

Théorie des Graphes

Lucas Moragues

1^{er} mars 2017

Sommaire

1	Graphe et combinatoire	2
1.0	Notion sur les graphes	2
1.1	Cycle chemin et connexité	3
1.1.1	Complement sur les chemins	5
1.2	Graphes minimalement connexes	6
1.3	Euler et Hamilton	8
1.4	Combinatoire / Dénombrement	9
1.4.1	Règles de base	9
	Règle OU (Union)	9
	Règle Et (Produit)	9
	Règle Puissance	9
1.4.2	Bijections et fonctions	9
	Cardinalité des parties d'un ensemble	9
	Règle division	9
	Nombre de fonctions	10
1.4.3	Permutation	10
	Arrangements	10
	Combinaison	10
	Choix sans ordre avec répétition	11
	Union généralisée	12
1.5	Coloration et planarité	12
1.5.1	Un algorithme glouton pour la coloration de graphe	12
	planarité	12

Chapitre 1

Graphe et combinatoire

1.0 Notion sur les graphes

Définition :

Un graphe simple est un couple $G = (V, E)$ avec V l'ensemble des sommets E l'ensemble des arêtes qui sont des paires de sommets distincts

$$E \subseteq \{\{u, v\} | u, v \in V; u \neq v\}$$

Vocabulaire :

u et v sont les extrémités de l'arête $\{u, v\}$

L'arête $e = \{u, v\}$ est incidente à u et v

Le degré d'un sommet v est le nombre d'arêtes incidente à v

Lemme : lemme des poignées de main

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple alors la somme des degrés des sommets de G est deux fois le nombre d'arêtes

$$\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$$

Le degré minimum est noté $\delta(G)$

$$\delta(G) = \min_{v \in V} \text{deg}(v)$$

Le degré maximum est noté $\Delta(G)$

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \text{deg}(v)$$

1.1 Cycle chemin et connexité

Soit $u, v \in V$ un chemin de u à v dans $G = (V, E)$ est une séquence d'arêtes telle que deux arêtes consécutives aient une extrémité commune et tel que la première arête soit incidente à u et la dernière incidente à v ($\{U_0, U_1\}, \{U_1, U_2\}, \dots, \{U_{k-1}, U_k\}$)

La distance entre deux sommets $u, v \in V$ est la longueur du plus court chemin u et v on notera cette valeur $dist(u, v)$

Le diamètre d'un graphe, noté $diam(G)$ est la distance entre ses deux sommets les plus éloignés

$$diam(G) = \max_{u, v \in V} dist(u, v)$$

Le rayon d'un graphe est défini par :

$$Rayon(G) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} dist(u, v)$$

Un angle est un chemin dans les deux extrémités sont identiques

Un graphe est connexe si il existe un chemin entre toute paire de sommet

Définition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $U \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets, le sous-graphe induit par U noté $G|_U$ (G restreint à U) est le graphe dont les sommets sont U et dont les arêtes sont celles de E dont les extrémités sont dans U

$$G|_U = (U, \{\{u, v\} | \{u, v\} \in E; u, v \in U\})$$

Un sous-graphe induit connexe maximal (pour son support) est une **composante** (connexe)

Une **clique** est un ensemble de sommets qui sont tous adjacents

Deux sommets sont adjacents s'ils sont incidents à une même arête. u et v adjacents si $\{u, v\} \in E$

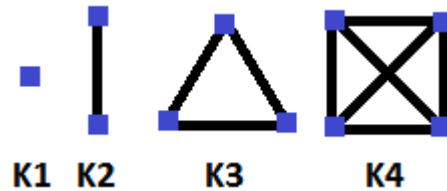


FIGURE 1.1 – On note K_n la clique avec n sommets

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si on peut partitionner V en deux ensemble A et B tel que toute arête de E aient une extrémité dans A et dans B

Lemme :

si $G = (V, E)$ est connexe, $|E| \geq |V| - 1$

Preuve :

Soit $v \in V, \forall w \in V \setminus \{v\}$ on note P_w un plus cours chemin de w a v et e_w la première arête de P_w

si $w \neq w'$ alors $e_w \neq e_{w'}$

On suppose que cette affirmation est fausse

Soit $w \neq w'$ telque $e_w = e_{w'}$

$$dist(w, v) = 1 + l' \leq l$$

$$dist(w', v)1 + l \leq l'$$

Lemme :

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $e \in E/G \setminus \{e\}$ est connexe si et seulement si e appartièn à un cycle dans G

Preuve :

\Rightarrow

$G \setminus \{e\}$ connexe. Soit $e = \{u, v\}$

il existe un chemin P de u à v dans $G - e$ Donc l'union de P et de e forme un cycle dans G qui passe par e

\Leftarrow

Soit C un cycle qui contient $e = uv$

il existe un chemin dans $G - e$ entre u et v

soit $u', v' \in V$ soit P un chemin de u' à v' dans G si $e \notin P$ alors u' et v' sont connecté dans $G - e$

Si $e \in P$ sans perte de généralité on suppose que u' est connecté a u et v' et connecté a v dans la relation de connexion est transitive donc u' est connecté à v' dans $G - e$

Donc $G - e$ est connexe

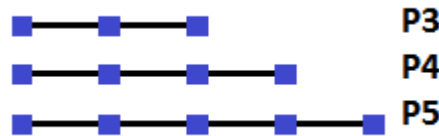


FIGURE 1.2 – On note P_n le chemin de n sommets

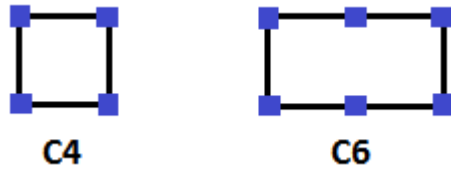


FIGURE 1.3 – On note C_n le cycle de n sommets

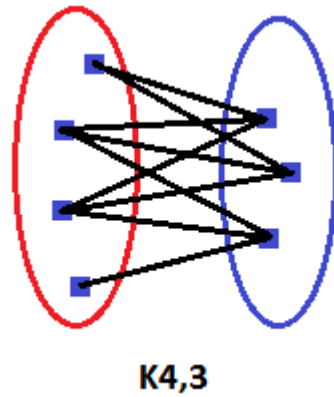


FIGURE 1.4 – On note $K_{n,m}$ le graphe biparti complet avec n sommets d'un coté et m de l'autre

1.1.1 Complement sur les chemins

on défini la relation \sim telle que $u \sim v$ si u et v sont connecté par un chemin , (même un chemin vide $\Rightarrow u \sim v$)

Proposition :

\sim est une relation transitive

Preuve :

soit $u \sim v$ et $v \sim w$ soit P un chemin de u à v , soit Q un chemin de v à w
 Soit s le premier sommet visité par P de u à v et Q de w à v
 on peut donc construire le chemin R avec les arêtes de P qui vont de u à s plus
 les arêtes de Q qui vont de s à w

Proposition :

\sim est une relation d'équivalence réflexive : $u \sim u$

transitive : $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$

symétrique : $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

Les classes d'équivalence de \sim sont les composantes (connexes) du graphe
On note $c(G)$ le nombre d composantes connexes d'un graphe G

1.2 Graphes minimalement connexes

Définition :

- un graphe $G = (V, E)$ est minimalement connexe si , G est connexe et pour tout $e \in E, G - e$ n'est plus connexe
- un arbre est un graphe minimalement connexe
- une forêt est un graphe sans cycle

Proposition :

Pour toute forêt $G = (V, E)$

$$|V| = |E| + c(G)$$

Preuve :

On va montrer cette propriété par induction sur le nombre d'arêtes

Soit G un graphe avec n sommets et $m = 0$ arêtes alors $c(G) = n \Rightarrow |V| = |E| + c(G)$

Soit G un graphe avec n sommets et $m \geq 1$ arêtes acyclique

Soit $u, v \in E$ u et v sont connectés dans G et déconnecté dans $G - e$ car G est acyclique

$$c(G) = c(G - e) - 1$$

par induction :

$$|V| = |E - e| + c(G - e)$$

$$|V| = |E| - 1 + c(G - e)$$

$$|V| = |E| + c(G)$$

Proposition :

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe il existe $E' \subseteq E$ tel que $G' = (V, E')$ est connexe acyclique

Si il y a un cycle dans G et e appartient à ce cycle alors $G - e$ est connexe

On peu appliquer cette propriété tant qu'il existe un cycle

Théorème :

Soit $G = (V, E)$, les proposition suivante sont équivalente

1. G est un arbre (minimalement connexe)
2. G est connexe et sans cycle
3. G est acyclique et $|E| = |V| - 1$
4. G est connexe et $|E| = |V| - 1$
5. G est maximal sans cycle
6. pour tout $u \neq v \in V, G$ contient un unique chemin de u à v

Preuve :

1) \Rightarrow 5) : Si on ajoute $u, v \notin EG$, il existe P un chemin de u à v $P + uv$ est donc un cycle G et est maximal sans cycle

5) \Rightarrow 2) : Par contradiction, si G n'est pas connexe, alors il existe u déconnecté de v $G + uv$ est acyclique donc G n'est pas maximal sans cycle

2) \Rightarrow 3) : $|V| = |E| + c(G)$ G est connexe $c(G) = 1 \Rightarrow |E| = |V| - 1$

3) \Rightarrow 4) : G acyclique $\Rightarrow |V| = |E| + c(G)$ et $|E| = |V| - 1 \Rightarrow c(G) = 1$

4) \Rightarrow 6) : Soit G connexe et $|E| = |V| - 1$ On suppose que u et v sont reliés par deux chemins. $G' = (V, E')$ un sous graphe acyclique connexe $|E'| = |V| - 1$ et $|E'| < |E|$ D'où contradiction Il reste un unique chemin de u à v

6) \Rightarrow 5) : G est connexe et $G - uv$ est déconnecté car l'arête uv est l'unique chemin de u à v

Proposition :

missed something here

Définition :

Un graphe k régulier est un graphe dont tous les sommets sont de degrés k

$$\sigma(G) = \Delta(G) = k$$

Caractérisation des graphes bipartis

Proposition :

Un graphe $G=(V,E)$ est biparti si et seulement si il n'a pas de cycle de longueur impaire

G sans cycle impair connexe $\Rightarrow G$ biparti

1.3 Euler et Hamilton

Une chaîne est un chemin qui peut passer plusieurs fois par un même sommet mais une seule fois par arête

Une chaîne fermée ou circuit est une chaîne dont les deux extrémités sont identiques

Une chaîne Eulerienne est une chaîne qui passe exactement une fois par chaque arête. Un circuit Eulerien est un circuit qui passe exactement une fois par chaque arête. un graphe est Eulerien si il a un circuit Eulerien

Théorème :

Soit $G=(V,E)$ connexe avec au moins 2 sommets, les 3 propriétés sont équivalentes

1. G est Eulerien
2. $\deg(v)$ est pair pour tout $v \in V$
3. il y a un ensemble de cycles C tel que toute arête soit exactement dans un de ces cycles

Preuve :

$i) \Rightarrow ii)$: soit W un circuit Eulerien soit $v \in V$ chaque occurrence de v dans W utilise deux arêtes incidentes à v . v est donc de degré pair

$ii) \Rightarrow iii)$: soit G tel que tous ses sommets soient de degré pair. On choisit un sommet v et on construit un chemin maximal à partir de v , P . Le dernier sommet de P est de degré ≥ 2 et donc il est adjacent à un sommet w de P . La partie de P de w à v avec l'arête wv forme un cycle C . Soit $G - C$ le graphe G auquel on a enlevé les arêtes de C le degré des sommets de $G - C$ reste pair par induction on peut décomposer $G - C$ en cycle

$iii) \Rightarrow i)$: soit T un circuit maximal constitué d'un ensemble de cycles C_1, \dots, C_n si il existe un autre cycle de C alors comme G est connexe il existe un cycle de C qui n'est pas dans T mais qui partage un sommet v avec T . On note C ce cycle

$C(vu_1, \dots, u_kv), T(vw_1, \dots, w_kv)$ donc $(vu_1, \dots, u_kv, vw_1, \dots, w_kv)$ est un circuit) ce qui contredit la maximalité de T , T contient donc tous les cycles de C et ainsi toutes les arêtes de G . G est Eulerien

1.4 Combinatoire / Dénombrement

1.4.1 Règles de base

Règle OU (Union)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Règle Et (Produit)

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Règle Puissance

$$|A^k| = |A|^k$$

qui correspond à k choix indépendant sur le même ensemble

1.4.2 Bijections et fonctions

Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection alors $|A| = |B|$

Cardinalité des parties d'un ensemble

Soit $S = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$, on note $P(S)$ l'ensemble des parties de S

$$P(S) = \{U \mid U \subseteq S\}$$

$$X : P(S) \rightarrow \{0, 1\}^k$$

$$X(U) = (x_1, x_2, \dots, x_k) \forall U \subseteq S$$

avec $x_i = 1$ si $e_i \in U$ et $x_i = 0$ sinon

X est une bijection

Règle division

Soit $f : A \rightarrow B$ et $k \in \mathbb{N}$
tel que $\forall y \in B$

$$|\{x \in A \mid f(x) = y\}| = k$$

alors $|A| = k * |B|$

Nombre de fonctions

$$F(A, B) = \{j : A \rightarrow B\}$$

int valeur[52] Aa_1, \dots, a_2

$$C : F(A, B)B^{|A|}$$

$$C(j) = (j(a_1), \dots, j(a_k))$$

C est une bijection

$$|F(A, B)| = |B^{|A|}|$$

$$|F(A, B)| = |B|^{|A|}$$

1.4.3 Permutation

Une permutation est une bijection $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

On peut la représenter comme un tableau contenant les entiers de 1 à n tel que

$$\text{tableau}[i] = \sigma(i)$$

le nombre de permutation différente sur n éléments est $n!$

Arrangements

Un arrangement consiste à choisir k éléments ordonnés parmi n

$$f(k) : \sigma_n \rightarrow A_n^k$$

$$f(k) = (\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(n)}) = (\sigma_{(1)}, \dots, \sigma_{(k)})$$

$$\forall y \in A_n^k |f^{-1}(y)| = (n - k)!$$

$$|\sigma_n| = (n - k)! \times |A_n^k|$$

$$|A_n^k| = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Combinaison

on note $\binom{n}{k}$ le nombre de choix de k éléments parmi n

$$f : A_n^k$$

$$(a_1, \dots, a_k) \rightarrow \{a_1, \dots, a_k\}$$

$$\binom{n}{k} \times k! = |A_n^k|$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n - k)!}$$

Choix sans ordre avec répétition

parfums de macaron : vanille , chocolat , fraise , framboise , pistache
00100001000110
2 vanille 4 chocolat 3 fraise 0 framboise 1 pistache
choix de n élément parmi k catégorie

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Le nombre de bijections $f: A \rightarrow B$ avec $|A| = |B| = n$ est $n!$
 $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$
Soit σ une permutation
 $f \circ \sigma: A \rightarrow B$

$$f_{\sigma}(a_i) = b_{\sigma(i)}$$

Soit f une bijection et $\sigma: [1, n] \rightarrow [1, n]$
 $\sigma(i) = j$ avec $j(a_i) = b_j$
alors σ est une permutation

Soit F : permutations sur $[1, n] \rightarrow$ bijection de A dans B
 $F(\sigma) = f \circ \sigma$
le nombre d'injections $f: A \rightarrow B$ avec $|A| = k$ et $|B| = n$ est le nombre de chemin d'arrangement $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Soit α un arrangement. $f_{\alpha}: A \rightarrow B$
 $\alpha: [1, k] \rightarrow [1, n]$
 $A = \{a_1, \dots, a_k\}$
 $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$f_{\sigma}(a_i) = b_{\sigma(i)}$$

f_{σ} est une injection
 F arrangements de k élément parmi $n \rightarrow$ injection de A dans B
 $F(\alpha) = f_{\alpha}$
alors F est une Bijection
Principe de Dirichlet des tiroir et des chaussettes
Pigeon Hole Principe
Soit $f: A \rightarrow B$ avec $|B| < |A|$
alors il existe $x_1, x_2 \in A$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$
Principe généralisé
soit $f: A \rightarrow B$ et $k \in \mathbb{N}$ avec $k|B| < |A|$
alors il existe $x_1, \dots, x_{k+1} \in A$ tel que $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{k+1})$

Union généralisée

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

1.5 Coloration et planarité

Soit G un graphe qui représente l'incompatibilité d'éléments entre eux (des process par exemple)

Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $f: V \rightarrow C$ (ensemble de couleurs) tel que $uv \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour le colorier proprement

$$\chi(G) = \min(|f(V)|)$$

B coloration propre de G

Proposition :

$\chi(G) \leq 2 \Leftrightarrow G$ est biparti

1.5.1 Un algorithme glouton pour la coloration de graphe

Colorer les sommets au fur et à mesure en utilisant si possible une couleur déjà utilisée

Proposition :

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Proposition :

Si G contient une clique de taille K alors $\chi(G) \geq K$

Théorème : (Brook)

$\chi(G) \leq \Delta(G)$ à moins que G soit une clique ou un cycle de longueur impaire

planarité

un graphe est planaire si on peut le dessiner sans que deux arêtes se croisent
une face d'une représentation planaire d'un graphe une aire maximal de cette représentation qui ne contient pas de sommets ni d'arêtes

Le graphe dual d'une représentation planaire a pour sommets les faces de cette

représentation et deux faces sont adjacentes si elles se touchent Soit F l'ensemble des faces de $G = (V, E)$ planaire

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Formule d'Euler

Proposition :

$$\chi(G_1 \times G_2) = \max(\chi(G_1), \chi(G_2))$$