Derivative of Binary Cross Entropy Loss

DS School

https://dsschool.co.kr

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다음과 같은 Loss Function이 주어졌을 때
우리는 이 함수를 편미분해서 Gradient Descent에 활용해야 한다

m - The Number of data

$x^{(i)}$ - i'th feature of data

$y^{(i)}$ - i'th label of data

$w^{(i)}$ - i'th weight for $x^{(i)}$

$h(x)$ - Hypothesis Function

$$L(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\Big(- y^{(i)}\log\big(h(x^{(i)})\big) - (1 - y^{(i)})\log\big(1 - h(x^{(i)})\big)\Big)$$

$$z(x) = \sum_{i=0}^{m}(x^{(i)} \times w^{(i)} + b)$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다음과 같은 Loss Function이 주어졌을 때
우리는 이 함수를 편미분해서 Gradient Descent에 활용해야 한다

m - The Number of data

$x^{(i)}$ - i'th feature of data

$y^{(i)}$ - i'th label of data

$w^{(i)}$ - i'th weight for $x^{(i)}$

$h(x)$ - Hypothesis Function

$$L(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\Big(- y^{(i)} \log\big(h(x^{(i)})\big) - (1 - y^{(i)}) \log\big(1 - h(x^{(i)})\big)\Big)$$

$$z(x) = \sum_{i=0}^{m}(x^{(i)} \times w^{(i)} + b)$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w^{(i)}} = ?$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

먼저 우리가 Loss Function의 편미분을 이해하는데 중요하지 않은 부분을 제거한다
(하지만 실제 코드에는 들어가야 한다)

$$L(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}\Big(-y^{(i)}\log\big(h(x^{(i)})\big) - (1-y^{(i)})\log\big(1-h(x^{(i)})\big)\Big)$$

Before

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

먼저 우리가 Loss Function의 편미분을 유도하는데 중요하지 않은 부분을 제거한다
(하지만 실제 코드에는 들어가야 한다)

이 부분은 평균(mean)을 의미하는데,
편미분을 이해하는데 하는데 있어서 중요하지 않으므로 일단은 무시한다

$$L(x) = \boxed{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}}\left(-y^{(i)}\log\left(h(x^{(i)})\right) - (1-y^{(i)})\log\left(1-h(x^{(i)})\right)\right)$$

Before

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

먼저 우리가 Loss Function의 편미분을 유도하는데 중요하지 않은 부분을 제거한다
(하지만 실제 코드에는 들어가야 한다)

이 부분은 평균(mean)을 의미하는데,
편미분을 이해하는데 하는데 있어서 중요하지 않으므로 일단은 무시한다

$$L(x) = \boxed{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}}\left(-y^{(i)}\log\left(h(x^{(i)})\right) - (1-y^{(i)})\log\left(1-h(x^{(i)})\right)\right)$$

Before

$$L(x) = -y\log h(x) - (1-y)\log\left(1-h(x)\right)$$

After

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

편미분 기호를 괄호 안으로 집어넣는다
여기까지는 어렵지 않다

$$L(x) = -y \log h(x) - (1-y)\log\left(1 - h(x)\right)$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = ?$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

편미분 기호를 괄호 안으로 집어넣는다
여기까지는 어렵지 않다

$$L(x) = -y \log h(x) - (1-y)\log\big(1-h(x)\big)$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\Big(-y\log h(x) - (1-y)\log\big(1-h(x)\big)\Big)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

편미분 기호를 괄호 안으로 집어넣는다
여기까지는 어렵지 않다

$$L(x) = -y \log h(x) - (1 - y) \log \left(1 - h(x)\right)$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(- y \log h(x) - (1 - y) \log \left(1 - h(x)\right)\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial w} y \log h(x) - \frac{\partial}{\partial w}(1 - y) \log \left(1 - h(x)\right)$$

편미분 기호는 괄호 안으로 들어갈 수 있다.

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

편미분 기호를 괄호 안으로 집어넣는다
여기까지는 어렵지 않다

$$L(x) = -y \log h(x) - (1-y) \log \left(1 - h(x)\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(x)}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}\left(-y \log h(x) - (1-y)\log\left(1-h(x)\right)\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial w} y \log h(x) - \frac{\partial}{\partial w}(1-y)\log\left(1-h(x)\right) \\ &= -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log\left(1-h(x)\right) \end{aligned}$$

편미분 기호는 괄호 안으로 들어갈 수 있다.

y는 사실상 상수이므로
편미분 기호 밖으로 뺄 수 있다.

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x))$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

여기서 로그 함수를 편미분 해야한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = -y\boxed{\frac{\partial}{\partial w}\log h(x)} - (1-y)\boxed{\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x))}$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

여기서 로그 함수를 편미분 해야한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = -y\boxed{\frac{\partial}{\partial w}\log h(x)} - (1-y)\boxed{\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x))}$$

참고: 로그의 미분

$$f(x) = \log(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\left(h(x)\right)$$

$$f'(x) = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

참고: 로그·합성의 미분

$$f(x) = \log\left(h(x)\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)} \times h'(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x))$$

$$= -y\boxed{\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x)} - (1-y)\boxed{\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}\big(-h(x)\big)}$$

1) 로그 함수의 미분, 2) 합성 함수의 미분을 응용하여 편미분한다

참고: 로그의 미분

$$f(x) = \log(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

참고: 로그·합성의 미분

$$f(x) = \log\big(h(x)\big)$$

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)} \times h'(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x))$$

$$= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) - (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}\big(-h(x)\big)$$

$$= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) \boxed{+} (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}\boxed{h(x)}$$

편의를 위하여 -h(x)를 h(x)로 바꾼 뒤 앞에 있는 마이너스를 플러스로 바꾼다
이렇게 하면 h(x)의 편미분을 묶어줄 수 있다

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(x)}{\partial w} &= -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x)) \\
&= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) - (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}\Big(-h(x)\Big) \\
&= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) \\
&= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)
\end{aligned}
$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

log의 미분과 합성함수의 미분을 활용하면
h(x)를 편미분하는 것을 제외한 나머지는 전부 해결할 수 있다

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(x)}{\partial w} &= -y\frac{\partial}{\partial w}\log h(x) - (1-y)\frac{\partial}{\partial w}\log(1-h(x)) \\ &= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) - (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}\big(-h(x)\big) \\ &= -y\frac{1}{h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\frac{\partial}{\partial w}h(x) \\ &= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\boxed{\frac{\partial}{\partial w}h(x)}\end{aligned}$$

이 부분만 편미분을 해주면 끝난다

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

이제 h(x)를 편미분해야 한다

앞서 설명한대로 h(x)는 z(x)에 sigmoid를 씌운것이기 때문에, 우리는 sigmoid를 편미분 하는 법을 알아야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \frac{\partial}{\partial w} h(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

이제 h(x)를 편미분해야 한다

앞서 설명한대로 h(x)는 z(x)에 sigmoid를 씌운것이기 때문에, 우리는 sigmoid를 편미분 하는 법을 알아야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \boxed{\frac{\partial}{\partial w} h(x)}$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

이제 h(x)를 편미분해야 한다
앞서 설명한대로 h(x)는 z(x)에 sigmoid를 씌운것이기 때문에, 우리는 sigmoid를 편미분 하는 법을 알아야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \boxed{\frac{\partial}{\partial w}h(x)}$$

$$z(x) = x \times w + b$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

이제 h(x)를 편미분해야 한다

앞서 설명한대로 h(x)는 z(x)에 sigmoid를 씌운것이기 때문에, 우리는 sigmoid를 편미분 하는 법을 알아야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \boxed{\frac{\partial}{\partial w}h(x)}$$

$$z(x) = x \times w + b$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} sigmoid\big(z(x)\big)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

이제 h(x)를 편미분해야 한다

앞서 설명한대로 h(x)는 z(x)에 sigmoid를 씌운것이기 때문에, 우리는 sigmoid를 편미분 하는 법을 알아야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \boxed{\frac{\partial}{\partial w} h(x)}$$

$$z(x) = x \times w + b$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

?

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} sigmoid\big(z(x)\big)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

sigmoid를 미분(편미분) 하기 위해서는
몫의 미분법(quotient rule)과 지수함수(e)의 미분을 활용해야 한다

$$sigmoid'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

sigmoid를 미분(편미분) 하기 위해서는
몫의 미분법(quotient rule)과 지수함수(e)의 미분을 활용해야 한다

$$sigmoid'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

참고: 몫의 미분법

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)h(x)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{h(x)^2}$$

응용:

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-h'(x)}{h(x)^2}$$

참고: 지수함수의 미분

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

응용:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^x$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

sigmoid를 미분(편미분) 하기 위해서는
몫의 미분법(quotient rule)과 지수함수(e)의 미분을 활용해야 한다

$$sigmoid'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(1+e^{-x})}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

몫의 미분법의 응용을 활용한다

참고: 몫의 미분법

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)h(x)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{h(x)^2}$$

응용:

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-h'(x)}{h(x)^2}$$

참고: 지수함수의 미분

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

응용:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^x$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

sigmoid를 미분(편미분) 하기 위해서는
몫의 미분법(quotient rule)과 지수함수(e)의 미분을 활용해야 한다

$$sigmoid'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(1+e^{-x})}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

몫의 미분법의 응용을 활용한다

$$= \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

지수함수의 미분을 활용하여
공식을 간결하게 만들 수 있다

참고: 몫의 미분법

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)h(x)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)h'(x) - g'(x)h(x)}{h(x)^2}$$

응용:

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-h'(x)}{h(x)^2}$$

참고: 지수함수의 미분

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

응용:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^x$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다

간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2}$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\boxed{= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}}$$

앞에다가 +1, 뒤에다가 -1을 해준다

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\boxed{= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}}$$

이렇게 하면 간단하게
공식을 두 개로 나눌 수 있다.

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2}$$

좀 더 간결하게 정리한 버전

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2}$$

좀 더 간결하게 정리한 버전

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$sigmoid'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 **sigmoid**의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$sigmoid'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$= sigmoid(x) - \left(sigmoid(x)\right)^2$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 sigmoid의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$sigmoid'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$= sigmoid(x) - \left(sigmoid(x)\right)^2$$

$$= sigmoid(x)\left(1 - sigmoid(x)\right)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

미분이 끝난 다음부터는 간결하다
간단한 팁을 통해 **sigmoid**의 미분 공식을 간결하게 만들 수 있다

$$sigmoid'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}-1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1+e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$sigmoid'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

$$= sigmoid(x) - \left(sigmoid(x)\right)^2$$

$$= sigmoid(x)\left(1 - sigmoid(x)\right)$$

결론

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\left(1 - sigmoid(x)\right)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자

우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자
우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \frac{\partial}{\partial w} h(x)$$

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\big(1 - sigmoid(x)\big)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자

우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)$$

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\left(1 - sigmoid(x)\right)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\left(h(x)\right)$$
$$f'(x) = g'\left(h(x)\right) \cdot h'(x)$$

그러므로

$$h(x) = sigmoid\left(z(x)\right)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = sigmoid\left(z(x)\right)\left(1 - sigmoid\left(z(x)\right)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= h(x)\left(1 - h(x)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자

우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \frac{\partial}{\partial w} h(x)$$

$$= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)} \right) \boxed{h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w} z(x)}$$

sigmoid의 미분 + 합성함수의 미분을 사용한다

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\big(1 - sigmoid(x)\big)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = sigmoid\big(z(x)\big)\Big(1 - sigmoid\big(z(x)\big)\Big)\frac{\partial}{\partial w} z(x)$$

$$= h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w} z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자
우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)$$

$$= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \boxed{\Big(-y\big(1-h(x)\big) + (1-y)h(x)\Big)}\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

공식 중간에 있는 h(x)와 1 - h(x)를 정리할 수 있다

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\big(1 - sigmoid(x)\big)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big)\cdot h'(x)$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = sigmoid\big(z(x)\big)\Big(1 - sigmoid\big(z(x)\big)\Big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자
우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)$$

$$= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \Big(-y\big(1-h(x)\big) + (1-y)h(x)\Big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$\boxed{= \big(-y + y\cdot h(x) + h(x) - y\cdot h(x)\big)}\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

z(x)의 편미분 앞에 있는 공식의 괄호를 전부 풀어주면

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\big(1 - sigmoid(x)\big)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\big(h(x)\big)$$
$$f'(x) = g'\big(h(x)\big)\cdot h'(x)$$

$$h(x) = sigmoid\big(z(x)\big)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = sigmoid\big(z(x)\big)\Big(1 - sigmoid\big(z(x)\big)\Big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= h(x)\big(1-h(x)\big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

다시 돌아가서 h(x)를 편미분해보자
우리는 z(x)가 아니라 x로 편미분 하기 때문에, 여기서도 합성함수의 미분을 사용해야 한다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)\frac{\partial}{\partial w}h(x)$$

$$= \left(-y\frac{1}{h(x)} + (1-y)\frac{1}{1-h(x)}\right)h(x)\left(1-h(x)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \left(-y\left(1-h(x)\right) + (1-y)h(x)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \left(-y + y\cdot h(x) + h(x) - y\cdot h(x)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \boxed{\left(h(x)-y\right)}\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

매우 간결하게 공식을 정리할 수 있다

참고: sigmoid의 미분

$$sigmoid'(x) = sigmoid(x)\left(1 - sigmoid(x)\right)$$

참고: 합성함수의 미분

$$f(x) = g\left(h(x)\right)$$

$$f'(x) = g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x)$$

$$h(x) = sigmoid\left(z(x)\right)$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial w} = sigmoid\left(z(x)\right)\left(1 - sigmoid\left(z(x)\right)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= h(x)\left(1-h(x)\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

마지막 z(x)의 편미분만 풀어주면
최종적으로 binary cross entropy loss의 편미분 공식이 만들어진다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(h(x) - y\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

마지막 z(x)의 편미분만 풀어주면
최종적으로 binary cross entropy loss의 편미분 공식이 만들어진다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \big(h(x) - y\big)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \big(h(x) - y\big)\boxed{\frac{\partial}{\partial w}(x \times w + b)}$$

w로 편미분 하기 때문에, w를 제외한 나머지는 상수로 가정한다.

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

마지막 z(x)의 편미분만 풀어주면
최종적으로 binary cross entropy loss의 편미분 공식이 만들어진다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(h(x) - y\right)\frac{\partial}{\partial w}z(x)$$

$$= \left(h(x) - y\right)\frac{\partial}{\partial w}(x \times w + b)$$

$$= \left(h(x) - y\right)x$$

Derivative of Binary Cross Entropy Loss

마지막 z(x)의 편미분만 풀어주면
최종적으로 binary cross entropy loss의 편미분 공식이 만들어진다

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \left(h(x) - y\right) \frac{\partial}{\partial w} z(x)$$

$$= \left(h(x) - y\right) \frac{\partial}{\partial w} (x \times w + b)$$

$$= \left(h(x) - y\right) x$$

최종 결과

$$\frac{\partial L(x)}{\partial w} = \sum_{i=0}^{m} \left(h(x^{(i)}) - y^{(i)}\right) x^{(i)}$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial b} = \sum_{i=0}^{m} \left(h(x^{(i)}) - y^{(i)}\right)$$