

선형대수 정리

모든 것은 데이터로 되어있다.

따라서, 모든 것은 벡터값으로 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

행렬은 정의상 직사각형 형태로 되어있음

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

가로는 column이라고 부르고 세로는 row이라고 부른다.

이 행렬의 크기를 얘기할 때 dimension(차원)의 이 차원은 공간으로 전환되고 벡터 공간은 $m \times n$ 의 형태 벡터들이 될 수 있는 모든 값으로 이뤄져 있는 공간(= 차원 / N개의 component가 그 차원을 다 채우면 그 차원의 vector space 하나를 이룬다.)을 뜻하며 이것이 바로 column 측면에서는 m 차원 row 측면에서는 n 차원이 된다. 즉, 하나의 행렬은 m 이라는 차원과 n 이라는 차원을 whole space로 가진다.

공간은 whole space와 column/row space으로 나눌 수 있는데 whole space란 이 벡터 자체가 가지고 있는 차원 전체를 뜻하고 column/row space는 이 column 혹은 row가 채울 수 있는 차원 전체를 뜻한다.

또한 null space가 있는데 whole space에서 어떤 column/row space를 정의하고 나서 그 나머지를

null space라고 한다.<기하학적 정의>

어떤 행렬이 있을 때 무엇을 곱하든 0으로 이루어진 행렬이 될 때, 이 모든 값들이 이루는 공간을 null space이라고 한다.<수학적 정의>

-> column서는 왼쪽에다 곱해야지 차원이 같아지기 때문에 left null space라고 한다. Row의 입장에서 오른쪽에서 곱해야지 차원이 같아지기 때문에 null space라고 한다. 그리고 하나의 행렬에서 column입장에서 null space를 빼고 row입장에서 null space를 빼면 둘다 같은 차원을 가진다. 즉, whole space는 달라도 둘의 차원은 같다는 뜻이다.

Cf) 영공간

$Ax=0$ 의 모든 해 집합을 행렬 A 의 **영공간(null space)**이라고 합니다. A 가 n 개 열을 가졌다면 A 의 영공간은 R^n 의 부분공간이 됩니다.

영공간을 **선형변환(linear transformation)** 관점에서 이해할 수도 있습니다. T 를 n 차원 벡터 x 를 m 차원 영벡터로 변환하는 선형변환으로 둔다면 영공간 $NulA$ 는 아래 그림처럼 도식화할 수 있습니다.]

$M \times N$ 인 행렬이 있을때

M 은 column의 관점 / column space

-> M 차원이 column의 whole space

만약에 column space가 whole space를 다 채우지 못한다면 이는 null space라고 한다.

<Null space는 그 벡터 값에 곱하면 0을 만들어주는 행렬>

또한 모든 column이 독립적이면 (한 일직선상에 존재하는 행렬이 하나식만 존재) column space는 whole space다.

여기서 독립적인 행렬은 whole space가 m 차원이면 최대 m 개까지만 존재가능하다.

-> $m+1$ 차원 행렬은 m 차원의 행렬의 조합으로 표현가능하다.

만약에 column vector가 두개가 있다면 행렬의 덧셈으로 그 vector 값을 구할 수

있다.이는 곧 두 vector에서의 평행사변형 꼴의 한 점이 된다.

Vector가 한 직선상으로 되어있지 않으면 두개의 rank으로 되어있는 행렬이다.

N 은 row의 관점 -> N 차원이 row의 whole space

2차원 row가 3개가 있다고 하면 2개의 조합으로 나머지 하나를 만들 수 있기 때문에 3개 전부

independent할 수 없다. 결국, n 차원에서 independent한 벡터는 총 n 개만 존재한다.

요약)

$R^m \rightarrow m$ 이 column의 whole space -> column space

$R^n \rightarrow n$ 이 row의 whole space -> row space

-> 그리고 둘의 차원은 같아야 한다. (whole space는 달라도)

그리고 이 모든 벡터 값은 이를 좌표축 상에 표시가 가능하다. 여기서 벡터는 크기와 방향성만 중요하지 이 벡터가 꼭 3,4의 위치에 있어야 하는 것은 아니다.

크기와 방향성만 정해지면 어디로 가든지 상관이 없다.

즉, 원점에서 시작할 필요가 없다는 뜻이다.

또한, 벡터 크기는 차원을 늘릴 뿐 점을 늘리지는 않는다.

다. 반대로, 벡터에 곱해진 값(상수)은 벡터의 길이에만 영향을 주지 크기에 영향을 주지 않는다. 이를 Spaning이라고 한다. 예를 들어 column 벡터 두개에서 이를 확장하면 하나의 삼각형이만 들어지고 이 삼각형이 무수히 확장되면 column vectorspace를 만들 수 있다.

-> 상수의 곱셈은 벡터의 길이를 / 두 행렬의 덧셈은 (평행사변형 형태로) 새로운 방향으로 바꿔준다. / 두 행렬의 곱셈은 벡터 값의 차원을 틀어준다.

두개의 벡터값은 결합이 가능한데 이를 linear combination이라고 하고 이는 선형성(같은 직선위에 존재하는 여부 / 독립성 여부)를 판단하는 기준이 된다.

$$c \cdot v + d \cdot w$$

V는 벡터 W도 벡터(차원이 같음) / c,d는 곱하는 숫자

Linear combination은 이 형태만 가능