4.10.2022

Занятие № 5. Элементарные матрицы. Обратные матрицы и метод Гаусса-Жордана вычисления обратной матрицы

5.1. Для данных матриц A и B найдите элементы b_{32} и b_{23}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = P_{23} \cdot A_{34}(-2) \cdot M_3(-2) \cdot A_{42}(1) \cdot P_{14} \cdot A.$$

5.2. Представьте матрицы

a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

в виде произведения элементарных матриц $P_{ij}, M_i(\alpha), A_{ji}(\alpha)$.

Ответ: a) $A = M_1(8) \cdot \mathbb{A}_{21}(11) \cdot M_2\left(-\frac{25}{4}\right) \cdot \mathbb{A}_{12}\left(\frac{3}{4}\right)$

$$\left[\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{25}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

b) $A =??$.

5.3. a) Найдите обратную матрицу A^{-1} для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

б) Пусть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найдите $(AB)^{-1}$.

5.4. Пусть

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите $\boldsymbol{x}$ из уравнения $C^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

5.5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Покажите, что $A^3 = O_3$; б) Используя а), найдите $(I_3 + A)^{-1}$.

5.6. Найдите матрицу A, если

$$(A^T - 2I_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.7. Используя метод элементарных преобразований (метод Гаусса-Жордана), найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & 9 \\ 3 & -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

5.8. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^3 = A$. Покажите, что матрица $(I_n - 2A^2)$ – обратима и найдите $(I_n - 2A^2)^{-1}$.

5.9. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}.$$

найдите обратимую матрицу U такую, что $UA = \mathrm{rref}(A)$

5.10.* Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ таковы, что $A + B = I_n$ $\quad A^2 + B^2 = O_n$. Покажите, что A и B обратимы, причем $(A^{-1} + B^{-1})^n = 2^n I_n$.

5.11.* Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^{-1} = I_n - A$. Покажите, что $A^6 - I_n = O_n$.

5.12. Матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

представьте в виде произведения двух матриц, $A = LU$, где L – нижняя треугольная матрица, а U – верхняя треугольная матрица, (LU – факторизация (Lower–Upper (LU) decomposition)).