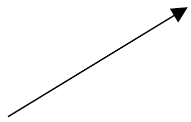
1. 벡터

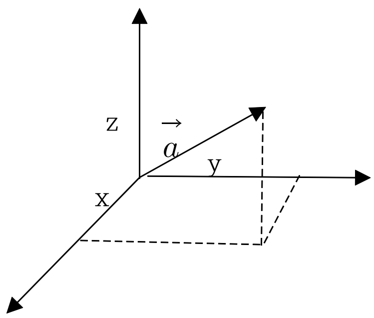
벡터(vector)는 수학개념으로 크기와 방향을 갖는 물리량을 의미한다. 또한, 일반적으로 벡터는 시점과 끝점을 연결하는 화살표로 표시할 수 있다.



벡터와 상대되는 물리양으로 크기만 갖는 양을 스칼라(scalar)라고 하며, 질량, 시간, 면적 등과 같은 양이다. 벡터량은 속도, 가속도, 힘, 응력과 같은 크기와 방향을 갖는 양이다.
예를 들면, R 벡터공간(3차원 실수공간)에서 임의 벡터 $\vec{a}$는 다음과 같이 표현된다.

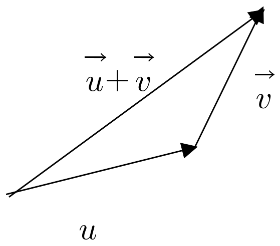
$$\vec{a}=(x,y,z) \quad \text{는}\, x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

여기서 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$는 x축, y축, z축 방향의 단위벡터를 표시한다.



1. 벡터덧셈과 선형결합

서로 다른 종류의 사과와 배를 함께 더할 수 없듯이 두 벡터 $\vec{u},\vec{v}$의 합은 각 성분별로 덧셈을 하여 계산하며, 도형적으로 $\vec{u}$ 끝점에 $\vec{v}$의 시점을 연결한 화살표로 $\vec{u}+\vec{v}$ 로 표시된다.



$$\vec{u}=\begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix}$$

또한, 스칼라 c를 벡터$\vec{u}$에 곱하면 $c\vec{u}=\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$로 계산된다.

정의: 선형결합(linear combination)
두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$의 선형결합은 $c\vec{u}+d\vec{v}$로 표시한다. 여기서 c, d는 스칼라

예를 들면, 삼차원에서 임의의 벡터 $(1, 2, -3)$ 는 세 개 독립된 벡터의 선형결합으로 $\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$로 표시되며,

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$ 를 나타낸다

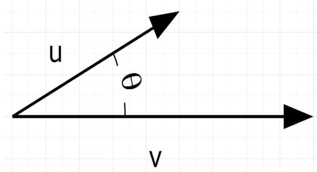
또한, 선형결합 $c\vec{u}$는 직선을 나타내고, 선형결합 $c\vec{u}+d\vec{v}$는 평면을 표시하고, 선형결합 $c\vec{u}+d\vec{v}+e\vec{w}$는 3차원 공간을 표시한다.

2. 벡터의 내적(dot product)

두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$의 내적은 다음과 같이 정의한다.

정의 : 내적(dot product)
임의의 두 벡터를 $\vec{u}=(u_1, u_2)$, $\vec{v}=(v_1, v_2)$라고 하면

$\vec{u} \cdot \vec{v}=u_1v_1+u_2v_2$ 또는 $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ 여기서 θ는 사잇각



내적에 대한 물리적 의미를 살펴보면, 힘 벡터u에 의한 변위벡터 $\vec{v}$방향에 대한 일(work)을 표시하며, 기하학적 의미로는 벡터$\vec{u}$의 $\vec{v}$ 단위 벡터에 대한 정사영(projection) 또는 성분(component)을 나타낸다.

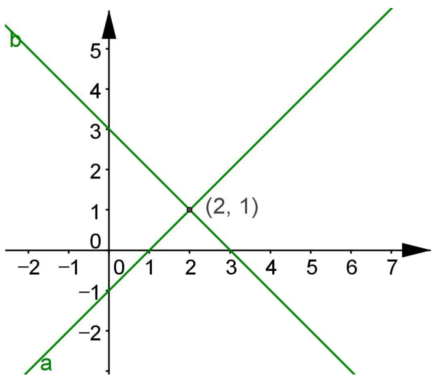
2장 선형연립방정식

1. 선형시스템의 기하학적 의미

n계 선형시스템(선형연립방정식)은 미지수 x가 1차식으로 표현되는 n개의 방정식을 의미한다. 비선형이란 $x^2, x_1x_2, \sin(x_1)$와 같이 미지수 x값이 다른 미지수의 곱 또는 함수값으로 표현되는 경우이다. 기본적인 2계의 선형시스템을 나타내면 다음과 같은 경우이다.

$$\begin{aligned} a &: x - y = 1 \\ b &: x + y = 3 \end{aligned}$$

선형대수학(linear algebra)의 기본적인 원리는 n 계의 선형시스템을 푸는 것이다.



(1) 행벡터에 의한 풀이

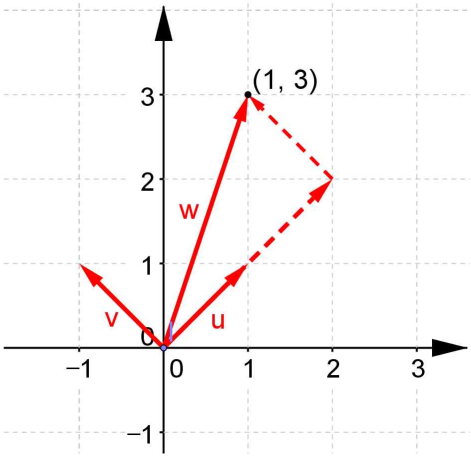
위의 2계 선형시스템을 풀기 위하여 각 각의 식을 좌표축에 표현하면 다음과 같다. 여기서 해는 두 방정식의 교점(x=2,y=1)을 표시한다.

(2) 열벡터에 의한 풀이

위의 2계 선형시스템을 열벡터의 선형결합으로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

여기서, $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \vec{w}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$이라고 두면, $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$로 표시되는 선형결합이다.



위의 그림처럼 $\vec{u}$를 2(=x)를 곱하고 $\vec{v}$를 1(=y)를 곱하여 더하면 $\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$를 얻는다.

(3) 행렬에 의한 풀이

위의 2계 선형시스템를 행렬에 의하여 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

여기서 $\quad=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$를 계수행렬(coefficient matrix)이라고 하고, $x=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$를 열벡터라고 하면 $Ax=b$로 표현된다

Ax는 행렬 A의 열벡터의 선형결합을 나타내므로 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$Ax=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

따라서 $Ax=b$의 해는 A의 열벡터에 대한 선형결합의 스칼라값 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$이 열벡터 $b=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$를 만족시키는 값을 구하는 문제와 같다. 그러므로 해는 위 절의 열벡터 선형결합에서 구한 것처럼 아래식을 만족한다.

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\text{에서 } x=\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\Big)$$

일반적으로 행렬 x의 곱은 A의 행벡터와 x의 열벡터의 내적으로 정의한다.

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+(-1)\times1\\1\times2+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

4장 벡터공간

선형대수학에서 중요한 개념인 벡터공간과 부분공간에 대하여 설명한다.

정의: 벡터공간(V)은 독립된 벡터들의 선형결합으로 표시할 수 있은 공간

예를 들면, R 벡터공간(실수 3차원공간)의 임의의 벡터$(\vec{a})$는 x,y,z의 좌표값으로 표시할 수 있다. $\vec{a}=(x,y,z)$ 는 $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

부분공간: 전체 벡터공간에서 부분집합으로 표시될 수 있은 공간
예를 들면, R^3벡터공간에서 부분공간으로 영공간(원점), 원점을 지나는 직선공간, 원점을 지나는 평면공간, R^3전체공간으로 이루어 진다. 여기서 원점을 포함시키는 이유는 그 공간에 속한 독립된 벡터들의 선형결합시 scalar값을 모두 0로 보면, 0가 되므로 그 공간에 원점이 반듯이 포함되어야 한다.

행렬 U을 행렬 A의 행조작으로 얻어진 상삼각 행렬(크기:$m\times n$)이라고 가정하면,

$$U_{(m\times n)}=\begin{bmatrix}\star & \ast & \ast & \ast\\0 & \star & \ast & \ast\\0 & 0 & \star & \ast\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ 여기서 ★는 피봇을 표시함

계수 $rank(A)=r$; 피봇의 개수; 독립된 행 또는 열벡터의 갯수
차원 $\dim N(A)=n-r$; 자유변수의 개수; $Ax=0$ 해공간의 독립된 해벡터의 개수

행렬식의 성질

행렬식(determinant)은 정방행렬 A에 의하여 정의되는 실수 값이며 det $\ ) = |A|$ 로 표시된다, 예를 들면, 크기 2×2인 정방행렬 $A=\begin{bmatrix} a\,b \\ c\,d \end{bmatrix}$의 경우,

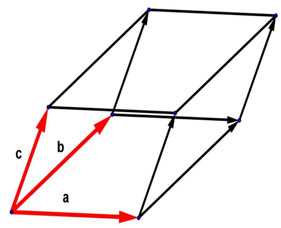
$\det(A) = \begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} = ad-bc$로 표현된다(위와 같은 공식은 3×3 정방행렬까지 적용).

일반적으로 행렬식 값은 다음과 같은 여인수의 전개식으로 구한다.

$$\det(A) = \quad a_{\ k}C_{jk} \qquad \text{인수}: C_{jk} = (-1)^{j+k}M_{jk}$$

기하학적 의미: 독립된 벡터로 이루어진 부피

$\det(A) = Vol(A)$ 여기서 $A = \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$



성질

1. $\det(I) = 1$
2. 행렬 A의 임의의 두 행을 교환하면, 행렬식의 부호가 변한다.
3. 행렬 A의 임의의 두 행이 같으면, $\det(A) = 0$
4. (a) 임의 행에 t를 곱한 행렬식과 행렬식에 t를 곱한 것 과 같다.

$$\begin{vmatrix} ta\,tb \\ c\ \ d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix}$$

(b) 행렬식은 행에 대한 선형결합이 성립된다. $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$

5. 행렬 A에 대하여 기본 행조작을 하여도 행렬식 값은 같다.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-ta & d-tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ ta & tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} - t\begin{vmatrix} a\,b \\ a\,b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix}$$

5. $\det(A) = 0$이면, 행렬 A는 특이행렬이다(종속)
6. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

예를 들면, $\det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$이므로 $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

7. $\det(A) = \det(A\ \ )$

예를 들면, $\begin{vmatrix} a\,b \\ c\,d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,c \\ b\,d \end{vmatrix} = ad-bc$

고유값 문제

고유값 문제는 행렬 변환 Ax에서 임의의 벡터 를 방향이 변하지 않고, 크기만 λx 로 변환하는 경우; $x=\lambda x$를 칭한다. 여기서 λ를 고유값이라고 하고, λ에 대응하는 벡터 x를 고유벡터라고 한다.
따라서, 고유값 문제는 $(A-\lambda I)x=0$이며, x값이 자명하지 않은 해를 갖는 조건은 $(A-\lambda I)$가 특이행렬이어야 하므로, $\det(A-\lambda I)=0$조건을 만족한다.

$A=\begin{bmatrix} a\ b \\ c\ d \end{bmatrix}$일 때,

$$\det(A-\lambda I)=\begin{matrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{matrix}\Bigg| = (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=\lambda\ \ -(a+d)\lambda+(ad-bc)$$

$$=>\ \lambda^2-tr(A)\lambda+\det(A)$$

또한, 특성방정식의 해를 λ_1,λ_2라고 두면, $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=\lambda^2-(\lambda_1+\lambda_2)\lambda+\lambda_1\lambda_2$
위의 두식을 비교하면 $tr(A)=\lambda_1+\lambda_2=\ \underset{i}{}\lambda_i,\quad \det(A)=\lambda_1\lambda_2=\prod_i\lambda_i$

- 고유값 성질

1. 정방행렬 A와 그 전치행렬 A 는 같은 고유값을 갖는다.

proof) 행렬식 성질에서 $\det A^T=\det A$이므로

$$\det(A-\lambda I)=\det(A-\lambda I)^T=\det(A^T-\lambda I)$$

2. 행렬 A가 특이행렬이면, 고유값 $\lambda=0$를 만족한다.

proof) 행렬 A가 특이행렬이면 $Ax=0$를 만족하는 x벡터가 존재하므로

$$Ax=\lambda x=0\quad =>\ \lambda=0$$

3. a) 대칭행렬 고유값은 실수이다.
   b) 반대칭행렬 고유값은 순허수이다.
   c) 직교행렬의 고유값은 $|\lambda|=1$이다.

proof) $\mathrm{i\,f}\ A^{-1}=A^T($ 교행렬$)\ then\ Ax=\lambda x\ ;\ A^TAx=\lambda A^Tx\ =\lambda^2x$

$$=>\ x=\lambda^2x;\ \ |\lambda|=1$$

4. 대칭행렬의 고유벡터는 직교성질를 갖는다.

proof) $Ax_1\cdot x_2=x_1\cdot A^Tx_2;\quad \lambda_1x_1\cdot x_2=x_1\cdot\lambda_2x_2$
$(\lambda_1-\lambda_2)x_1\cdot x_2=0\ \ =>\ \lambda_1\neq\lambda_2,\ \ x_1\cdot x_2=0$