Théorie des Graphes

Lucas Moragues

22 mars 2017

Sommaire

1 Graphe et combinatoire **2**
1.0 Notion sur les graphes . . . 2
1.1 Cycle chemin et connexité . . . 3
1.1.1 Complement sur les chemins . . . 5
1.2 Graphes minimalement connexes . . . 6
1.3 Euler et Hamilton . . . 8
1.4 Combinatoire / Dénombrement . . . 9
1.4.1 Règles de base . . . 9
Règle OU (Union) . . . 9
Règle Et (Produit) . . . 9
Règle Puissance . . . 9
1.4.2 Bijections et fonctions . . . 9
Cardinalité des parties d'un ensemble . . . 9
Règle division . . . 9
Nombre de fonctions . . . 10
1.4.3 Permutation . . . 10
Arrangements . . . 10
Combinaison . . . 10
Choix sans ordre avec répétition . . . 11
Union généralisée . . . 12
1.5 Coloration et planaritée . . . 12
1.5.1 Un algorithme glouton pour la colotation de graphe . . . 12
planarité . . . 12
1.6 couplages . . . 13
1.6.1 Transversal d'un groupe . . . 13
1.6.2 cas des graphes bipartis . . . 13

Chapitre 1

Graphe et combinatoire

1.0 Notion sur les graphes

Définition :
Un graphe simple est un couple $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des sommets E l'ensemble des arêtes qui sont des paires de sommets distincts

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V; u \neq v\}$$

Vocable :
u et v sont les extrémités de l'arête $\{u, v\}$
L'arête $e = \{u, v\}$ est uncidente à u et v
Le degré d'un sommet v est le nobmre d'arêtes incidente à v

Lemme : lemme des poignées de main
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple alors la somme des degrès des sommets de G est deux fois le nombre d'arêtes

$$\sum_{v \in V} degre(v) = 2|E|$$

Le degré minimum est noté $\delta(G)$

$$\delta(G) = Min_{v \in V} degre(v)$$

Le gegré maximum est noté $\Delta(G)$

$$\Delta(G) = Max_{v \in V} degre(v)$$

1.1 Cycle chemin et connexité

Soit $u, v \in V$ un chemin de u à v dans $G = (V, E)$ est une séquence d'arêtes telle que deux arêtes consécutives aient une extrémité commune et tel que la première arête sont incidente à u et la dernière incidente a v $(\{U_0, U_1\}, \{U_1, U_2\}, ..., \{U_{k-1}, U_k\})$

La distance entre deux sommets $u, v \in V$ est la longueur du plus cours chemin u et v on notera cette valeur $dist(u, v)$
Le diamète d'un graphe, noté $diam(G)$ est la distance entre ses deux sommets les plus éloignés

$$diam(G) = max_{u,v \in V} dist(u, v)$$

Le rayon d'un graphe est défini par :

$$Rayon(G) = min_{u \in V} max_{v \in V} dist(u, v)$$

Un angle est un chemin dans les deux extrémités sont identiques
Un graphe est connexe si il existe un chemin entre toute paire de sommet

Définition :
Soit $G = (V, E)$ un graphe et $U \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets, le sous-graphe induit par U noté $G_{|U}$ (G restreint à U) est le graphe dont les sommets sont U et dont les arêtes sont celles de E dont les extrémités sont dans U

$$G_{|U} = (u, \{\{u, v\} | \{u, v\} \in E; u, v \in U\}$$

Un sous-graphe induit connexe maximal (pour sont support) est une **composante** (connexe)
Une **clique** est un ensemble de sommets qui sont tous adjacents
Deux sommets sont adjacents s'ils sont incidents à une même arête. u et v adjacent si $\{u, v\} \in E$

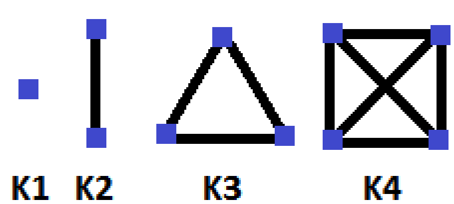

FIGURE 1.1 – On note K_n la clique avec n sommets

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si on peut partitionner V en deux ensemble A et B tel que toute arête de E aient une extrimité dans A et dans B

Lemme :
si $G = (V, E)$ est connexe, $|E| \geq |V| - 1$

Preuve :
Soit $v \in V, \forall w \in V \backslash_{\{v\}}$ on note P_w un plus cours chemin de w a v et e_w la première arête de P_w

si $w \neq w'$ alors $e_w \neq e_{w'}$
On suppose que cette affirmation est fausse
Soit $w \neq w'$ telque $e_w = e_{w'}$

$$dist(w, v) = 1 + l' \leq l$$
$$dist(w', v)1 + l \leq l'$$

Lemme :
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $e \in E / G\backslash_{\{e\}}$ est connexe si et seulement si e appartien à un cycle dans G

Preuve :
$\Rightarrow$
$G\backslash_{\{e\}}$ connexe. Soit $e = \{u, v\}$
il exite un chemin P de u à v dans $G - e$ Donc l'union de P et de e forme un cycle dans G qui passe par e
$\Leftarrow$
Soit C un cycle qui contient $e = uv$
il existe un chemin dans $G - e$ entre u et v
soit $u', v' \in V$ soit P un chemin de u' à v' dans G si $e \notin P$ alors u' et v' sont connecté dans $G - e$

Si $e \in P$ sans perte de généralité on suppoe que u' est connecté a u et v' et connecté a v dans la relation de connexion est transitive donc u' est connecté à v' dans $G - e$
Donc $G - e$ est connexe

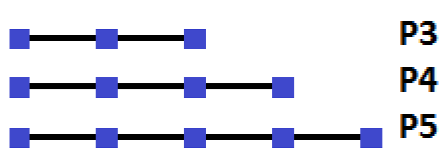

FIGURE 1.2 – On note P_n le chemin de n sommets

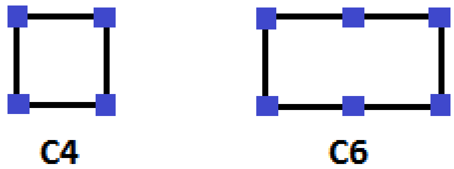

FIGURE 1.3 – On note C_n le cycle de n sommets

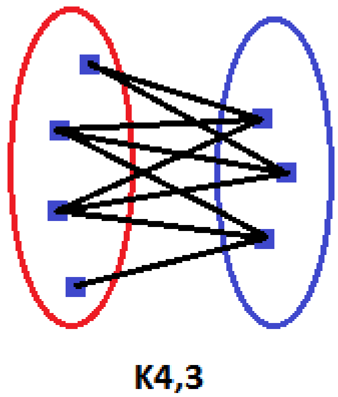

FIGURE 1.4 – On note $K_{n,m}$ le graphe biparti complet avec n sommets d'un coté et m de l'autre

1.1.1 Complement sur les chemins

on défini la relation $\sim$ telle que $u \sim v$ si u et v sont connecté par un chemin ,(même un chemin vide $\Rightarrow u \sim v$)

Proposition :
$\sim$ est une relation transitive

Preuve :
soit $u \sim v$ et $v \sim w$ soit P un chemin de u à v, soit Q un chemin de v à w
Soit s le premier sommet visité par P de u à v et Q de w à v
on peut donc construir le chemin R avec les arêtes de P qui vont de u à s plus les arêtes de Q qui vont de s à w

Proposition :

$\sim$ est une relation d'équivalence reflexive : $u \sim u$
transitive : $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$
symérique : $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

Les classes d'équivalence de $\sim$ sont les composantes (connexe) du graphe
On note c(G) le nombre d conposantes connexes d'un graphe G

1.2 Graphes minimalement connexes

Définition :

- un graphe $G = (V, E)$ est minimalement connexe si , G est connexe et pour tout $e \in E, G - e$ n'est plus connexe
- un arbre est un graphe minimalement connexe
- une forêt est un graphe sans cycle

Proposition :

Pour toute forêt $G = (V, E)$

$$|V| = |E| + c(G)$$

Preuve :

On va montrer cette propriété par indection sur le nombre d'arêtes
Soit G un graphe avec n sommets et $m = 0$ arêtes alors $c(G) = n \Rightarrow |V| = |E| + c(G)$
Soit G un graphe avec n sommets et $m \geq 1$arêtes acyclique
Soit $u, v \in E$ u et v sont connectés dans G et déconnecté dans $G - e$ car G est acyclique
$c(G) = c(G - e) - 1$

par induction :
$|V| = |E - e| + c(G - e)$
$|V| = |E| - 1 + c(G - e)$
$|V| = |E| + c(G)$

Proposition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe il existe $E' \subseteq E$ tel que $G' = (V, E')$ est connexe acyclique
Si il y à un cycle dans G et e appartient à ce cycle alors $G - e$ est connexe
On peu appliquer cette propriété tant qu'il existe un cycle

Théorème :
Soit $G = (V, E)$, les proposition suivante sont équivalente

1. G est un arbre (minimalement connexe)
2. G est connexe et sans cycle
3. G est acyclique et $|E| = |V| - 1$
4. G est connexe et $|E| = |V| - 1$
5. G est maximal sans cycle
6. pour tout $u \neq v \in V, G$ contient un unique chemin de u à v

Preuve :
1) $\Rightarrow$ 5) : Si on ajoute $u, v \notin EaG$, il existe P un chemin de u à v $P + uv$ est donc un cycle G et est maximal sans cycle

5) $\Rightarrow$ 2) : Par contradiction, si G n'est pas connexe , alors il existe u déconnecté de v $G + uv$ est acyclique donc G n'est pas maximal sans cycle

2) $\Rightarrow$ 3) : $|V| = |E| + c(G)$ G est connexe $c(G) = 1 \Longrightarrow |E| = |V| - 1$

3) $\Rightarrow$ 4) : G acyclique $\Rightarrow |V| = |E| + c(G)$ et $|E| = |V| - 1 \Rightarrow c(G) = 1$

4) $\Rightarrow$ 6) : Soit G connexe et $|E| = |V| - 1$ On suppose que u et v sont relier par deux chemin . $G' = (V, E')$ un sous graphe acyclique connexe $|E'| = |V| - 1$ et $|E'| < |E|$ D'où contradiction Il reste un unique chemin de u à v

6) $\Rightarrow$ 5) : G est connexe et $G - uv$ est déconnecté car l'arête uv est l'unique chemin de u à v

Proposition :

missed something here

Définition :
Un graphe k régulier est un graphe dont tous les sommets sont de degrès k

$$\sigma(G) = \Delta(G) = k$$

Caractérisation des graphes bipartis

Proposition :

Un graphe G=(V,E) est biparti si et seulement si il n'a pas de cycle de longueur impaire
G sans cycle impair connexe ⇒ G biparti

1.3 Euler et Hamilton

Une chaîne est un chemin qui peut passer plusieurs fais par un même sommet mais une seule fois par arête
Une chaîne fermer au circuit est une chaîne dont les deux extrémités sont identique
Une chaîne Eulerienne est une chaîne qui passe exactement une fois par chaque arête . Un circuit Eulérien est un circuit qui passe exactement une fois par chaque arête. un graphe est Eulérien si il a un circuit Eulérien

Théorème :

Soit G=(V,E) connexe avec au moin 2 sommets , les 3 propriétés sont équivalentes

1. G est Eulérien
2. degrès(v) est pair pour tout $v \in V$
3. il y a un ensemble de cycles C tel que toute arête soit exactement dans un de ces cycles

Preuve :

$i) \Rightarrow ii)$: soit W un circuit Eulérien soit $v \in V$ chaque occurence de v dans W utilise deux arêtes incitente à v . v est donc de degrès pair

$ii) \Rightarrow iii)$: soit G tel que tous ses sommets soit de degrès pair On choisit un sommet v et on construit un chemin maximal à partir de v, P. le dernier sommet de P est de degrès ≥ 2 et donc il est adjacent à un sommet w de P. La partie de P de w à v avec l'arête wv forme un cycle C Soit $G - C$ le graphe G auquel on a enlever les arêtes de C le degrès des somets de $G - C$ reste pair par induction on peut décomposer $G - C$ en cycle

$iii) \Rightarrow i)$: soit T un circuit maximal contituer d'un ensemble de cycle $C_1, ..., C_n$ si il existe un autre cycle de C alors comme G est connexe il existe un cycle de C qui n'est pas dans T_v mais qui partage un sommet v avec T. On note C ce cycle
$C(vu_1, ..., u_k v)$, $T(vw_1, ..., w_k v)$ donc $(vu_1, ..., u_k v, vw_1, ..., w_k v)$ est un circuit) ce qui contredit la maximalité de T, T contient donc tous les cycles de C et ainsi toutes les arêtes de G . G est Eulérien

1.4 Combinatoire / Dénombrement

1.4.1 Règles de base

Règle OU (Union)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Règle Et (Produit)

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Règle Puissance

$$\left|A^k\right| = |A|^k$$

qui correspond à k choix indépendant sur le même ensemble

1.4.2 Bijections et fonctions

Soit f :$A \to B$ une bijection alors $|A| = |B|$

Cardinalité des parties d'un ensemble

Soit $S = e_1, e_2, ..., e_k$, on note $P(S)$ l'ensemble des parties de S

$$P(S) = U|U \subseteq S$$
$$X : P(S) - > 0, 1^k$$
$$X(U) = (x_1, x_2, ..., x_k) \forall U \subseteq S$$

avec $x_i = 1$ si $e - i \in U$ et $x_i = 0$ sinon
X est une bijection

Règle division

Soit $f : A \to B$ et $k \in \mathbb{N}$
tel que $\forall y \in B$

$$|\{x \in A | f(x) = y\}| = k$$

alors $|A| = k * |B|$

Nombre de fonctions

$$F(A,B) = \{j : A \to B\}$$

int valeur[52] $Aa_1, ..., a_2$

$$C : F(A,B)B^{|A|}$$
$$C(j) = (j(a_1), ..., j(a_k))$$

C est une bijection

$$|F(A,B)| = \left|B^{|A|}\right|$$
$$|F(A,B)| = |B|^{|A|}$$

1.4.3 Permutation

Une permutaition est une bijection $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$
On peu la représenter comme un tableau contenant les entier de 1 à n tel que $tableau[i] = \sigma(i)$
le nombre de permutation diférente sur n élément est $n!$

Arrangements

Un arrangement consiste à choisir k éléments ordonnés parmis n

$$f(k) : \sigma_n \to A_n^k$$
$$f(k) = \left(\sigma_{(1)}, ..., \sigma_{(n)}\right) = \left(\sigma_{(1)}, ..., \sigma_{(k)}\right)$$
$$\forall y \in A_n^k \left|f^{-1}(y)\right| = (n-k)!$$
$$|\sigma_n| = (n-k)! \times \left|A_n^k\right|$$
$$\left|A_n^k\right| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinaison

on note $\binom{n}{k}$ le nombre de choix de k élément parmis n

$$f : A_n^k$$
$$(a_1, ..., a_k) \to \{a_1, ..., a_k\}$$
$$\binom{n}{k} \times k! = \left|A_n^k\right|$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Choix sans ordre avec répétition

parfums de macaron : vanille , chocolat , fraise , framboise , pistache
00100001000110
2 vanille 4 chocolat 3fraise 0 framboise 1 pistache
choix de n élément parmis k catégorie

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Le nombre de bijections $f.A \to B$ avec $|A| = |B| = n$ est $n!$
$A = \{a_1, ..., a_n\}$
$B = \{b_1, ..., b_n\}$
Soit σ une permutation
$f\sigma.A \to B$

$$f_\sigma(a_i) = b_{\sigma(i)}$$

Soit f une bijection et $\sigma : [1, n] \to [1, n]$
$\sigma(i) = j$ avec $j(a_i) = b_j$
alors σ est une permutation

Soit F : permutations sur $[1, n] \to$ bijection de A dans B
$F(\sigma) = f\sigma$
le nombre d'injections $f.A \to B$ avec $|A| = ket\,|B| = n$ est le nombre de chemin d'arrangement $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Soit α un arrangement. $f_\alpha A \to B$
$\alpha\,[1, k]\,[1, n]$
$A = \{a_1, ..., a_k\}$
$B = \{b_1, ..., b_n\}$

$$f_\sigma(a_i) = b_{\sigma(i)}$$

f_σ est une injection
F arrangements de k élément parmis $n \to$ injection de A dans B
$F(\alpha) = f_\alpha$
alors F est une Bijection
Principe de Dirichlet des tiroir et des chaussettes
Pigeon Hole Principe
Soit $fA \to B$ avec $|B| < |A|$
alors il exite $x_1, x_2 \in A$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$
Principe généralisé
soit $fA \to B$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k\,|B| < |A|$
alors il existe $x_1, ..., x_{k+1} \in A$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_{k+1})$

Union généralisée

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

1.5 Coloration et planaritée

Soit G un graphe qui représente l'incompatibilité d'éléments entre eux (des process par exemple)

Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $F.V \rightarrow C$ (ensemble de couleurs) tel que $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour le colorier proprement

$$\chi(G) = min\left(|f(V)|\right)$$

B coloration propre de G

Proposition :
$\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ est biparti

1.5.1 Un algorithme glouton pour la colotation de graphe

Colorer les sommets au fur et a mesure en utilisant si possible une couleur déja utilisée

Proposition :
$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Proposition :
Si G contient une clique de taille K alors $\chi(G) \geq k$

Théorème : (Brook)
$\chi(G) \leq \Delta(G)$ à moins que G soit une clique ou un cycle de longueur impaire

planarité

un graphe est planaire si on peut le dessiner sans que deux arêtes se croisent un face d'une représentation planaire d'un graphe une aire maximal de cette représentation qui ne contient pas de sommets ni d'arêtes
Le graphe dual d'une représentation planaire a pour sommets les faces de cette

représentation et deux faces sont adjacentes si elles se touchent Soit F l'ensemble des faces de $G = (V, E)$ planaire

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Formule d'Euler

Proposition :

$$\chi\left(G_1 \times G_2\right) = max\left(\chi\left(G_1\right), \chi\left(G_2\right)\right)$$

1.6 couplages

On a un ensemble d'étudiants que nous souhaitons partitionner en groupe de 2, en respectant les affiniées de ceux-ci

Définition :
Un couplage est un ensemble d'arêtes qui ne se touchent pas

Un sommet est couvert par un couplage si il est extrémité d'une arête de ce couplage
Un couplage est parfait si tous les sommets sont couvert par celui-ci
On note $\nu(G)$ la taille du plus grand couplage de G

1.6.1 Transversal d'un groupe

Un transversal est un ensemble de sommets tel que toute arête de ce graphe soit incidente à au moins un sommet du transversal
On note $\tau(G)$ la taille du plus petit transversal de G

Proposition :
$\nu(G) \leq \tau(G)$

1.6.2 cas des graphes bipartis

Théorème : de König
Soit G un graphe biparti
$\nu(G) = \tau(G)$

Lemme :
Soit u et $c \in D$, $uv \in E$ alors il existe un chemin de longeur paire entre u et v
couplage max de $G - v = M_u$
couplage max de $G - u = M_v$

Donc si u et $v \in D$ cela forme un cycle de longueur impaire ce qui n'est pas possible dans un graphe biparti
Toute arêtes d'un graphe biparti a au moin une extémité qui appartient à C
Soit M un couplage maximum et $uv \in M$ on suppose sans perte de généralité que $u \in C$

Théorème : de Hall
Soit G un graphe biparti avec $V = A \cup B$ comme bipartition
alors il existe un couplage couvrant tous les sommets de A si et seulement si $\forall A' \subseteq A$
$A' \leq |N(A')|$ avec $N(A')$ l'ensemble des voisins de A'