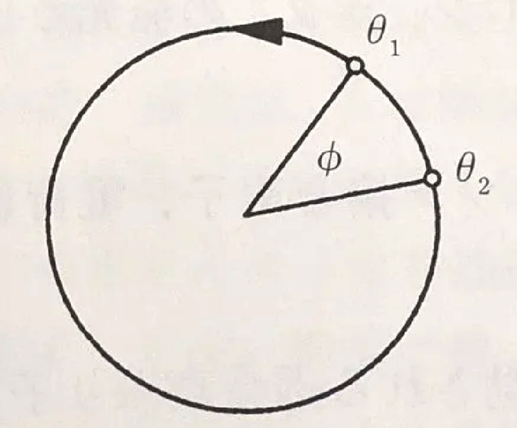

図 4.2.1

例題4.2.1

よって、$\phi = 2\pi$になるまでの時間は

$$T_{lap} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})^{-1}$$

"うなり"について

相互作用のなく振動数の異なる2つの振動子は、互いの位相が近づいたり離れたりすることを周期的に繰り返す ＝ うなり(beat)

例題4.2.1はこの現象を例示している

もし振動子同士が相互作用するとしたら、どのようになるだろうか
→ 今後の内容へ続く (ホタルの発光の同期現象など...)

まとめ

円周上のベクトル場について

- 振動することができる系 (振動子) の最も基本的なモデルを与える
- 幾何学的には、円周の各点に一意的に速度ベクトルが割り当てられる

相互作用のない振動数の異なる2つの振動子の関係では、
うなりとよばれる現象が見られる