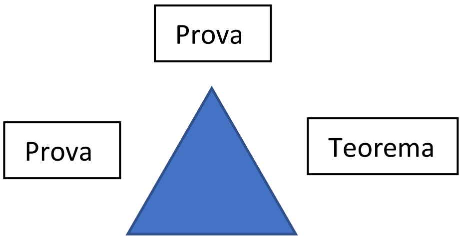
Matemática Discreta

Thales Azevedo Silva – 20172014040005



Definição: especificam com precisão os conceitos em que estamos interessados.

Teorema: Afirmam exatamente o que é verdadeiro sobre estes conceitos.

Provas: Demonstram de maneira irrefutável a verdade dessas asserções.

Leis x Definições Matemáticas

Def. 1 Par: Um inteiro é par se é divisível por 2 -> 3 é divisível por 2? 2 * x = 3

Def. 2 divisível: sejam A e B inteiros. Dizemos que a é divisível por b se existe um inteiro c, tal que: b * c = a.

b divide a <-

b é fator de a

b é divisor de a

Notação: b | a ‘b divide a’ ≠ b / a

Def. 3 Impar: Um inteiro a é chamado de primo se a > 1 e se seus únicos divisores forem a e 1.

Ex: 11 é primo

1 não é primo

2, 3, 5, 7, 11, 13...

Ex: Defina o que significa um inteiro ser um quadrado. Por exemplo, os inteiros 1, 0, 4, 9 e 16 são quadrados.

“Um inteiro x é chamado quadrado desde que...

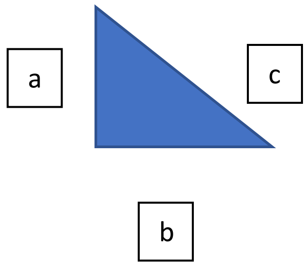
Matemáticos fazem 3 tipos de afirmações:

1) As que sabemos que são verdadeiras porque podemos prova-los: TEOREMA;
2) Cujo veracidade não podemos garantir: CONJECTURA;
3) Falsas: ERROS.

Teorema 1 Pitágoras

Se b e a são os comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo e c é o comprimento da hipotenusa então:

$a^2 + b^2 = c^2$



Obs.: A relação $a^2 + b^2 = c^2$ vale para catetos e para a hipotenusa de todo triangulo retângulo de maneira absoluta.

Provas: São utilizadas para verificar a veracidade das asserções matemáticas

Conjectura: Afirmações que cremos serem verdadeiras;

- Se provadas viram Teoremas.

Conjectura 1 Gold Bach

Todo inteiro par maior que a é a soma de dois primos.

4 = 2 + 2   12 = 5 + 7...

6 = 3 + 3

Conjectura 2. Primos gêmeos

Existem infinitos números primos cuja diferença entre eles é 2.

Primos de Mersem

Primos da forma 2p -1, onde p é primo.

Primo de Fermat

Primos da forma 2 ^2n + 1, onde n é inteiro positivo.

Crivo de Erastóstenes: Método utilizado para encontrar primos até um certo limite.

1) Escrever-se todos os naturais até o limite;
2) Corta-se o número 1;
3) Corta-se todos os múltiplos de 2 exceto o 2;
4) Corta-se os múltiplos de 3 exceto 3.
5) O próximo não cortado é primo.
6) Repete-se a partir do passo 4 com o último primo.

Proposição 1: A soma de dois inteiros pares é par.

Prova:

1) Vamos mostrar que, se x e y são inteiros pares então x + y é um inteiro par.
2) Sejam x e y inteiros pares
3) Com x é par, sabemos pela def. 1 que 2|x (2 divide x)
4) Analogamente, como y é par 2|y
5) Como 2|x, sabemos pela def. 2 que há um inteiro a tal que 2a = x
6) Analogamente, existe um inteiro b tal que 2b = y.
7) Observe que x + y = 2a + 2b

   2a + 2b = 2 (a + b)
8) Portanto existe um inteiro c, a saber (a + b), tal que x + y = 2 * c
9) Logo pela def. 2, 2| (x + y)
10) Portanto pela def. 1 x + y é par.

Prova direta:

P1) Convertemos para o formato “Se... Então”

P2) Admitimos que a condição é satisfeita

P3) Desenvolvemos a prova sabendo de onde saímos e onde queremos chegar

P4) Terminamos com, “Portanto...”

Proposição 2 sejam a e b inteiros. Se a|b e b|c então a|c

Prova:

1) Sejam a, b e c inteiros com a|b e b|c.
2) Com a|b, sabemos pela def. 2 que existe um inteiro x tal que ax = b
3) Analogamente temos que existe um inteiro u tal que by = c
4) Substituindo ax = b em by = c, temos a x y = c
5) Pela def. 2, temos que existe um inteiro 2, a saber xy tal que a*2 = c Portanto a|c -> a2 = c

Proposição 3

Sejam a, b, c e d inteiros. “Se a|b, b|c e c|d então a|d

1) Sejam a, b, c e d inteiros com a|b, b|c e c|d
2) Como a|b sabemos pela def2 que existe um inteiro x tal que ax = b
3) Analogamente, temos que existe um inteiro y tal que by = c
4) De mesma forma, temos que existe um inteiro 2 tal que c2 = d
5) Substituindo ax = b em by = c, temos: a xy = c
6) Analogamente, substituindo então a|d

Proposição 4

Seja x um inteiro. Então x é par se e somente x + 1 é ímpar.

Provar uma afirmação do tipo “Se somente se” consiste em provar das afirmações do tipo “Se... Então”.

Prova:

Suponhamos x par ..., portanto x + 1 é ímpar

Suponhamos x + 1 ímpar... Portanto x é par.

1) Isso significa que 2|x. Logo há um inteiro a tal que a * 2 = x

   Somando 1 dos dois lados temos: 2a + 1 = x + 1.

   Portanto pela def. de ímpar x + 1 é ímpar.

2) Então existe um inteiro b, tal que x + 1 = 2b + 1 def. ímpar subtraindo 1 de ambos os lados temos x = 2b.

   Isso mostra que 2|x e, portanto, x é par.

Nem todas as afirmações da matemática são verdadeiras uma maneira de refutar é usado um contraexemplo.

Um contraexemplo de uma afirmação “Se então” seria uma instância em que A é V e B é falsa.

Proposição 5: sejam A e B inteiros. Se a|b e b|a então a = b

Se somente se = O que faz na ida, se faz na volta.

A = 2

B = 2

Exercício:

1) Reescreva cada uma das sentenças na forma “Se... Então”.
   a) O quadrado de um número primo não é primo.

   b) O quadrado de um inteiro, ímpar é ímpar.

   c) O produto de um inteiro ímpar e um inteiro par é par.

2) Prove que o produto de um inteiro par e um inteiro ímpar é par.
3) Sejam a, b e c inteiros. Prove que se a|b então a|bc
4) Seja x um inteiro. Prove que x é ímpar se e somente se x + 1 é par.

5) Prove que um inteiro é ímpar se e somente se é a soma de dois inteiros consecutivos.
6) Refute: Se a, b e c são inteiros positivos com a|bc então a|b ou a|c
7) Prove que se a, b e c são inteiros positivos a^{bc} = $\left(1\frac{b}{}\right)^{c}$
8) Prove que se n é inteiro positivo então n^2 + n + 41 é primo.

1) Se x é um número primo, então o quadrado de x não é primo. Se x^2 é ímpar, então x^2 não é ímpar.

b) Se x é ímpar, então o quadrado de x não é ímpar.

c) Se temos a multiplicação de um inteiro ímpar e um inteiro par, então o seu produto será par.

Se x é um inteiro ímpar e y é um inteiro par, então x vezes y é par.

2) A) Vamos mostrar que, se x é um inteiro par e y é um inteiro ímpar, então x e y é um inteiro par.
   b) Seja x um inteiro par e y um inteiro ímpar.
   c) Como x é par, sabemos pela def. 1 que 2|x, logo sabemos pela def. 2 que há um inteiro a tal que 2ª=x
   d) Observe que x * y = 2a * y
      2(a * y)

   e), portanto existe um inteiro c, a saber (a * y), tal que x * y = 2 * c

   f) logo pela def. 2, 2| (x * y)

   g), portanto, pela def. 1 x * y é par.

3)

A) Vamos mostrar que, se x e y são inteiros ímpares

b) Sejam x e y inteiros ímpares

c) logo, x + y

d), portanto, pela def. de ímpar x + y é

4)

a) Sejam a, b e c inteiros com a|b

b) Com a|b sabemos pela def. 2 que existe um inteiro x tal que ax = b

c) analogamente temos que existe um inteiro y tal que ay = c

d) substituindo ax = b e ax = c, temos a x y = bc

e) pela def. 2, temos que existe um inteiro 2, a saber xy tal que a * 2 = bc

portanto, a|bc = a 2 = bc

5)supúnhamos x ímpar ..., portanto x+1 é par
Suponhamos x+1 par... portanto x é ímpar.
Somando 1 do lado temos: x +1;
Portanto pela def. de ímpar x+1 é ímpar
6) Sejam x e y inteiros consecutivos tal que, x + y é ímpar.

Teoria dos conjuntos

Conjunto: Agrupamento de objetos, denominados elementos.

Representação: A -> conjunto

a E A -> elemento do conjunto

Definição: Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos, sem repetição.

Axioma de extensão: Se dois conjuntos x e y são tais que todo elemento de x é elemento de y e todo elemento de y é elemento de x, então x e y são iguais.

Obs.: dado um elemento a e um conjunto A temos apenas duas possibilidades a € A ou a € A.
(Princípio do terceiro excluído)
Ex: A = {2, 3, 5, 7}

3 € A x € a {3, 5} € A

B = {5, 3, 2, , 7} = {5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 3, 2}

Um conjunto pode ser descrito listando todos os elementos ou caracterizando-os a partir de suas propriedades.

Ex: O conjunto de todos os inteiros positivos ímpares menores que 10.

A = {x|x é um inteiro positivo ímpar menor que 10)

A = {x E z | x é ímpar e x < 10}

A = {1, 3, 5, 7, 9}

Conjuntos Importantes

IN = {1, 2, 3, 4, 5...} -> Naturais

Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2...} -> Inteiros

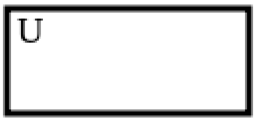
Q = { $\frac{M}{M}$; m, n, € z; n ≠ 0} -> racionais

II = Não pode ser obtido pela divisão dos dois inteiros irracionais.

C = Números da forma a + bi i^2i = -1 -> complexos

-Conjunto de todos os inteiros positivos maiores que o seu quadrado.

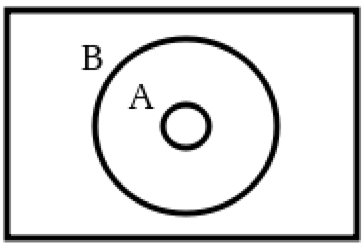
-Conjunto unitário: Conjunto com um único elemento.



Obs.: Um conjunto pode conter outros conjuntos

A = {N, Z+, R}

Diagrama de Venn: Representação gráfica de conjuntos



A = {{ }, { { },

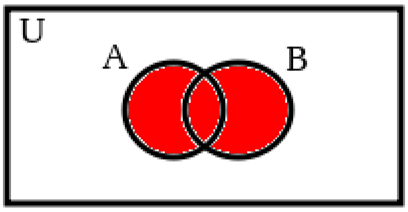
A = {y, x}

Y = { } x = {{ } } }, { } }

Relação entre conjuntos

Subconjunto: O conjunto A é um subconjunto de B se e somente se todo elemento de A for também em elemento de B.

Notação A C B.



Ex: O conjunto de todos os inteiros positivos ímpares menores que 10 é um subconjunto de todos os inteiros positivos menores que 10.

A = {1, 2, 3} B = {1, 2, 3, 4, 5} A C B

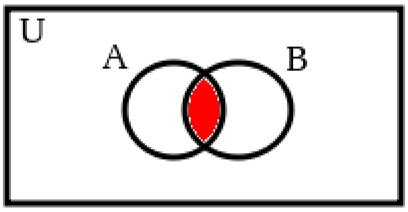
Definição: Ω

Sejam A e B conjuntos. A interseção de A e B, indicada por A Ω B é o conjunto que contém os elementos que estão em A e B simultaneamente.

A Ω B = {x| x € a Ω x € b}

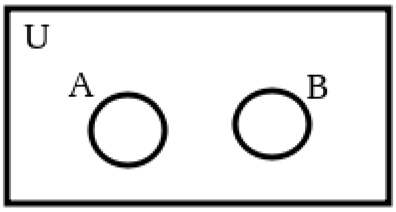
Exemplo: A = {1, 2} B = {1, 3} A U B = {1, 2, 3} {1,1,2,3}

A Ω B = {1}



Definição: Disjuntos dois conjuntos são disjuntos se sua intersecção é vazia.

A Ω B = 0



Cardinalidade da união de conjuntos.

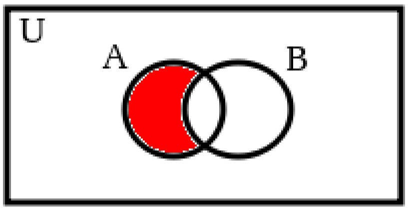
|A| + |B| ≠ |A U B|

|A U B| = |A| + |B| - |A U B|

Definição: Diferença

Sejam A e B conjuntos. A diferença entre A e B, indicada por A – B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B.

A diferença entre A e B é também chamada de complemento de B em relação a A.



A – B = {x | x € A Ω x € B}

|A – B| = |A| - |A Ω B|

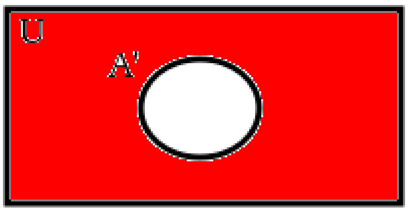
Ex: A = {1, 3, 5} B = {1, 2, 3}

A – B = {5}

|A – B| = 1

Definição: Complemento

Considere U como universo. O complemento de A, indicado por _A, é o complemento de A em relação ao universo.



A = U – A

A = {x | x € A}

Obs.: A Ω A = 0

A U A = U

Identidades de conjuntos

Identidade Nome

1- A U 0 = A propriedade dos elementos

A Ω U = A Neutros

2- A U U = U Propriedades de dominação

A Ω 0 = 0

3- A U A = A propriedades idempotentes

A Ω A = A

4- (A) = A Propriedade da complementação

5- A U B = B U A propriedades comutativas

A Ω B = B Ω A

6- A U (B U C) = (A U B) U C propriedades associativas

A Ω (B U C) = (A Ω B) U (A Ω C)

7- A U (B Ω C) = (A Ω B) U (A Ω C) propriedades distributivas

A Ω (B U C) = (A Ω B) U (A Ω C)

8- A U B = A Ω B Leis de Morgan

A Ω B = A Ω B

9- A U (A Ω B) = A Propriedades de Absorção

A Ω (A U B) = A

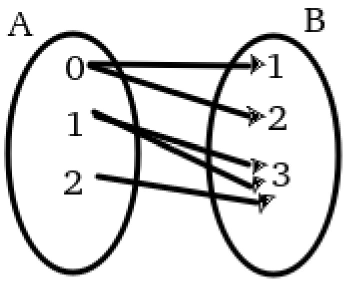
10- A U A = U Propriedades dos complementares

A Ω A = 0

Identidade de conjuntos podem ser demonstradas diretamente a partir de equivalências lógicas.

Funções e Relações

Definição 1: Sejam A e B conjuntos. Definimos uma relação R de A em B, representada por A -> B como sendo qualquer subconjunto de A x B.



Ex: A = {0, 1, 2} B= {1, 2, 3}

R = {{x, y} € A x B | x < y}

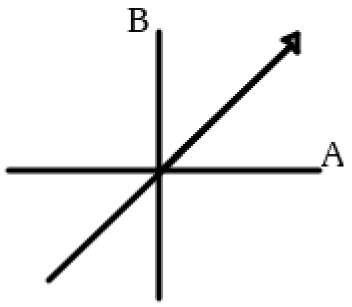
R = {(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)}

Obs.: Quando (x, y) € R, escrevemos

X R Y: Quando (x, y) € R, escrevemos x R y.

Ex: A = R   B = R

R = {(x, y) € R x R | x = y}



-Composição Relações

R1: A -> B

R2: B -> C

R2 o R1: A -> C

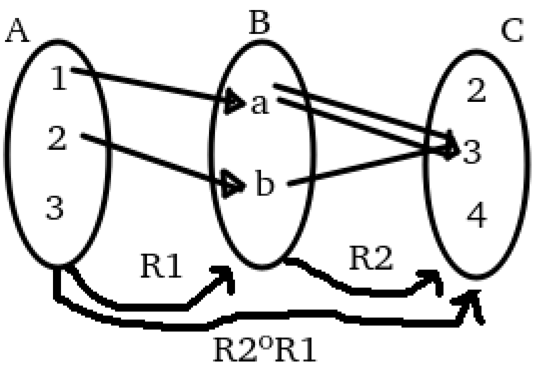
(x, y) € A x C : tal que existe z € B

Com (x, y) e R1 e (z, y) € R2

Ex: A = {1, 2, 3} b = {a, b} c = {4, 3, 2}

R1 = {(1,a) , (2, b)} R2 = {(a,4), (a,3), (b, 3)}

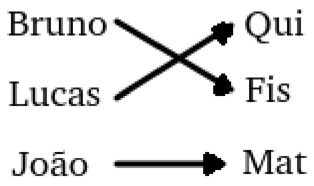
R2 o R1 = {(1,4), (2,3), (1,3)}

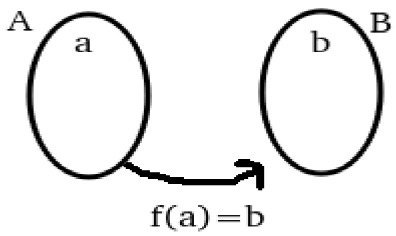


Definição: Sejam A e B conjuntos não vazio uma função f de A em B é uma determinação de exatamente um elemento de B para cada elemento de A. Escrevemos f(a) = b, Se b for o único elemento de B determinado pela função f para o elemento a de A.

F: A -> B

Uma função é também chamada de mapeamento a transformação.





Definição se f é uma função de A para B, dizemos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f.

Se f(a) = b, dizemos que b é a imagem de a, e a é a imagem inversa de b.

A imagem de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A.

Duas funções são iguais se possuem o mesmo domínio tem o mesmo contradomínio e mapeiam os mesmos elementos do seu domínio comum para os mesmos elementos do contradomínio.

Ex: Considere f como a função que determina os dois últimos bits de uma cadeia de bits maior que 2 bits.

F(1101001) = 01

Domínio:

Contradomínio:

Imagem:

Duas funções com valores reais para o mesmo domínio podem ser somadas ou multiplicadas.

F1 + f2 => (f2 + f2)(x) = f1(x) + f2(x)

F1 + f2 => (f2 * f2)(x) = f1(x) * f2(x)

Ex: f1(x) = x^2

F2(x) = $x^2 + x - x^2$

F1 + f2 = x^2 * x - x^2 = $x^3 - x^4$

Definição: Uma função f é chamada injetora ou um para um, se e somente se f(a) = f(b) implicar que a = b, para todos a e b do domínio de f.

ʉa ʉb (f(a) = f(b) <-> a =b

Ex: determine se a função f de {a,b,c,d} para {1,2,3,4,5} com f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1 e f(d) = 3 é injetora.

F(x) = x^2 Z + Z é injetora = f(-1) 1 ≠ (-1)

F(x) = $x + 1$ Z + Z é injetora

Definição: Uma função f: B -> c, B ≤ R e C ≤ R é chamada crescente Se f(x) ≤ f(y), sempre que x < y.

F é de crescente se f(x) 2f(y) e estritamente decrescente se f(x) > f(y) sempre que x < y.

Uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente é injetora.

Definição: Uma função f de A para B é sobrejetora a sobrejetora se somente se para todo b E B existe um a E A com f(a) = b

ʉ x €y (f(x) = y)

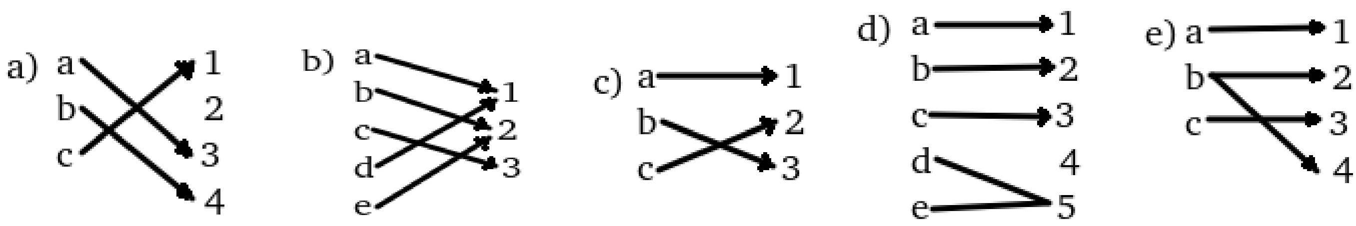
Se todos os elementos do contradomínio são imagem

CD = IMG

Ex: Considere f como uma função de {a, b, c, } para {1, 2, 3} definida por f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1 e f(d) = 3. Esta função é sobrejetora

F(x) = x^2 é sobrejetora z

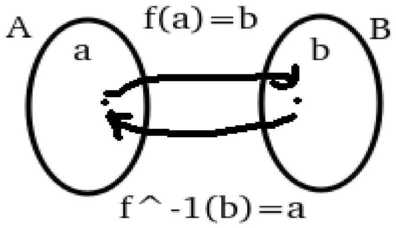
Definição: f é bijetora, ou seja, é correspondência um para um se for injetora a sobrejetora.



Definição: Seja f: A -> B uma função bijetora. A função inversa de f é uma função que leva a um elemento b E B o único elemento a ∈ A, tal que:

A função inversa de f é indicada por f -1

f^-1(b)=a quando f(a)=b
f^-1≠ 1/f



Uma bijeção é chamada inversível pois podemos definir uma inversa.

Uma função é não inversível se não é uma bijeção.

Ex.:f:**Z**→**Z**

f(x)=x+1 é inversível?

y=x+1→x=y-1→f^-2(y)=y-1

Definição: Considere g como uma função A -> B a f como uma função de B -> C. A composição das funções f e g indicada por:

(f º g)(a)=f(g(a))

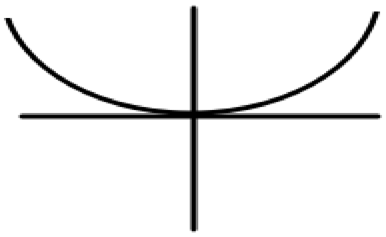
*f º g só pode ser definido se a imagem de g for um subconjunto do domínio de f.
Ex.: f º g f:**Z**→**Z** g:**Z**→**Z**
f(x)=2x+3 g(x)=3x+2

$f \circ g=f(g(x))=2x(3x+2)+3$
$g \circ f=g(f(x))=3(2x+3)+2$

*$(f^{-1} \circ f)(a)=f^{-1}(f(a))=f^{-1}(b)=a$
$(f \circ f^{-1})(a)=f(f^{-1}(b))=f(a)=b$
$(f^{-1})^1=f$

Definição: Uma função é denominada par quando f(x) = f(-x), para todo x.

Essa função é simétrica em relação ao eixo vertical.

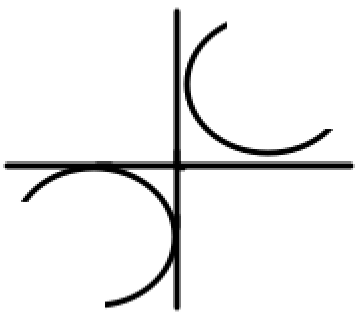


$f(x)=x^2$

Definição: Uma função f é denominada de ímpar quando f(x) = f(x) para todo x.

Essa função é simétrica em relação a origem.

$y=1/x$



Princípio da casa de pombo: estabelece que se n pombos voam para m casas, se n > m, então ao menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.

Uma função de cm conjunto finito para um conjunto finito maior não pode ser bijetora. Deve haver pelo menos dois elementos no domínio que possuam a mesma imagem.

Ex: Quantos alunos devemos ter para garantir que dois obtivera a mesma nota em uma prova valendo de 0 a 100 ?

Resposta: De 0 a 100 temos 101 resultados no total para acontecer o pior caso possível(dois alunos com a mesma nota) se acrescenta mais um resultado ao total que fica 102 ficando assim com dois alunos com a mesma nota.

Exercícios Propostos:

Lista:1

1)Suponha que A=2,4,6, B=2,6, C=4,6 e D=4,6,8. Determine quais desses conjuntos são subconjuntos de algum outro desses conjuntos.
Resposta: sabendo que: Se $X \subseteq Y$ então $x|x \in X, X \in Y$
Desse modo: $B \subseteq A, C \subseteq D, B \subseteq A$

2)Para cada um dos conjuntos abaixo, determine se 2 é um elemento de conjunto.
Resposta: $\{x \in \mathbf{R} | x \in \mathbf{Z} \land X>1\}$verdadeira,$\{x \in \mathbf{R} | x=a^2 \land a \in \mathbf{Z}\}$falsa, $\{2,\{2\}\}$verdadeira, $\{\{2\},\{\{2\}\}\}$falsa, $\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$falsa,$\{\{\{\{2\}\}\}\}$falsa

3)Determine se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa.
Resposta: $\{0 \in \emptyset\}$falsa, $\{0\} \subset \emptyset$falsa, $\{0\} \in \{0\}$falsa, $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$verdadeira, $\emptyset \in \{0\}$falsa, $\emptyset \subset \{0\}$verdadeira, $\{0\} \subset \{0\}$falsa

4)Qual a cardinalidade de cada um dos conjuntos abaixo?
Resposta: $\emptyset \rightarrow |A|=0$, $\{\emptyset\{\emptyset\} \rightarrow |A|=2$, $\{\emptyset\} \rightarrow |A|=1$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} \rightarrow |A|=3$

Lista:2

1)Mostre que $A-B=(A \cup B) \cap B'$

2)Sejam A e B conjuntos arbitrários. Use as identidades de conjuntos para determinar se a seguinte afirmação é verdadeira: $(A \cup B)-(A \cap B)=(A-B) \cup (B-A)$

3)Determine se a seguinte afirmação é verdadeira a partir de diagrama de Venn e identidade de conjuntos: $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$

4)Mostre que para quaisquer conjuntos A,B e C: $((A-B) \cup (B-A) \cap C)=((A \cap C) \cup (B \cap C))-(A \cap B \cap C)$

5)Desenhe o diagrama de Venn para cada uma das combinações abaixo:
a)$A \cap (B-C)$ b)$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ c)$(A \cap B') \cup (A \cap C')$

6) Mostre que $A \cup B=(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$