巽友正 流体力学

第1章 流体とはなにか

多田 瑛貴
公立はこだて未来大学 システム情報科学部
複雑系知能学科 複雑系コース 3年

写真: 北海道函館市恵山

流体とはなにか

連続体

物質を**微視的尺度**でみると
物理的性質を考えるとき、分子や原子の振る舞いを考慮する必要がある

巨視的尺度では、これらを平均化
密度・速度・圧力といった平均量のみで現象を記述

そのような平均量は空間的・時間的に連続であり
このように表された物質を**連続体**と呼ぶ

「微視的尺度」「巨視的尺度」は「マクロ」「ミクロ」としたほうが
読みやすいかもしれないが、ここはとにかく書籍に合わせることとする

流体

連続体の中で、変形に対して抵抗が働かない (気体と液体に固有の性質)
性質をもつものを**流体**という

平均量の定義

位置 x の状態量をとるための微小体積 v およびその尺度 $l = v^{1/3}$ を考えたい

この尺度をどのようにとる？

体積 v に含まれる気体分子の個数 n を考える
このときの平均の分子の個数はn/v

気体がvの中心ほど濃くなり、外側ほど薄い場合
vを小さくしていけばn/vは大きくなる

しかし、vをより小さくとっていけば
いずれn/vは一定量に近づき、適切な濃さの量が得られるだろう

ここで伝えたいことは、密度がマクロに見て不均一な気体でも、十分小さい範囲をとれば
その範囲内では均一な濃さが得られる、ということと思われる

このとき n/v を「**数密度**」 mn/vを「**密度**」と呼ぶ mは分子の質量

しかし、vが極端に …分子の大きさが無視できないほど 小さくなれば
n/vは不連続的に大きく変動してしまい、密度を適切に得られない

つまり、v が分子一個あたりの体積 v_0 と比較し

$$v \gg v_0$$

となる必要がある

尺度で言えば、$l = v^{1/3}$ が微視的な尺度 $l_0 = v_0^{1/3}$ と比較し

$$l \gg l_0$$

$$l \gg l_0$$

この条件を満たす尺度を用いることで
空間内の座標xでの密度ρが定義され、xの関数$\rho(x)$と書ける

同様に、気体の速度u、圧力p、温度Tなどの量もxの関数として書ける
流体は、このようないくつかの平均量や巨視的な量で表される物質である

より狭義の定義

完全流体や粘性流体を考える場合は、流体が常に局所的熱平衡か、それに近い状態にあることを仮定するから、気体分子の衝突によって状態が平均化される必要がある

よって、平均自由行路λを考慮し

平均自由行路: ある分子が他の分子と衝突するまでの平均距離

$$l \gg \lambda$$

を満たす必要がある

教科書の例(温度0度で1気圧の空気)では、この条件は$l \gg l_0$よりも強い条件となっている。導出は省略

補足

- \$ $l \gg l_0$ や\$ $l \gg \lambda$が、流体としての取り扱いが許される条件である
  類似の条件が定義できれば、自動車の流れや銀河系の星の集団といったものの運動にも適用できる
- 希薄流体力学などの分野ではより厳密な条件が必要だが、ここでは扱わない

流体力学の基本方程式

流体は**質量、運動量、エネルギーの保存則**に従う必要がある

ここから3つの基本方程式を見ていくことになる
詳細は今後言及されていくはずなので細かく知らなくて良いかもしれない
大まかな見方としては

(流体自身の減少量) + (表面での流出量) = (表面からかかる外からの力) + (流体内からくる外からの力)

の認識でよいと思われる

連続方程式

密度ρ、速度$\mathbf{u}$が定義された流体の運動では
座標$\mathbf{x}$の微小体積v内の質量ρvは不変である必要がある
よって質量保存則より次の**連続方程式**が導かれる

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

これは、(v内全体の減少量)+(v表面からの流出量) = 0 であることを示す
この導出は今井巧『流体力学』がより詳しかった

例えば、3次元空間で速度をu, v, wの直角成分で表したとき

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

運動方程式

流体の各部分は重力のような外力を受け一般に加速度$\mathbf{K}$を持ち
質量を掛け合わせることで慣性力となる

流体持のもつ運動力$\rho v\mathbf{u}$は
外力による慣性力と、表面で外から内部にかかる圧力p (応力)の
合力の力積と等しい必要がある
ここから、つぎの**運動方程式**が導かれる
(σは粘性応力テンソル、ここでは触れない)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u} : \mathbf{u}) = \operatorname{grad}(-p + \sigma) + \rho\mathbf{K}$$

補足: 1次元の場合

1次元の場合、速度をuとすると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho K$$

Note: ダランベールの原理

ニュートンの運動方程式
質量m質点が外力$\mathbf{F}$を受け、加速度$\ddot{\mathbf{a}}$で運動するとして

$$m\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{F}$$

これを変形すると

$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{a}} = 0$$

これにより、力の釣り合いの問題に帰着できる
外力に対して見かけの力(慣性力)が働くことで、平衡した状態とみなせる
このときの$-m\ddot{\mathbf{a}}$は慣性力と呼ばれる

エネルギー方程式

流体の単位体積あたりのエネルギーは
運動エネルギー$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2$と内部エネルギー$\rho U$の和と
等しくなるべきである

この変化は、応力および外力による仕事と、境界面で流入する熱量の和で表される
よって、以下の**エネルギー方程式**が導かれる
(θは熱流ベクトル、ここでは触れない)

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+U)]+\mathrm{div}[\rho(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+U)\mathbf{u}]=\mathrm{div}[(-p+\sigma)\mathbf{u}+\theta]+\rho\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}$$

状態方程式

この3つの保存則の他に、
状態料となる圧力p、密度ρ、温度Tの間に、個々の流体特有の関係がある

この関係を**状態方程式**と呼び

$$f(p, \rho, T) = 0$$

と表される

特に、理想気体の場合は

$$p = \rho RT$$

境界条件

流体と固体境界との接触面では、流体が境界面に粘着していること、すなわち

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w$$

が成り立つ (ここで$\mathbf{u}_w$は壁面の速度)

流体の粘性を無視した完全流体を取り扱う場合は、
境界面での滑りを許して

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = (\mathbf{u}_w, \mathbf{n})$$

が成り立つ ($\mathbf{n}$は法線ベクトル)

3つの基本方程式と状態方程式は、
この境界条件をもとに、一つの境界値問題を構成する

流体数学

流体と数学の繋がりについて

かなり端折ります

ナヴィエ・ストークス方程式

非圧縮性粘性流体での運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{K}$$

ただし$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (μは粘性係数)、 $\mathbf{K}$は外力

レイノルズ数

ナヴィエ・ストークス方程式 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \mathrm{grad})\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{K}$

ナヴィエ・ストークス方程式を無次元化すると、νの場所に
流体の性質を表す無次元数である**レイノルズ数**が現れる

$$\mathrm{Re} = \frac{uL}{\nu} = \frac{\rho uL}{\mu}$$

u: 流体の速度、L: 特徴的な長さ

ここからの話

- 流体数学
- 流体物理学
- 流体工学

ここはかなり進んだ応用の話なので、興味のある人は自分で調べてみてください
いろいろな分野があるのだな、ということを知ってもらえればと思います

まとめ

- 流体は連続体
- 流体を流体として扱う尺度の存在
- 流体は密度、速度、圧力、温度などの平均量で表される
- 流体力学は3つの基本方程式で記述される
- 流体数学、流体物理学、流体工学などの応用分野がある