Chap. 1 Ensembles et applications

1.1 Ensembles

Définition 1.1. Si $E = \{a, b, \ldots\}$ est l'ensemble dont les éléments sont $a, b, \ldots$, on dit que E est défini en extension. Si $E = \{x, P(x)\}$ est l'ensemble des x qui satisfont la proposition P, on dit que E est défini en compréhension.

Exemple 1.1.

(I) Ensemble défini en extension:

$$E = \left\{0, 1, 1 + \sqrt{2}, 3, 7, 15\right\}$$

(II) Ensemble défini en compréhension:

$$F = \left\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un multiple de } 3\right\}$$

Définition 1.2.

1. On note $\emptyset$ l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
2. Un ensemble à un élément est un singleton.
3. Un ensemble à deux éléments (distincts) est une paire.
4. Le cardinal d'un ensemble E noté $\text{card}(E)$ ou $\#(E)$ est le nombre (fini ou infini) d'éléments de E.

Définition 1.3 (Inclusion)**.** On dit que l'ensemble F est contenu, est une partie, est un sous ensemble ou est inclus dans E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est élément de E. Sinon, on écrit $F \not\subset E$. L'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.2.

(I) A sous ensemble de E:

$$E = \left\{0, 1, 1+\sqrt{2}, 3, 7, 15\right\}, \quad A = \left\{0, 1, 1+\sqrt{2}\right\}$$

(II) B sous ensemble de F:

$$F = \left\{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un multiple de } 3\right\}, \quad B = \left\{0, 3, 6, 18, 21, 99, 102\right\}$$

Remarque 1.1. On a toujours

1. $E \subset E$ (réflexivité).
2. Si $F \subset E$ et $G \subset F$ alors $G \subset E$ (transitivité).
3. $(E = F) \Leftrightarrow [(E \subset F)$ et $(F \subset E)]$ (antisymétrie)

Définition 1.4 (Complémentaire)**.** Si $F \subset E$, le complémentaire de F dans E est l'ensemble C_E^F, aussi noté F^c (lorsque le rôle de E est clair), défini par

$$F^c = \{x \in E, x \notin F\} \tag{2.1}$$

Proposition 1.1. On a toujours

1. $(F^c)^c = F$.
2. $F \subset G \Leftrightarrow G^c \subset F^c$

Preuve.

1. évident.
2. Supposons que $F \subset G$.

Soit $x \in G^c \Rightarrow x \notin G \Rightarrow x \notin F (\text{car } F \subset G) \Rightarrow x \in F^c$. Alors $G^c \subset F^c$. □

Définition 1.5 (Intersection)**.** L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cap F$ des éléments x qui sont à la fois dans E et dans F. On dit que deux ensembles E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ et } x \in F\} \tag{2.2}$$

Proposition 1.2. On a toujours

1. $E \cap F = F \cap E$ (commutativité).
2. $E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$ (associativité).

3. $(E \subset F \cap G) \Leftrightarrow [(E \subset F) \text{ et } (E \subset G)]$

Définition 1.6 (Union). L'union de de deux ensembles E et F est l'ensemble $E \cup F$ des éléments x qui sont dans E, dans F ou dans les deux à la fois.

$$E \cap F = \{x, x \in E \text{ ou } x \in F\}$$

Proposition 1.3. On a toujours

1. $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.
2. $(F \cup G)^c = F^c \cap G^c$.

Preuve.

1. Soit $x \in (F \cap G)^c \Leftrightarrow x \notin (F \cap G) \Leftrightarrow x \notin F$ ou $x \notin G \Leftrightarrow x \in F^c$ ou $x \in G^c \Leftrightarrow x \in F^c \cup G^c$. Alors $(F \cap G)^c = F^c \cup G^c$.
2. Similaire que (1).

□

Définition 1.7 (Différence). Si E et F sont deux ensembles, la différence $E \backslash F$ entre E et F est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F. La différence symétrique $E \triangle F$ de E et F est

$$E \triangle F = (E \backslash F) \cup (F \backslash E) \tag{2.4}$$

Définition 1.8 (Partition d'un ensemble). Une partition $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ d'un ensemble E est un ensemble de parties de E telles que

1. $\forall i, A_i \neq \emptyset$,
2. $\forall i, j$ tel que $i \neq j$ on $a, A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$

Définition 1.9 (Produit cartésien). Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\} \tag{2.5}$$

La diagonale d'un ensemble E est

$$\triangle = \{(x, x), x \in E\} \subset E \times E \tag{2.6}$$

1.2 Relations

Définition 1.10 (Relation)**.** On appelle relation d'un ensemble A vers un ensemble B toute correspondance $\mathcal{R}$, qui lie d'une certaine façon des éléments de A à des éléments de B.

1. On dit que A est l'ensemble de départ et B est l'ensemble d'arrivée de la relation $\mathcal{R}$.
2. Si x est lié à y par la relation $\mathcal{R}$, on dit que x est en relation $\mathcal{R}$ avec y; ou (x, y) vérifiée la relation $\mathcal{R}$ et on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$, sinon on écrit : $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$.
3. Une relation de A vers A est dite relation sur A.

Exemple 1.3.

1. Soit E l'ensemble des formateurs du pépartement de mathématiques du CRMEF BK, et F, l'ensemble des étudiants stagiaires du CRMEF BK. On détermine une relation $\mathcal{R}$ allant de E vers F en posant que
$$\forall (x, y) \in E \times F, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ est le formateur de } y$$
2. Autres exemples de relations humaines: ≪ être le frère de ≫, ≪ avoir le même age que ≫.
3. Soit $A = B = \mathbb{Z}$, On détermine une relation $\mathcal{R}$ sur de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ en posant que
$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 2 \mid (x - y)$$
Ainsi, on a que $1\mathcal{R}7$, puisque 2 divise $-6 = (1 - 7)$. Notons que $18\mathcal{R}7$, puisque 2 ne divise pas $11 = (18 - 7)$.
4. La correspondance $\mathcal{R}'$ qui lie les chiffres aux voyelles utilisées pour écrire le chiffre en toutes lettres est une relation de l'ensemble
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vers l'ensemble $\{a, e, i, 0, u, y\}$.

On a par exemple $0\mathcal{R}'e, 0\mathcal{R}'0, 0\mathcal{R}'a, 9,'\mathcal{R}'y, 6\mathcal{R}'i$ et $1\mathcal{R}'u$

Définition 1.11 (Graphe d'une relation)**.** Soit $\mathcal{R}$ une relation d'un ensemble A vers un ensemble B. Le graphe de $\mathcal{R}$ (noté $G_{\mathcal{R}}$) est l'ensemble défini par :
$$G_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in A \times B / x\mathcal{R}y\} \tag{1.1}$$

Exemple 1.4.

1. Reprenons la relation $\mathcal{R}$ de l'exemple 3 précédent, alors : $(1, 7) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(18, 7) \notin G_{\mathcal{R}}$.
2. Si on reprend la relation $\mathcal{R}'$ donnée par l'exemple ??, on aura : $G_{\mathcal{R}'} = \{(0, e), (0, o), (1, u), (2, e), ($
$$(5, i), (6, i), (7, e), (8, u), (8, i), (9, e), (9, u)\}$$

Remarque 1.2. Étant donné deux relations $\mathcal{R} = (A, B, R)$ et $\mathcal{R}' = (A', B', R')$, l'affirmation ≪ les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales≫ signifie que $A = A', B = B'$ et $R = R'$: même source, même but et même graphe.

1.2.1. Représentation d'une relation binaire

On s'intéresse à nouveau à des relations binaires sur deux ensembles A et B donnés.

1. Représentation ensembliste : On liste tout simplement les couples satisfaisant la relation.
2. Représentation à l'aide d'un diagramme sagittal : Schéma avec deux courbes pour des A et B quelconques (une première courbe pour la source A, et l'autre pour le but B). Lorsque $A = B$, on peut soit conserver le schéma à deux courbes, soit tout ramener dans une seule courbe représentant A. Cette dernière vision est souvent fort instructive.
3. Représentation a l'aide d'un graphique cartésien :Particulièrement commode pour des relations binaires sur $\mathbb{R}$ (ou encore sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$).
4. Représentation a l'aide d'une formule : Par exemple la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $x\mathcal{R}y$ ssi $x^2 = y^2$.

1.2.2. Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble

On s'intéresse maintenant à une relation binaire dont la source coïncide avec le but. On se retrouve donc avec une relation sur un ensemble A donné. Nous nous intéressons ici aux principales propriétés que peut posséder ou non une telle relation binaire.

Définition 1.12. Soit $\mathcal{R}$, une relation (binaire) sur un ensemble A. On dit que $\mathcal{R}$ est

1. réflexive lorsque pour tout $a \in A$, on a $a\mathcal{R}a$;
2. symétrique lorsque pour tout couple $(a, b) \in A^2, a\mathcal{R}b$ impliquent $b\mathcal{R}a$;
3. transitive lorsque pour tout trio d'éléments $a, b, c \in A, (a\mathrm{R}b$ et $b\mathrm{R}c)$ impliquent (a R c);
4. antisymétrique lorsque pour tout $(a, b) \in A^2$ si $(a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a)$, alors $(a = b)$.

Exemple 1.5.

1. Soit $A = B = \mathbb{Z}$ et $R = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid (a - b)\right\}$. On a alors que $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique, transitive, mais pas antisymétrique.
2. Etant donnée l'univers $\mathcal{U}$, la relation d'inclusion, qui relie deux parties de $\mathcal{U}(X \subseteq Y)$, est elle aussi réflexive, transitive et antisymétrique, mais pas symétrique.
3. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ divise y
   (a) Soit $x \in \mathbb{Z}$, on a x divise x (même 0 divise 0). donc $\forall x \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}x$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.
   (b) Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow (x$ divise $y) \nRightarrow ($ y divise $x)$ par exemple 1 divise 4 et 4 ne divise pas 1 alors $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
   (c) Soit $x, y \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}x) \Rightarrow ((x$ divise $y)$ et $(y$ divise $x)) \nRightarrow (x = y)$. Par exemple (1 divise -1) et (-1 divise 1) et $1 \neq -1$; alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique.

(d) Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$, on a $(x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \Rightarrow ((x$ divise $y)$ et $(y$ divise $z)) \Rightarrow (x$ divise $z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$. Alors $\mathcal{R}$ est transitive.

1.2.3. Relation d'équivalence

Définition 1.13. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A.

1. $\mathcal{R}$ est dite relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.
2. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, alors
   (a) Pour chaque $a \in A$ l'ensemble $\dot{a} = \{x \in A/x\mathcal{R}a\}$ est appelé classe d'équivalence de a modulo $\mathcal{R}$.
   (b) L'ensemble $A_{/\mathcal{R}} = \{\dot{a}/a \in A\}$ est appelé l'ensemble quotient de A par $\mathcal{R}$.

1.2.4. Relation d'ordre

Définition 1.14. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur un ensemble A.

1. $\mathcal{R}$ est dite relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
2. (a) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, on écrit souvent $\leq_{\mathcal{R}}$ au lieu de $\mathcal{R}$.
   (a) $\leq_{\mathcal{R}}$ est dite relation d'ordre total, si
   $$\forall x, y \in A : (x \leq_{\mathcal{R}} y) \vee (y \leq_{\mathcal{R}} x)$$
   (b) $\leq_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre partiel, si
   $$\exists x, y \in A : ((x \leq_{\mathcal{R}} y) \wedge (y \leq_{\mathcal{R}} x))$$

Remarque 1.3. Deux éléments x et y sont dits comparables par $\leq_{\mathcal{R}}$, si $x \leq_{\mathcal{R}} y$ ou $y \leq_{\mathcal{R}} x$.

Définition 1.15 (Eléments particuliers). Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E, et soit A une partie de E.

1. Un élément $m \in E$ est appelé un minimum de A ssi
   (a) $m \in A$,
   (b) pour tout $x \in A$, on a $m \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi de m qu'il est un plus petit élément de A.)
2. Un élément $M \in E$ est appelé un maximum de A ssi
   a) $M \in A$,
   b) pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} M$. (On dit aussi de M qu'il est un plus grand élément de A.)
3. Un extremum est un élément qui est un minimum ou un maximum.

4. Un élément $u \in E$ est appelé un minorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $u \leq_{\mathcal{R}} x$. (On dit aussi que A est minoré par u).

5. Un élément $U \in E$ est appelé un majorant de A ssi pour tout $x \in A$, on a $x \leq_{\mathcal{R}} U$. (On dit aussi que A est majoré par U).

6. L'ensemble A est dit minoré dans E si A admet un minorant dans E; A est dit majoré dans E si A admet un majorant dans E; et A est dit borné dans E si A est à la fois minoré et majoré.

7. Un élément $v \in E$ est appelé une borne inférieure de A ssi
   (a) v est un minorant de A,
   (b) pour tout minorant v' de A, on a $v' \leq_{\mathcal{R}} v$. (On dit aussi que v est un infimum de A.) Notation : $v = \text{ínf}(A)$.

8. Un élément $V \in E$ est appelé une borne supérieure de A ssi
   (a) V est un majorant de A,
   (b) pour tout majorant V' de A, on a $V \leq_{\mathcal{R}} V'$. (On dit aussi que V est un supremum de A.) Notation : $V = \sup(A)$.

Exemple 1.6. Soient $E = [-1, 2]$ et $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$ alors

$$\text{ínf}\, A = 0 \text{ et } \sup A = 1.$$

1.3 Fonctions et applications.

1.3.1. Fonctions

Définition 1.16.

1. Une relation f de E vers F est dite fonction si tout $x \in E$ a au plus une image y dans F. On dit aussi que f est une fonction et on écrit alors $y = f(x)$ au lieu de xfy. On écrit aussi
$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

2. Le domaine de définition d'une fonction f (noté D_f) c'est l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $f(x)$ existe.

Définition 1.17. Soit la fonction $f : E \to F$, A est une partie de E et B est une partie de F.

1. L'image de A par f est
$$f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

2. L'image réciproque de B par f est
$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Définition 1.18.

1. La composée de la fonction $f : E \to F$ et de la fonction $g : F \to G$ est la fonction
$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$
2. Toute restriction d'une fonction reste une fonction.

1.3.2. Applications

Définition 1.19. Une fonction f est une application si tout élément de E à (exactement) une image dans F. On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

Remarque 1.4. Une fonction f est une application si et seulement si son domaine de définition est E tout entier.

Proposition 1.4. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soient A et B deux parties de E. Alors,
   (a) Si $A \subset B$, on a $f(A) \subset f(B)$
   (b) On a toujours
   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
   (c) On a toujours
   $$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B.)$$
2. Soient A et B deux parties de F. Alors,
   (a) Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   (b) On a toujours
   $$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
   (c) On a toujours
   $$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
3. (a) Si A est une partie de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$. Si B est une partie de f, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

Preuve. Voir TD. □

1.3.3. Injection, surjection, bijection

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition 1.20.

1. f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent dans E. Autrement dit :
$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
2. f est surjective si tout élément de F à au moins un antécédent dans E. Autrement dit :
$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$
3. f est bijective si elle est à la fois injective et surjective (tout élément de F a exactement un antécédent dans E).

Remarque 1.5. On peut faire les remarques suivantes :

1. Une application est injective si et seulement si la relation réciproque est une fonction.
2. Une application est surjective si et seulement si son image est son ensemble d'arrivée.
3. Une application est bijective si et seulement si la relation réciproque est une application.

Proposition 1.5.

1. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications injectives, surjectives ou bijectives, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ l'est aussi.
2. Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. On a alors $g = f^{-1}$.
3. Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux applications avec $g \circ f : E \longrightarrow G$ injective, alors f est aussi injective. De même, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Preuve.

1. (a) Supposons que f, g sont des applications injectives. Soit $x_1, x_2 \in E$ tel que : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (car g est injective) $\Rightarrow x_1 = x_2$. D'où $g \circ f$ est injective.
   (b) Supposons que f, g sont des applications surjectives. Soit $z \in G$ alors $\exists y \in F \quad g(y) = z$ (car g est surjective). Et comme f est surjective alors $\exists x \in E \quad f(x) = y$ alors $\exists x \in E \quad g(f(x)) = z$ d'où $\exists x \in E \quad g \circ f(x) = z$. Donc $g \circ f$ est surjective.
   (c) Évident d'après (a) et (b).
2. Voir TD.
3. Voir TD.

$\square$

1.4 Exercices

Exercice 1.4–1

Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire :

1. $a \in E$, 2) $a \subset E$, 3) $\{a\} \subset E$, 4) $\emptyset \in E$, 5) $\emptyset \subset E, 6)\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 1.4–2

Soient $A =]-\infty, 3], B =]-2, 7[$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B, B \cap C, B \cup C$, $A^c, A \backslash B$, $A^c \cap B^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 1.4–3

Écrire l'ensemble des parties de $E = a, b, c, d$ et donné une partition de E.

Exercice 1.4–4

A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que:

1. $A \backslash B = A \cap B^C$.
2. $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Exercice 1.4–5

Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :

1. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = -y$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$.
3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists p, q \geq 1, y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence?

Exercice 1.4–6

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E. Montrer que

$$\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = \dot{y}$$

Exercice 1.4–7

Soit $\mathcal{R}_3$ la relation définie dans $\mathbb{Z}$ par : $x\mathcal{R}_3 y \Leftrightarrow 3$ divise $x - y$.

1. Montrer que $\mathcal{R}_3$ est une relation d'équivalence. Elle est appelée congruence modulo 3 et on note $x \equiv y \operatorname{mód}\ (3)$ au lieu de $x\mathcal{R}_3 y$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, déterminer la classe de x modulo 3 .
3. On note $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $\mathcal{R}_3$. Quel est son cardinal ?

Exercice 1.4–8

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par : $x\mathcal{R}$ y si et seulement si x divise y.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.
2. Est-ce une relation d'ordre total?
3. Décrire $\{x \in \mathbb{N}^*, x\mathcal{R}5\}$ et $\{x \in \mathbb{N}^*, x\mathcal{R}5\}$.
4. $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus petit élément? un plus grand élément?

Exercice 1.4–9

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient A et B deux parties de E. Alors,
   (a) Si $A \subset B$, on a $f(A) \subset f(B)$
   (b) On a toujours
   $$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
   (c) On a toujours
   $$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B.)$$
2. Soient A et B deux parties de F. Alors,
   (a) Si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   (b) On a toujours
   $$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$
   (c) On a toujours
   $$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

3. (a) Si A est une partie de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Si B est une partie de f, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.

Exercice 1.4–10

Soit fl'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1. Donner la définition de $f^{-1}(4)$. Calculer $f^{-1}(4)$.
2. L'application f est-elle bijective?
3. Donner la définition de $f([-1, 1])$. Calculer $f([-1, 1])$.
4. Donner la définition de $f^{-1}([-2, 4])$. Calculer $f^{-1}([-2, 4])$.

Exercice 1.4–11

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 1.4–12

Soient f une application de E dans F, g une application de F dans G et $h = g \circ f$.

1. Montrer que si h est injective, f l'est aussi et que si h est surjective, g l'est aussi.
2. Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.
3. Montrer que si h est injective et f surjective alors g est injective.