Mathematik I

Weitergabe oder Verbreitung jeglicher Art ist nicht erlaubt
Nur für Studierende der TH Lübeck

Prof. Dr. Lothar Vogt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

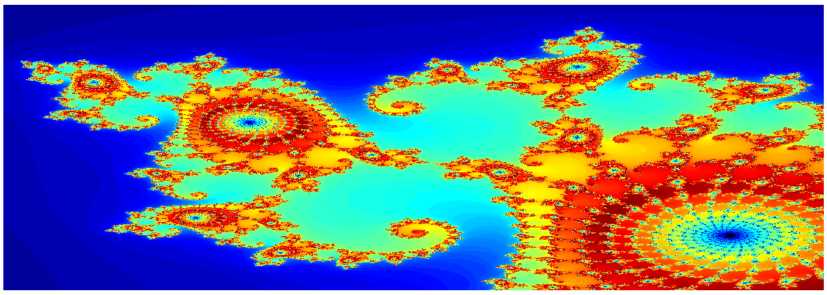


Abbildung 1.1: Mathematik ist schön!
(Ausschnitt aus der sog. Mandelbrot Menge Äpfelmännchen")

"Wozu brauche ich Mathematik?"lautet eine der häufigsten Fragen im ersten Semester. Eine befriedigende Antwort kann im ersten Semester nicht gegeben werden, da die späteren Anwendungen zu dem Zeitpunkt noch gar nicht bekannt sind und ohne Mathematik auch nicht erklärbar sind. Das bedeutet für Sie: vertrauen Sie darauf, dass hier nichts gemacht wird, das Sie nicht in den anderen Fächern zwingend brauchen werden! Schwächen werden sich später bitter rächen.
Die Mathematik hat im Bereich der Naturwissenschaften und Technik eine herausragende Bedeutung: sie ermöglicht nicht nur Zusammenhänge qualitativ zu beschreiben, sondern wir können mit ihrer Hilfe Zusammenhänge quantitativ d.h. durch Zahlen ausdrücken So kann man z.B. Ströme und Spannungen in Schaltungen berechnen oder Schwingungsvorgänge beschreiben. Dennoch ist die Mathematik keine Hilfswissenschaft, sondern sie ist eine eigenständige Wissenschaft. Viele Verfahren, die heute erst durch leistungsfähige Rechner realisierbar sind, waren innerhalb der Mathematik schon sehr lange bekannt. Einige Beispiele: die Verschlüsselung basiert auf Erkenntnissen aus der Zahlentheorie (ca. 1700-1800). Die mathematischen Grundlagen für die Computertomographie entstanden ca. 1910. Die Grundlagen der nicht-euklidischen Geometrie kannte bereits Bernhard Riemann (um 1830). Sie ist die Basis der allgemeinen Relativitätstheorie in der Physik. In der Mathematik wird alles ausgehend von einigen wenigen Axiomen hergeleitet. Diese Herleitungen erfolgen in Form von Sätzen, die mit Hilfe der Logik beweisbar sein müssen. Insofern ist die Mathematik im Rahmen menschlicher Erkenntnis als absolut und unverrückbar anzusehen. Keine andere Wissenschaft kann dieses Maß an Zuverlässigkeit in den Aussagen liefern. Es ist für das

Verständnis der Elektrotechnik und Informatik unverzichtbar, die Mathematik in ihren Grundzügen zu verstehen und anwenden zu können. Wir werden hier den strengen axiomatischen Aufbau nicht verfolgen, sondern uns der bekannten Ergebnisse aus der Schulmathematik erinnern, um so schneller zu Ergebnissen zu kommen, die in anderen Fächern als Grundlagen gebraucht werden. Im Vordergrund der Mathematik I stehen die Begriffe der **Funktion** und des **Grenzwerts**. Das Rechnen mit Zahlen erfolgt nach den bekannten Regeln. Insbesondere bereiten vielen Studienanfängern elementare Umformungen von Termen und das Bruchrechnen große Schwierigkeiten. Wer hier Unsicherheiten hat, muss diese schnell durch intensives Nacharbeiten des Schulstoffes beseitigen! Es wird dringend empfohlen, die Übungen intensiv zu bearbeiten und die Übungsgruppen zu besuchen. Die TH Lübeck verfügt über eine MATLAB Campus Lizenz. Damit können alle Studierende alle MATLAB Pakete kostenfrei nutzen (informieren Sie sich im Lernraum unter IT Services). Ich empfehle, das dringend zu nutzen. MATLAB ist mittlerweile der Industriestandard in der Entwicklung. Für uns dient es hervorragend dazu, Zusammenhänge zu visualisieren und besser zu verstehen.
In der Mathematik ist es wie beim Fahrradfahren: man muss es **selbst tun**. Erst die eigenständige Übung schafft das handwerkliche Können Das vorliegende Skript dient als Ergänzung zur Vorlesung und Übung, den Besuch der Vorlesung soll und kann es nicht ersetzen. Wenn Sie in der Übung sehen wie jemand erfolgreich eine Aufgabe bearbeitet und Sie die Lösung mitschreiben, haben Sie noch nichts erreicht. Sie haben lediglich jemanden gesehen, der es kann. Aber können Sie es selbst auch? Können Sie alle Schritte selbständig? Könnten Sie auch andere Aufgabentypen selbst lösen? Sie müssen Mathematik verstehen, nicht Aufgabentypen lösen können. Später werden Sie Mathematik einsetzen müssen, um elektrotechnische Zusammenhänge bearbeiten zu können. Das ist es, worauf es ankommt.
Es wird Dinge geben, die in der Vorlesung ausführlicher dargestellt werden, andere Dinge sind hier zusätzlich behandelt. Maßgeblich für den Stoff der Klausuren ist der Vorlesungs- und Übungsinhalt.
Der Inhalt ist zur leichteren Orientierung wie folgt dargestellt: Axiome/Definitionen sind grün hinterlegt, Sätze und Lemmata rot, Beispiele blau und Folgerungen gelb.
Zur Literatur: zusätzlich zu den Vorlesungen ist das Studium von Fachliteratur wichtig. Empfehlenswert ist[9]. Es ist ein dreibändiges Werk. Zunächst benötigen wir nur Band 1. Es ist auch über die Hochschulbibliothek als e-book für Sie verfügbar. Sehr ausführlich ist das Buch von [7] (auch als e-book erhältlich). Ein etwas älteres aber hervorragendes Buch ist [3], ebenfalls als e- book verfügbar. Eine hervorragende Formelsammlung ist [2]. Sie ist der Klassiker und **sollte auf keinem Schreibtisch fehlen**. Zusätzliche Übungsaufgaben finden Sie in [8] (auch als e-book in der Hochschulbibliothek) und [1] (in dieser sehr bekannten Serie *Schaum's Outline* finden Sie auch hervorragende Übungsbücher zu Physik, Elektrotechnik usw. Sie sind insbesondere zum "Büffeln"von Klausuraufgaben gedacht). Zusätzlich gibt es noch einige "Klassiker": [10],[6]. Sollten Sie mal numerische Verfahren suchen (Interpolation, Ausgleichsrechnung, Splines etc.), so sind folgende Bücher interessant: [4][5].
Wir beginnen zunächst mit der Wiederholung einiger bekannter Begriffe.
Die folgende Auflistung zeigt die wesentlichen (es gibt noch viel mehr) Teilgebiete der Mathematik:

- Analysis
- Algebra und lineare Algebra
- Zahlentheorie
- numerische Mathematik
- Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen
- Distrubutionentheorie
- Approximationstheorie
- Fourier Analysis
- Funktionentheorie
- Funktionalanalysis
- Vektoranalysis
- Differentialgeometrie
- Topologie
- Mengenlehre und Logik

Was wir hier machen ist **Ingenieurmathematik**. Sie enthält Grundzüge aus der Analysis und Vektoralegra.

Einige Symbole:
$\forall$ *lies*: für alle

$\exists$ *lies:* es existiert

$\nexists$ *lies:* es existiert nicht

Diese Symbole nennt man **Quantoren**. Mit ihnen lassen sich mathematische Aussagen kompakt formulieren. Ferner
$\wedge$: logisches und
$\vee$ logisches oder (bedeutet nicht: entweder oder)
$A := B$ bedeutet, dass A durch B definiert wird. Damit kann man im laufenden Text einfach z.B. komplexe Ausdrücke durch ein Symbol ersetzen.

1.1 Mengen

Definition 1.1. ***(Menge)***
*Eine **Menge M** ist eine Zusammenfassung wohl unterscheidbarer Objekte. Die Objekte heißen Elemente der Menge. Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge $\emptyset$.*

Die leere Menge enthält nichts auch nicht Null.
Schreibweisen:
direkt durch explizite Angabe der Elemente: $M = \{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$
oder durch Beschreibung der Eigenschaften

$$M = \{x|x \text{ hat die Eigenschaft} \cdots\}$$

lies: Menge aller x, für die gilt, x hat die Eigenschaft $\cdots$.
Möchte man ausdrücken, dass ein Element x zur Menge gehört, schreibt man: $x \in M$, gehört x nicht zu M schreibt man $x \notin M$.
Zwei Mengen A, B heißen gleich, $A = B$, wenn sie beide die gleichen Elemente enthalten.

Definition 1.2. ***(Teilmenge, Durchschnitt- und Vereinigungsmenge)***

1. *A heißt **Teilmenge** von B ($A \subset B$), wenn gilt: für alle $x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$.*

2. *C heißt **Durchschnitt** oder Schnittmenge von A und B ($C = A \cap B$), wenn gilt: $C = \{x|x \in A \text{ und } x \in B\}$.*

3. *Zwei Mengen heißen **disjunkt**, wenn ihre Schnittmenge die leere Menge ist.*

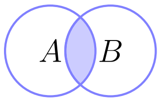
4. *C heißt **Vereinigungsmenge** von A und B ($C = A \cup B$), wenn gilt: $C = \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\}$.*

5. *C heißt **Restmenge** von A und B ($C = A \backslash B$), wenn gilt: $C = \{x|x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$.*

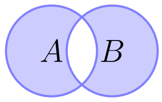
Wir bezeichnen als

$\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0.
$\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen mit 0
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen

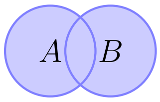
Auf diesen Zahlenmengen können Verknüpfungen der Elemente erklärt werden. Die uns bekannten Verknüpfungen sind die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf den obigen Zahlenbereichen. Interessant (und nicht selbstverständlich) ist, dass



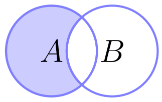
(a) $A \cap B$



(b) $(A \cup B) \backslash (A \cap B$



(c) $A \cup B$



(d) $A \backslash B$

Abbildung 1.2: Venn Diagramme

die Addition zweier natürlicher Zahlen wieder eine natürliche Zahl ergibt. Man sagt, dass die Menge der natürlichen Zahlen bzgl. der Addition abgeschlossen ist. Entsprechend gilt dies in der Erweiterung um die Subtraktion für die ganzen Zahlen, während erst die Menge der rationalen Zahlen bzgl. aller vier Grundrechenarten abgeschlossen ist. Die reellen Zahlen schließlich werden eingeführt, um auch z.B. die Wurzel aus einer beliebigen (nicht negativen) Zahl erklären zu können, z.B. $\sqrt{2}$. Dazu später mehr.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist abzählbar: das bedeutet, man kann zumindest theoretisch (bis in alle Ewigkeit) weiter zählen Damit ergibt sich insbesondere die Eigenschaft (die zum Peano-Axiom gehört), dass zu jeder Zahl N ein Nachfolger existiert, nämlich $N + 1$ (dies ist eine wichtige Eigenschaft, die später noch genutzt wird). Man sagt, dass die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar unendlich ist(weil es unendliche viele natürliche Zahlen gibt). Für die rationale Zahlen gilt das Gleiche:auch sie sind abzählbar unendlich (was nicht sofort einsichtig ist. Man kann, um dies zu zeigen, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen allen rationale Zahlen und den ganzen Zahlen konstruieren, George Cantor). Die Menge der reellen Zahlen ist im Gegensatz dazu überabzählbar unendlich.

Es gilt folglich: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Auf den reellen Zahlen sind die bekannten Rechenoperationen erklärt:Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (der Divisor darf nicht Null sein). Die Rechenregeln ergeben sich nach den bekannten Gesetzen:

1. Kommutativgesetz der Addition

$$a + b = b + a$$

2. Kommutativgesetz der Multiplikation

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3. Assoziativgesetz der Addition

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

4. Assoziativgesetz der Multiplikation
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

5. Distributivgesetz
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Den Punkt in der Multiplikation lässt man üblicherweise weg. **Es ist wichtig, Klammern richtig zu setzen und anzuwenden!** Hat man kompliziertere Ausdrücke, so ist es hilfreich, statt nur runde Klammern, geschweifte oder eckige Klammern zusätzlich zu verwenden.
Daraus leiten sich insbesondere die bekannten **binomischen Formeln ab:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

ab.

1.2 Ungleichungen, Betrag, Quadratwurzel

Im Bereich der reellen Zahlen ist eine **Ordnungsrelation** gegeben. Dieses kann weder definiert werden oder abgeleitet werden, sondern gehört genau so wie das Zählen selbst zu den grundlegenden Dingen, die man Axiome nennt.

Axiom 1.1. ***(Ordnungsaxiome der rellen Zahlen)***

O1 *$\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt eine der folgenden Relationen: $x > y \vee x < y \vee x = y$*

O2 ***(Transitivität)*** $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

O3 ***(Monotonie der Addition)*** $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b \Rightarrow a + c < b + c$

O4 ***(Monotonie der Multiplikation)*** $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b, 0 < c \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c)$

Dies ist uns alles selbstverständlich, wir werden aber später sehen, dass es Mengen gibt, für die diese ausgezeichneten Eigenschaften nicht gelten. Gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y \vee x = y$ so schreibt man auch $x \leq y$ ("Kleiner gleich"). Entsprechend definiert man "größer oder gleich" und schreibt $x \geq y$.

Der folgende Satz fast die wichtigsten Rechenregeln mit Ungleichungen zusammen.

Satz 1.1. ***(Rechnen mit Ungleichungen)***
Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

(i)

$$0 < a, \;\; 0 < b \Rightarrow 0 < ab,$$

(ii) ***(Inversion)***

$$0 < a \Leftrightarrow -a < 0,$$

(iii)

$$0 < a \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a},$$

(IV)

$$(a \leq b, c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d,$$

(V)

$$(0 < a \leq b, 0 < c \leq d) \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot d,$$

(VI)

$$(0 < a \leq b) \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}.$$

Man achte insbesondere auf die Aussage (II): multipliziert man eine Ungleichung mit -1, so kehrt sich die Ungleichung um.

Beispiel 1.1. *Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung*

$$1 < \frac{4x-2}{5x+3}$$

*zu bestimmen. Wäre dies eine Gleichung würde man sofort mit dem Nenner erweitern. Das geht bei Ungleichung nicht unmittelbar, da nicht bekannt ist, ob der Nenner positiv oder negativ ist! Hier kann und **muss man eine Fallunterscheidung** durchführen.*

1. *Fall:* $5x+3>0 \quad \Leftrightarrow x > -\frac{3}{5}$ *also soll gelten:*

$$\begin{aligned} & 1 < \frac{4x-2}{5x+3} \quad \wedge \quad x > -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & 5x+3 < 4x-2 \quad \wedge \quad x > -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & x < -5 \quad \wedge \quad x > -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{L}_1 = (-\infty, -5) \cap (-\frac{3}{5}, \infty) = \emptyset. \end{aligned}$$

2. *Fall:* $5x+3<0 \quad \Leftrightarrow x < -\frac{3}{5}$ *also soll gelten:*

$$\begin{aligned} & 1 < \frac{4x-2}{5x+3} \quad \wedge \quad x < -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & 5x+3 > 4x-2 \quad \wedge \quad x < -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & x > -5 \quad \wedge \quad x < -\frac{3}{5}, \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{L}_2 = (-5, \infty) \cap (-\infty, -\frac{3}{5}) = (-5, -\frac{3}{5}). \end{aligned}$$

Die gesamte Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-5, -\frac{3}{5}).$$

Beispiel 1.2. *Oftmals findet man verkettete Ungleichungen vor wie dieses einfache Beispiel zeigt:*

$$-2 < x + 3 < 4$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ *ist dann*

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x + 3 \wedge x + 3 < 4\}$$

Die Vorgehensweise ist

$$\begin{aligned} & -2 < x + 3 \quad \wedge \quad x + 3 < 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -5 < x \quad \wedge \quad x < 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | -5 < x < 1\} = (-5, 1)$$

Definition 1.3. ***(Intervalle)***
Mit Hilfe der Ordnungsrelationen lassen sich nun sog. ***Intervalle*** *definieren:*
Seien $a, b \in \mathbb{R}$*(dabei können auch* a, b ∞ *sein), dann ist*

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ *offenes Intervall*
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall*
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ *(nach unten) halb offenes Intervall*
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ *(nach oben) halb offenes Intervall*

Das bedeutet nicht, dass ∞ *eine Zahl wäre; es ist es nicht! Vielmehr bedeutet es, dass ein Intervall unendlich ausgedehnt sein kann.*

Definition 1.4. ***(Absolutbetrag oder auch Betrag einer reellen Zahl)***
Für $x \in \mathbb{R}$ *ist der Betrag* $|x|$ *definiert durch:*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Es ist folglich immer $|x| \geq 0$.
Trägt man wie üblich die Zahlen auf der Zahlengeraden auf, so ist der Betrag gerade der geometrische Abstand der Zahl zum Nullpunkt. Ferner gelten folgende Rechenregeln:

Satz 1.2. ***(Rechnen mit Beträgen)***
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|a| = |-a|$
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$
3. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$
4. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Satz 1.3. ***(Ungleichungen mit Beträgen)***
Sei $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

1. $|x| \leq c \;\Leftrightarrow\; -c \leq x \leq c$, *für* $c \geq 0$,
2. ***(Dreiecksungleichung)***
$$|a + b| \leq |a| + |b|, \tag{1.2}$$
3. $$|a| - |b| \leq |a + b|, \tag{1.3}$$
4. $$|b| - |a| \leq |a + b|, \tag{1.4}$$
5. $$||a| - |b|| \leq |a + b| \tag{1.5}$$

Definition 1.5. ***(Quadratwurzel)***
Sei $0 \leq x \in \mathbb{R}$. Unter der Quadratwurzel von x verstehen wir diejenige ***nicht-negative Zahl*** *y, für die gilt:*
$$y^2 = x.$$
Schreibweise $y = \sqrt{x}$. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heißt ***Radikand****. Der Radikand muss nicht-negativ sein! Erst später werden wir -durch eine nochmalige Zahlenbereichserweiterung auf die sog. komplexen Zahlen- diese Einschränkung fallen lassen können.*

Satz 1.4. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist*
$$\sqrt{c^2} = |c| \tag{1.6}$$

Die **Quadratwurzel ist stets eine nicht-negative Zahl**!
Wie kommt man nun zu den bekannten zwei Lösungen z.B. einer Gleichung wie
$$x^2 = 4\ ?$$

Dazu setzt man die Definition der Wurzel und des Betrags an:

$$\sqrt{4} = |2| = 2$$

und damit

$$|x| = \sqrt{x^2} = 2$$

Nun ist

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Also erhalten wir für

$$x \geq 0 \quad x = 2$$

und für

$$x < 0 \quad -x = 2,$$

was die erwarteten Lösungen $x = 2$ und $x = -2$ liefert. Man mache sich diesen wichtigen Zusammenhang selbst nochmal klar. Wichtig ist die Erkenntnis, dass die Wurzel einer Zahl immer positiv ist. Diese Eindeutigkeit wird später gebraucht, wenn wir die Wurzelfunktion erklären wollen.

1.3 Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \;\; mit \; a, b, c \in \mathbb{R}, \;\; a \neq 0 \tag{1.7}$$

heißt **quadratische Gleichung**. Dabei wird $a \neq 0$ angenommen (sonst ist es eine lineare Gleichung). Eine solche Gleichung lässt sich nach Division durch a stets in die sog. Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.8}$$

mit reellen Koeffizienten p und q bringen. Diejenigen Werte $x \in \mathbb{R}$, die 1.7 bzw. 1.8 erfüllen, heißen Lösungen der Gleichung. Lösungen von 1.8 bestimmen bedeutet ausgeschrieben: Bestimme die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$, die durch

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} | x^2 + px + q = 0 \right\}$$

charakterisiert wird. Der einfachste Fall ist gegeben durch $q = 0$. Dies löst man wie folgt durch **Ausklammern**:

$$x^2 + px = 0 \Leftrightarrow x(x+p) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -p \tag{1.9}$$

Ein verbreiteter Fehler ist es, durch x zu kürzen. Das darf man nicht, da wir noch nicht wissen, ob x nicht 0 ist! Tatsächlich ist es jedoch eine Lösung.

Nun zum Fall $q \neq 0$: Die Lösung erhält man durch die sog. quadratische Ergänzung Ziel ist es, einen Term links und rechts des Gleichheitszeichens so zu finden und hinzuzufügen, dass auf der linken Seite der Gleichung mittels der binomischen Formeln ein quadratischer Ausdruck entsteht.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{p}{2}x = -q$$

Vergleicht man dies mit den binomischen Formeln, so erkennt man, dass man die linke Seite durch Addition des Terms $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ zu einem vollständigen Quadrat ergänzen kann:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

Die linke Seite kann nun mittels der binomischen Formel umgeformt werden zu $(x+\frac{p}{2})^2$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

für die Diskriminante D gegeben durch $D = \frac{p^2}{4} - q \geq 0$ kann die Wurzel gezogen werden (sonst ist die Wurzel nicht definiert!).

$$\Leftrightarrow |x + \frac{p}{2}| = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Damit ist die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} | x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \right\}$$

Ist $D > 0$ existieren zwei Lösungen. Ist dagegen $D = 0$, so gibt es nur eine Lösung. Dies ist die bekannte p, q **- Formel**. Es ist besser, verstanden zu haben, wie man dazu kommt, statt die Formel auswendig zu lernen. Im Gegenteil: es wird davor gewarnt, diese Formel nur auswendig zu lernen. Denn vergisst man sie oder erinnert sich nur unvollständig, so entstehen schwere Fehler.

1.4 Wurzelgleichungen

Die bisherigen Umformung, die an einer Gleichung durchgeführt werden Addition und Multiplikation mit Faktor $\neq 0$ bzw. Division mit Divisor $\neq 0$ sind Äquivalenzumformungen. Was macht man aber wenn eine Gleichung einen Wurzelausdruck in der Unbekannten enthält. Dazu folgendes

Beispiel 1.3. ***Gleichungen mit Wurzelausdrücken*** *Welche x erfüllen*

$$\sqrt{6x-2} = 3x - 5$$

Hier führt nur der Weg über das Quadrieren zu einer Lösung. Aber dies ist keine Äquivalenzumformung wie dieses Beispiel lehrt. Quadrieren ergibt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 6x - 2 = 9x^2 - 30x + 25 \quad \textbf{\textit{hier passiert es}} \\ \Leftrightarrow & \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Die Probe liefert für x_2 einen Widerspruch bei Einsetzen: $2 \neq -2$.

Folgerung 1.1. ***Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung****. Es muss immer dann mittels* ***Probe*** *geprüft werden, welche Lösungen tatsächlich die ursprüngliche Gleichung erfüllen.*

1.5 Summenzeichen und Produktzeichen

Oft werden wir es mit Summen mit zahlreichen Summanden zu tun haben:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, wird für die Summe ein Symbol eingeführt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \tag{1.10}$$

Es gelten folgende Konventionen: k heißt der Summationsindex, er kann beliebig benannt werden. a_k sind die Summanden. Unter dem Summenzeichen steht wo die Summation beginnt und oberhalb wo sie endet. **Der Summationsindex kann nie außerhalb der Summe auftreten**. Entdeckt man so etwas, muss es falsch sein! Man kann den Index auch verschieben (in beide Richtungen) und umbenennen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Man schreibe sich die obigen Ausdrücke jeweils ausgeschrieben auf und überzeuge sich von der Richtigkeit. üblicherweise verwendet man als Summationindizes die Buchstaben: i, j, k,l,m,n . Es wäre zwar nicht falsch andere Buchstaben zu verwenden, aber man tut es nicht. Die Verwendung von j ist in der Elektrotechnik nicht empfohlen, da j später die Bedeutung der imaginären Einheit bekommen wird. Zur Darstellung von Produkten aus zahlreichen Faktoren schreibt man zur einfacheren Darstellung mittels des Produktzeichens:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$$

Auch hier ist k der Index, der nur innerhalb des Produktzeichens eine Bedeutung hat.

1.6 Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

In einen rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse gilt bekanntlich der Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Schon die alten Griechen suchten nach einer Lösung für $a = b = 1$ für die Länge der Hypotenuse. Zunächst konnten sie nur zeigen, dass diese Länge nicht im Bereich der ihnen bekannten rationalen Zahlen zu finden ist (Euklid [1]). Dieser Beweis ist ein klassischer indirekter Beweis. Man nannte $\sqrt{2}$ daraufhin irrationale Zahl. Eine befriedigende Definition ist erst im 19. Jahrhundert gelungen (Karl Weierstraß, Georg Cantor, Richard Dedekind und andere). Die Beweisführung von Euklid ist wie folgt. Es ist zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ wäre rational. Wenn dies zu einem Widerspruch führt, muss das Gegenteil gelten, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist. Dies ist das **Prinzip vom Widerspruch**. Es ist ein Grundprinzip der Logik.
Also nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ rational wäre. Dann kann es immer als Quotient aus zwei natürlichen Zahlen p und q geschrieben werden. Wir können ferner annehmen, dass p und q teilerfremd sind (zwei Zahlen heißen teilerfremd, wenn sie nur durch 1 teilbar sind). Das bedeutet, dass wir vorher alle gemeinsamen Teiler aus dem Zähler und Nenner gekürzt haben. Das können wir immer machen. Also sei

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2$$

d.h. p^2 ist eine gerade Zahl (sie hat als einen Faktor die 2). Also muss auch p selbst gerade sein .

$$\Rightarrow p^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2q^2$$
$$\Rightarrow 2m^2 = q^2$$

[1] Euklid war ein griechischer Gelehrter ca. 300 v. Ch. Von ihm stammt die sog. Elemente, eine Zusammenfassung der bis dahin bekannten Dinge über Geometrie und Arithmetik. Die Bedeutung des Werks liegt in dem strengen Aufbau, der ausgehend von Axiomen alle Aussagen beweist. Insofern hat es Nachwirkungen bis in die heutige Zeit und ist Vorbild für alle mathematischen Disziplinen geworden.

. Das bedeutet aber, dass q selbst auch gerade sein muss. Insgesamt erhalten wir unter der Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational sei das Ergebnis, dass p und q beide gerade sind. Sie müssten also den gemeinsamen Teiler 2 haben, was im Widerspruch zur Annahme steht, sie seien teilerfremd. Damit kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein. Wir haben damit aber noch nicht erklärt was $\sqrt{2}$ ist. Dies gibt lediglich Anlass dazu, den Zahlenbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nochmals zu erweitern. Dies geschieht in der Schule meistens indem man eine Intervallschachtelung vornimmt und zeigt, dass dieser Prozess zu einem Objekt führt, dass man Irrationalzahl nennt. An dieser Stelle wird die Konstruktion der Irrationalzahlen nicht weiter vertieft. Eine elegantere Methode stammt von dem franz. Mathematiker *A. L. Cauchy* und wird in dem Kapitel über Folgen skizziert.

2 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

2.1 Begriffe

Häufig kommen in Anwendungen (z.B. bei der Analyse und Berechnungen von linearen Schaltungen mittels der Kirchhoffschen Regeln) mehrere unbekannte Größen vor, die durch lineare Gleichungen miteinander verknüpft sind. Die allgemeine Form mit n Unbekannten und m Gleichung sieht wie folgt aus

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= c_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ein solches System von Gleichungen heißt **lineares Gleichungssystem (LGS)**. Dabei sind die Größen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m\,, 1 \leq j \leq n.$. Sie heißen **Koeffizienten des LGS** und sind gegeben. Die Größen $c_j \in \mathbb{R}$ $1 \leq j \leq m$ heißen die **rechte Seite** des Systems. Ist

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0,$$

so heißt das LGS **homogen**. Ansonsten heißt es **inhomogen**. LGS bei denen $n = m$ ist, heißen **quadratische LGS**.

Es ist **linear** weil die gesuchten Unbekannten, $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, nur in der ersten Potenz vorkommen. Mit Hilfe des Summenzeichens kann 2.1 auch kompakter geschrieben werden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}x_k &= c_1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}x_k &= c_2 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}x_k &= c_m \end{aligned} \tag{2.2}$$

Damit das etwas übersichtlicher wird, schreibt man die Koeffizienten des LGS in ein passendes Schema folgender Art:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{array} \tag{2.3}$$

In der ersten Zeile stehen die Unbekannten. In der zweiten und allen folgenden stehen die Koeffizienten des LGS. Meist lässt man die erste Zeile weg, wenn klar ist wie die Zuordnung der Koeffizienten zu den Unbekannten ist.

Man stellt das LGS 2.1 kompakter durch die Definition von Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,j} \dots a_{1,n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{i,1} \dots a_{i,j} \dots a_{1,n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m,1} \dots a_{m,j} \dots a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

und der Spaltenvektoren

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

dar. Der erste Index in der Matrix gibt die Zeile an, der zweite Index die Spalte. Das Element a_{ij} ist das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor ist definiert durch 2.2. Also die Summe aus den elementweisen Produkten einer Zeile der Matrix und dem Spaltenvektor x. Dies erläutert das folgende Beispiel:

Beispiel 2.1. ***(Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor)***
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A\,\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}.$$

Dies ist genau die linke Seiten eines LGS mit den durch A gegebenen Koeffizienten.

Damit schreibt sich ein LGS kompakt als

$$A\vec{x} = \vec{c}. \tag{2.6}$$

A heißt **Koeffizientenmatrix**, $\vec{x}$ **Lösungsvektor** und $\vec{c}$ **rechte Seite** des LGS. Mehr zu Matrizen und Vektoren wird im 2. Semester in Mathematik II gebracht werden. Die Matrizendarstellung vereinfacht den Umgang mit LGS erheblich. Die Fragen, die sich bei einem LGS grundsätzlich stellen sind:

1. **wann ist es lösbar?**
2. **wie viele Lösungen hat es?**
3. **wie bestimmt man die Lösungsgesamtheit?**

Zunächst sieht man sofort: *bei einem homogene LGS ist* $(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \cdots, \mathbf{x_n}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$ immer eine Lösung von 2.1. Diese Lösung wird als **triviale Lösung** bezeichnet.

2.2 Lösungsverhalten LGS

Um die ersten zwei Fragen zu beantworten, wird das LGS zunächst geometrisch interpretiert. Dies ist übersichtlicher am Beispiel von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 &= c_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 &= c_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dazu schreiben wir das LGS etwas um, wobei wir zunächst annehmen, dass $a_{1,2} \neq 0, a_{2,2} \neq 0$ sind:

$$\begin{aligned} G1: \; x_2 &= \underbrace{-\frac{a_{1,1}}{a_{1,2}}}_{\textit{Steigung}} x_1 + \underbrace{\frac{c_1}{a_{1,2}}}_{\textit{Achsenabschnitt}} \\ G2: \; x_2 &= \underbrace{-\frac{a_{2,1}}{a_{2,2}}}_{\textit{Steigung}} x_1 + \underbrace{\frac{c_2}{a_{2,2}}}_{\textit{Achsenabschnitt}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Jede der Gleichungen 2.8 stellt eine Gerade im x_1, x_2 -Koordinatensystem dar (ist $a_{1,2} = 0$ oder $a_{2,2} = 0$, sind es Parallelen zur x_2-Aachse). Wollen wir Lösungen (x_1, x_2) finden, müssen dies Punkte sein, die auf beiden Geraden liegen. Das sind die **Schnittpunkte der Geraden**. Welche Möglichkeiten gibt es, dass sich Geraden schneiden? Folgende drei Fälle kann man sich leicht überlegen:

1. Fall: Es gibt genau einen Schnittpunkt. Siehe 2.1a;
2. Fall: die Geraden sind parallel, haben jedoch einen unterschiedlichen Achsenabschnitt: es gibt keinen Schnittpunkt. Siehe 2.1b;

3. Fall: die Geraden liegen übereinander. Alle Punkte der ersten Geraden sind auch Punkte der zweiten Geraden. Es gibt unendlich viele Punkte, die die Geraden gemeinsam haben. Siehe 2.1c.

Damit haben wir auch bereits das **Lösungsverhalten eines LGS** erfasst:

Folgerung 2.1. ***(Lösungsverhalten LGS)***
Ein ***inhomogenes LGS*** *kann folgendes Lösungsverhalten besitzen:*

1. ***es besitzt genau eine Lösung*** *oder*

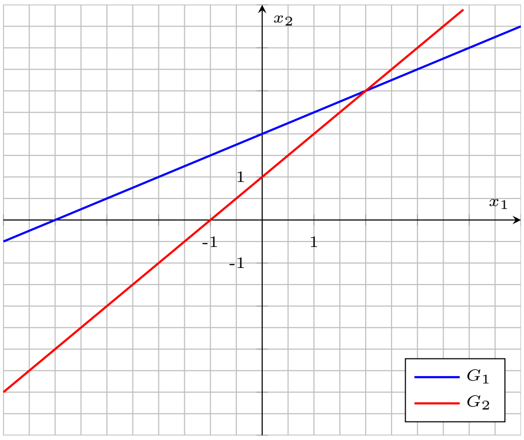
2. ***es besitzt unendlich viele Lösungen*** *oder*

3. ***es besitzt keine Lösungen****.*

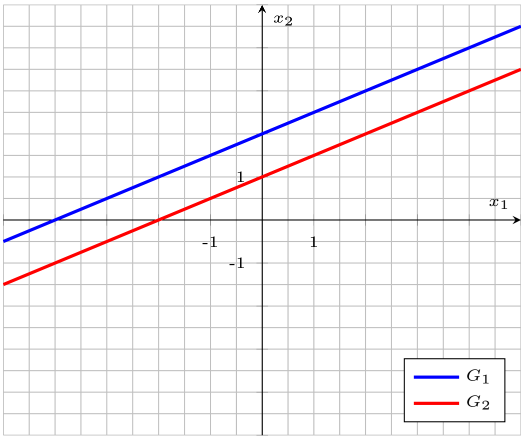
Da ein ***homogenes LGS*** *immer mindestens die triviale Lösung besitzt, können nur zwei Fälle auftreten:*

1. ***es besitzt genau eine Lösung*** $\vec{x} = \vec{0}$ *(triviale Lösung) oder*

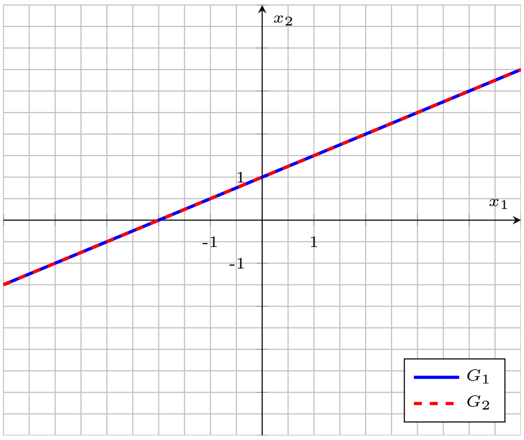
2. ***es besitzt unendlich viele Lösungen***



(a) eindeutige Lösung



(b) keine Lösung



(c) unendlich viele Lösungen

Abbildung 2.1: Lösungsverhalten eines inhomogenen LGS

2.3 Gaußsches Eliminationsverfahren

Es stellt sich nun die Frage, ob und wie ein LGS in ein äquivalentes LGS überführt werden kann, das einfach lösbar ist. Hier sei das Gleichungssystem quadratisch. Der allgemeine Fall geht entsprechend und wird in Mathematik II in der Vektoralgebra betrachtet. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn das Gleichungssystem gestaffelt d.h. in Form eines Dreiecks vorliegt. Damit ist folgendes gemeint:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,1} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

D.h. die Lösungsmenge darf sich nicht verändern.

Die erlaubten Operationen sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 2.1. ***(Elementare Zeilenumformungen eines LGS)*** *Die folgenden Operationen verändern die Lösungsmenge eines LGS nicht.*

1. *Die Reihenfolge der Gleichungen darf beliebig vertauscht werden.*
2. *Man darf jede Gleichung mit einer beliebigen Zahl multiplizieren, sofern die Zahl $\neq 0$ ist.*
3. *Man darf zu jeder Gleichung ein Vielfaches ($\neq 0$) einer anderen Gleichung hinzu addieren.*

Nun bildet man zunächst die **erweiterte Koeffizientenmatrix**, indem man die rechte Seite $\vec{c}$ an die Koeffizientenmatrix A rechts anfügt.

$$\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & c_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & c_m \end{array} \tag{2.10}$$

Nun kann eine systematische Vorgehensweise angegeben werden, die das Lösungsverhalten anzeigt sowie die Lösungen vollständig ermittelt.

Satz 2.2. *(Gaußsches Eliminationsverfahren)*
Die Schritte beziehen sich auf die erweiterte Koeffizientenmatrix.

1. *Schritt: Ist $a_{i,1} = 0$ wird diese Zeile stehen gelassen. Sonst:*
   Um in der i-ten Zeile eine Null zu erhalten: Multipliziere die 1. Zeile mit $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ und addiere dies zur i-ten Zeile. Führe diesen Schritt durch für alle Zeilen $2 \leq i \leq n$.
2. *Schritt: wiederhole Schritt 1 nun für die 2. Spalte sinngemäß. Ist $a_{i,2} = 0$ wird diese Zeile stehen gelassen. Sonst:*
   Multipliziere die 2. Zeile mit $-\frac{a_{i,2}}{a_{2,2}}$ und addiere das Ergebnis zur i-ten Zeile.
3. *Schritt: wiederhole Schritt 2 für die 3 Spalte sinngemäß usw.*
4. *das Verfahren ist beendet wenn das LGS in einer gestaffelten Form vorliegt*
5. *Die Lösung kann beginnend mit der untersten Zeile rekursiv bestimmt werden.*

Hinweis: die Multiplikation mit $-\frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$ führt zu Brüchen, was nicht schön ist. Bei kleinen Zahlen in der erweiterten Koeffizientenmatrix kann man alternativ z.B. die erste Zeile mit $-a_{i,1}$ multiplizieren und das Ergebnis zum $a_{1,1}$ Vielfachen der i-ten Zeile addieren. Hierbei wachsen bei größeren Systemen die Zahlen schnell an.

Hier wird meist die vereinfachte Variante durchgeführt.

Beispiel 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathit{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

*Gesucht ist der Lösungsvektor $\vec{x}$ mit $A\vec{x} = \vec{c}$. Die Vorgehensweise ist , dass man zunächst die um die rechte Seite **erweiterte Koeffizientenmatrix** aufstellt.*

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{array} \tag{2.12}$$

Nun kann man systematisch vorgehen und durch erlaubte Rechenoperationen diese erweiterte Koeffizientenmatrix äquivalent umformen. Das Schema ist so zu lesen: z.B. die erste Zeile wird zur doppelten 2.Zeile addiert (2. Z wird ersetzt durch 1.Z+ 2 $\times$ 2.Z). Dann 1.Z + (-1)3.Z.

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -1 & 0 & 1 & \cdot (1) \\ -1 & 3 & 8 & 2 & \cdot (2) \; + \\ 2 & -1 & 4 & 1 & \cdot (-1) \; + \end{array} \tag{2.13}$$

Dies liefert

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} . \tag{2.14}$$

Daraus liest man ab: $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$. Dieses LGS besitzt eine eindeutige Lösung.

Beispiel 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Die Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix sind:

$$\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & 1 & -2 & 0 & \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \\
\rightarrow & 1 & -1 & -2 & 0 & \cdot(1) \; + \\
 & 2 & 3 & -4 & 0 & \cdot(1) \; + \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & \\
\rightarrow & 0 & -2 & 0 & 0 & \cdot(-1) \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot(-2) \; + \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & \\
\rightarrow & 0 & -2 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array} \tag{2.16}$$

Die letzte Zeile ist immer erfüllt.Man wählt z.B. $x_3 = s \in \mathbb{R}$ *als freien Parameter. Das bedeutet es verbleiben noch 2 Bestimmungsgleichungen. Zeile 2 ist nur erfüllt für* $x_2 = 0$. *Zeile 1 wird nach* x_1 *aufgelöst:*

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 = 2s \qquad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Es existieren unendlich viele Lösungen.Sie liegen auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung.

Das folgende Beispiel zeigt, wie das Gaußsche Eliminationsverfahren den Fall keiner Lösung aufzeigt.

Beispiel 2.4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

Die Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix sind:

$$\begin{array}{cccccl}
 & 3 & 4 & 5 & 1 & | \cdot (-1) \quad | \cdot (-5) \\
\rightarrow & 1 & 1 & -1 & 2 & | \cdot (3) \; + \\
 & 5 & 6 & 3 & 4 & | \cdot (3) \; + \\
\hline
 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
\rightarrow & 0 & -1 & -8 & 5 & | \cdot (2) \\
 & 0 & -2 & -16 & 7 & | \cdot (-1) \; + \\
\hline
 & 3 & 4 & 5 & 1 & \\
\rightarrow & 0 & -1 & -8 & 5 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 3 &
\end{array} \tag{2.18}$$

Aus der letzten Zeile liest man einen Widerspruch ab. Es kann nicht $0x_1+0x_2+0x_3 = 3$ *sein. Dieses LGS besitzt keine Lösung.*

3 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Wir haben bisher als Beweistechniken den direkten Beweis kennen gelernt. Hierbei wird durch Anwendung bereits bewiesener Aussagen durch Umformungen eine neue Aussage bewiesen. Eine sehr starke aber anspruchsvolle weitere Möglichkeit ist der Beweis durch Widerspruch, der sog. indirekte Beweis. Man erzeugt die Negation der zu beweisenden Aussage und führt dies zum Widerspruch. Zusammen mit dem **logisches Prinzip des Widerspruchs** ergibt sich damit der eigentliche Beweis. Dies haben wir beim Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ angewandt. Ein Sonderfall liegt vor, wenn die zu beweisenden Aussagen sich auf den Bereich der natürlichen Zahlen beziehen. Z.B: Die Summe der Zahlen von 1 bis n ist $\frac{1}{2}n(n+1)$. Dies muss man dann für jede beliebige natürliche Zahl n zeigen. Nun kann dies im Einzelfall mit den bisherigen Methoden sehr schwierig sein (in diesen Beispielen wäre es das nicht). Hier kann man auf eine fundamentale Eigenschaft der natürlichen Zahlen zurückgreifen und eine sehr elegante Beweisführung aufbauen. Die natürlichen Zahlen besitzen folgende Eigenschaft:

Es gibt eine erste natürliche Zahl, nämlich 1
und zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen Nachfolger $n+1$.
Setzen wir zur Abkürzung:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n,$$

so lautet die zu beweisende Aussage:

$$A(n) : S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Bildet man die Aussage für $n+1$:

$$A(n+1) : \; S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = S_n + (n+1), \tag{3.2}$$

so erkennt man, dass die Summe der Zahlen von 1 bis $n+1$ sich auf die Summe der Zahlen von 1 bis n zurück führen lässt. Wüssten wir, dass die Aussage für n richtig wäre, könnte man sofort S_{n+1} bestimmen. Dann ist

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

also genau die zu beweisende Aussage $A(n+1)$. Ferner prüft man sofort nach, dass die zu beweisende Aussage für $n = 1$ richtig ist. Damit haben wir nun zwei Dinge in diesem Beispiel gezeigt:

1. die Aussage 3.2 ist richtig für $n = 1$,
2. wäre die Aussage für ein beliebiges n richtig, so ist sie auch für $n+1$ richtig.

Damit lässt sich dann die Kette aufbauen: $A(1)$ ist wahr$\Rightarrow$ $A(2)$ ist wahr$\Rightarrow$ $A(3)$ ist wahr$\Rightarrow$ $A(4)$ usw. Dies kann beliebig fortgeführt werden.
Fassen wir das zusammen, so lautet das **Prinzip der vollständigen Induktion**: Sei die zu beweisende Aussage:

$$A(n)\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

so sind folgende zwei Schritte zu zeigen:

1. zeige den **Induktionsanfang** für $n = 1$, A(1) ist wahr ,
2. zeige den **Induktionsschritt**:unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, so folgt $A(n+1)$ ist auch richtig.
   Dann sagt das **Prinzip der vollständigen Induktion**, dass aus 1.und 2. folgt, dass die Aussage für beliebiges n wahr ist.
   Hinweis: der Induktionsanfang muss nicht mit 1 beginnen, sondern es kann ein beliebiges n_0 sein. Dann gilt der Induktionsbeweis nur für $n \geq n_0$.

3.1 Binomische Lehrsatz

3.1.1 Fakultäten und Binominialkoeffizienten

Für $n \in \mathbb{N}$ wird das Produkt aller Zahlen von 1 bis n abgekürzt geschrieben durch die sog. Fakultäten.

Definition 3.1. ***(Fakultät)***
Für $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \;\; \textit{und} \;\; 0! = 1 \tag{3.3}$$

Lies: n Fakultät.

Man erkennt unmittelbar:

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

Die Binominialkoeffizienten werden definiert durch

Definition 3.2. ***(Binominialkoeffizienten)***

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} \tag{3.4}$$

lies: n über k.

Beachte, dass $0! = 1$ gesetzt wird. Für die Binominialkoeffizient gelten u.a. folgende Identitäten, die man leicht unter Anwendung der Definition beweist:

Satz 3.1. ***(Identitäten der Binominialkoeffizienten)***

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{3.5}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{3.6}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \tag{3.7}$$

Die Binominialkoeffizienten kann man in einem sog. **Pascalschen Dreieck** darstellen:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Als Beispiel für die Anwendung der vollständigen Induktion zeigen wir hier den binomischen Lehrsatz, der eine Erweiterung der binomischen Formeln ist.

Satz 3.2. ***(Binomischer Lehrsatz)***
Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; a^{n-k} \; b^k \tag{3.8}$$

Der Beweis wird durch vollständige Induktion geführt.

1. Induktionsanfang
   Zeige, dass (3.1.2) gültig ist für $n = 1$. Es ist

   $$\sum_{k=1}^{1} \binom{1}{k} \; a^{1-k} \; b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

   Also ist $A(1)$ richtig.

2. Induktionsschritt
   Gelte nun $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen nun zeigen: daraus folgt $A(n+1)$ ist auch richtig . Es ist

   $$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^k b^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{k+1}\ b^{n-k}}_{=S_1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ a^k\ b^{n+1-k}}_{=S_2}$$

Wir betrachten nun die Teilsummen S_1 und S_2:

$$S_1 = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\ a^k\ b^{n+1-k}$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\ a^k\ b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\ a^k\ b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

Wobei zunächst der Summationsindex verschoben wurde und das letzte Element der Summe aus der Summe heraus genommen wurde. Für $S_1 + S_2$ folgt:

$$S_1+S_2 = a^{n+1}+b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\ a^k\ b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\ a^k b^{n+1-k}$$

Dabei nutzen wir die Identität 3.6. Im letzten Schritt wird 3.7 verwendet $a^{n+1} = a^{n+1}\binom{n+1}{n+1}$ und $b^{n+1} = b^{n+1}\binom{n+1}{0}$, um die beiden ersten Summanden mit in das Summenzeichen einzubeziehen. Was A_{n+1} ist.
Aus dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt folgt mit dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Bernoullische Ungleichung

Ein weitere wichtige Beziehung kann mittels der vollständigen Induktion gezeigt werden.

Satz 3.3. ***(Bernoullische Ungleichung)***
Für $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$A(n): \quad (1+x)^n \geq 1+nx \tag{3.9}$$

Beweis mit vollständiger Induktion:Wegen $x > -1$ gilt $1 + x > 0$.

1. Induktionsanfang: Man prüft leicht, dass $A(0)$ wahr ist

2. Induktionsschritt: Es gelte $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

   $$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Also ist $A(n+1)$ auch wahr. Aus 1. und 2. folgt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung.

4 Folgen und Reihen

4.1 Folgen

Definition 4.1. ***(Folge)***
Eine Folge $\{a_n\}$ ist gegeben durch eine Zuordnung der natürlichen Zahlen zu den reellen Zahlen

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}.$$

Schreibweise:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

oder auch kürzer wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass es sich um eine Folge handelt: $a_n, \; n \in \mathbb{N}$. a_n heißt das n-te Glied der Folge.

Folgen kann man auch als eine besondere Art von Funktionen auffassen, bei denen der Definitionsbereich auf die natürlichen Zahlen reduziert ist. Insbesondere kann man aus bekannten Funktion so Folgen konstruieren. Dennoch ist diese Sichtweise (gerade für Unerfahrene) nicht unproblematisch, da wir (später) bei Funktionen noch besondere Eigenschaften kennen lernen werden, die es für Folgen nicht gibt. Daher soll dieser Aspekt nicht weiter vertieft werden.
Folgen erhalten in der digitalen Signalverarbeitung eine unmittelbare Bedeutung in der Elektrotechnik und Informatik: z. B. ist jedes abgetastete Signal eine Folge.

Beispiel 4.1. *Zeitdiskretisierung eines Signals Sei $s(t)$ ein beliebiges Signal und T eine Zeit. So bildet man den Wert (siehe Figur 4.1) zu* ***diskreten Zeiten*** *$t_k := kT$ ($k \in \mathbb{N}$):*

$$s_k := s(t_k) = s(kT)$$

Es entsteht eine Folge von sog. ***Abtastwerten****. T heißt Abtastperiode und $f_A := \frac{1}{T}$ ist die Abtastfrequenz. Damit ist man in der Theorie der* ***Digitalen Signale****. Wie T bzw. f_A zu wählen sind klärt das* ***Shannonsche Abtasttheorem****. Es bildet die Grundlage für alle digitale Signalverarbeitung und damit für die moderne Informationstechnologie. Mehr dazu erfahren Sie in der Vorlesung Signale und Systeme. Auch die Übertragung von Datenworten z.B. über Internet liefert Folgen.*

Einige weitere Beispiele:

Beispiel 4.2. *$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ist die ***harmonische Folge***

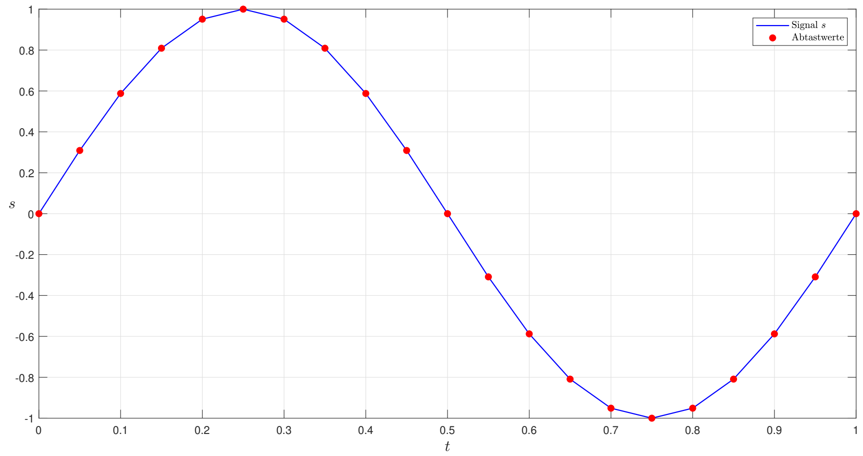


Abbildung 4.1: Abtastung

Beispiel 4.3. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$b_n = q^n$$

mit $q \in \mathbb{R}$ *heißt* ***geometrische Folge.***

Folgen können auch rekursiv definiert werden, d.h. durch eine Beziehung des Folgegliedes zu seinem Vorgänger und dem Anfang.

Beispiel 4.4.

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{2}{c_n}\right) \tag{4.1}$$

In Beispiel 4.4 sind alle Folgenglieder rationale Zahlen.

Definition 4.2. ***(Monotonie)***
Eine Folge a_n *heißt monoton wachsend (fallend), falls gilt*

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

bzw.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Gilt $>$ *(bzw.* $<$*) so heißt die Folge streng monoton wachsend (fallend).*

Definition 4.3. ***(beschränkte Folge)***
Eine Folge a_n *heißt nach oben (unten) beschränkt, falls gilt* $\exists\, K \in \mathbb{R}$*, so dass gilt:*

$$a_n \leq K \;\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$
$$K \leq a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.3}$$

Ist eine Folge nach oben und nach unten beschränkt, gilt also $|a_n| \leq K$*, so heißt die Folge beschränkt.*

4.1.1 Grenzwert einer Folge

Wir wollen nun den Begriff der Konvergenz einführen. Dazu betrachten wir das Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ ()siehe auch 4.2). Es ist stets $a_n > 0$ und die Folgenglieder werden immer kleiner. Sie nähern sich beliebig an 0 an sofern n nur groß genug wird. Man kann sogar so weit gehen und einen beliebigen kleinen Abstand von 0 vorgeben und dazu ein N_0 finden, so dass a_{N_0} und alle weiteren Glieder der Folge diesen vorgegeben Abstand zu 0 unterschreiten.
Dieses gedankliche Konstrukt fasst man in der Mathematik dadurch zusammen, dass man sagt es sei $\epsilon > 0$ eine **beliebige kleine Zahl**. Damit erfasst man das "unendlich Kleine".

Definition 4.4. ***(Konvergenz, Grenzwert)***
*Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent gegen den Grenzwert** $A \in \mathbb{R}, A < \infty$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n - A| < \epsilon \quad \forall \quad n > N_0 \tag{4.4}$$

*Ist die Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**.*

Manchmal wird im Fall divergenter Folgen von einem uneigentlichen Grenzwert ∞ gesprochen. Dieser Begriff ist etwas unglücklich, da er falsch verstanden werden könnte, in dem Sinn ∞ wäre nun doch ein Grenzwert. Das ist aber nicht gemeint. Vielmehr handelt es sich um eine einfachere Beschreibung der Tatsache, dass die Folge über alle Grenzen wächst.
Die obige Definition setzt voraus, dass der Grenzwert bekannt ist (d.h. man hat eine Vermutung welcher es sein könnte). Hinweis:

Satz 4.1. *Konvergiert ein Folge, so ist der Grenzwert eindeutig, d.h. eine Folge hat niemals zwei verschiedene Grenzwerte (ohne Beweis).*

Der Grenzwert A, falls er denn existiert, muss immer endlich sein. Unendlich ist kein Grenzwert. So ist z.B. die Folge $a_n = n$ divergent. Sie wächst, wie man sagt, über alle Grenzen. Ist eine Folge konvergent gegen den Grenzwert A so schreibt man dafür auch:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ oder: } \quad a_n \to A \quad \text{ für } \quad n \to \infty \text{ oder } \underset{n\to\infty}{a_n \to A} \tag{4.5}$$

Diese Schreibweise impliziert zwei Dinge: die Folge ist konvergent und sie besitzt den Grenzwert A. Ansonsten ist diese Schreibweise inhaltsleer und kann sogar grob falsch sein. Wesentlich ist auch, dass wir fordern, dass der Grenzwert im Bereich der reellen Zahlen liegen soll. Es gibt z.B. Folgen mit rationalen Gliedern, deren Grenzwert aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegt siehe Beispiel 4.4.

Definition 4.5. ***(Nullfolge)***
*Besitzt eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert 0, so heißt die Folge **Nullfolge**.*

Lemma 4.1. *Die harmonische Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt für $n > N$:

$$|\frac{1}{n} - 0\,| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

Lemma 4.2. *Die geometrische Folge q^n ist für $|q| < 1$ eine Nullfolge.*

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.Für $q = 0$ ist die Aussage trivial. Also sei $q \neq 0$, Wegen $|q| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|q|} > 1$, existiert ein $x \in \mathbb{R}, x > 0$, mit $\frac{1}{|q|} = 1 + x$. Wähle $N > \frac{1}{x\epsilon}$. ist .Dann gilt für $n > N$:

$$|q^n - 0| = |q^n| = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx} < \frac{1}{Nx} < \epsilon.$$

Dabei haben wir von der Bernoullischen Ungleichung 3.9 Gebrauch gemacht. Man kann sich gut überlegen, dass eine Folge, die z.B. nach unten beschränkt ist und monoton fallend ist, diese Eigenschaft nur besitzen kann, wenn die Differenz aufeinander folgender Glieder kontinuierlich kleiner wird. Der folgende Satz liefert ein Kriterium für die Konvergenz einer Folge.

Satz 4.2. ***(Monotoniesatz)***
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ist die Folge nach oben (unten) beschränkt und monoton wachsend (fallend), so ist sie konvergent.

Dieser Satz ist anschaulich leicht verständlich wie nachfolgende Figur 4.2 zeigt:

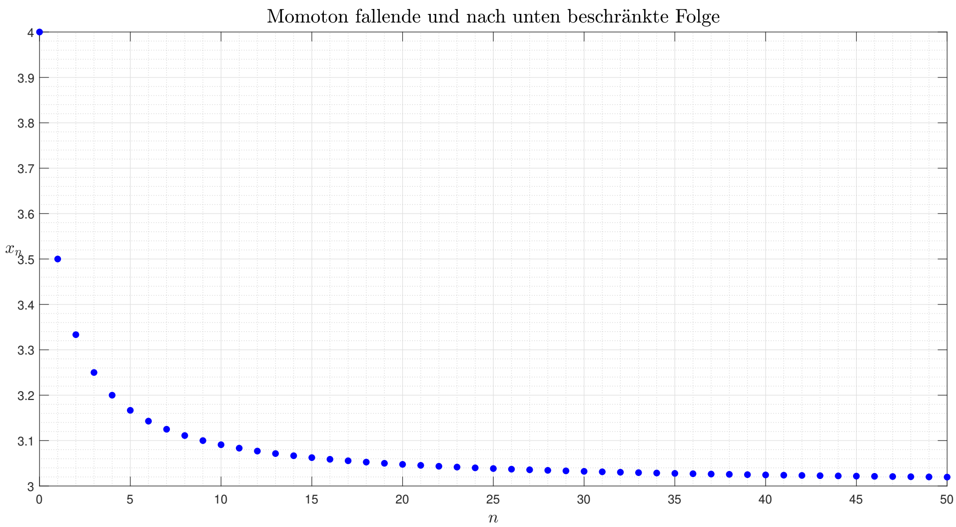


Abbildung 4.2: Monoton fallende und nach unten beschränkte Folge

Hierbei wird allerdings keine Aussage über den Grenzwert gemacht. Dennoch ist das Kriterium häufig sehr nützlich wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.5. ***Verfahren von Heron*** *oder* ***Babylonisches Wurzelziehen***

$$c_0 \geq 0, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{a}{c_n}\right), \; n \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

Wir zeigen dazu, dass die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

1. *Zunächst stellt man fest, dass c_{n+1} positiv sein muss, falls c_n positiv ist. Da c_0 positiv ist, gilt dies also für alle Glieder der Folge.*

2. *die Folge ist nach unten beschränkt durch $\sqrt{a}$: Es ist $(n \geq 1)$*

$$c_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(c_n^2 + 2a + \frac{a^2}{c_n^2}\right) - a = \frac{c_n^2}{4} - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4c_n^2} = \frac{1}{4}\left(c_n - \frac{a}{c_n}\right)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c_{n+1}^2 > a$$

Mit $c_{n+1} > 0$ folgt $c_{n+1} > \sqrt{a}$

3. *Die Folge ist monoton fallend, denn*

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c_n} - c_n\right) = \frac{a - c_n^2}{2c_n} \leq 0$$

(Im letzten Schritt ist $c_n \geq \sqrt{a}$ verwendet worden.)

Die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt. Damit existiert nach Satz (4.2) ein Grenzwert. Diesen bezeichnen wir mit C. Es gilt ferner $\lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} c_n = C$. Bilden wir in 4.6 den Grenzwert auf beiden Seiten, erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für C:

$$C = \frac{1}{2}\left(C + \frac{a}{C}\right)$$

. Auflösen nach C ergibt: $C = \sqrt{a}$. Dieses Ergebnis ist bemerkenswert. Ausgehend von einer beliebigen positiven rationalen Zahl c_0 sind alle Glieder der Folge rationale Zahlen (in der Iterationsvorschrift treten nur Addition, Multiplikation und Division auf). Aber der Grenzwert liegt nicht notwendig im Bereich der rationalen Zahlen (z.B. für a=2), sondern in $\mathbb{R}$! Üblicherweise lernt man in der Schule die reellen Zahlen über eine Intervallschachtelung kennen. Hier eröffnet sich ein ganz anderer (mehr analytischer Weg) die reellen Zahlen über die Konvergenz von Reihen. Dies wird hier nicht weiter verfolgt.

Ein weiteres Beispiel zeigt, wie man mittels einer rekursiven Folge eine Division numerisch durchführt nur mittels Addition und Multiplikation.

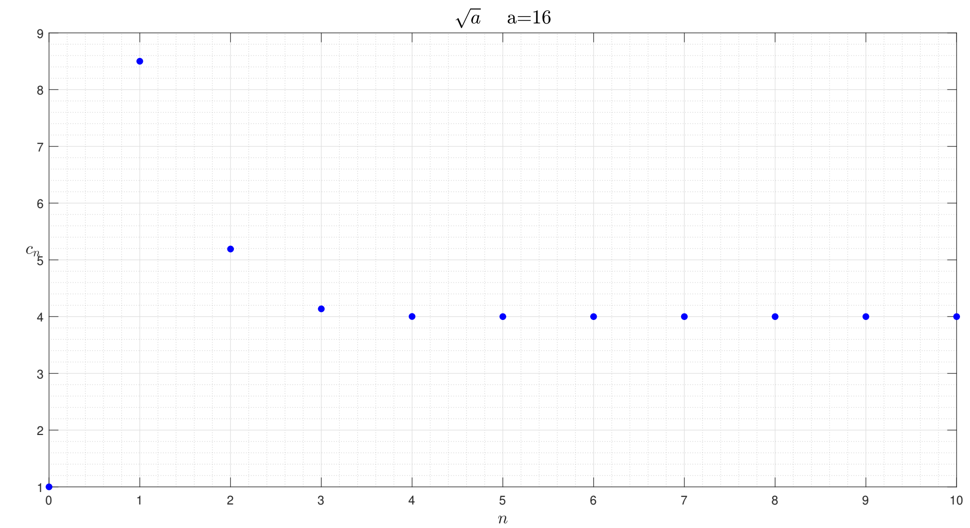


Abbildung 4.3: Babylonisches Wurzelziehen (Verfahren von Heron)

Beispiel 4.6. ***Numerische Division*** *Wir betrachten die Folge ($a > 0$)*

$$x_{n+1} = (2 - ax_n)x_n.$$

Hier benötigt man eine Abschätzung für einen Startwert (was in der Praxis meist kein Problem ist): $0 < x_0 < \frac{1}{a}$). Dann konvergiert die Folge gegen $\frac{1}{a}$. Ein Beispiel ist in der Grafik 4.4 gegeben.

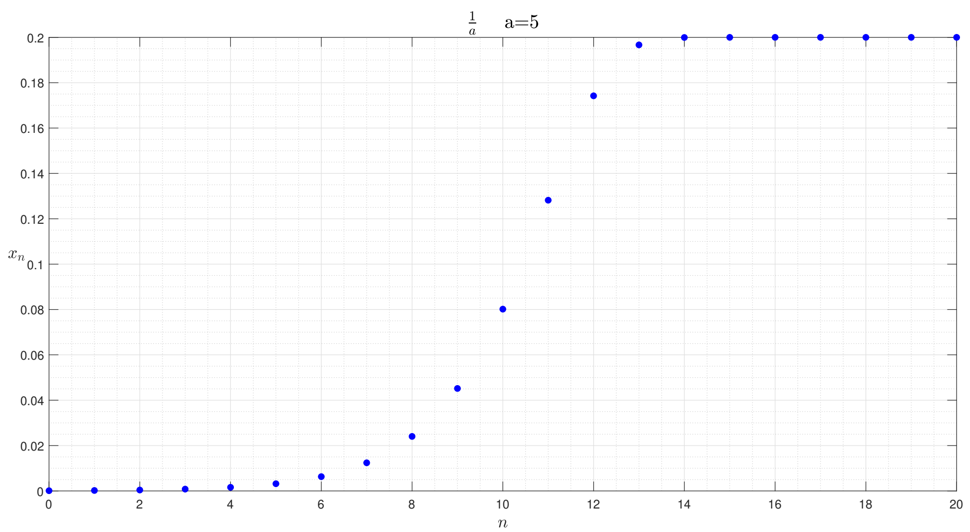


Abbildung 4.4: numerische Division

Beide Beispiele werden auf Rechner und Mikroprozessoren eingesetzt, da

diese nur Addition und Multiplikation als Rechenoperationen können.

4.1.2 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Der folgende Satz fasst Rechenregel für konvergente Folgen zusammen.

Satz 4.3. ***(Rechenregeln für konvergente Folgen)*** *Seien* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Sei $c \in \mathbb{R}$ *eine Konstante.*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c\, A$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A + B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *für* $b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, *und* $B \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$
5. ***(Einschließungskriterium)*** *Sei* $a_n \le c_n \le b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \to G$ *und* $b_n \to G$ *für eine Folge* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Dann gilt:*

$$c_n \to G.$$

Nicht immer können die Rechenregeln unmittelbar angewendet werden wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.7. *Es sei durch*

$$a_n = \frac{2n^3 + n^2 + n}{5n^3 + 4}$$

eine Folge gegeben.

Um die Regeln anwenden zu können, muß die Folge erst geeignet umgeformt werden. Dazu kürzt man durch die höchste auftretende Potenz von n.

$$a_n = \frac{2 + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^3}}$$

Auf diesen Ausdruck können nun die Rechenregel für Grenzwerte angewandt werden. Dies liefert zusammen mit 4.1:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5}.$$

Die Rechenregeln setzen voraus, dass die Folgen konvergent sind. Nur dann sind sie anwendbar. Das bedeutet jedoch nicht, dass wenn sie nicht anwendbar sind, die Folge, die aus zwei divergenten Folgen gebildet wird auch divergent ist. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 4.8. *Seien* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit*

$$a_n = \sqrt{n+1}$$

$$b_n = \sqrt{n}$$

Betrachte wir nun

$$c_n = a_n - b_n.$$

Auf diese Folge können die Rechenregeln nicht unmittelbar angewendet werden, da a_n *und* b_n *beide offensichtlich divergent sind. Dazu muss der Ausdruck erst geeignet umgeformt werden:*

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad (4.7)\\ &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \to 0\,\frac{1}{2} = 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Darauf können wir nun die Grenzwertregeln anwenden.

4.2 Reihen

Mit Hilfe von Folgen können wir wiederum neue Folge konstruieren. Hier werden zunächst die sog. numerischen Reihen betrachtet, die mittels Folgen aus Zahlen gebildet werden. In Mathematik II werden weitere Reihen aus Funktionen gebildet werden (Potenzreihen, Taylor Reihen) und in Signale und Systeme werden die Fourier Reihen behandelt werden, die in der Elektrotechnik eine wesentliche Rolle spielen.

Definition 4.6. ***(numerische Reihe)***

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.8}$$

eine Folge. Betrachte nun

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

dann heißt die durch

$$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.10}$$

gegebene Folge eine Reihe (in der älteren Literatur auch als unendliche Reihe bezeichnet[a]*) und S_n n-te Partialsumme. Hier können wir uns dann auch fragen, ob diese Reihen konvergent sind. Man schreibt eine Reihe symbolisch wie folgt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.11}$$

a_k heißen Glieder der Reihe.

[a] Eine Reihe ist nach heutiger Literatur stets eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Eine Summe dagegen umfasst endlich viele Summanden. Nach heutiger präziserer Bezeichnung ist eine unendliche Reihe eine Tautologie (wie ein weißer Schimmel sie ist).

Definition 4.7. ***(Grenzwert einer Reihe)***
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\ , \tag{4.12}$$

so ist die Reihe (bedingt) ***konvergent****. Sonst heißt sie divergent. Existiert sogar der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

so ist die Reihe ***absolut konvergent****.*

Schreibweisen:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.13}$$

Mit dem Symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.14}$$

verbindet man somit einmal die Reihe selbst s. 4.10 und dass die Reihe einen Grenzwert besitzt. Was im Einzelfall noch zu prüfen ist.
Wenn im Folgenden von einer Reihe gesprochen wird, ist ein Ausdruck der Form 4.14 gemeint.

Satz 4.4. ***(notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe)***
Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.15}$$

eine konvergente Reihe.

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{4.16}$$

Folgerung 4.1. *Der obige Satz liefert nur ein notwendiges Kriterium. Man kann aus* $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$ *nicht schließen, dass die mit* a_k *gebildete Reihe konvergent ist! Allerdings kann man schließen: aus*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

folgt, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.17}$$

divergent sein muß.

Ein wichtiges Beispiel ist

Definition 4.8. ***(harmonische Reihe)***
$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den Partialsummen*

$$S_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{4.18}$$

heißt harmonische Reihe.

Anhand dieses Beispiels kann die Aussage der Folgerung 4.1 demonstriert werden.

Lemma 4.3. *Die harmonische Reihe ist divergent.*

Beweis: Die n-te Partialsumme S_n kann wie folgt nach unten abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \end{aligned} \tag{4.19}$$

Daraus folgt, dass die Summe über alle Grenzen wächst.

Beispiel 4.9. ***(geometrische Reihe)***
Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ mit } q \in \mathbb{R} \tag{4.20}$$

heißt ***geometrische Reihe****. Ihre Partialsumme*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \text{ mit } q \in \mathbb{R} \tag{4.21}$$

heißt ***geometrische Summe****.*

Es gilt

Lemma 4.4. *Für die geometrische Summe ($n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$) gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{4.22}$$

Beweis: Es ist

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right) - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

woraus 4.22 folgt.

Lemma 4.5. *Die geometrische Reihe 4.20 ist konvergent für $|q| < 1$ und besitzt den Grenzwert $\dfrac{1}{1-q}$*

Beweis: Für die Partialsumme gilt gemäß 4.22. q^{n+1} ist eine geometrische Folge und für $|q| < 1$ eine Nullfolge.

Satz 4.5. ***(Quotientenkriterium)***
Sei

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q; \tag{4.23}$$

hier wird der uneigentliche Grenzwert ∞ ebenfalls zugelassen.
Ist

1. *$q < 1$ dann konvergiert die Reihe absolut.*

2. *$q > 1$ dann ist die Reihe divergent.*

3. *$q = 1$ dann ist keine Entscheigung möglich.*

Eine weitere Möglichkeit, die auf Konvergenz zu prüfen liefert der folgende Satz.

Satz 4.6. ***(Wurzelkriterium)***
Sei

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \tag{4.24}$$

hier wird der uneigentliche Grenzwert ∞ *ebenfalls zugelassen.*
Ist

1. $q < 1$ *dann konvergiert die Reihe absolut.*
2. $q > 1$ *dann ist die Reihe divergent.*
3. $q = 1$ *dann ist keine Entscheigung möglich.*

Sind die Grenzwerte 1, so ist keine Entscheidung möglich (mit diesen Kriterien). Man muss dann über andere Methoden versuchen herauszufinden ob die Reihe konvergiert oder divergiert. Beides ist dann möglich.

4.2.1 Rechenregeln für konvergente Reihen

Für Reihen gelten die Rechenregeln der Addition (Subtraktion):

Satz 4.7. ***(Addition von Reihen)***
Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen.*
Dann gelten:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ *ist konvergent,*
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k - \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$ *ist konvergent,*
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \;, \quad c \in \mathbb{R}$

5 Funktionen

5.1 Definition der Funktion

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Einführung des Begriffs der Funktion und einfachen ersten Eigenschaften befassen. Ferner werden wir erste elementare Funktionen kennen lernen. Die Notwendigkeit und den Sinn einer Funktion kann man z.B. aus einfachen Gesetzen der Physik herleiten.
Aus der Schule ist der Versuch vom freien Fall bekannt. Man misst die Zeit, die z.B. eine Kugel vom Loslassen bis zum Auftreffen auf eine Unterlage benötigt Dann trägt man die gemessenen Werte in eine Tabelle ein. Dann wird eine Formel gesucht, die den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg und der benötigten Zeit beschreibt.(Wir kennen sie: $s = \frac{1}{2}gt^2$)
Eine auffallende Eigenschaft der Tabelle und physikalischer Zusammenhänge ist folgendes: wiederholt man den Versuch mehrmals, so stellt sich zu einer gegebenen Zeit immer der gleiche Weg ein und es gibt zu jeder Zeit nur einen zurückgelegten Weg.
Wir fassen dies wie folgt zusammen:

Definition 5.1. ***(Funktion)***
Eine Funktion f soll eine Menge von Zahlenpaaren (x, y) sein, mit den Eigenschaften

1. *es soll zu einem x **genau ein** y existieren ,*
2. *die Menge aller x für die die Funktion f erklärt ist, heißt **Definitionsbereich** D_f*
3. *die Menge aller y zu denen es ein $x \in D_f$ existiert mit $(x, y) \in f$ heißt **Wertebereich** W_f von f, Den Definitionsbereich nennt man auch **Urbild** und den Wertebereich **Bild** der Funktion. Damit wird der Abbildungscharakter hervorgehoben.*
   x heißt unabhängige Variable, y heißt abhängige Variable.
4. *die Funktion ist unabhängig von den Bezeichnungen der Variablen, die Funktion wird durch die Abbildungsvorschrift $s = f(t)$ gegeben.*

Man beachte: die Funktion heißt f und nicht, wie man häufig sieht$f(x)$. $f(x)$ ist der Wert der Funktion an einer beliebigen festen Stelle $x \in D_f$. Außerdem werden wir sehen, dass die Abbildungsvorschrift nicht nur durch $y = f(x)$ gegeben sein kann, sondern es auch noch andere Darstellungen gibt. Dennoch ist es ein nachsehbarer Fehler,

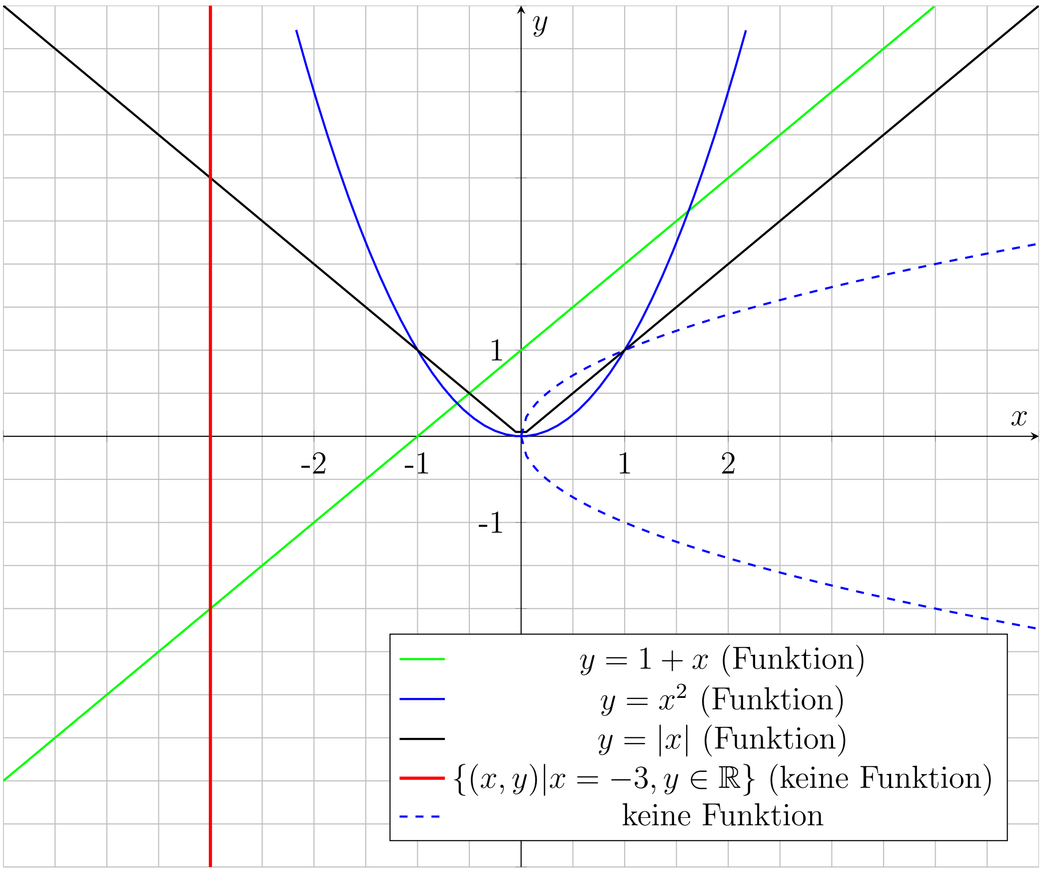


Abbildung 5.1: Beispiele Funktionen und keine Funktionen

wenn man als Funktion die Abbildungsvorschrift angibt. Wir werden es hier auch nicht streng handhaben.
Funktionen können in Form von Graphen veranschaulicht werden. Aber: **nicht jeder Graph lässt sich durch eine Funktion beschreiben**. Siehe dazu auch Figur 5.1.
Die Bedingung 1 bedeutet grafisch, dass jede Parallele zur y- Achse den Graph nur in einem Punkt schneiden darf.
Dazu diene das folgende einfache Beispiel: jede parallele Gerade zur y- Achse hat die Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte der x- Wert gleich ist. D.h., wäre es eine Funktion dürfte zu jedem x nur genau ein y existieren. In diesem Fall wären es sogar unendlich viele y- Werte. Ein weiteres Beispiel ist ein Kreis. Die Punkte (x, y) auf einem Kreis genügen der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dabei ist r der Radius des Kreises.

$$\Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

je nach dem, ob $y > 0$ oder $y < 0$ ist. Also existiert hier zu jedem x mehr als genau ein y- Wert, was man auch sofort am Graphen eines Kreises sieht. In Kapitel 6 wird gezeigt, wie man in solchen Situationen mit Hilfe von sog. Parameterdarstellungen weiter kommt. Hinweis: die Definition lässt sehr wohl zu, dass verschiedenen x- Werte derselbe y Wert zugewiesen wird.(z.B. man kann durchaus eine vorgegebene Strecke in unterschiedlichen Zeiten zurück legen!) Es ist sehr wichtig, dass man die Definition einer Funktion gut verstanden hat! Schreibweisen (Beispiele):

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R} \text{ Funktionsgleichung}$$

$$f : x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R} \text{ Abbildungsvorschrift}$$

Als Buchstaben für Funktionen benutzt man meist f, g, h, evtl. mit zusätzlichem Index, falls die Anzahl der Buchstaben nicht ausreicht.

Definition 5.2. ***(Nullstellen einer Funktion)***
$x_0 \in D_f$ heißt ***Nullstelle der Funktion*** *f, falls gilt*

$$f(x_0) = 0. \tag{5.1}$$

5.2 Elementare Eigenschaften von Funktionen

Funktionen können einige der folgenden Eigenschaften besitzen (aber sie müssen keine der Eigenschaften aufweisen):

Definition 5.3. ***(Symmetrieeigenschaften)***

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ heißt gerade Funktion} \\ f(-x) = -f(x) \quad &\Rightarrow \quad f \textit{ heißt ungerade Funktion} \end{aligned}$$

Definition 5.4. ***(Monotonie)***
Eine Funktion f heißt

monoton wachsend wenn gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
monoton fallend wenn gilt $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton wachsend wenn gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
streng monoton fallend wenn gilt $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hinweis: diese Eigenschaften können auch nur auf Teilmengen des Definitionsbereiches gelten.

Definition 5.5. ***(Beschränktheit)***
Existiert ein M und gilt auf einem Intervall $I \subset D_f$ $f(x) \leq M$, ist f nach oben beschränkt.
Existiert ein m und gilt auf einem Intervall $I \subset D_f$ $f(x) \geq m$, ist f nach unten beschränkt.
Existiert ein K mit $|f(x)| \leq K$, ist f beschränkt (also nach unten und nach oben beschränkt).

Definition 5.6. ***(periodische Funktion)***
Existiert für eine Funktion f ein $p \in \mathbb{R}$ so dass gilt
$f(x+p) = f(x) \qquad \forall x \in D_f$
heißt f periodisch mit Periode p

In den nachfolgenden Abschnitten werden einige wichtige elementare Funktionen vorgestellt.

5.3 Polynome

Definition 5.7. ***(Polynom)***
Ein Ausdruck der Form

$$p_n(x) := a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{5.2}$$

*mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_k \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ heißt **Polynom n-ten Grades** oder **ganz-rationale Funktion**.*
Die Größen a_k heißen Koeffizienten des Polynoms.
Die Nullstellen werden manchmal als Wurzeln des Polynoms bezeichnet.
*Die Ausdrücke x^k bezeichnet man als **Monome**.*

Definitions- und Wertebereich:
Es ist offensichtlich $D_{p_n} = \mathbb{R}$ und $W_{p_n} \subset \mathbb{R}$.
Die höchste auftretenden Potenz von x gibt den Grad (n) des Polynoms an.

Beispiel 5.1. *$p_0(x) = a_0$ ist die konstante Funktion: jedem $x \in \mathbb{R}$ wird derselbe Funktionswert a_0 zugewiesen. Der Graph ist eine Gerade parallel zur x- Achse. Es existiert keine Nullstelle, außer wenn $a_0 = 0$, dann sind alle Funktionswerte 0 und es existieren unendlich viele Nullstellen.*

Satz 5.1. ***(Gleichheit von Polynomen)***
Zwei Polynome $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$ sind gleich, wenn gilt:

$$p_n(x) = q_n(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Sind zwei Polynome p_n und q_n gleich $\Leftrightarrow a_k = b_k$

Obiger Satz sagt, dass man durch Koeffizientenvergleich die Gleichheit prüfen kann.

Beispiel 5.2. ***(quadratische Funktion)***
$p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ heißen quadratische Polynome. Sie lassen sich auch darstellen durch die Normalform (wegen $a_2 \neq 0$):

$$p_2(x) = a_2(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}) = a_2 \underbrace{(x^2 + px + q)}_{\tilde{p}_2(x)} \tag{5.4}$$

wobei

$$p = \frac{a_1}{a_2} \text{ und } q = \frac{a_0}{a_2} \tag{5.5}$$

gesetzt wird.
Sie beschreiben Parabeln. Die Diskriminante ist:

$$D = \frac{p^2}{4} - q$$

Die Nullstellen sind für $D \geq 0$

$$x_{1,2} = -\frac{-a1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \tag{5.6}$$

*Ist $D = 0$, so ist die Nullstelle doppelt vorhanden. Ist dagegen $D < 0$, so existieren keine reellen Nullstellen und das Polynom heißt **irreduzibel**. Seien $x_{1,2}$ die Nullstellen,so kann das Polynom in Normalform $\tilde{p_2}$ auch in faktorisierter Form ausgedrückt werden durch (was man durch Nachrechnen bestätigt):*

$$p_2(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2) = a_2(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \tag{5.7}$$

*Man sagt, dass man das Polynom in **Linearfaktoren zerlegt** hat (weil jeder Faktor eine lineare Funktion (s. Beispiel **??** ist)). Daraus folgt durch Koeffizientenvergleich der Vietascher Wurzelsatz(nach F. Vieta um 1600):*

Mit folgendem Satz kann man oft durch scharfes Hingucken die Nullstellen eines quadratischen Polynoms finden.

Satz 5.2. ***(Satz von Vieta)***

$$p = -(x_1 + x_2),\ q = x_1x_2 \tag{5.8}$$

Beispiel 5.3.

$$p_2(x) = x^2 - 5x + 6$$

hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3 \Rightarrow p_2(x) = (x - 2)(x - 3)$ Ist die Diskriminante 0, so ist die Nullstelle doppelt vorhanden und das Polynom lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$p_2(x) = a_2(x - x_1)^2 \tag{5.9}$$

Hat man Polynome höheren Grades, so ist die Bestimmung bis auf einige Sonderfälle kaum möglich (für Polynome 3. Grades gibt es noch geschlossene Darstellungen).

5.3.1 Fundamentalsatz der Algebra

Die obigen Beispiele legen den Schluss nahe, dass Polynome auch höheren Grades faktorisiert werden können Dabei spielen wie in den Beispielen die Nullstellen die entscheidende Rolle. Der folgende Satz hat C.F. Gauß um 1800 viel beschäftigt und von ihm stammen mehrere Beweisvarianten.

Satz 5.3. ***(Fundamentalsatz der Algebra)***
Jedes nicht-konstante Polynom n-ten Grades p_n $(n > 0)$ mit reellen Koeffizienten hat höchstens n (reelle) Nullstellen (mehrfache Nullstellen werden mit ihrer Vielfachheit gezählt). Sei die Anzahl der Nullstellen $m \leq n$ (wobei die Nullstellen mehrfach auftreten können). Es lässt sich faktorisieren:

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) \cdot Q_{n-m}(x) \tag{5.10}$$

Dabei ist $Q_{n-m}(x)$ der sog. irreduzible Anteil (er muss nicht auftreten):

$$Q_{n-m} = \prod_{j=1}^{(n-m)/2} (x^2 + c_j x + d_j) \quad \textit{mit } c_j, d_j \in \mathbb{R} \;\; (1 \leq j \leq (n-m))$$

d.h. ein Polynom vom Grad $n - m$, das aus einem Produkt von Polynomen 2. Grades besteht, deren Diskriminante alle

$$D_j = {c_j}^2 - 4d_j < 0;, \quad (1 \leq j \leq n - m)$$

sind.

Hinweis: sobald wir die sog. komplexen Zahlen eingeführt haben, können wir Wurzeln aus negativen Zahlen erklären und es tauchen im Bereich der komplexen Zahlen keine irreduziblen Anteile mehr auf. D.h. ein Polynom hat genau n (komplexe) Nullstellen und kann damit vollständig faktorisiert werden.

Folgerung 5.1. *Da der irreduzible Anteil ein Produkt von Polynomen 2. Grades ist, muss $n - m$ in (4.2.7) gerade sein. Daraus folgt, dass für n ungerade mindestens eine reelle Nullstelle und somit ein Linearfaktor existiert. Für n gerade kann das nicht gefolgert werden. Das bedeutet jedoch nicht, dass es keine Linearfaktoren besitzt.*

Beispiel 5.4.

$$p_5(x) = (x - 1)(x^2 + 4)(x^2 + 1)$$

hat zwei irreduzible Anteile, somit ist hier

$$Q_4(x) = (x^2 + 4)(x^2 + 1)$$

ein Polynom 4. Grades.

5.3.2 Polynomdivision

Hat man eine Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades, so kann man einen Linearfaktor durch Polynomdivision abspalten und erhält ein Polynom $n - 1$ -ten Grades. Dieses

Verfahren wird uns häufig begegnen. Es wird wie die schriftliche Division bei Zahlen durchgeführt. Dazu ein Beispiel:

Beispiel 5.5.

$$p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Eine Nullstelle $x_0 = 1$ kann man leicht erraten (scharfes Hinsehen).

$$\begin{array}{l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : x - 1 = x^2 - 5x + 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad - 5x^2 + 11x \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad\qquad 6x - 6 \\
\qquad\qquad \underline{6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das Polynom $x^2 - 5x + 6$ kann man mit dem Vietaschen Wurzelsatz behandeln 5.8 und erhält

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

. Insgesamt ist die vollständige Faktorisierung damit:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

5.4 Gebrochen rationale Funktionen

Mittels der Polynome können wir nun weitere Funktionen erklären.

Definition 5.8. ***(gebrochen rationale Funktion)***
Seien p_n und q_m Polynome ($n, m \in \mathbb{N}$).
Eine rationale Funktion f ist definiert als:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{5.11}$$

Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f sind

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} |\; q_m(x) \neq 0\} \quad W_f \subset \mathbb{R} \tag{5.12}$$

Die Nullstellen x_i des Nenners ($q_m(x_i) = 0$) heißen Definitionslücken.

Ist $n < m$ so heißt die gebrochen rationale Funktion **echt gebrochen rational**. Ist $n \geq m$ heißt sie **unecht gebrochen rationale** Funktion.

Beispiel 5.6.

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Der Graph der Funktion ist in 5.2 dargestellt.

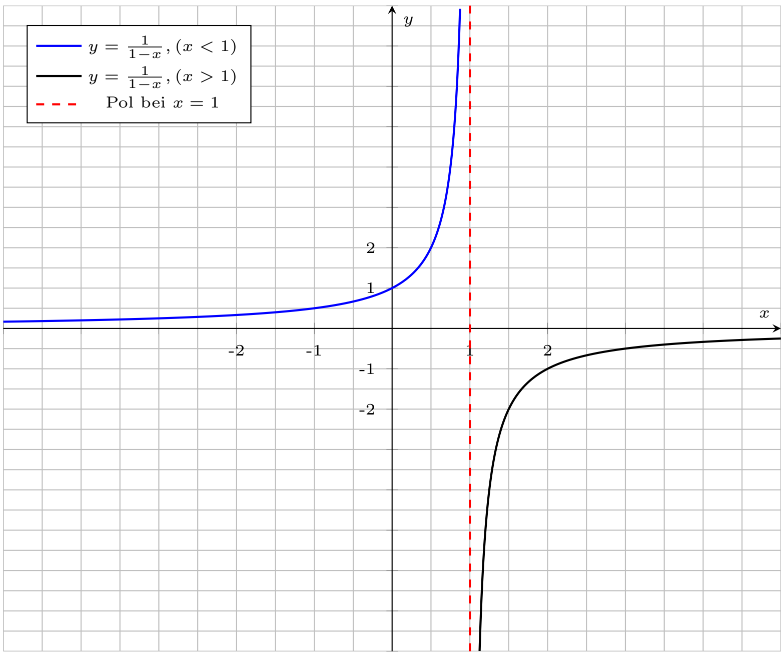


Abbildung 5.2: $y = \frac{1}{1-x}$

Beispiel 5.7.

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Dies ist eine unecht gebrochen rationale Funktion mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *Sie läßt sich durch Polynomdivision umformen:*

$$x : x - 1 = 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\underline{-(x-1)}$$

$$0 \cdot x + 1$$

Der Graph ist in 5.3 dargestellt.

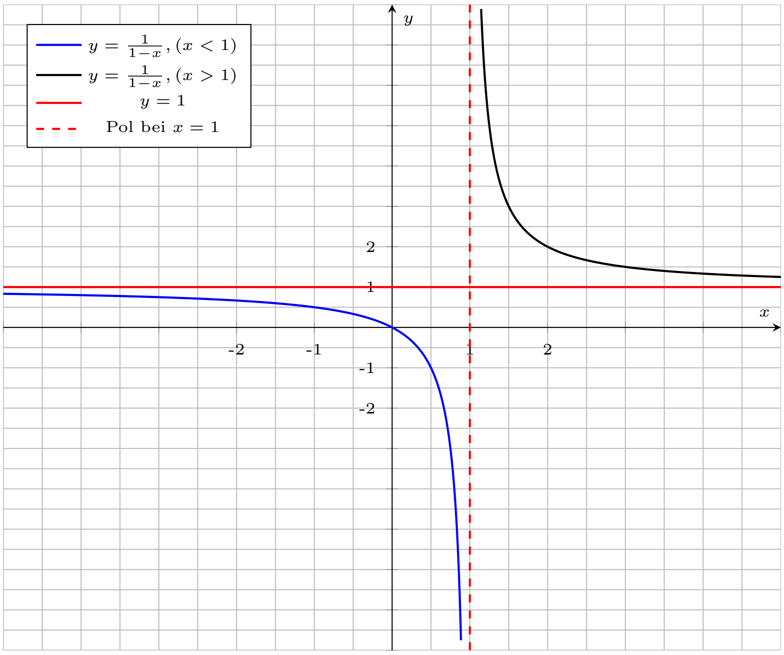


Abbildung 5.3: $y = \frac{x}{x-1}$

Beispiel 5.8.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

Dies ist ebenfalls eine unecht gebrochen rationale Funktion (Zählergrad ist 2 *Nennergrad ist* 1*) mit* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$*. Sie lässt sich durch Polynomdivision umformen:*

$$\begin{array}{l} x^2 : x - 1 = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} \\ \underline{-(x^2 - x)} \\ \quad\quad x \\ \quad\quad \underline{-(x-1)} \\ \quad\quad 0 \cdot x + 1 \end{array}$$

Hier besteht also die unecht gebrochen rationale Funktion aus einem polynomialen Anteil $x + 1$ *und der echt gebrochen rationalen Funktion* $\frac{1}{x-1}$*. Die Funktion ist ist in 5.4 dargestellt.*

Die Lehre aus den Beispielen 5.7 und 5.8 läßt sich als Verallgemeinerung zusammenfassen:

Folgerung 5.2. *Eine unecht gebrochen rationale Funktion kann stets als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenen rationalen Funktion geschrieben werden (ggf. nach Polynomdivision). Es verhält sich vergleichbar zu den rationalen Zahlen (echte und unechte Brüche).*

$$f(x) = p(x) + \frac{p_k(x)}{q_l(x)} \quad \textit{mit} \quad l > k \tag{5.13}$$

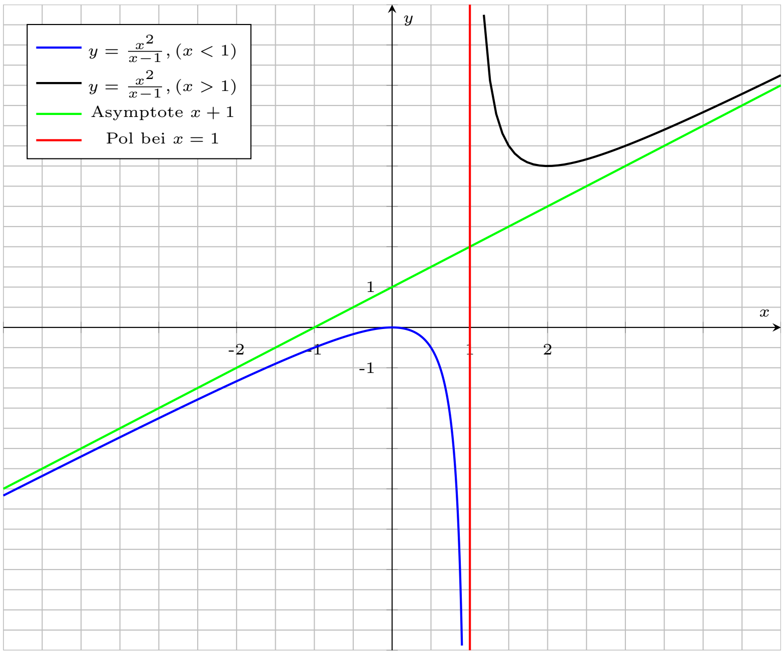


Abbildung 5.4: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Beispiel 5.9.

$$g(x) = \frac{1-x^2}{1-x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Siehe Figur 5.5. Man könnte bei diesem Beispiel auch den Zähler umschreiben zu

$$\frac{(1-x)(1+x)}{1-x} \tag{5.14}$$

und kürzen wollen:

$$h(x) := 1 + x\,, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Dies würde als Definitionsbereich $\mathbb{R}$ *ergeben.*
Aber diese Vorgehensweise ist nicht richtig, schließlich hätten wir dann an der Stelle $x = 1$ *die* ***unumstößliche Regel*** *verletzt, dass man* ***nicht durch 0 dividieren*** *darf. Durch 5.14 wird eine andere Funktion h definiert, die zwar überall außer bei* $x = 1$ *mit g übereinstimmt, aber eben nicht an dieser Stelle. Korrekt ist es also so:*

$$g(x) = h(x) = 1 + x \qquad \textit{für} \quad 1 \neq x \in \mathbb{R}$$

Insofern sind es verschiedene Funktionen. *Eine völlig andere Frage ist ob man h sinnvoll verwenden kann. Dies ist tatsächlich möglich wie später bei der Stetigkeit ausgeführt werden wird.*

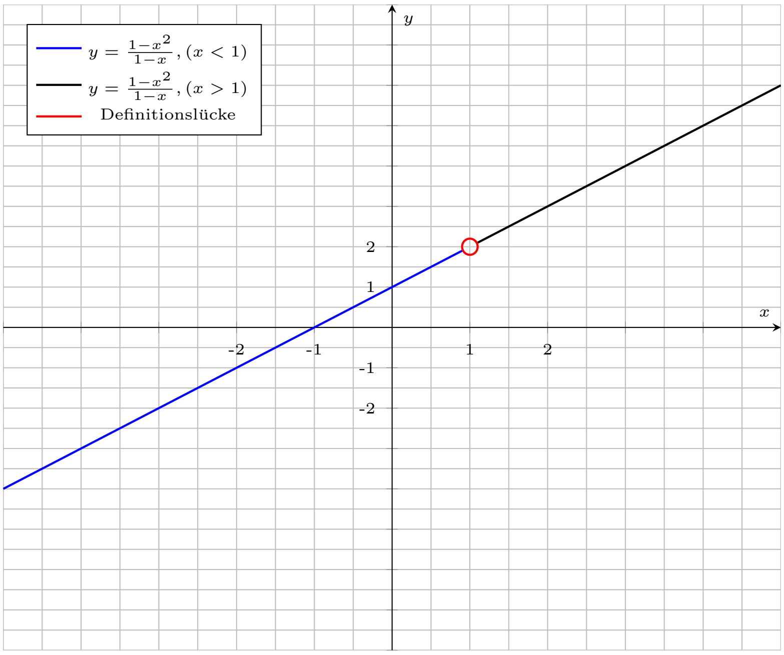


Abbildung 5.5: $y = \frac{1-x^2}{1-x}$, hebbare Definitionslücke bei $x = 1$

Definition 5.9. ***(Pole)***
Sei f eine gebrochen rationale Funktion. Sei x_0 eine Nullstelle des Nennerpolynoms mit der Vielfachheit k (d.h. eine Definitionslücke). Diese Definitionslücke heißt Polstelle (oder kurz ein Pol) . Besitzt das Zählerpolynom an x_0 ebenfalls eine Nullstelle mit der Vielfachheit l, so ist

1. *für $l \geq k$ die Definitionslücke hebbar (man kann kürzen $\forall\ x \neq x_0$),*
2. *für $l < k$ hat die Polstelle die Ordnung $k - l$.*

5.4.1 Asymptotisches Verhalten rationaler Funktionen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich eine rationale Funktion in der Nähe von Polstellen verhält. Sei zunächst die Polstelle mit einer ungeraden Vielfachheit vorhanden. z.B $f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^{2k+1}}$. Diese ändert ihr Vorzeichen je nachdem ob x kleiner oder größer als x_0 ist (siehe Beispiel 5.4). D.h. sie geht für $x < x_0$ gegen $-\infty$ für $x > x_0$ gegen $+\infty$. Bei einer geraden Vielfachheit z.B. $\dfrac{1}{(x-x_0)^{2k}}$ liegt kein Vorzeichenwechsel vor. Je näher wir der Polstelle kommen, umso größer wird der Ausdruck und läuft gegen $+\infty$ (siehe Abbildung 5.6). Nun müssen wir noch analysieren, wie sich eine gebrochen rationale für x gegen große negative und positive Werte verhält.
Dazu betrachten wir zunächst eine echt gebrochen rationale Funktion. Sie hat die Form:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} \cdots + b_0} \tag{5.15}$$

Da f echt gebrochen rational sein soll, gilt $m > n$. Dann kann man durch die höchste auftretende Potenz von x^m kürzen und erhält:

$$f(x) = \frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1-m} \cdots + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} \cdots + b_0 x^{-m}} \tag{5.16}$$

mit wachsendem x wird jede auftretende Potenz kleiner werden, so dass der gesamte Ausdruck schließlich immer näher zu Null wird. Man sagt, dass sich die Funktion asymptotisch der x- Achse (also $y = 0$) nähert. Die x-Achse ist dann hier die Asymptote.
Nun betrachten wir eine unecht gebrochen rationale Funktion, d.h. es ist $n \geq m$. Dann kann man immer (s. 5.2) die unecht gebrochen rationale Funktion durch Polynomdivision (s. die Beispiele 5.7 und 5.8) zerlegen in einen polynomialen Anteil und eine echt gebrochen rationale Funktion:

$$f(x) = p(x) + \frac{p_k(x)}{q_l(x)} \quad \text{mit} \quad l > k \tag{5.17}$$

Wächst nun x gegen große positive oder kleine negative Werte, so verschwindet zunehmend der echt gebrochene Anteil und der polynomiale Anteil bestimmt das gesamte Verhalten. Der polynomiale Anteil $p(x)$ ist dann hier die Asymptote.

5.4.2 Partialbruchzerlegung

Wir wollen nun zu eine weiteren Methode zur Darstellung einer **echt gebrochen rationalen** Funktion kommen, die sehr häufig benötigt wird. Also Einführung ein Beispiel:

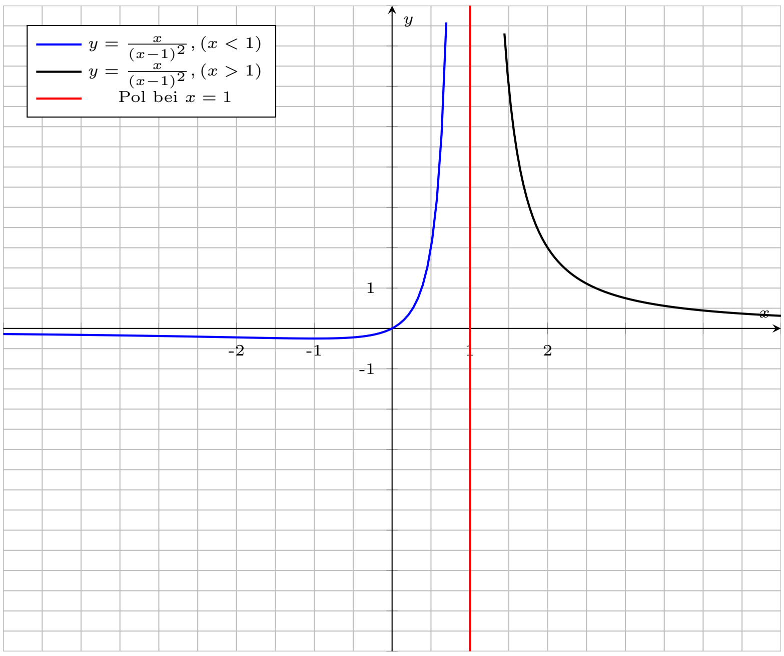


Abbildung 5.6: $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

Beispiel 5.10. ***einfache Pole***
Einen Ausdruck der Form:

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

kann einfach umgeformt werden, indem alles auf den Hauptnenner $(x-1)(x-2)$ *gebracht wird*

$$f(x) = \frac{2(x-2)+(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x-5}{(x-1)(x-2)} = \frac{3x-5}{x^2-3x+2}.$$

Bleiben wir bei diesem Beispiel, und versuchen nun ausgehend von der rechten Seite zu einer Summe zweier echt rationaler Funktionen zu kommen: Wir machen also folgenden Ansatz:

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \tag{5.18}$$

Multiplizieren beider Seiten mit dem Hauptnenner liefert:

$$3x - 5 = A(x-2) + B(x-1) \tag{5.19}$$

Diese Gleichung soll für alle x *gelten und es treten zwei Unbekannte auf. Man wählt zweckmäßigerweise* $x = 1$ *und* $x = 2$

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad -2 = -A \quad \Rightarrow \quad A = 2 \\ x = 2: &\quad 1 = B \end{aligned} \tag{5.20}$$

In diesem Beispiel war die Vielfachheit der Polstelle jeweils 1. Nun sei bei $x = 1$ eine doppelte Polstelle:

Beispiel 5.11. ***doppelte Polstelle***

$$f(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Der Hauptnenner ist $(x-1)^2(x-2)$. *Dann lässt der Ausdruck sich umformen zu :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2(x-1)(x-2) + (x-1) + (x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} \\ &= \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2(x-2)} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Nun betrachten wir die umgekehrte Richtung. Dann zeigt das obige Beispiel, dass für die doppelte Polstelle ein Term der Form $\frac{Konstante}{(1-x)^2}$ *zu berücksichtigen sein wird. Es sei*

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2(x-2)}$$

und es wird eine Darstellung gesucht der Form

$$\frac{3x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2(x-2)} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Jetzt wird die rechte Seite auf den Hauptnenner gebracht und die Gleichung mit dem Hauptnenner erweitert. Dann ergibt sich

$$3x^2 - 3x + 2 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2.$$

Nun hat man mehrere Möglichkeiten die Unbekannten A, B, C *zu bestimmen*

- *Ausmultiplizieren der rechten Seite und Koeffizientenvergleich oder*
- *Einsetzen spezieller Werte für* x. *Effizient sind* $x = 1, x = 2$ *(die Nullstellen des Hauptnenners) und eine weitere möglichst einfache Zahl z.B.* $x = 0$. *Beide Methoden liefern natürlich das gleiche Ergebnis* $A = -5 \quad B = -2 \quad C = 8$.

Die obigen Beispiele betrafen Fälle, in denen der Nenner vollständig in Terme der Form $(x - x1) \cdot (x - x_m)$ faktorisiert werden kann. Dabei konnten auch mehrfache Pole auftreten. Es ist aber auch möglich, dass irreduzible Terme der Form$x^2 + a^2$ auftreten. Was passiert dann?

Beispiel 5.12. ***irreduzible Anteile***
Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2+1}.$$

Dies bringt man auf den Hauptnenner und erhält

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) + 4x}{x(x^2+1)}$$

Die obigen Beispiele lassen sich zu einem systematischen Ansatz zur Darstellung einer echt gebrochen rationalen Funktion über eine Partialbruchzerlegung zusammenfassen.

Folgerung 5.3. *Es sei* $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{q_m(x)} \quad n < m$ *eine echt gebrochen rationale Funktion. Der Nenner* $q_m(x)$ *besitze die* $x_i \quad 1 \mathrm{e} i \leq m$ *Nullstellen:*

1. *alle Nullstellen sind einfach. Dann wird der Ansatz gemacht*
$$\frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_m}{x - x_m}. \tag{5.22}$$
2. *für jede mehrfach auftretende Nullstellen* x_i *mit Vielfachheit* l *wird der Ansatz gemacht*
$$\frac{B_1}{(x - x_i)^1} + \frac{B_2}{(x - x_i)^2} \ldots + \frac{B_l}{(x - x_i)^l} \tag{5.23}$$
3. *für auftretende irreduzible Anteile* $x^2 + px + q$ *wird der Ansatz gemacht*
$$\frac{Cx + D}{x^2 + px + q} \tag{5.24}$$

Alle auftretenden Anteile werden summiert und ergeben die Partialbruchzerlegung. Die auftretenden Konstanten werden bestimmt, indem man $f(x)q_m(x) = p_n(x)$ *bildet und z. B die Nullstellen von* q_m *einsetzt oder einen Koeffizientenvergleich durchführt.*

Beispiel 5.13. *Es sei*
$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}.$$
Die Nullstellen des Nenners sind $x_1 = 2$ *und* $x_2 = 3$*. Es wird der Ansatz*
$$\frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x - 3}$$
gemacht. Jetzt multipliziert man die Gleichung mit $(x - 2)(x - 3)$ *und erhält*
$$2x = A_1(x - 3) + A_2(x - 2).$$
Setzt man $x = 2$ *ein, so folgt*
$$4 = -A_1 \quad \Rightarrow A_1 = -4.$$
Einsetzen von $x = 3$ *ergibt*
$$6 = A_2 \quad \Rightarrow A_2 = 6.$$
Also ist
$$\frac{2x}{x^2 - 5x + 6} = -\frac{4}{x - 2} + \frac{6}{x - 3}$$

Ein weiteres Beispiel zeigt die Vorgehensweise bei einer doppelten Nullstelle.

Beispiel 5.14.

$$f(x) = \frac{2x}{(x-2)^2}$$

Ansatz:

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

Mit dem Hauptnenner multiplizier ergibt:

$$2x = B_1(x-2) + B_2$$

Zunächst wird $x = 2$ *eingesetzt:*

$$\Rightarrow \quad B_2 = 4$$

Jetzt nimmt man eine möglichst einfache Zahl für x*. Wähle z. B.* $x = 0$*:*

$$0 = -2B_1 + B_4 = -2B_1 + 4 \quad \Rightarrow B_1 = 2\,.$$

Damit ist die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

5.5 Potenzfunktionen

Definition 5.10. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *wird die Potenzfunktion definiert:*

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n\ mal} & n > 0, \\ 1 & n = 0. \end{cases} \tag{5.25}$$

Ferner ist

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n} \qquad x \neq 0. \tag{5.26}$$

In Figur 5.25 sind zwei Beispiele dargestellt. Es gelten die bekannten Rechenregeln.

Satz 5.4. *Seien* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (xy)^n &= x^n\, y^n \\ x^n x^m &= x^{(n+m)} \\ (x^n)^m &= x^{(n\,m)} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Für n *gerade , d.h.* $n = 2m,\ m \in \mathbb{N}$ *ist* x^n *eine gerade Funktion*

$$(-x)^n = ((-x)^{2m}) = ((-x)^2)^m = (x^2)^m = x^{2m} = x^n.$$

Für n *ungerade, d.h.* $n = 2m+1\ m \in \mathbb{N}_{\not{0}}$ *ist* x^n *eine ungerade Funktion*

$$(-x)^n = (-x)^{2m+1} = (-x)^{2m}(-x)^1 = x^{2m}(-x)^1 = -x\,x^{2m} = -x^{2m+1} = -x^n.$$

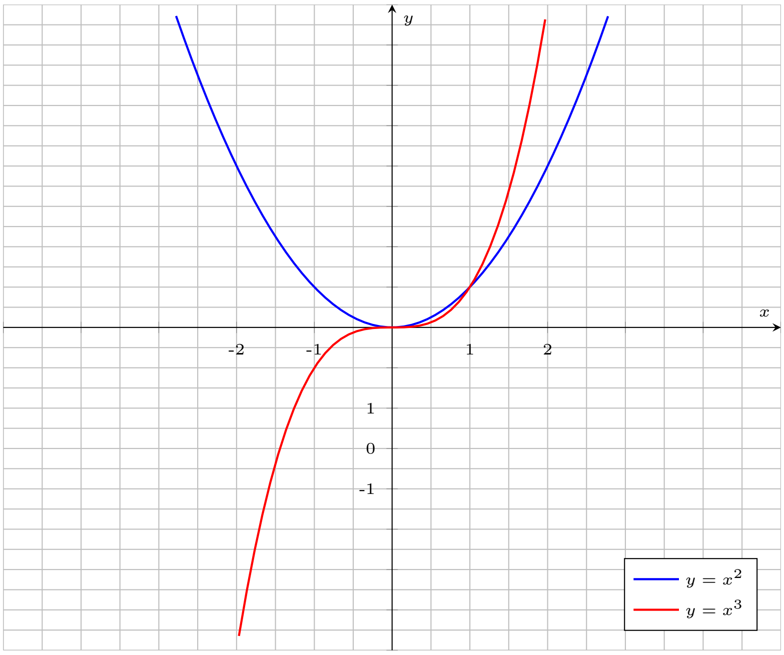


Abbildung 5.7: Potenzfunktion x^n für $n = 2, 3$

5.6 Trigonometrische Funktionen

Zunächst muss festgelegt werden, wie Winkel gemessen werden. Dazu betrachte man 5.8. Der Winkel wird immer gegen den Uhrzeigersinn aufgetragen und gemessen. In der Mathematik und allen technischen Anwendungen wird der Winkel im Bogenmaß angegeben (und nicht in Grad). Dies ist auch so im internationalen Einheitensystem SI festgelegt. Ausgangspunkt ist die Länge l eines Kreisbogens mit Radius r. Dieser ist bei eingeschlossenem Winkel α

$$l = r\alpha \Leftrightarrow \ \alpha = \frac{l}{r} \tag{5.28}$$

Damit ergibt sich für einen Vollkreis als Länge des Bogens (=Umfang des Kreises) zu $2\pi r$. Der Winkel im Bogenmaß hat zwar die Einheit Radiant sie ist aber dimensionslos. Die trigonometrischen Funktionen werden wie üblich am Kreis erklärt.
Aus (5.8) erkennt man die Beziehungen der Strecken zu den trigonometrischen Funktionen.

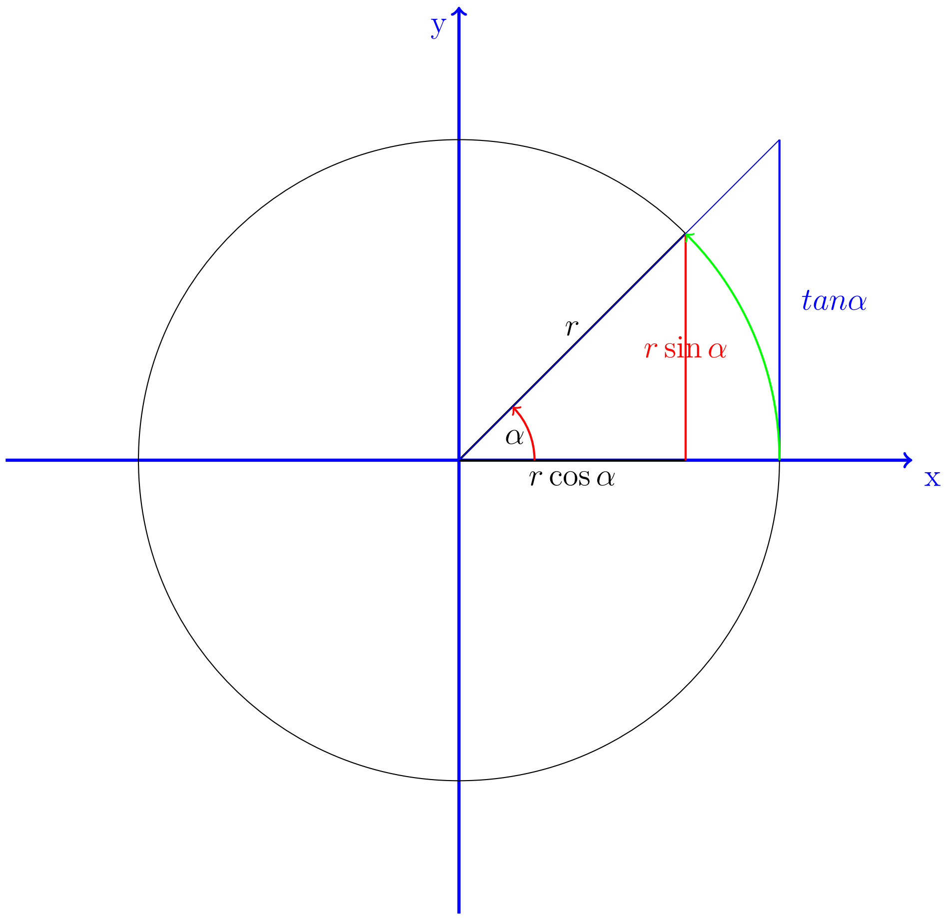


Abbildung 5.8: Definition Sinus und Kosinus am Kreis

Definition 5.11. ***(trigonometrische Funktionen)***

$$\sin \alpha := \frac{y}{r} \tag{5.29}$$

$$\cos \alpha := \frac{x}{r} \tag{5.30}$$

$$\tan \alpha := \frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{5.31}$$

$$\cot \alpha := \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad \alpha \neq k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{5.32}$$

Die Definitionsbereiche für Sinus und Kosinus sind $\mathbb{R}$. *Die Wertebereiche sind* $[-1, 1]$. *Für Tangens ist* $D_{\text{tan}} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2} \ \ , k \in \mathbb{Z}\Big\}$ *und für Kotangens* $D_{\text{cot}} = \mathbb{R} \setminus \{x \Big| x = \pi k \ , \in \mathbb{Z}\}$. *Ihre Wertebereiche sind* $W = \mathbb{R}$.

Die Sinus- und Kosinus- Funktionen sind in der Abbildung 5.9 dargestellt.
In Figur 5.10 sind die Tangens und Kotangens Funktionen dargestellt.

Einige wichtige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sind (es gibt wesentlich mehr Identitäten s. z.B. [2]):

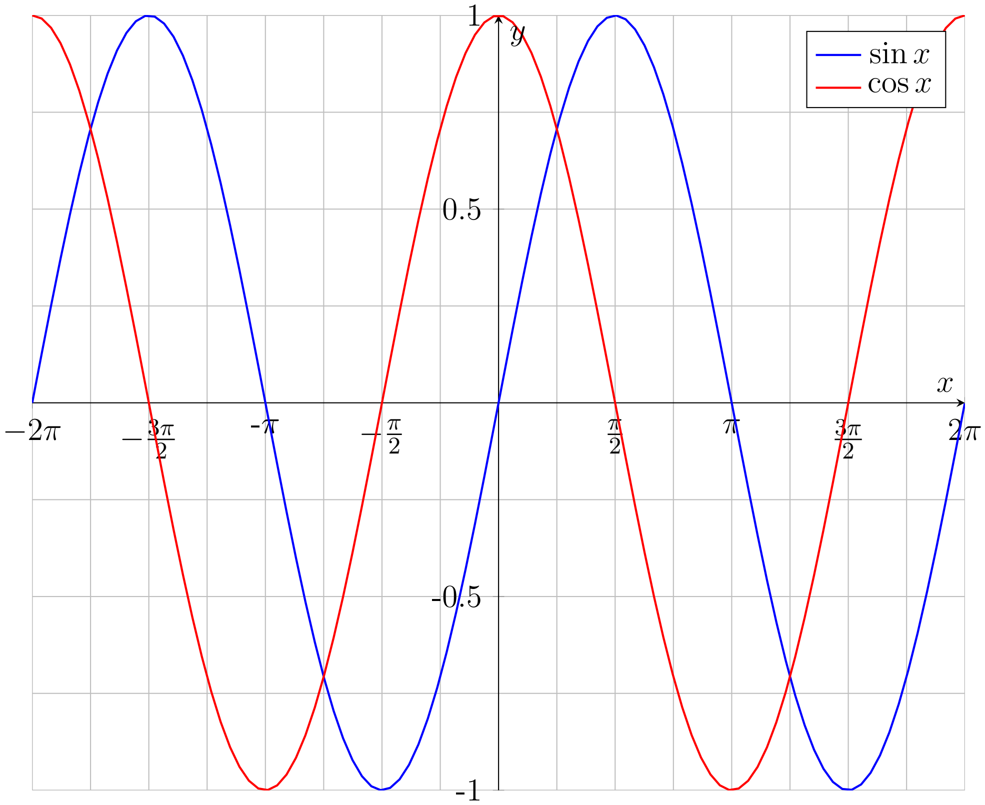


Abbildung 5.9: Sinus- und Kosinus Funktionen

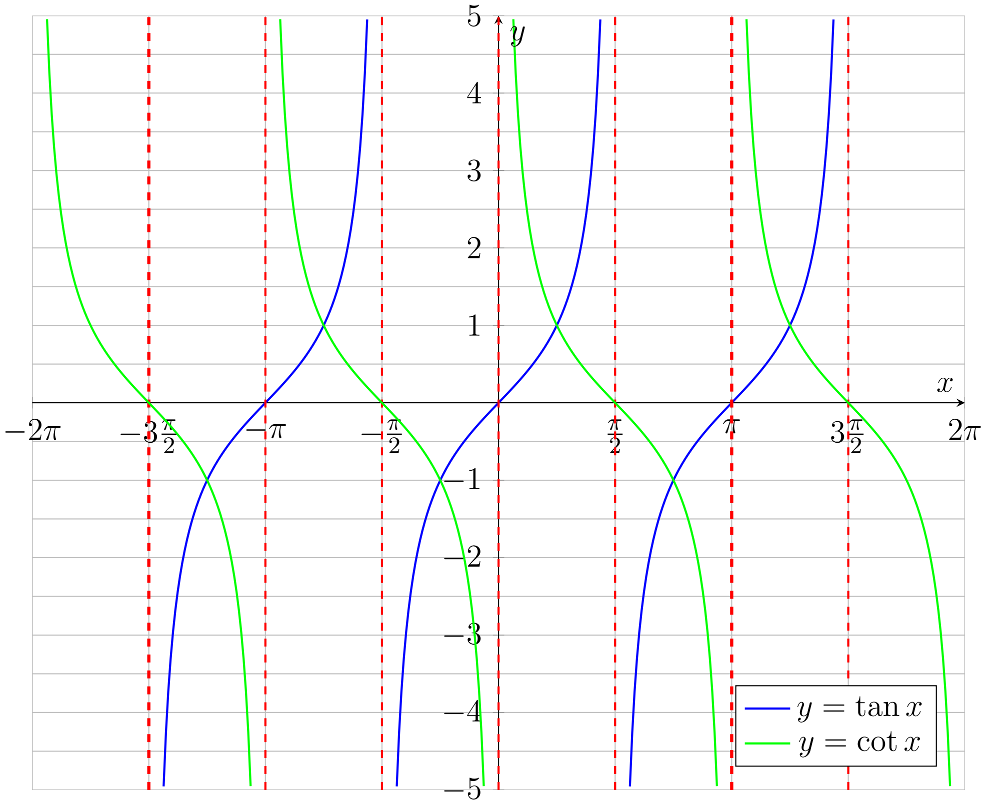


Abbildung 5.10: Tangens und Kotangens

Satz 5.5. *Es gelten für* sin *und* cos *($x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$):*

$$\begin{aligned}
\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \cos x, \\
\cos(x - \frac{\pi}{2}) &= \sin x, \\
\sin(-x) &= -\sin x, \\
\cos(-x) &= \cos x, \\
\sin(x + 2\pi) &= \sin x \Rightarrow \sin(x + k2\pi) = \sin x, \\
\cos(x + 2\pi) &= \cos x \;\; \Rightarrow \cos(x + k2\pi) = \cos x, \\
\tan(x + \pi) &= \tan(x), \\
\cot(x + \pi) &= \cot(x).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

D.h. insbesondere, dass Sinus und Kosinus 2π periodische und Tangens und Kotangens π periodische Funktionen sind.

Satz 5.6. ***(Additionstheoreme)***
Es gelten u.a. folgende Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
&\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2) \\
&\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1) cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2) \\
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
&\sin(2x) = 2\sin x \cos x \\
&\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Es gibt noch sehr viele mehr, die man dann bei Bedarf z.B. in [2] nachschlägt.

5.7 Quadratwurzelfunktion

Eine weitere elementare Funktion ist die Wurzelfunktion.

Definition 5.12. ***(Quadratwurzelfunktion)***
Für $0 \leq x \in \mathbb{R}$ ist die Quadratwurzelfunktion gegeben durch

$$y = \sqrt{x} \tag{5.35}$$

Es ist $D_f = [0, \infty)$ und $W_f = [0, \infty)$.

Die Quadratwurzelfunktion ist streng monoton wachsend, denn für $0 \leq x_1 < x_2$ ist

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \frac{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}.$$

5.8 Sprungfunktion

Eine in der Elektrotechnik häufig vorkommende Funktion ist die Sprungfunktion (manchmal auch: Heaviside Funktion). Sie ist gegeben durch

Definition 5.13. ***(Sprungfunktion)***

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für } t < 0, \\ 1 & \textit{für } t \geq 0. \end{cases} \tag{5.36}$$

Mit dieser Funktion kann man z.B. Einschaltvorgänge und entsprechend Ausschaltvorgänge beschreiben. Beispiel dazu ist die folgende Rechteckfunktion.

Beispiel 5.15.

$$s(t) = u(t) - u(t - t_0) \tag{5.37}$$

beschreibt ein Einschalten zum Zeitpunkt $t = 0$ und ein Ausschalten zum Zeitpunkt $t = t_0$. Will man diese Vorgänge mit einem beliebigen Signal durchführen, so braucht man das Signal nur mit s zu multiplizieren.

Häufig wird auch die durch

$$rect(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2}) \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.38}$$

definierte Rechteckfunktion $rect$ in der Systemtheorie der Signale verwendet. Manchmal wird sie auch Spaltfunktion genannt. Sie beschreibt u.a. die Beugungseffekte am Spalt in der Optik.

6 Koordinatensysteme und -transformationen

6.1 Parallelverschiebung im kartesischen Koordinatensystem

Die Beschreibung eines Objektes (kurve, geometrische Figur) wird mittels eines Koordinatensystems durchgeführt x, y, z . Die Wahl des Koordinatensystems ist dabei willkürlich. Es ist klar, dass das Objekt unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems existiert. Beispiel: man hat die Beschreibung der Erde in Koordinaten international standardisiert und den Nordpol dorthin gelegt wo wir ihn alle kennen. Man hätte auch den Nordpol nach Paris legen können. Dann hätten aus diesem Koordinatensystem alle Punkte ebenso beschrieben werden können. Nur eben mit anderen Koordinaten.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass wir bei der Beschreibung der Objekte Freiheitsgrade besitzen durch die Wahl des Koordinatensystems. Man kann die Wahl geschickt treffen, so dass Rechnungen einfacher werden.
Dazu nachfolgendes

Beispiel 6.1.

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 3.$$

Das ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$*, da die Gleichung äquivalent ist zu:*

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

Würde man ein anderes Koordinatensystem (u, v) *wählen mit:*

$$\begin{aligned} u &:= x - 2 \quad \Leftrightarrow x = u + 2, \\ v &:= y - 3 \quad \Leftrightarrow y = v + 3, \end{aligned} \tag{6.1}$$

würde dies bedeuten, dass man ein Koordinatensystem wählt, dessen Ursprung im Mittelpunkt des Kreises liegt.

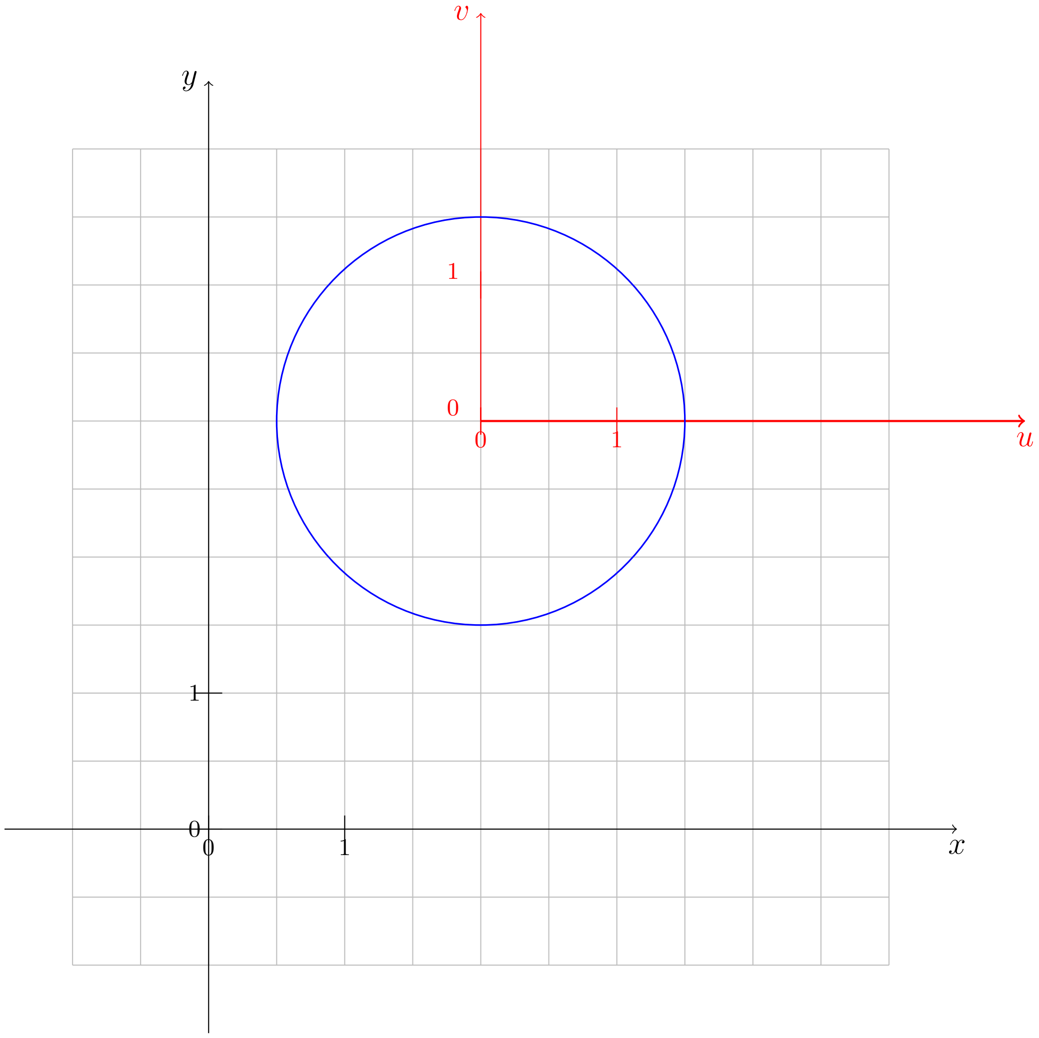


Abbildung 6.1: Koordinatenverschiebung

Beispiel 6.2. *Es sei die Funktion*

$$y = x^2 - 2x + 5$$

gegeben. Auf den ersten Blick ist nicht sofort erkennbar, um welche Funktion es sich handelt. Dazu wird sie umgeformt:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y - 4 = (x-1)^2.$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} u &:= x - 1 \quad &\Leftrightarrow x = u + 1, \\ v &:= y - 4 \quad &\Leftrightarrow y = v + 4; \end{aligned} \tag{6.2}$$

so erhalten wir:

$$v = u^2 \tag{6.3}$$

Dies beschreibt nun eine einfache Parabel in dem neuen Koordinatensystem u, v.

Geometrisch bedeutet eine Koordinatentransformation, dass das Koordinatensystem, dessen Lage willkürlich relativ zu einem Objekt gewählt wurde, an dieses Objekt angepasst wird, um eine einfachere Darstellung zu erhalten. Es gibt noch andere Transformationen außer der Parallelverschiebung. Später werden wir z.B. Drehungen kennen lernen.

6.2 Polarkoordinaten

Bisher haben wir uns bei der Beschreibung von Punkten in der Ebene auf das kartesische Koordinatensystem beschränkt. Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen können wir noch eine andere (häufig nützliche) Beschreibung wählen, die in Anwendungen dem jeweiligen Problem besser angepaßt sind. Für jeden Punkt der Ebene ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann man eine Darstellung der Form ($0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \qquad (6.4) \\ y &= r \sin\varphi \\ \text{mit} & \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (6.5) \end{aligned}$$

angeben. Dabei ist r der Abstand vom Punkt (x, y) zum Koordinatenursprung.

7 Umkehrfunktionen

7.1 Definition und Existenz der Umkehrfunktion

In diesem Kapitel soll folgende Frage beantwortet werden: Wir gehen von einer Funktion $y = f(x)$ aus mit Definitionsbereich D_f und WertebereichW_f und wollen eine Umkehrung durchführen: Gesucht ist eine Funktion g mit $x = g(y)$. Dabei ist dann $y \in D_g \subset W_f$. Geht so etwas und unter welchen Voraussetzungen? Dann hätte man:

$$x = g(f(x)) \qquad (y \in D_g \subset W_f). \tag{7.1}$$

Der Begriff der Funktion ist in 5.1 definiert. Wenn g also eine Funktion sein soll muß gelten, dass es zu jedem y genau ein x nur geben darf. Sieht man sich das einfache Beispiel einer Parabel an 7.1 so erkennt man, dass dies jedenfalls nicht für alle x gelten kann.Z.B. existieren zu dem Wert $y = 4$ zwei Werte $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$.
Schränkt man jedoch den Bereich ein z.B. auf Werte $x \geq 0$, so wäre dieses Problem beseitigt siehe (7.2).

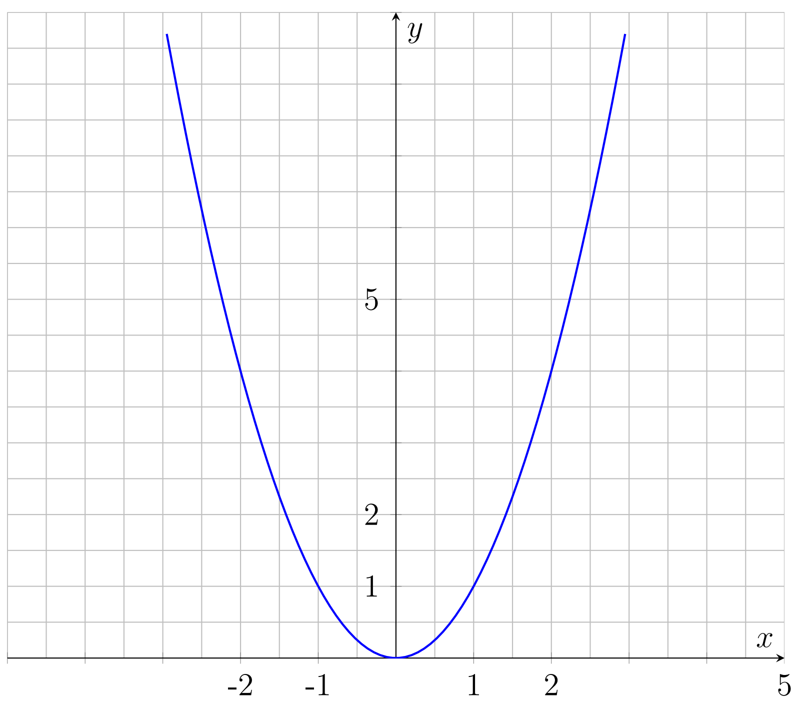


Abbildung 7.1: Parabel

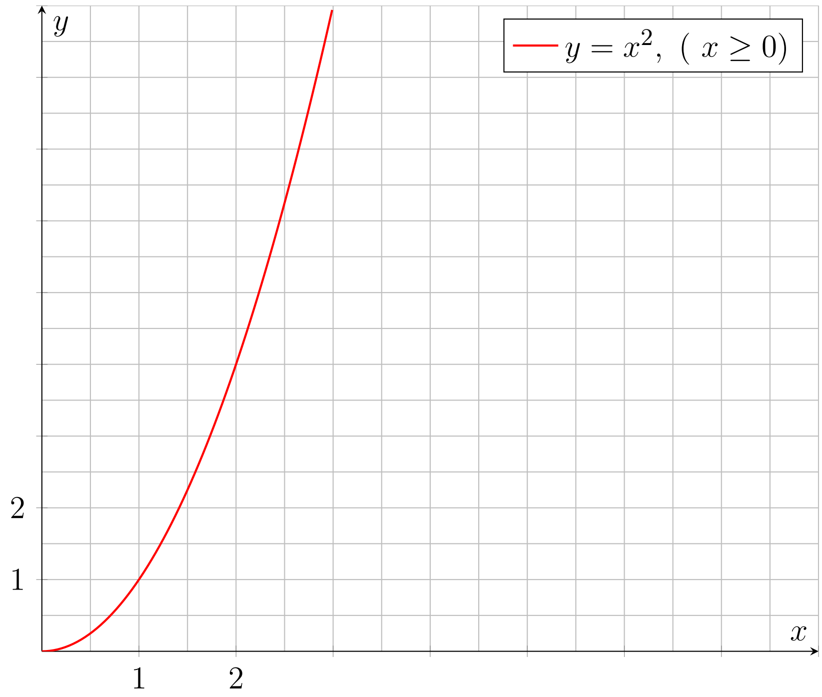


Abbildung 7.2: Einschränkung des Definitionsbereiches der Parabel $x \geq 0$

Definition 7.1. ***(Umkehrfunktion)***
Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D_f und Wertebereich W_f. Sei ferner I ein Intervall des Definitionbereiches $I \subset D_f$ auf dem gilt:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

dann existiert eine Umkehrfunktion g mit Definitionsbereich $D_g \subset W_f$ so dass gilt für $x \in I$

$$y = f(x) \Rightarrow x = g(y); \tag{7.2}$$

bzw.

$$x = g(f(x))$$

Man schreibt $f^{-1} := g$. Meistens benennt man die unabhängige Variable wieder mit x.

Achtung: Diese Schreibweise bedeutet hier nicht $\frac{1}{f(x)}$!

Beispiel 7.1. *Die Funktion $y = f(x) = x^2$ besitzt für $x \geq 0$ eine Umkehrfunktion. Diese ist $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, siehe 7.3. Nun erkennt man auch, dass es sinnvoll war, die Wurzel aus einer Zahl als nicht negative Zahl zu definieren. Sonst könnte man zu $y = x^2$ keine Umkehrfunktion angeben.*

Der folgende Satz liefert ein Kriterium, um die Existenz der Umkehrfunktion zu sichern.

Satz 7.1. *Sei f eine Funktion. Ist f auf einem Intervall $I \subset D_f$ streng monoton steigend oder streng monoton fallend, so existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf I.*

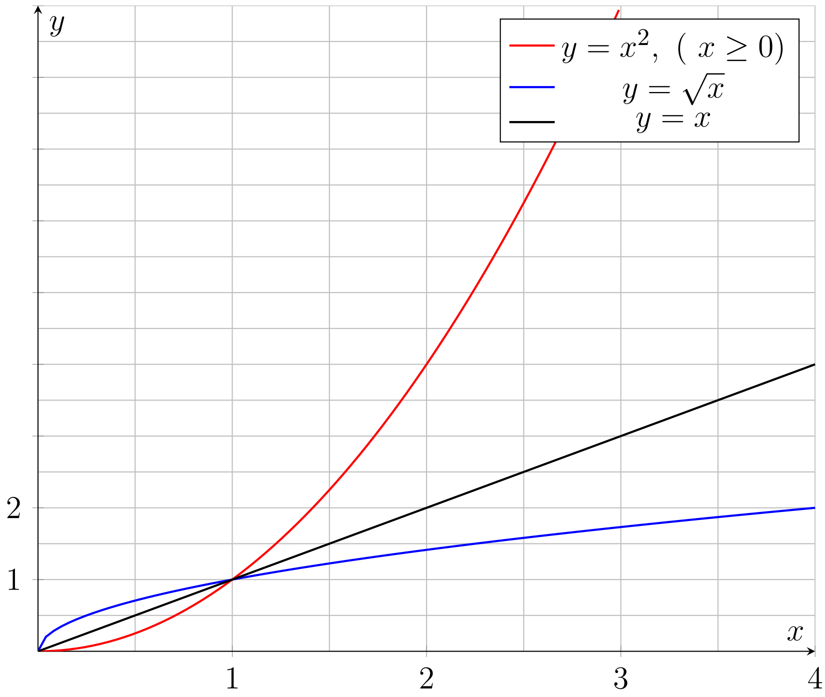


Abbildung 7.3: Wurzelfunktion

Dies wird auf die Potenzfunktion, die monoton wachsend ist, angewandt zur Definition der allgemeinen Wurzelfunktion.

Definition 7.2. ***(Potenzfunktion mit rationalen Exponenten)***
Sei $x \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{Z}$. Es sei $y = x^n > 0$. Dann ist

$$x = y^{\frac{1}{n}} \tag{7.3}$$

die zugehörige Umkehrfunktion.Manchmal schreibt man auch $\sqrt[n]{y}$

Es gilt:

$$(x^n)^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{n}{m}}$$

7.2 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen, existieren keine Umkehrfunktionen auf den gesamten Definitionsbereichen. Daher kann nur auf Teilintervallen, auf denen die Funktionen streng monoton sind, Umkehrfunktionen erklärt werden. Diese auf diesen Intervallen definierten Umkehrfunktionen heißen daher auch Hauptwerte.

Die Sinus Funktion ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Demzufolge kann dort die eine Umkehrfunktion angegeben werden.

1. Es ist die **Arkussinus** Funktion. Für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt

   $$y = \sin(x) \qquad \Rightarrow x = \arcsin(y). \quad D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]. \tag{7.4}$$

   Der Wertebereich ist $W_{\text{arcsin}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Siehe Figur 7.4.

2. Entsprechend gilt für den Kosinus, dass er auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist. Man definiert die **Arkuskosinus** Funktion

   $$y = \cos(x) \qquad \Rightarrow x = \arccos(y) \quad D_{\text{arccos}} = [-1, 1]. \tag{7.5}$$

   Der Wertebereich ist $W_{\text{arccos}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Siehe Figur 7.5.

3. Die Umkehrfunktion des Tangens ist **Arkustangens**. Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

   $$y = \tan x \quad \Rightarrow x = \arctan(y). \quad D_{\text{arctan}} = (-\infty, \infty). \tag{7.6}$$

   Der Wertebereich ist $W_{\text{arctan}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Siehe Figur 7.6.

4. Die Umkehrfunktion des Kotangens ist **Arkuskotangens**. Für $x \in (0, \pi)$

   $$y = \text{cot} x \quad \Rightarrow x = \text{arccot}(y). \quad D_{\text{arccot}} = (-\infty, \infty). \tag{7.7}$$

   Der Wertebereich ist $W_{\text{arccot}} = (0, \frac{\pi}{2})$. Siehe Figur 7.7.

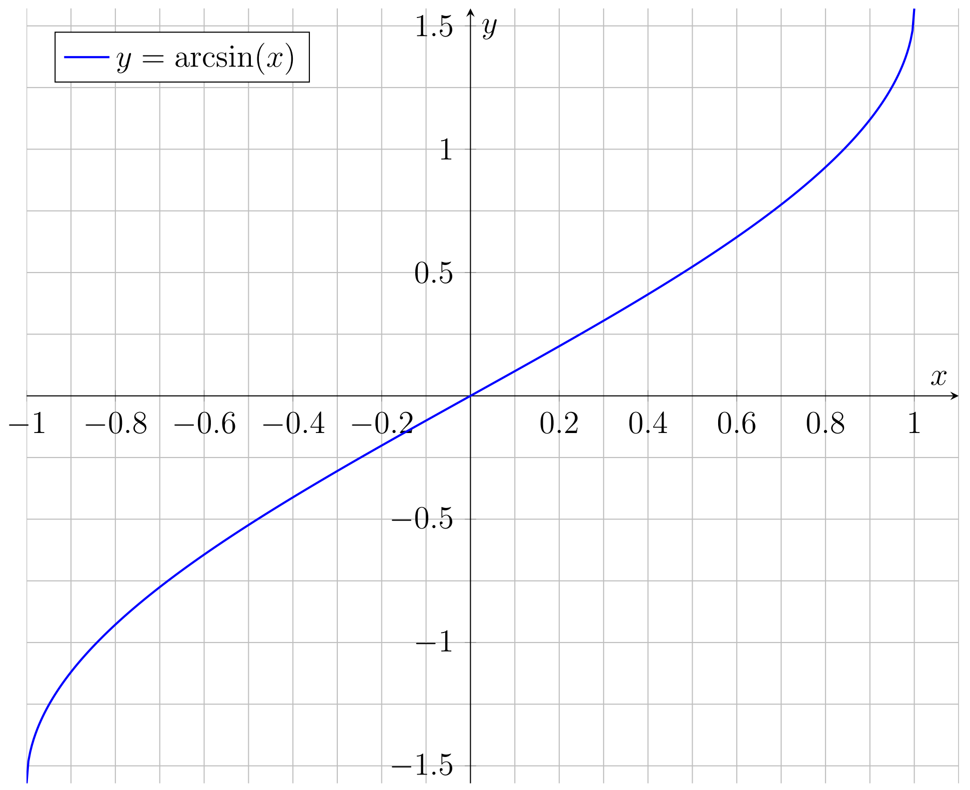


Abbildung 7.4: Arkussinus

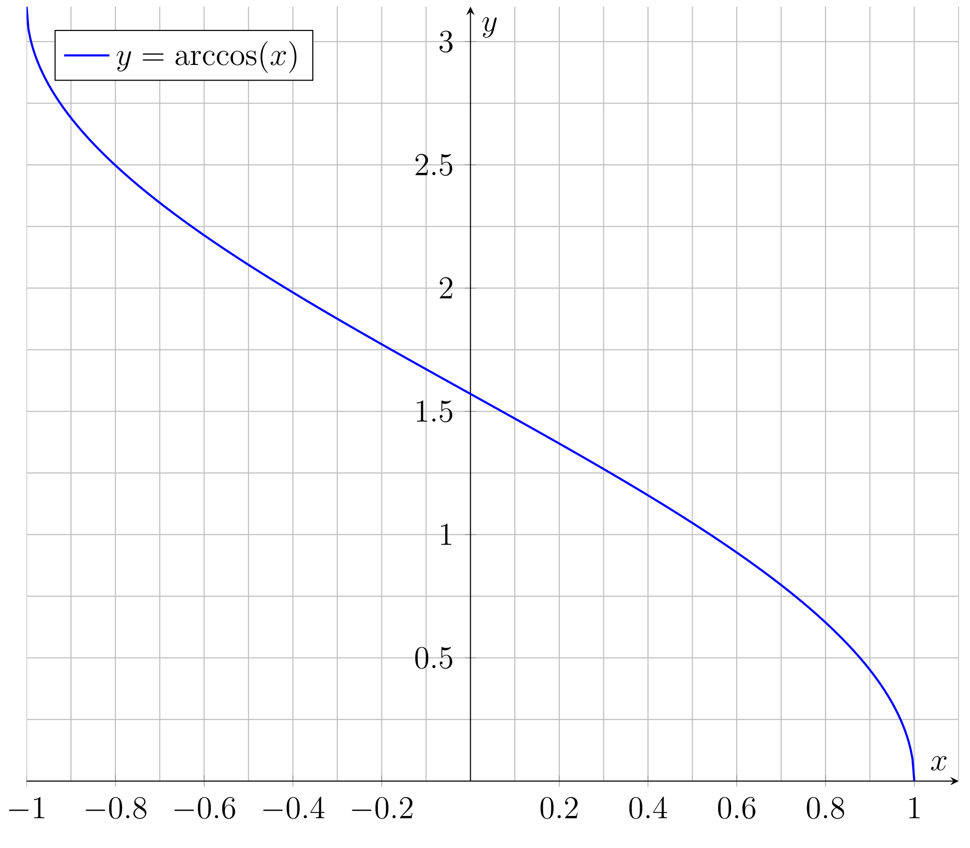


Abbildung 7.5: Arkuskosinus

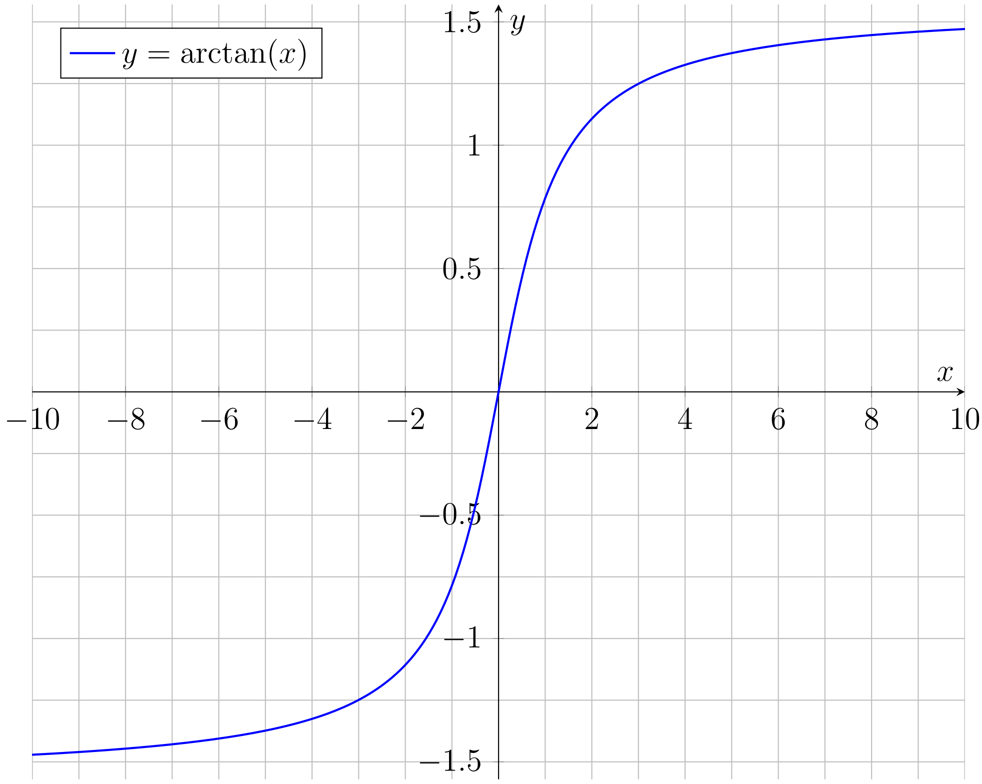


Abbildung 7.6: Arkustangens

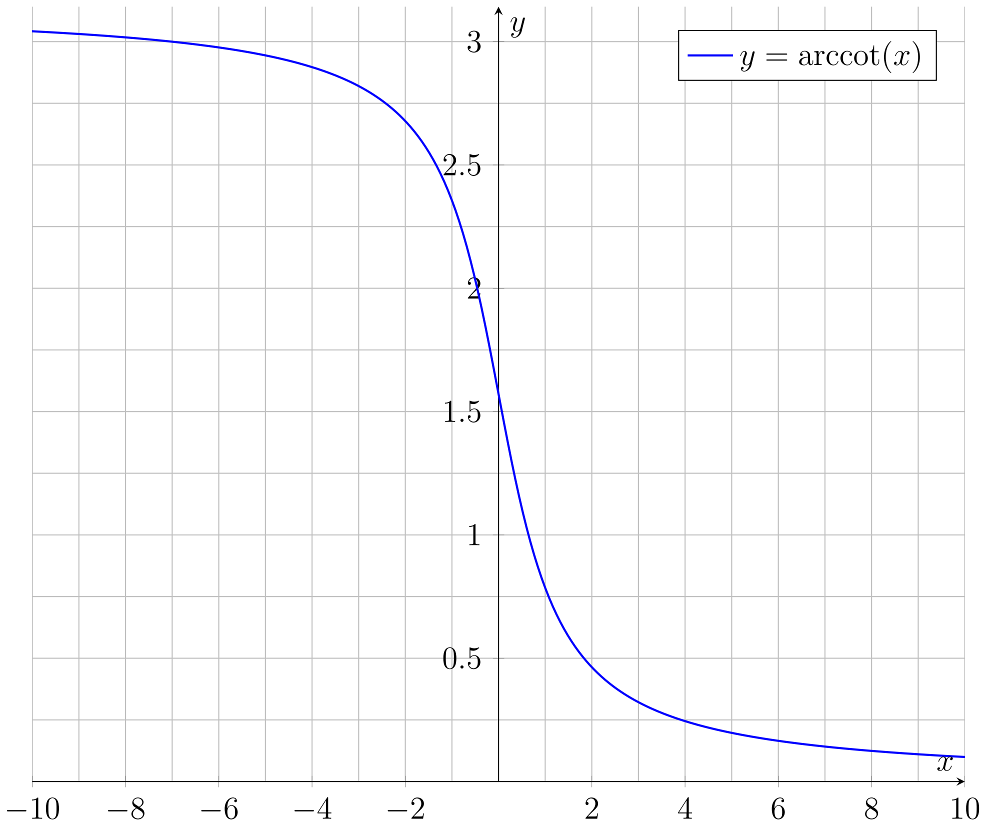


Abbildung 7.7: Arkuskotangens

8 Exponentialfunktion und Logarithmus

8.1 Definition der e-Funktion

Man kann auch Funktionen über konvergente Reihen definieren. Dies erscheint auf den ersten Blick umständlich, ist jedoch eine wirkungsvolle Methode. Am Beispiel der e-Funktion werden wir dies kennen lernen. Die e-Funktion ist definiert durch:

Definition 8.1. ***(e- Funktion)***
Für $x \in \mathbb{R}$ wird die e- Funktion definiert durch die Reihe

$$\mathrm{e}^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \tag{8.1}$$

Die Reihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ was man durch Anwenden des Quotientenkriteriums auf $a_n := \dfrac{x^n}{n!}$ leicht nachprüft.

Satz 8.1. ***(Eigenschaften der e- Funktion)***
Seien $x, y \in \mathbb{R}$, dann gelten

1. $e^0 = 1$,
2. $e^{(x+y)} = e^x e^y$, ***(Funktionalgleichung)***,
3. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$,
4. $e^x > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

Beweis:

ad 1: setzt man in Definition (8.1) 0 ein, so bleibt nur der Term $\dfrac{x^0}{0!} = 1$, alle anderen verschwinden.

ad 2:

$$e^{(x+y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k \tag{8.2}$$

Nun wird die Reihenfolge der Summationen vertauscht. Daraus ergibt sich dann:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \; x^{n-k} \; = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} \; \frac{n!}{k!(n-k)!} \; x^{n-k} \; ;$$

wobei im letzten Schritt die Definition des Binominialkoeffizienten eingesetzt wurde. Nun substituieren wir: $m = n - k$. Die Summationsgrenzen für m sind dann für $n = k$: $m = 0$ und für $n = \infty$ $m = \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \; \frac{n!}{(m)!} \; x^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \; \frac{x^m}{(m)!} \right) = e^y \, e^x \; ,$$

ad 3: es ist

$$1 = e^0 = e^{(x-x)} = e^x \mathrm{e}^{(-x)} \Leftrightarrow \quad e^{(-x)} = \frac{1}{e^x},$$

ad 4: sei $x > 0$. Man sieht durch Einsetzen in 8.1, dass $e^x > 0$ ist. Dann ist $e^{(-x)} = \frac{1}{e^x} > 0$.

Die e-Funktion ist in der Figur 8.1 dargestellt.

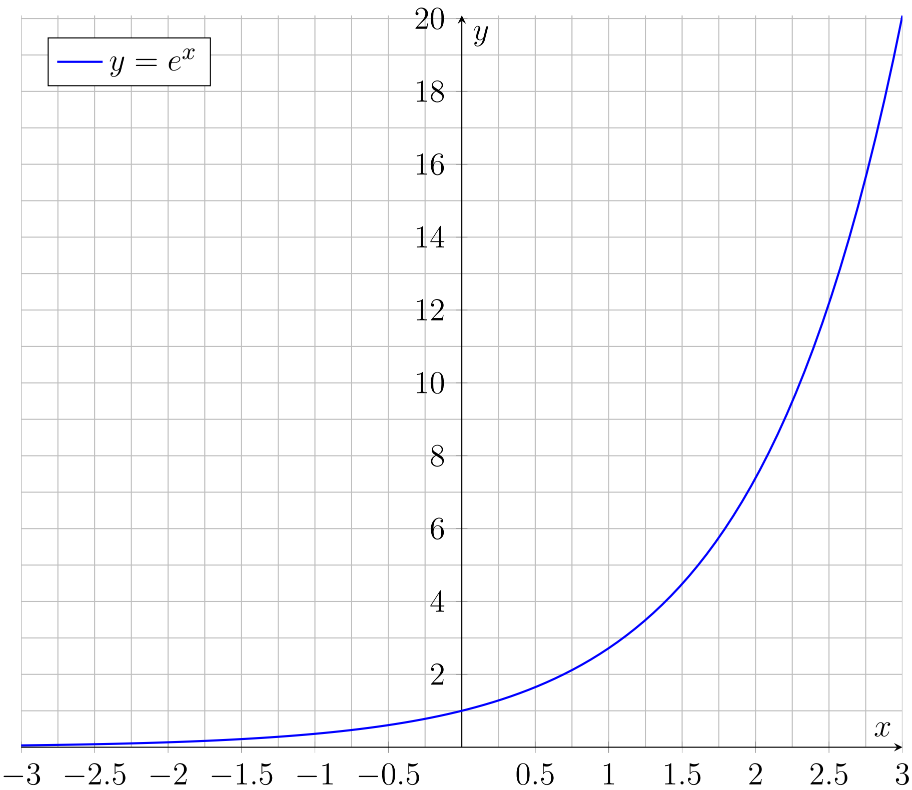


Abbildung 8.1: e- Funktion $y = e^x$

8.1.1 gedämpfte Schwingungen

In der Elektrotechnik spielt insbesondere $e^{-\delta x}$ ($\delta \geq 0$ ist die Dämpfungskonstante) eine besondere Rolle bei der Beschreibung abklingender Schwingungen . Die Funktionen $\pm e^{-\delta x}$ heißen Einhüllende.

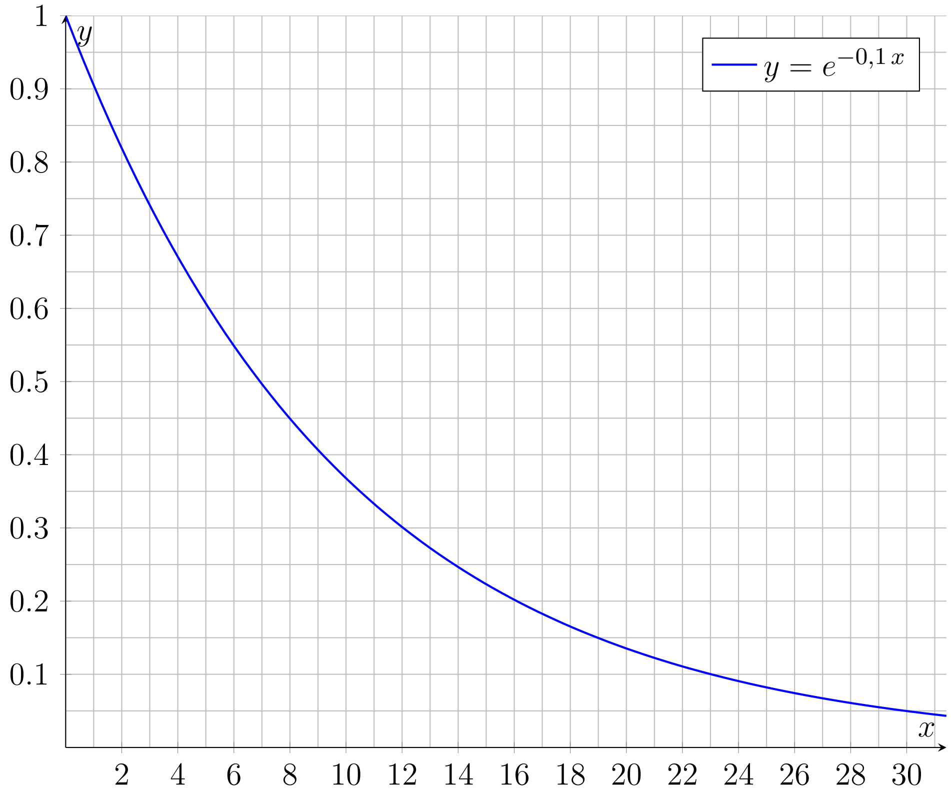


Abbildung 8.2: e- Funktion $y = e^{-0,1\,x}$

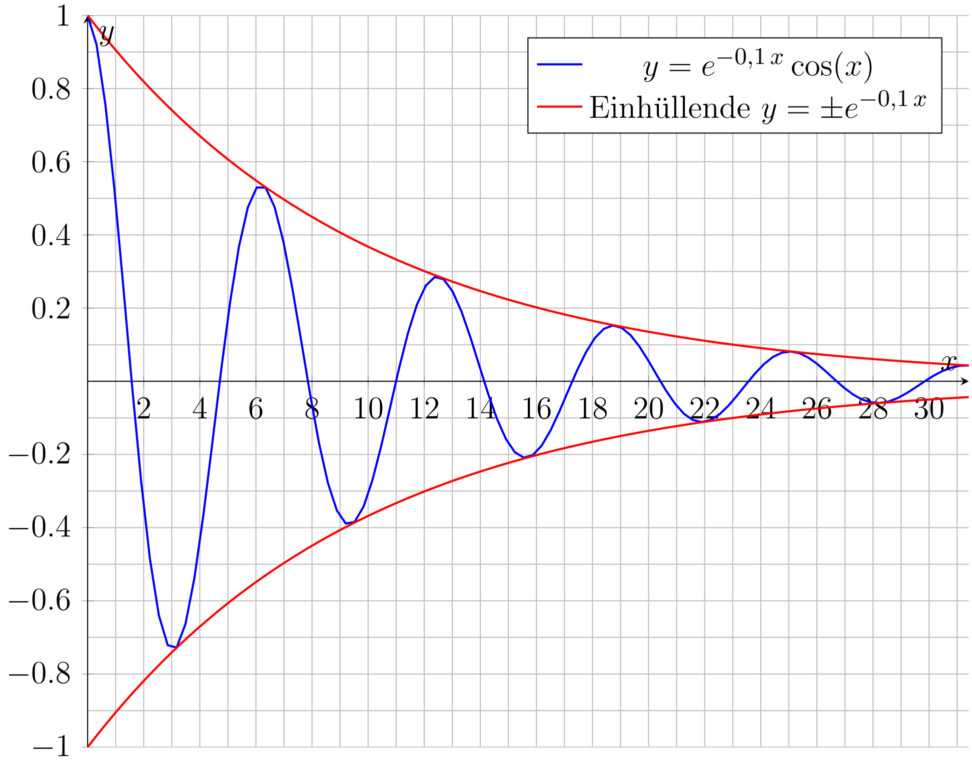


Abbildung 8.3: e- Funktion $y = e^{-0,1x}\cos(x)$

8.1.2 Gauß- Normalverteilung

Die Funktion

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \tag{8.3}$$

beschreibt die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

8.2 Natürlicher Logarithmus

Die e-Funktion ist streng monoton wachsend, wie man aus der Graphik 8.1 erkennt. Daher existiert für sie eine Umkehrfunktion. Diese Umkehrfunktion ist der natürliche Logarithmus ln. Wegen

$$y = e^x > 0 \quad \Rightarrow D_{\ln} = (0, \infty),$$

und es ist

$$x = \ln(y).$$

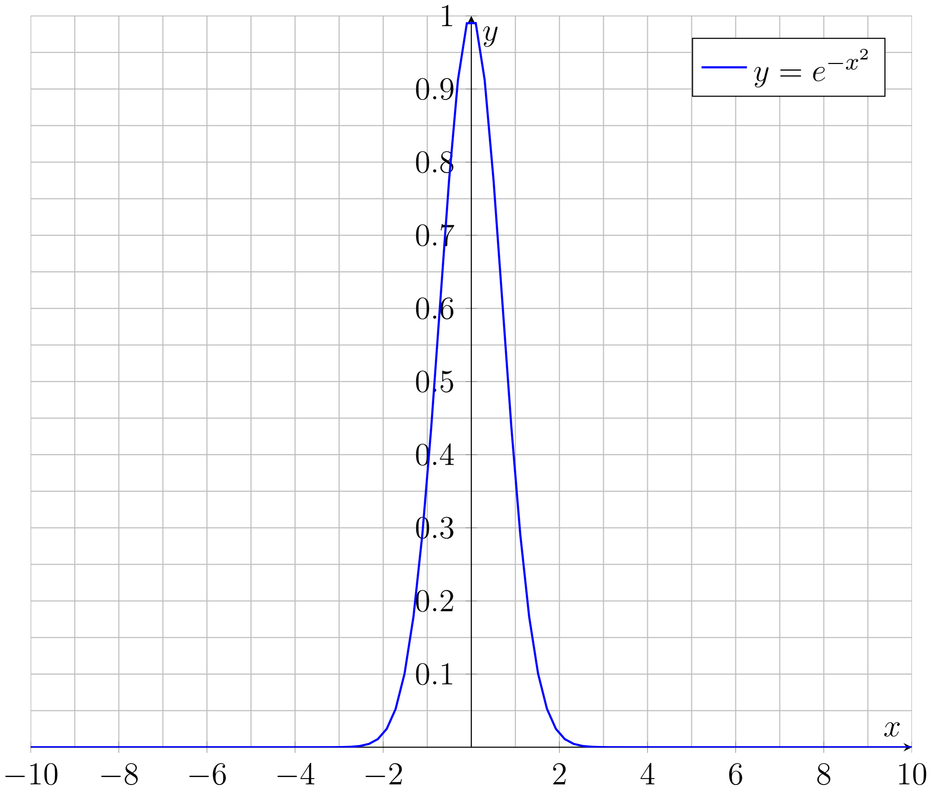


Abbildung 8.4: Gaußsche Glockenkurve

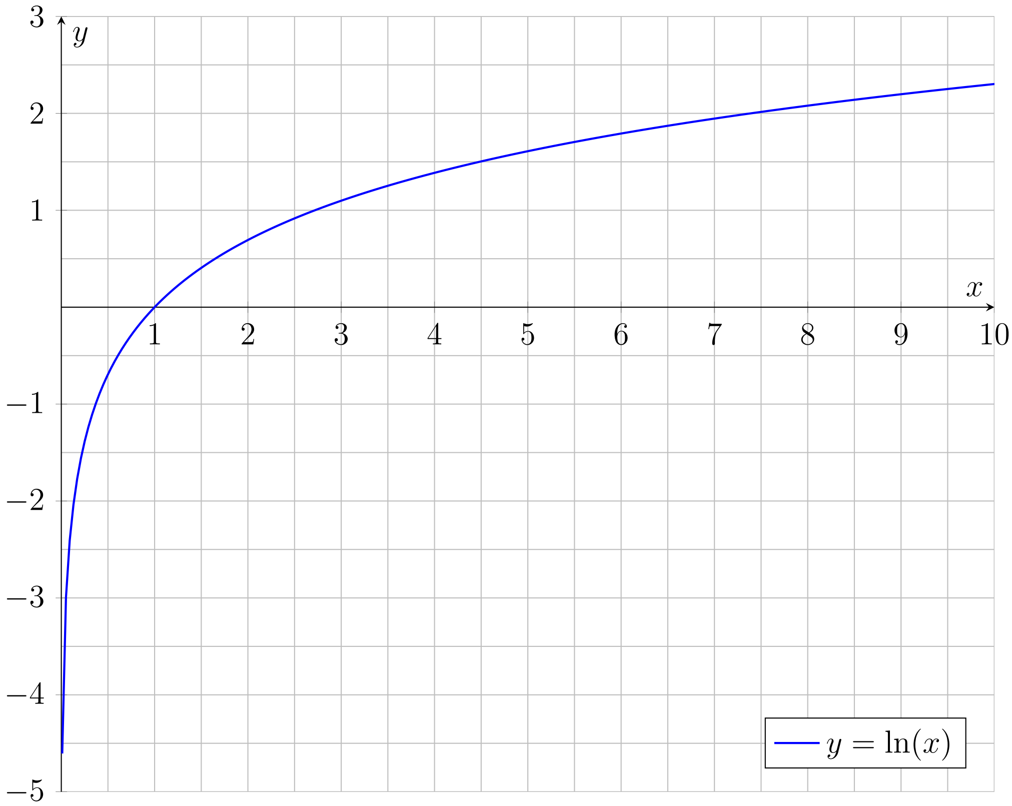


Abbildung 8.5: ln(x)

Satz 8.2. ***(Eigenschaften der Logarithmus Funktion)***
:

1. *Wegen* $1 = e^0$ *ist*
$$\ln(1) = 0 \tag{8.4}$$

2. *Aus der Funktionalgleichung der e-Funktion folgen*
$\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y) \quad x, y > 0$

3. $\ln(x^r) = r\,\ln(x) \quad x > 0$

4. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x) \quad x > 0$

5. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y) \quad x, y > 0$

8.3 Exponentialfunktion zu beliebiger Basis $a > 0$

Sei $0 < a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 1$. Dann ist mittels der e-Funktion und des natürlichen Logarithmus
$$a = e^{\ln(a)}, \tag{8.5}$$
und für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann
$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)} \tag{8.6}$$

Definition 8.2. ***(Exponentialfunktion)***
Für eine reelle Zahl $0 < a \neq 1$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *wird die Exponentialfunktion zur Basis* a *definiert durch:*
$$a^x := e^{x\ln(a)} \tag{8.7}$$
a *heißt Basis. Häufig gebräuchliche Basen sind:*

1. $a = e$

2. $a = 10$

3. $a = 2$

Es gelten die bekannten Rechenregeln

Folgerung 8.1. ***(Rechenregeln der Exponentialfunktion)***

1. $a^x a^y = a^{(x+y)}$

2. $(a\,b)^x = a^x\,b^x$

3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

4. $\ln(a^x) = x\ln(a)$

Umkehrfunktionen zu einer beliebigen Basis $0 < a \neq 1$: Sei $y = a^x \quad x \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y = a^x = e^{x \ln a} \qquad \Rightarrow \ln y = x \ln a$$

$$x = \frac{\ln y}{\ln a} := \log_a(y)$$

Definition 8.3. ***(Logarithmus zur Basis* a*)***
Sei $0 < a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$. *Der Logarithmus zur Basis* a *ist definiert durch:*

$$\log_a(x) := \frac{\ln x}{\ln a} \tag{8.8}$$

Jetzt erkennt man auch warum $a \neq 1$ *sein muss. Wichtige Basen und deren Bezeichnungen sind:*

1. $a = e \quad \log_e(x) =: \ln(x)$ *natürlicher Logarithmus*
2. $a = 10 \quad \log_{10}(x) =: \lg(x)$ *dekadischer Logarithmus*
3. $a = 2 \quad \log_2(x) =: \mathrm{lb}(x)$ *binärer Logarithmus oder Zweierlogarithmus oder*

Umrechnung einer Basis a in eine andere b:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

9 Parameterdarstellung von Kurven

Wie wir bereits gesehen haben, kann man jeder Funktion einen Graph zuordnen jedoch gelingt es nicht immer eine Kurve mittels einer Funktion zu beschreiben. Das einfachste Beispiel dazu ist ein Kreis. Die folgenden Überlegungen gehen einen anderen Weg. Dabei kann man sich die zeitliche Bewegung eines Massepunktes entlang einer Bahnkurve vorstellen (z.b. die Bewegung auf einer Kreisbahn). Die Bewegung kann in eine x- und eine y- Komponente zerlegt werden. Diese Komponenten sind von der Zeit abhängig. Also stellt sich die gesamte Bahnkurve dar als Punkte, die durch ihre zeitliche Veränderung beschrieben werden: $(x(t), y(t))$. d.h. die kartesischen Koordinaten werden ihrerseits durch Funktionen (hier der Zeit) dargestellt. Diese unabhängige Variable t heißt auch Parameter. Wir werden einige wichtige Beispiele kennen lernen.

9.1 Parameterdarstellung des Kreises

Sollen die Komponenten $x(t)$, $y(t)$ eine Kreisbahn darstellen mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$, so können wir von der Polarkoordinatendarstellung ausgehen und als Parameter t den Winkel nehmen ($t \in [0, 2\pi)$):

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos t\,, \qquad (9.1) \\ y(t) &= r\sin t\,. \end{aligned}$$

9.2 Parameterdarstellung der Ellipse

Die Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung lautet in kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9.2)$$

Ihre Parameterdarstellung ist durch $(t \in [0, 2\pi)\,, (a, b \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos t\,, \qquad (9.3) \\ y(t) &= b\sin t\,. \qquad (9.4) \end{aligned}$$

gegeben.

9.3 Parameterdarstellung der Kardioide

Die Kardioide (oft auch als Herzkurve bezeichnet) ist in kartesischen Koordinaten s.9.1 gegeben durch ($a \in \mathbb{R}, 0 < a$):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 \;=\; 0 \tag{9.5}$$

Ihre Parameterdarstellung ist ($0 \leq t < 2\pi$):

$$x(t) = a\cos(t)(1 + \cos(t)) \tag{9.6}$$
$$y(t) = a\sin(t)(1 + \cos(t)) \tag{9.7}$$

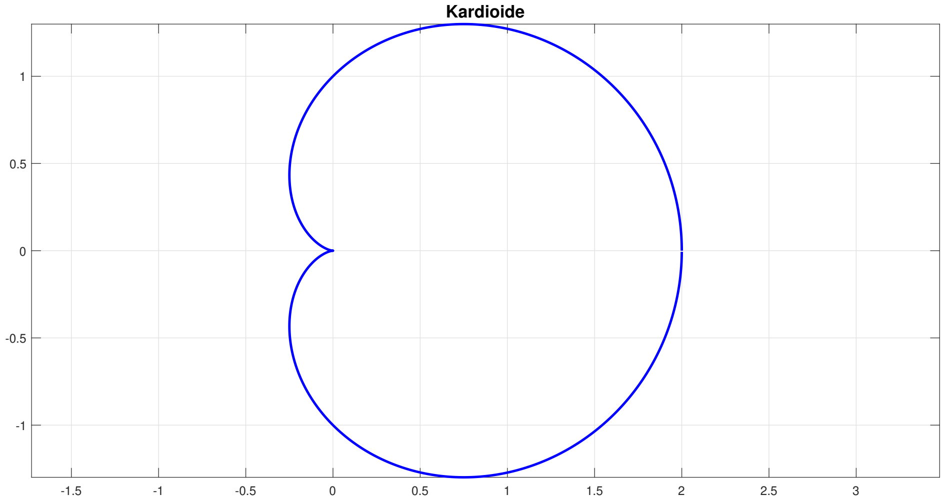


Abbildung 9.1: Kardioide

9.4 Zykloide

Eine Zykloide ist gegeben durch ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x(t) &= r\,(1 - c\cos t) \\ y(t) &= r\,(1 - c\sin t) \end{aligned} \tag{9.8}$$

mit ($0 < r \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$). Sie ist in 9.2 dargestellt.

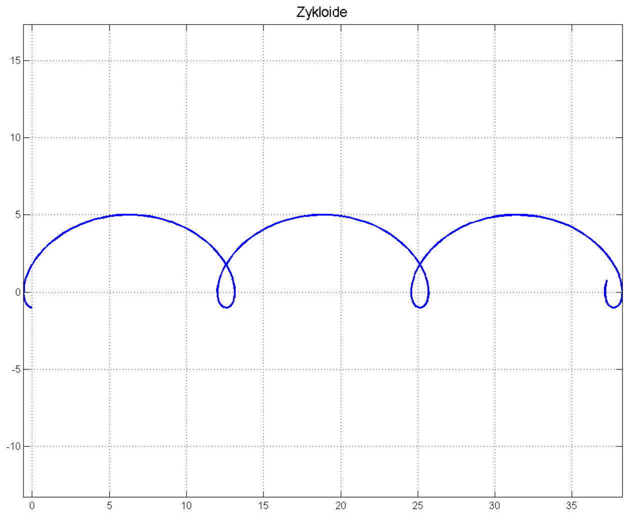


Abbildung 9.2: Zykloide

10 Grenzwert einer Funktion

10.1 Definition des Grenzwerts

Wir wollen uns nun mit dem zentralen Begriff des Grenzwertes befassen. Es geht darum, die Annäherung der Funktionswerte einer Funktion an bestimmte Werte beschreiben zu können.

Definition 10.1. ***(Grenzwert einer Funktion)***
Sei f eine Funktion und $G \in \mathbb{R}$. Existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon, x_0)$ so dass für alle $x \in D_f$ mit

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - G| < \epsilon \tag{10.1}$$

gilt. so hat f den Grenzwert G für $x \to x_0$.

Man schreibt dafür auch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G$$

Alternativ kan man den Grenzwert auch über Folgen definieren:

Definition 10.2. ***(Grenzwert einer Funktion mittels Folgen)***
*Gilt **für jede Folge** x_n mit $x_n \in D_f$ und $x_n \to x_0$:*

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x) = G \tag{10.2}$$

so ist G der Grenzwert der Funktion für $x \to x_0$.

Wichtig ist bei beiden Definitionen, dass x_0 selbst nicht zum Definitionsbereich gehören muß! Mit obiger Definition können wir insbesondere Randpunkte eines abgeschlossenen Intervalls nicht erfassen, da wir eine Umgebung von x_0 immer brauchen. Dazu führen wir den Begriff der einseitigen Grenzwerte ein.

Definition 10.3. ***(einseitige Grenzwerte)***
Sei f eine Funktion und $G \in \mathbb{R}$ Existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon)$ so dass für $x \in D_f$ gilt

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - G| < \epsilon, \tag{10.3}$$

so heißt G rechtsseitiger Grenzwert. Gilt

$$0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - G| < \epsilon \tag{10.4}$$

so heißt G linksseitiger Grenzwert. Wir schreiben für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = G_+$$

und für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = G_-.$$

Satz 10.1. *Sei f eine Funktion. f besitzt genau dann in x_0 einen Grenzwert, wenn rechtsseitiger Grenzwert und linksseitiger Grenzwert übereinstimmen:*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = G$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 10.3 und 10.1

10.2 Der Grenzwert $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$

Lemma 10.1. *Es gilt:*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \tag{10.5}$$

Der Beweis wird anhand geometrischer Überlegungen geführt.

Dazu betrachten wir die Figur 10.1. Die grüne Kurve ist ein Kreisbogen. Er hat die Länge $r\,\alpha$. Dann gilt die Ungleichung für $r = 1$:

$$|\sin \alpha| \leq |\alpha| \leq |\tan \alpha| = |\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}| \tag{10.6}$$

Die Beträge sind nötig, da der Winkel auch negativ sein kann. Dann ist die Figur an der x-Achse zu spiegeln.

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{|\alpha|}{|\sin \alpha|} \leq \frac{1}{\cos \alpha} \tag{10.7}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{1}{\cos \alpha} \tag{10.8}$$

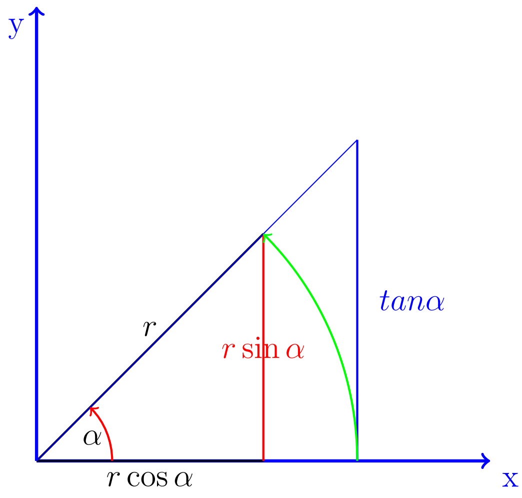


Abbildung 10.1: Es ist $r\sin\alpha \le r\alpha \le \tan\alpha$

Da wir α gegen 0 gehen lassen wollen, liegt α im I. oder IV. Quadranten und somit haben α und $\sin\alpha$ stets das gleiche Vorzeichen. Geht nun α gegen 0, so strebt der rechte Ausdruck gegen 1. Es folgt:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1. \tag{10.9}$$

Folgerung 10.1.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha - 1}{\alpha} = 0 \tag{10.10}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha-1}{\alpha} &= \frac{\cos\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha+1} = \frac{\cos^2\alpha-1}{(\cos\alpha+1)\alpha} = \frac{-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+1)\alpha}\\ &= \frac{-\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{(\cos\alpha+1)} \to 0\ (\alpha\to 0)\end{aligned}$$

10.3 Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Der folgende Satz fasst die Rechenregeln zum Bestimmen von Grenzwerten zusammen:

Satz 10.2. *Seien f und g Funktion. Dann gilt (falls die auftretenden Grenzwerte existieren)*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{10.11}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \tag{10.12}$$

$$\textit{ist } \lim_{x\to x_0} g(x) \ne 0:\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \tag{10.13}$$

11 Stetigkeit

11.1 Definition der Stetigkeit

Definition 11.1. ***(Stetigkeit)***
Sei f eine Funktion. f heißt in $x_0 \in D_f$ stetig, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{11.1}$$

Ist f in $x_0 \in D_f$ nicht stetig, so heißt f unstetig.

Die Stetigkeit verlangt also zwei Dinge:

1. der Grenzwert muß existieren und

2. er muß mit dem Funktionswert übereinstimmen.

Definition 11.2. ***(Stetigkeit in einem Intervall)***
Eine Funktion f heißt stetig in einem offenen Intervall $(a, b) \subset D_f$ falls f in jedem Punkt $x \in (a, b)$ stetig ist.

Definition 11.3. ***(Stetigkeit in einem abgeschlossenen Intervall)***
Eine Funktion f heißt stetig in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset D_f$ falls f in jedem Punkt $x \in (a, b)$ stetig ist und an den Rändern die einseitigen Grenzwerte existieren und gleich dem Funktionswert sind.

Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass man einen Funktionsgraphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen ohne Sprünge.

Beispiel 11.1. *Sei $f(x) = x^n$. f ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

Beispiel 11.2. *Die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.*

Beispiel 11.3. *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{11.2}$$

ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \backslash 0\}$.

Sinngemäß definiert man Stetigkeit auf halboffenen Intervallen.

11.2 Stetige Ergänzung

Wie wir gesehen haben, gibt es folgende Gründe für Unstetigkeiten:

1. die Funktion ist für x_0 nicht definiert,
2. der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht,

Darüber hinaus ist eine Funktion nicht stetig, wenn der Grenzwert existiert, aber nicht gleich $f(x_0)$ ist. Im ersten Fall lässt sich die Funktion ggf. an der Stelle stetig ergänzen.

Definition 11.4. ***(stetige Ergänzung)***
Sei f in x_0 nicht stetig. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = G, \tag{11.3}$$

so läßt sich f in x_0 durch die Setzung

$$f(x_0) = G \tag{11.4}$$

stetig ergänzen.

Beispiel 11.4. *Die Funktion*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist an $x_0 = -1$ nicht definiert. Jedoch lässt sie sich umformen für alle $x \neq 1$ zu:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = x + 1$$

. Eine steige Ergänzung an $x_0 = 1$ wäre 2. Dann ist die Funktion g gegeben durch:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1, \\ x + 1 & x = 1. \end{cases}$$

eine stetige Funktion.

Beispiel 11.5. ***(* si *Funktion)***
Für die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{11.5}$$

gilt (10.9)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1. \tag{11.6}$$

Also kann f in $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden und man definiert:

$$\mathrm{si}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \tag{11.7}$$

Die si *Funktion spielt eine große Rolle in der Elektrotechnik (im Abtasttheorem, spektrale Analyse von Ein- Ausschaltvorgängen), in der Optik bei der Beschreibung der Beugung am Spalt. (Sie wird auch gelegentlich als Spaltfunktion bezeichnet.)*
Die folgende in der Elektrotechnik benutzte (normierte Variante) lautet:

$$\mathrm{sinc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x} & \forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases} \tag{11.8}$$

Sie heißt ***Sinus cardinalis****.*

11.3 Zwischenwertsatz

Anschaulich bedeutet die Stetigkeit, dass die Änderungen der Funktion in gewisser Weise nur kontinuierlich sein kann (man kann sie zeichnen ohne den Stift neu anzusetzen). Der folgende Satz präzisiert dies.

Satz 11.1. ***(Zwischenwertsatz)***
Sei f stetig auf $[a,b] \subset D_f$ und sei $c \in [f(a), f(b)]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$f(\xi) = c.$$

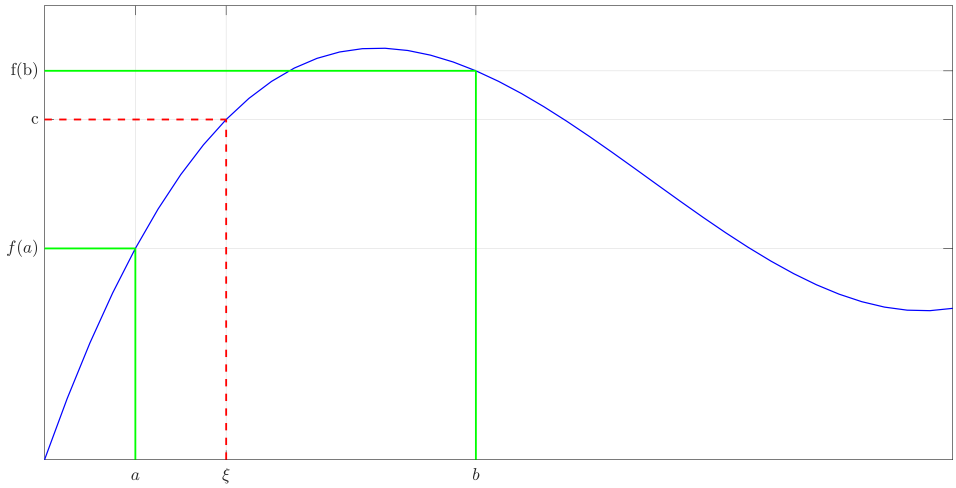


Abbildung 11.1: Zwischenwertsatz

D.h. eine stetige Funktion nimmt jeden Zwischenwert an siehe 11.1.

Folgerung 11.1. *Insbesondere gilt für eine auf $[a,b]$ stetige Funktion f mit*

$$f(a)f(b) < 0$$

es existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$.

Die Bedingung $f(a)f(b) < 0$ bedeutet, dass die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat.

12 Differentialrechnung

Wir beginnen mit einer anschaulichen Fragestellung: welche Darstellung hat eine Gerade an eine Funktion f, die diese nur in einem Punkt $(x_0, f(x_0)),\ x_0 \in D_f$ berühren soll? Gibt es solch eine Gerade überhaupt? Dazu betrachten wir eine Sekante. Sei $(x_0, f(x_0)$ ein Punkt auf einer Funktion. Dann ist eine Sekante eine Gerade, die durch diesen Punkt und einen zweiten Punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ geht. Ihre Steigung ist

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{12.1}$$

Sie lässt sich dann in der Punkt-Steigungsform

$$y = f(x_0) + mh \tag{12.2}$$

darstellen. Eine äquivalente Formulierung ist mit $x = x_0 + h$:

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) \tag{12.3}$$

Definition 12.1. ***(Differenzenquotient)***
Der Ausdruck

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{12.4}$$

heißt Differenzenquotient.
*Er gibt die **Steigung der Sekante** durch die Punkte* $(x_0, f(x_0))$ *und* $(x_0+h, f(x_0+h))$ *an.*

Mit der Setzung $x = x_0 + h$ sieht der Differenzquotient so aus

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{12.5}$$

In Abbildung 12.1 ist dies am Beispiel der Parabel gezeigt.

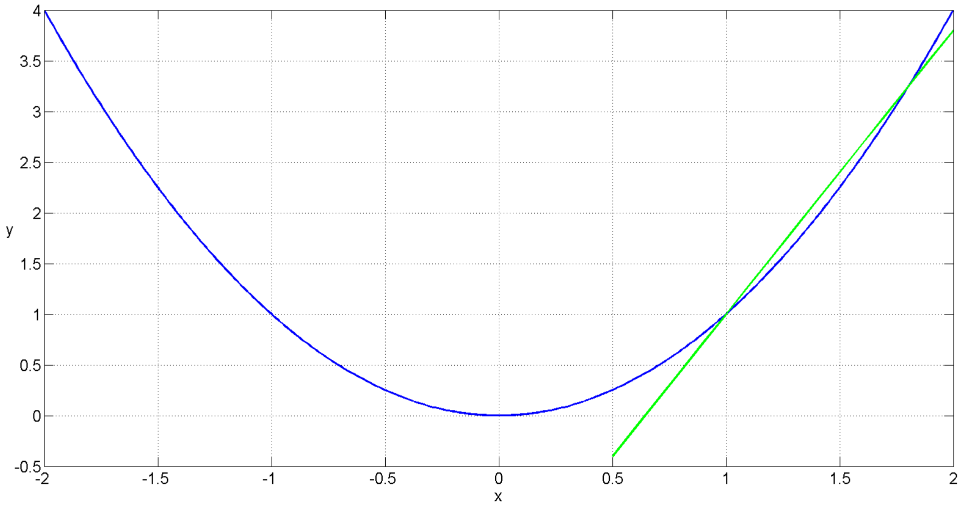


Abbildung 12.1: Sekante an x^2

12.1 Ableitung

Damit erklären wir die Ableitung

Definition 12.2. ***(Ableitung)***
Sei f eine Funktion und stetig in $x_0 \in (a,b) \subset D_f$. Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{12.6}$$

so ist dieser Grenzwert die (erste) Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0. Die Funktion heißt in x_0 differenzierbar. Schreibweisen:

$$f'(x_0) \qquad \textit{oder} \qquad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0}$$

(die letzte Schreibweise geht auf Leibniz zurück und erinnert an den Differenzenquotient). Insbesondere in der Physik verwendet man einen Punkt über dem Funktionszeichen und benutzt die Benennung t (Zeit) statt x für die unabhängige Variable:

$$\dot{f}(t)\Big|_{t=t_0}.$$

An den Rändern eines abgeschlossenen Intervalls $[a,b] \subseteq D_f$ wird die Ableitung als rechts- bzw. linksseitiger Grenzwert definiert:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad f'(b) \lim_{h \to 0-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \tag{12.7}$$

Mit der Setzung $x = x_0 + h$ lautet die Ableitung

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{12.8}$$

Beispiel 12.1. *Wir bestimmen die Ableitung von $f(x) = x$. Der Differenzenquotient lautet:*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{x_0+h-x_0}{h} = 1$$

Beispiel 12.2. *Wir bestimmen die Ableitung von $f(x) = x^2$. Der Differenzenquotient lautet:*

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} \\ &= 2x_0+h \underset{h\to 0}{\to} 2x_0 \end{aligned} \tag{12.9}$$

Den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit klärt der Satz:

Satz 12.1. *Sei f differenzierbar in $x_0 \in D_f \Rightarrow f$ ist stetig in x_0.*

Beweis. Es ist zu zeigen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} + f(x_0) \to f(x_0)$$

□

Folgerung 12.1. *Aus der Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit. Die Umkehrung ist falsch wie das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt. Die Funktion $f(x) = |x|$ ist zwar in $x = 0$ stetig jedoch ist sie nicht differenzierbar, da für $x > 0$ $f'(x) = 1$ und für $x < 0$ $f'(x) = -1$ ist.*

Es gibt sogar Funktionen, die überall stetig aber an keiner Stelle differenzierbar sind (Weierstraß Funktion).

Aus der Definition folgt sofort:

$$\frac{d}{dx}c = 0 \qquad c \quad \textit{konstant}$$

Die Ableitung an einer Stelle x_0 beschreibt eine lokale Eigenschaft einer Funktion.

Definition 12.3. ***(Ableitungsfunktion)***
Da die Stelle x_0 beliebig aber fest ist, kann man x_0 durch x ersetzten und man bezeichnet den Ausdruck

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) \tag{12.10}$$

als Ableitungsfunktion. Falls diese ihrerseits auf einem Intervall differenzierbar ist, schreibt man: $f''(x)$. Dies kann (bei Vorliegen von weiterer Differenzierbarkeit) fortgesetzt werden. Man schreibt üblicherweise bis zur 3. Ableitung $f'''(x)$, bei höheren Ableitungen $f^{(k)}(x)$ für die k-te Ableitung.

Satz 12.2. ***(Linearisierung)***
Ist f in $x_0 \in D_f$ differenzierbar $\Leftrightarrow$ es existiert ein $m \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion ρ so dass gilt

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + \rho(x) \text{ mit } \lim_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0 \tag{12.11}$$

In der Technik werden oft solche Linearisierungen verwendet. Der Punkt x_0 wird dort meist als Arbeitspunkt bezeichnet.
Beweis: 1."$\Leftarrow$"
Es gelte 12.11, so kann 12.11 umgeformt werden zu:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m = \frac{\rho(x)}{x - x_0}.$$

ρ ist offenbar stetig, da alle Terme auf der linken Seite stetig sind. Bildet man nun den Grenzwert $x \to x_0$, konvergiert die rechte Seite gegen 0 also auch die linke Seite. Daraus folgt der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und es muß $m = f'(x_0)$ sein.

2. "$\Rightarrow$"
Es sei f in x_0 differenzierbar. Setze

$$\frac{\rho(x)}{x - x_0} = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{für } x \neq x_0, \\ 0 & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Mit dieser Setzung ist ρ eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0$, da die rechte Seite gegen 0 konvergiert und es folgt 12.11 unmittelbar.
Eine differenzierbare Funktion lässt sich in einer kleinen Umgebung von x_0 durch eine Gerade annähern. Diese Gerade heißt **Tangente** an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.Ihre Steigung ist $f'(x_0)$ und sie besitzt die Gleichung (Punkt-Steigungsform):

Folgerung 12.2.

$$t_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{12.12}$$

In 12.2 ist die Tangente an die Parabel beispielhaft gezeigt (bei $x = -1.2$ und $x = 1.2$). Der folgende Satz ist anschaulich sofort klar und stellt den Zusammenhang der Monotonie mit der Ableitung (welche die Steigung der Tangente angibt) siehe auch Abbildung 12.2 . Für negative x Werte ist die Funktion (streng) monoton fallend, für positive x Werte (streng) monoton wachsend.

Satz 12.3. ***(Monotonie Kriterium)***
Sei f eine auf $(a, b) \subset D_f$ differenzierbare Funktion. Gilt dann für $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad &\Leftrightarrow f \textit{ ist auf } (a,b) \textit{ monoton wachsend} \\ f'(x) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow f \textit{ ist auf } (a,b) \textit{ monoton fallend} \end{aligned} \tag{12.13}$$

Bei $>$ oder $<$ gilt streng monoton wachsend bzw. fallend.

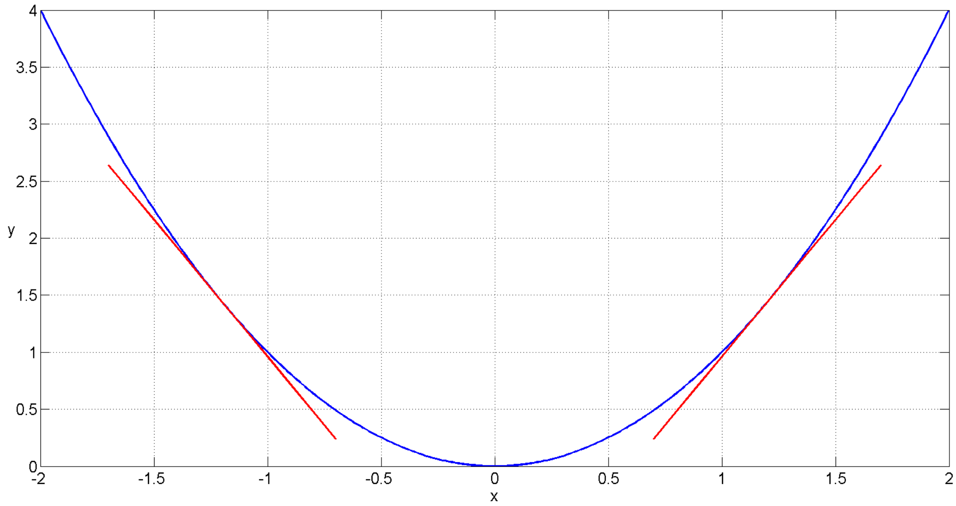


Abbildung 12.2: Tangenten an x^2

12.2 Ableitungen einiger elementarer Funktionen

In den folgenden Beispielen wird statt x_0 x als beliebig aber fest angenommen. Das ist gleichbedeutend und zielt direkt auf die Ableitungsfunktion.

Beispiel 12.3. *Ableitung von x^n*
Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir beginnen mit dem Differenzenquotienten, formen ihn um und bestimmen dann den Grenzwert:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(n-k)}\ h^k - x^n\right) \tag{12.14}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{(n-k)}\ h^k\right) \tag{12.15}$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} + \underbrace{\frac{1}{h}\left(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{(n-k)}h^k\right)}_{\to 0\ (h\to 0)} \tag{12.16}$$

$$\to nx^{n-1}\ (\text{für } h \to 0). \tag{12.17}$$

Damit haben wir die Ableitung von $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Diese Regel kann auf beliebige Exponenten $\alpha \in \mathbb{R}$ erweitert werden.

Beispiel 12.4. *Ableitung* $\sin x$
Sei $x \in \mathbb{R}$ *beliebig aber fest. Der Differenzenquotient lautet:*

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Der Zähler lässt sich mit dem Additionstheorem über die Winkelsumme umformen:

$$= \frac{\sin(x)\cos h + \sinh \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \frac{\sin(x)(\cos h - 1) + \sinh \cos x}{h}$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sinh}{h} \to \cos x \ (h \to 0)$$

Der letzte Schritt erfolgt mit den Grenzwerten (10.5) *und* (10.10)

$$\Rightarrow \qquad (\sin x)' = \cos x$$

Mit der Ableitung des Sinus lässt sich ein sehr häufig verwendete Abschätzung des Sinus für kleine Winkel angeben.

Folgerung 12.3. ***(Kleinwinkelnäherung*** $\sin x$***)***
Für $\sin x$ *gilt in der Nähe von* 0 *durch die Annäherung mittels der Linearisierung 12.11:*

$$sin(x) \approx \sin 0 + \cos 0(x - 0) = x \tag{12.18}$$

Die Aussage von 12.11 ist in graphisch dargestellt.

Beispiel 12.5. *Bei sinngemäßer Vorgehensweise wie im vorstehenden Beispiel erhält man die Ableitung der* cos- *Funktion:*

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{12.19}$$

Als nächstes wird die Ableitung der e-Funktion bestimmt.

Beispiel 12.6. *Ableitung* e^x
Sei $x \in \mathbb{R}$ *beliebig aber fest. Auch hier beginnen wir mit dem Differenzenquotienten und benutzen dann die Definition der e- Funktion über die Reihe:*

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \frac{1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2!} + \cdots - 1}{h} = e^x(1 + \frac{h}{2!} + \ldots) \to e^x \ \textit{für } h \to 0.$$

Die Ableitungsfunktion der e- Funktion ist wieder die e- Funktion!

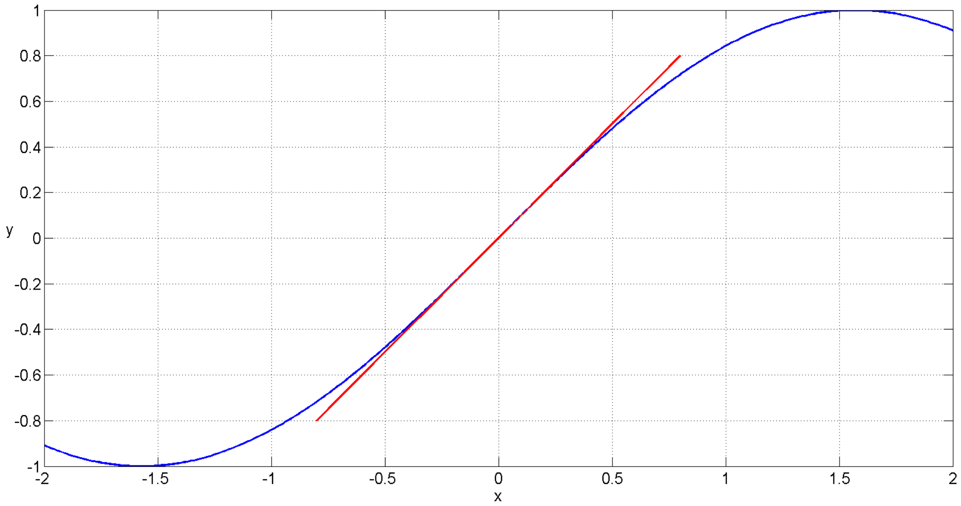


Abbildung 12.3: Tangenten an $\sin x$ bei 0

Folgerung 12.4. *Mit den Beispielen 12.4 und 12.5 folgt für die höheren Ableitungen von $f(x) = \sin x$:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^4(x) &= \sin x \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12.20}$$

12.3 Rechenregeln zur Bestimmung der Ableitung

Ableitungen von Summen, Produkten und Quotienten werden nach folgenden Regeln bestimmt:

Satz 12.4. *Es seien f und g in $x \in I \subset (D_f \cap D_g)$ differenzierbar. Dann gelten:*

1. *(**Addition**)*
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \tag{12.21}$$

2. *(**Produktregel**)*
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \tag{12.22}$$
,

3. *(**Quotientenregel**)*
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \qquad g(x) \neq 0 \tag{12.23}$$
.

Beweis zu

1. ist trivial,

2. Es wird der Differenzenquotient aufgestellt (und eine nahrhafte Null eingefügt):
$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \frac{(f(x+h) - f(x))\, g(x+h) + f(x)\,(g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x) \\
&\underset{h \to 0}{\to} \quad f'(x)g(x) + g'(x)f(x)
\end{aligned} \tag{12.24}$$

12.3.1 Kettenregel

Oftmals ist eine Funktion als zusammengesetzte Funktion der Form $f(x) = u(v(x))$ gegeben. Nun soll geklärt werden, wie man einen solchen Ausdruck nach x ableitet. Dies klärt der folgende

Satz 12.5. ***(Kettenregel)***
Sei v auf einem Intervall $I \subset D_v$ differenzierbar und u auf $[a,b] \subset W_v$ differenzierbar. Dann gilt für die zusammengesetzte Funktion $f(x) = u(v(x))$:

$$f'(x) = (u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x) \tag{12.25}$$

Oder einfacher zu merken mit Differentialausdrücken:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{12.26}$$

Es ist als wenn man die Differentialausdrücke kürzen könnte (was mathematisch nicht korrekt ist, aber zum Glück funktioniert es). Merkregel:
äußere mal innere Ableitung

Beispiel 12.7. *Sei $f(x) = \sin(x^2)$. Dann ist $u(v(x)) = \sin(x^2)$ mit $v(x) = x^2$. Also ist*

$$f'(x) = (2x) \cdot \cos u(x) = \underbrace{2x}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x^2)}_{u'(v(x))} \tag{12.27}$$

Beispiel 12.8. *$f(x) = e^{x^2}$ Hier ist $v(x) = x^2$ und somit $f(x) = e^{v(x)}$. Die Ableitung ist dann:*

$$v'(x) = 2x \qquad u'(v) = e^v \Rightarrow f'(x) = 2xe^{x^2} \tag{12.28}$$

12.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei existiere für $x \in [a,b] \subset D_f$ die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$. Dann gilt

$$y = f(x) \quad x = g(y) \quad \Rightarrow x = g(f(x)) \tag{12.29}$$

ableiten mit der Kettenregel ergibt:

$$1 = g'(f(x))f'(x) \quad \Rightarrow (f'(x) \neq 0) \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit} \quad y = f(x) \tag{12.30}$$

Beispiel 12.9.

$$y = f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad x = g(y) = \ln(y).$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) = g'(y)e^x \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}. \tag{12.31}$$

Nun wird die unabhängige Variable nur ***umbenannt***

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x) = \frac{1}{x}. \tag{12.32}$$

Beispiel 12.10.

$$y = f(x) = \tan x \quad x = g(y) = \arctan(y)$$
$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Nun wird die unabhängige Variable nur ***umbenannt***

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{12.33}$$

Beispiel 12.11.

$$y = f(x) = \sin x \quad x = g(y) = \arcsin(y)$$
$$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Nun wird die unabhängige Variable nur ***umbenannt***

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{12.34}$$

12.5 Logarithmische Ableitung

Die bisherigen Regeln erlauben nicht, z.B. für $f(x) = a^x$ die Ableitung zu bestimmen. Hier geht man wie folgt vor.

Folgerung 12.5. ***(Logarithmische Ableitung)***
Es ist (s. Abschnitt 8.3) für die Exponentialfunktion

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Nun kann man mit der Kettenregel ableiten und erhält

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(a)} = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x. \tag{12.35}$$

Ein weiteres Beispiel ist $g(x) = x^\alpha$.

Folgerung 12.6. *Für $x \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung zu bestimmen. Wieder wird dies mittel e- Funktion und Logarithmus zunächst umgeformt, um dann die Kettenregel anzuwenden.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,e^{\alpha\ln(x)} = \alpha\frac{1}{x}e^{\alpha\ln(x)} = \alpha\frac{1}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{12.36}$$

Dies erweitert die schon bekannte Ableitungsregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^n = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{N}$.

Für die Funktion $h(x) = x^x$ führt man das wie folgt aus.

Folgerung 12.7.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,e^{x\ln(x)} = \left(\frac{x}{x} + \ln(x)\right)e^{x\ln(x)} = (1+\ln(x))\,x^x \tag{12.37}$$

Zusammengefasst einige Ableitungen elementarer Funktionen:

Funktion f	Ableitung $f'(x)$
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
a^x	$\ln(a)a^x \quad (0 < \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 1)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tabelle 12.1: Ableitungsfunktionen

In den nächsten Abschnitten werden Eigenschaften differenzierbarer Funktionen beschrieben.

12.6 Satz von Rolle

Satz 12.6. ***(Satz von Rolle)***
Sei f auf $[a, b] \subset D_f$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Sei ferner $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0 \tag{12.38}$$

Der Satz sagt anschaulich, dass eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion, die an zwei Punkten identische Werte annimmt, dazwischen eine horizontale Tangente haben muß. Siehe dazu 12.4.

Folgerung 12.8. *Hat eine differenzierbare Funktion in a und b Nullstellen, so muss an mindestens einer Stelle dazwischen eine Nullstelle der Ableitung, also $f'(\xi) = 0$, liegen.*

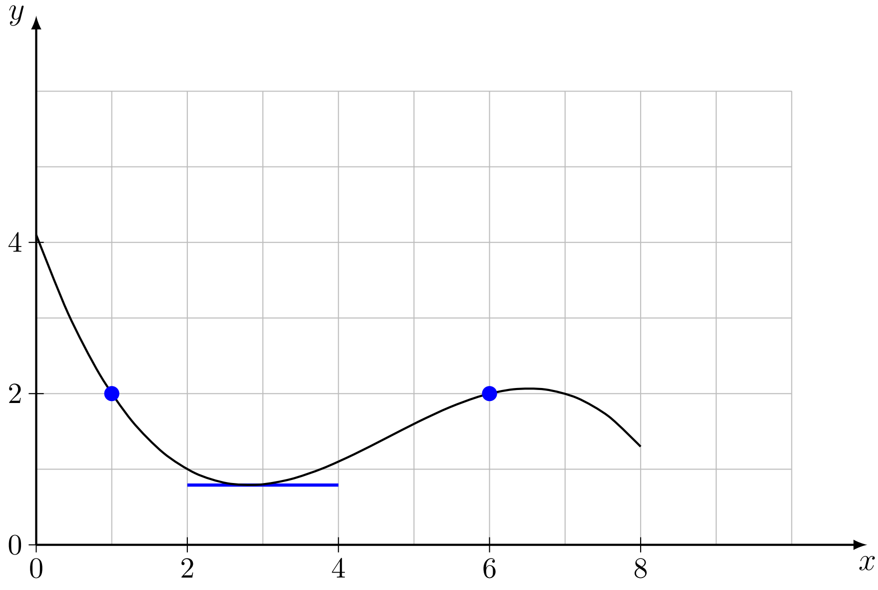


Abbildung 12.4: zum Satz von Rolle

12.7 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 12.7. ***(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)***
Sei f auf $[a,b] \subset D_f$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \Leftrightarrow \quad f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \tag{12.39}$$

Beweis: wir konstruieren eine Hilfsfunktion g durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Es gilt:$g(a) = g(b)$ und damit erfüllt g die Voraussetzungen des Satzes von Rolle 12.6. Damit existiert ein ξ mit $g'(\xi) = 0$. Die Ableitung von g ist

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow 0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Daraus folgt die Behauptung.
Geometrisch bedeutet der Satz folgendes: auf der rechten Seite von 12.39 steht die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Es existiert also mindestens eine Stelle ξ an der die Tangente in ξ parallel zu der Sekante verläuft, siehe 12.5. Mit diesem Satz kann man auch gut Ausdrücke abschätzen.

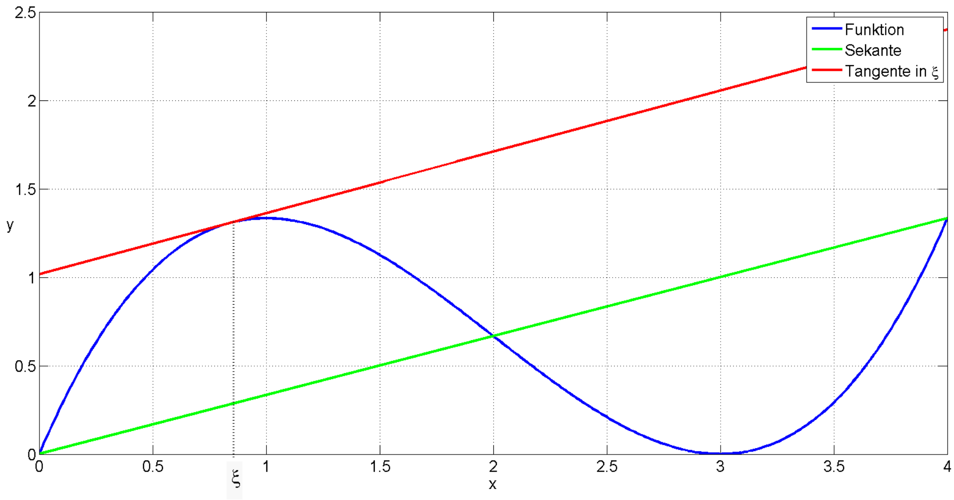


Abbildung 12.5: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Beispiel 12.12. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt wegen 12.39*

$$\sin b - \sin a = (\cos\xi)(b-a) \quad \Rightarrow \quad |\sin b - \sin a| = |\cos\xi||(b-a)|$$

Wegen $|\cos\xi| \leq 1$ folgt:

$$|\sin b - \sin a| \leq |(b-a)|$$

12.8 Extremwerte

Eine wichtige Anwendung der Differentialrechnung ist die Untersuchung der Funktionen bzgl. ihrer Extremaleigenschaften. Zunächst müssen extremale Eigenschaften definiert werden.

Definition 12.4. ***(Relative Maxima und Minima)***
Sei f eine Funktion mit Definitionsbereich D_f und $I \subseteq D_f$ ein Intervall in D_f und sei $x_0 \in I$.

- *f hat in x_0 ein relatives Maximum falls gilt $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in I$*
- *f hat in x_0 ein relatives Minimum falls gilt $f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in I$*

relative Minima und Maxima fasst man unter dem Begriff ***relative Extrema*** *zusammen.*

Der folgende Satz liefert ein erstes Kriterium, um relative Extrema zu finden. Dies soll zunächst anhand einfacher Funktionen verdeutlicht werden. Dazu nehmen Sie die Abbildung 12.7 zur Hand. Die erste Kurve stellt die Funktion dar, die zweite Kurve ist die Ableitungsfunktion, die dritte ist die 2. Ableitungsfunktion. Ein relatives Maximum ist offenbar bei $x_0 = 1$. Die Steigung der Kurve ist für $x < 1$ offenbar positiv; für $x > 1$ negativ (jeweils in einer Umgebung von x_0). D.h. es muss ein Vorzeichenwechsel an dem rel. Maximum vorliegen. Das erkennt man auch tatsächlich an der 1.Ableitungsfunktion. Dies wird in folgendem Satz zusammen gefasst(bei einem relativen Minimum bei $x_0 = 3$ argumentiert man entsprechend.):

Satz 12.8. ***(Notwendige Bedingung für relative Extrema)***
Sei f in $x_0 \in D_f$ differenzierbar.
Besitzt f an x_0 ein relatives Extremum $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

Der Beweis bildet das oben Ausgeführte in mathematischer Argumentation ab: (für ein relatives Minimum). Sei an x_0 ein relatives Minimum. Wir bilden den Differenzenquotienten und ersetzen h durch eine Nullfolge und nähern uns einmal von rechts und einmal von links an x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}} \geq 0 \tag{12.40}$$

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \leq 0 \tag{12.41}$$

Daraus folgt dass $f'(x_0) = 0$ sein muss Der Beweis für ein relatives Maximum verläuft sinngemäß gleich.

Der Satz liefert die Möglichkeit, mögliche "Kandidaten"für relative Extrema zu finden, in dem die Nullstellen der Ableitungsfunktion bestimmt werden. Sie heißen **kritische Punkte**. Es sagt nicht aus, dass dann dort tatsächliche solche vorhanden sind und schon gar nicht ob es relatives Maxima oder Minima sind.

Beispiel 12.13. *$f(x) = x^3$ hat als Ableitungsfunktion $3x^2$. Diese verschwindet bei $x = 0$. Aber f hat dort sicher kein relatives Extremum siehe 12.6 !*

Dazu werden weitere Hilfsmittel benötigt. In 12.7 ist die Funktion $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ mit ihrer 1. und 2. Ableitung dargestellt. Wie man sieht, hat die Funktion bei $x = 1$ ein relatives Maximum und bei $x = 3$ ein relatives Minimum. Wie nach 12.8 zu erwarten, sieht man, dass dort in der Tat die 1. Ableitung verschwindet. Bei der 2. Ableitung fällt auf, dass sie im relativen Maximum eine Wert < 0 und im relativen Minimum einen Wert > 0 besitzt.
Wir fassen dieses (beispielhafte) Ergebnis zusammen in

Satz 12.9. ***(hinreichendes Kriterium für relative Extrema)***
Sei eine Funktion f auf $[a, b] \subset D_f$ zweimal differenzierbar. Gilt in $x_0 \in (a, b)$ $f'(x_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} f''(x_0) < 0 &\Rightarrow \text{dann liegt in } x_0 \text{ ein relatives Maximum vor.} \\ f''(x_0) > 0 &\Rightarrow \text{dann liegt in } x_0 \text{ ein relatives Minimum vor.} \end{aligned} \tag{12.42}$$

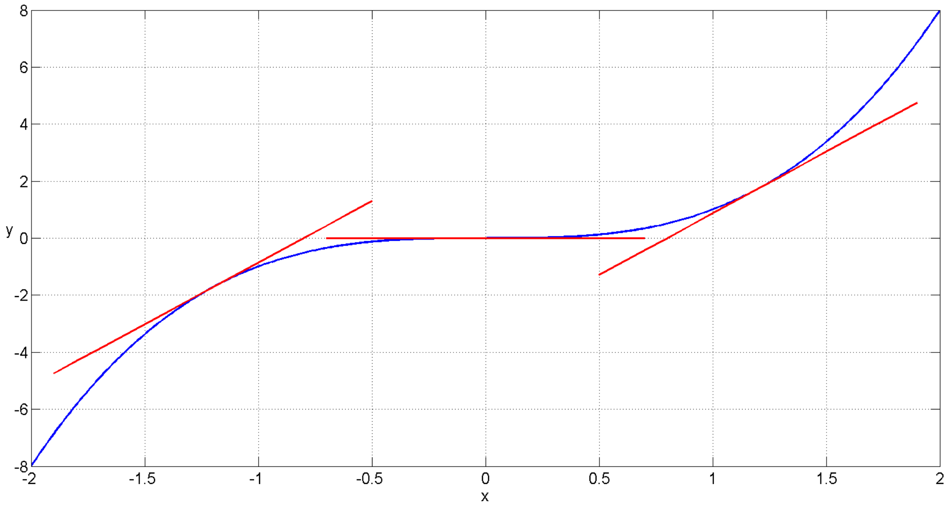


Abbildung 12.6: kubische Funktion x^3

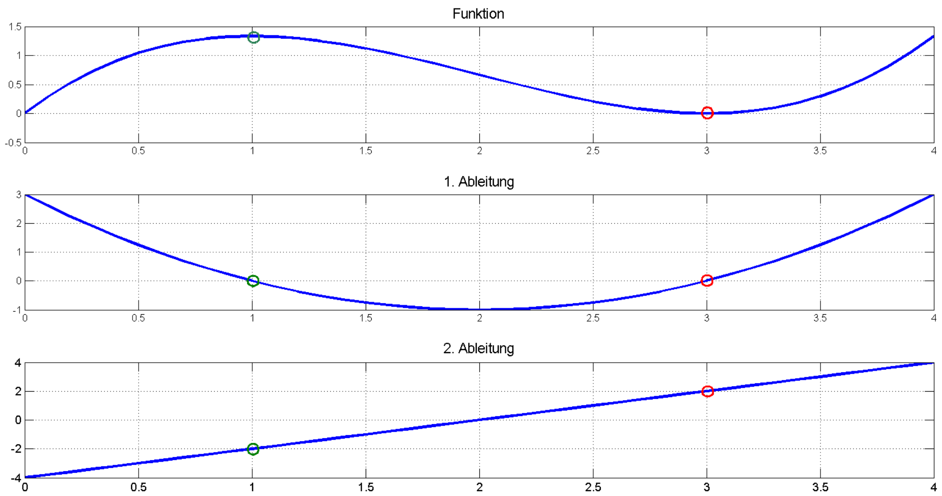


Abbildung 12.7: relative Minima und Maxima

12.9 Wendepunkte, Krümmung

Das Beispiel der kubischen Funktion zeigt, dass bei $x = 0$ eine bisher nicht erfasste Situation vorliegt. Nun betrachten Sie Abbildung 12.8. Dort sind einige Tangenten an die Funktion in rot eingezeichnet. Es ist die selbe Funktion, die in Abbildung 12.7 mit ihren Ableitung dargestellt ist.
Zunächst fällt auf, dass alle Tangenten bis zu Punkt $x_0 = 2$ oberhalb der Kurve verlaufen und von da an immer unterhalb der Kurve liegen. Um das Verhalten der Tangenten zu verstehen, müssen wir die 1. Ableitungsfunktion - die ja die Steigungen der Tangenten bildet und sie somit beschreibt- ansehen. Diese ist in Abbildung 12.9 dargestellt. Die Funktion ist wieder $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$; also ist $f'(x) = x^2 - 4x + 3$.

Was man erkennt ist, dass die Ableitungsfunktion ihrerseits Nullstellen bei $x = 1$

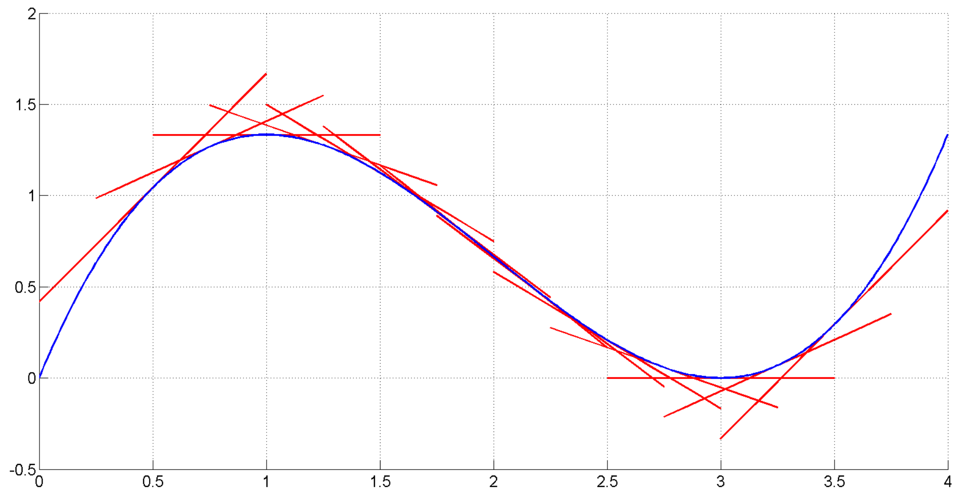


Abbildung 12.8: zur Erläuterung der Wendepunkte

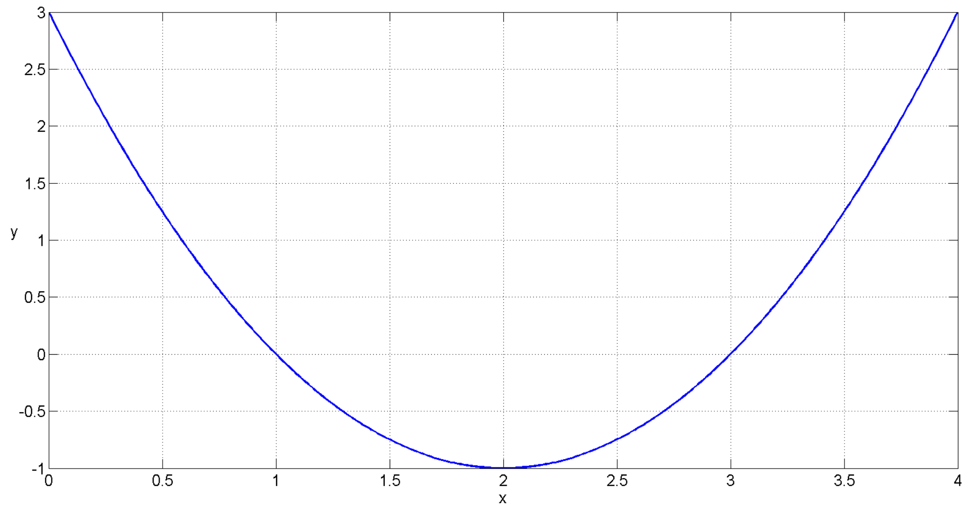


Abbildung 12.9: 1. Ableitungsfunktion

und $x = 3$ und ein relatives Minimum (bei $x = 2$) besitzt. Dies lässt sich in der 2. Ableitung als Nullstelle finden $f''(x) = 2x - 4$. Die dritte Ableitung ist $2 > 0$. Was sofort ersichtlich der Fall ist. Dies ist in Abbildung 12.7 genau die Stelle an der der Übergang stattfindet wo die Tangenten zunächst oberhalb und dann unterhalb der Kurve verlaufen. Zunächst definieren wir diesen Verlauf als Krümmung:

Definition 12.5. ***(Krümmung)***
Sei f eine 2 mal differenzierbare Funktion. Sie heißt auf $(a, b) \subset D_f$

- *links gekrümmt (**konvex**), falls die Tangenten unterhalb der Kurve verlaufen*
- *rechts gekrümmt (**konkav**), falls die Tangenten oberhalb der Kurve verlaufen*

Aus dem Beispiel leiten wir ab (was kein Beweis ist!):

Satz 12.10. ***(Krümmungskriterium)***
Sei f eine 2 mal differenzierbare Funktion auf $(a, b) \subset D_f$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f \textit{ ist links gekrümmt}(\textbf{\textit{konvex}}) \\ f''(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f \textit{ ist rechts gekrümmt}(\textbf{\textit{konkav}}) \end{aligned} \tag{12.43}$$

Beispiel 12.14. ***(Beispiele konvexer und konkaver Funktionen)***

1. *$f(x) = x^2$ ist konvex auf jedem Intervall,*
2. *$f(x) = \sin x$ ist konkav für $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ und konvex für $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$,*
3. *$f(x) = e^x$ ist konvex auf jedem Intervall,*
4. *$f(x) = \ln(x)$ ist konkav auf jedem Intervall.*

Nun müssen wir noch den Punkt $x = 2$ betrachten: dort wechselt die Funktion ihr Krümmungsverhalten. Dies definiert man als

Definition 12.6. ***(Wendepunkt)***
Punkte an denen die Kurve den Drehsinn ändert (d.h. von Linkskrümmung in Rechtskrümmung übergeht bzw. umgekehrt) heißen Wendepunkte. Die Tangente in einem Wendepunkt heißt Wendetangente.

Dies ist auf jeden Fall gegeben, dort wo die 1. Ableitungsfunktion relative Extrema besitzt. Also dort wo $f''(x) = 0$ ist.

Satz 12.11. *(**hinreichendes Kriterium für Wendepunkte**) Sei f dreimal differenzierbar in $x_0 \in D_f$. Gilt*

$$f''(x_0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f'''(x_0) \neq 0 \tag{12.44}$$

dann besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.

Was ist aber mit der kubischen Funktion $f(x) = x^3$? Es ist $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$. Aus den bisherigen Überlegungen folgt: Sie besitzt in $x = 0$ eine waagerechte Tangente und dort erfüllt sie auch das hinreichende Kriterium für einen Wendepunkt (s. Abbildung 12.6). Dieser besondere Fall wird definiert durch:

Definition 12.7. ***(Sattelpunkt)***
*Ist an x_0 eine **waagerechte Wendetangente** vorhanden, so heißt der Punkt Sattelpunkt.*

Satz 12.12. *Sei f auf $(a,b) \subset D_f$ 3 mal differenzierbar und gilt an $x_0 \in (a,b)$:*

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f'''(x_0) \neq 0 \tag{12.45}$$

dann liegt an x_0 ein Sattelpunkt vor.

12.10 Kurvendiskussionen

Definition 12.8. ***(Kurvendiskussion)***

Eine erste und einfache Charakterisierung einer Funktion liefert eine Kurvendiskussion. Sie dient dazu, einen einfachen qualitativen Überblick über den Verlauf der Funktion zu erhalten: Diese umfasst folgende Punkte (nicht alle müssen vorkommen):

1. *Definitionsbereich, Wertebereich*
2. *Nullstellen,*
3. *Polstellen,*
4. *Extremwerte (rel. Maxima und Minima) und ggf. absolute Extrema,*
5. *Wendepunkte*
6. *asymptotisches Verhalten,*
7. *eine Skizze.*

An einem einfachen Beispiel wird die Kurvendiskussion gezeigt.

Beispiel 12.15. ***(Kurvendiskussion)***
Es sei

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \qquad W_f \subset \mathbb{R}.$

2. *Nullstelle* $x_{1,2} = 1$ *(doppelte Nullstelle) .*

3. *einfache Polstelle bei* $x = 2$*, also mit Vorzeichenwechsel.*

4. *Extremwerte:*

   a) *dazu müssen zunächst mit der 1. Ableitung die kritischen Punkte bestimmt werden. Es ist (Quotientenregel)*

   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

   Die Nullstellen von f' *sind* $x_1 = 1$ *und* $x_2 = 3$*. Dies sind die kritischen Punkte.*

   b) *Mittels der 2. Ableitung erhält man hinreichende Bedingungen. Es ist*

   $$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

   $f''(1) < 0 \quad \Rightarrow$ *es liegt ein relatives Maximum bei* $x = 1$ *vor,*
   $f''(3) > 0 \quad \Rightarrow$ *es liegt ein relatives Minimum bei* $x = 3$ *vor.*

5. f *besitzt keine Wendepunkte, da* $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

6. *asymptotisches Verhalten:*

   a) *es ist* $f(x) > 0$ *für* $x > 2$ *. Also muss* f *für* $x \to 2+$ *gegen* ∞ *gehen. Für* $x \to 2-$ *geht* f *gegen* $-\infty$.

   b) f *ist nicht echt gebrochen rational. Eine Polynomdivision liefert*

   $$f(x) = x + \frac{1}{x-2}.$$

   Asymptote ist die Gerade $y = x$*. Das bedeutet, dass sich* f *für* $x \to \pm\infty$ *verhält wie diese Gerade und sich ihr immer weiter annähert.*

7. *Skizze siehe Figur 12.10*

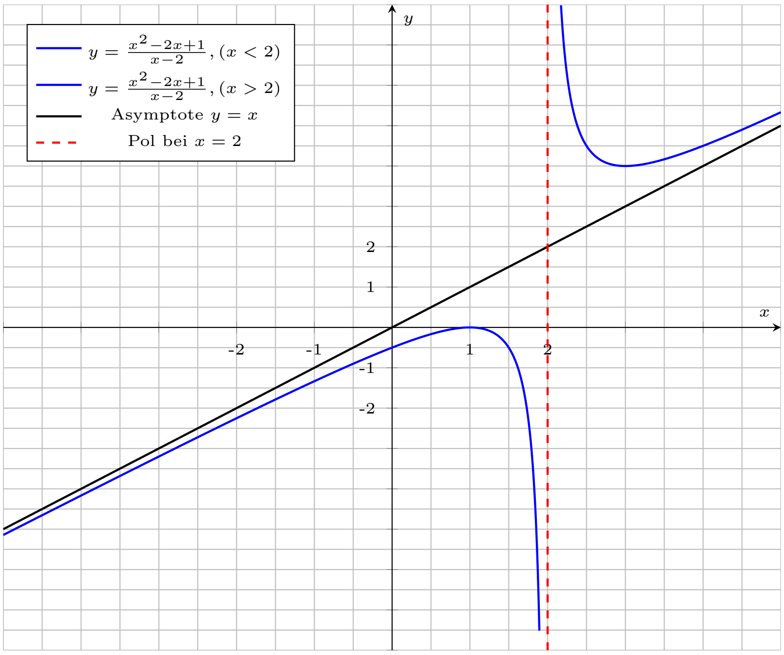


Abbildung 12.10: zur Kurvendiskussion $y = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$

12.11 Die Regeln von L'Hospital

In 10.2 ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

auf geometrischem Weg hergeleitet worden. Hier wird nun gezeigt, wie Grenzwerte der Art

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{12.46}$$

mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

mit der Differentialrechnung behandelt werden können. Man symbolisiert diese Art des Grenzwerts als von der Form „$\frac{0}{0}$“.

Sieht man sich die Graphen der Funktionen $y = \sin x$ und $y = x$, so sieht man (s. Figur 12.11), dass beide Funktionen im Koordinatenursprung die gleiche Steigung besitzen. Dies drückt sich mittels der Differentialrechnung dadurch aus, dass die Sinus Funktion sich in einer kleinen Umgebung vom Ursprung linearisieren lässt

$$\sin x \approx \sin 0 + \cos 0(x - 0) = x.$$

Dann ist der Quotient

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{x}{x} = 1.$$

Allgemein kann man mittels der Linearisierung von Zähler und Nenner schreiben

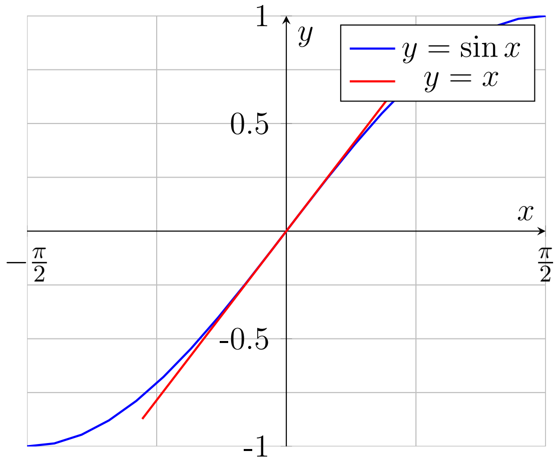


Abbildung 12.11: Erklärung $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

$(f(x_0) = g(x_0) = 0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)} = \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} \underset{x\to x_0}{\to} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dies kann allgemeiner in folgendem Satz gefasst werden

Satz 12.13. ***(Regeln von L'Hospital)***
Es seien $f(x)$ und $g(x)$ in x_0 (x_0 kann auch ∞ sein) differenzierbar und es sei

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \tag{12.47}$$

bzw.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \tag{12.48}$$

bzw. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ein ***unbestimmter Ausdruck*** *der Form „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$".*
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{12.49}$$

so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12.50}$$

Folgerung 12.9. *Der Satz kann mehrfach hintereinander angewendet werden, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ wieder auf einen unbestimmten Ausdruck führt und die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.*

Die Anwendung des Satzes erläutern die nachfolgenden Beispiele.Zunächst wird wieder das Beispiel der si Funktion betrachtet.

Beispiel 12.16.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}.$$

Dies ist ein unbestimmter Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$“. *Anwenden der Regel liefert*

$$\frac{\cos(x)}{1}\underset{x\to 0}{\to}1\,.$$

Beispiel 12.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}.$$

Unbestimmte Form „$\frac{0}{0}$“.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{n(1+x)^{n-1}}{1}\underset{x\to 0}{\to}n$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

Beispiel 12.18.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

Unbestimmte Form „$\frac{0}{0}$“.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

Dies ist wieder eine unbestimmte Form „$\frac{0}{0}$“. *Daher wird die Regel nochmals angewendet:*

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{\sin x}{6x}.$$

. *Auch dies ist eine unbestimmte Form* „$\frac{0}{0}$“, *daher wird die Regel nochmals angewendet*

$$\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\frac{\cos x}{6}\underset{x\to 0}{\to}\frac{1}{6}\,.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

12.12 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung

Oftmals ist man vor die Aufgabe gestellt, eine Nullstelle einer Funktion zu bestimmen. Manchmal gelingt dies nicht durch direktes ‚Ausrechnen‘ und dann reicht es meist diese Nullstelle numerisch durch einen Algorithmus (ein Verfahren) zu bestimmen. Wir werden nun einen solchen Algorithmus herleiten. Ausgehend von einer Funktion f und einem sog. Startwert x_0, der in der Nähe der Nullstelle liegen soll (die genaue Bestimmung dieser Nähe kann hier nicht betrachtet werden), suchen wir ein $\bar{x}$ mit $f(\bar{x}) = 0$. Zunächst bestimmen wir die Tangente t in x_0 an f :

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

. Ist $f'(x_0) \neq 0$ hat die Tangente einen Schnittpunkt mit der x- Achse (ist die Ableitung 0 verläuft sie waagerecht). Bezeichnen wir diesen mit x_1 so gilt

$$t(x_1) = 0 = f(x_0) + f‘(x_0)(x_1 - x_0)$$

. Lösen wir dies nach x_1 auf erhalt man:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

. x_1 ist nun (wie man der Graphik entnimmt) eine bessere Annäherung an die gesuchte Nullstelle $\bar{x}$. Wir wiederholen den obigen Schritt, indem wir x_0 durch x_1 ersetezen und erhalten:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

.

Durch weiteres Fortsetzen ergibt sich ausgehend von einem Startwert x_0 für $n \in \mathbb{N}_{\not 0}$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x_n) \neq 0 \tag{12.51}$$

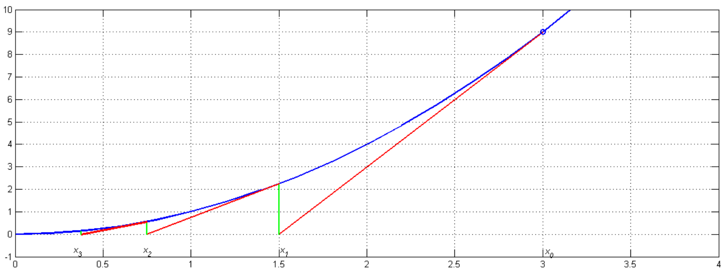


Abbildung 12.12: Newton Verfahren

Diese rekursive Vorschrift beschreibt das Newton'sche Iterationsverfahren. Es ist nicht durchführbar, wenn die Ableitung verschwindet.In 12.51 ist dies am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ dargestellt. Vorteile des Newton Verfahrens sind seine schnelle Konvergenz.Allerdings ist es sensitiv bzgl. der Wahl des Startwertes.

Beispiel 12.19. *Babylonisches Wurzelziehen Es soll näherungsweise der Wert von* $\sqrt{2}$ *bestimmt werden. Zunächst muss das Problem durch eine Funktion, deren Nullstelle gesucht wird, ausgedrückt werden. Dies ist hier z.B.*

$$f(x) = x^2 - 2$$

Denn für die gesuchte Nullstelle gilt $x = \sqrt{2}$*. Die Iterationsgleichung ist gemäß* (12.51)*:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$$

Wählt man als Startwert $x_0 = 2$*, so erhält man die Folge:*

$$x_1 = 1.5000 \; x_2 = 1.4167 \; x_3 = 1.4142.$$

Bereits nach 3 Iterationsschritten ist das Ergebnis auf 4 Stellen hinter dem Komma genau. Dieses Verfahren war schon den Babyloniern bekannt. Es wurde von Heron v. Alexandria beschrieben (allerdings ohne das Newton- Verfahren zu kennen).

Will man $\sqrt{2}$ bestimmen, kann man statt die Nullstelle von $f(x) = x^2-2$ zu bestimmen dies umformen zu $1 - \frac{2}{x^2}$. Dies führt dann auf eine andere Iterationsvorschrift wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 12.20.

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

Die Ableitung ist

$$f'(x) = 4\frac{1}{x^3}$$

Damit ergibt sich für die Iterationsgleichung gemäß (12.51)*:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^3}} = \frac{x_n}{2}\left(3 - \frac{x_n^2}{2}\right).$$

Damit ergeben sich für die ersten Folgenglieder bei Startwert $x_0 = 2$*:*

$$x_1 = 1.0000 \; x_2 = 1.2500 \; x_3 = 1.3867 \; x_4 = 1.4134 \; x_5 = 1.4142.$$

Vergleicht man beide obigen Verfahren, so fällt auf, dass 12.20 keine Divisionen benutzt, aber es konvergiert nicht so schnell. Man muss also schon geschickt vorgehen. Dies ist bei Anwendung auf Rechnern oder embedded Mikroprozessoren von großem Vorteil, da Divisionen eine hohe CPU Last darstellen (sie werden auch durch Iterationen gemacht. Nur Divisionen durch Zweierpotenzen sind durch Shift- Operationen einfach machbar.) Es ist also sehr entscheidend, das Verfahren geschickt zu wählen. Eine weitere Anwendung ergibt sich, wenn man iterativ den Schnittpunkt zweier Funktionen finden muss Es gilt dann

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \; f(x) - g(x) = 0.$$

, Darauf lässt sich das Newton Verfahren anwenden. Es gibt zahlreiche alternative

Verfahren. Ein besonders einfaches und robustes Verfahren ist das sog. Gradientenverfahren. Aber das würde hier zu weit führen.

Beispiel 12.21. *Wir betrachten die Gleichung*

$$\cos x = x \Leftrightarrow x - \cos x = 0$$

Das Newton Verfahren ist allerdings nicht völlig unproblematisch. Es kann passieren, dass es überhaupt nicht konvergiert (obwohl es eine Lösung gibt). Das liegt insbesondere bei mehrfachen Nullstellen vor. Eine vollständige Behandlung kann hier nicht erfolgen. Es wird auf [5] und [4].

13 Integralrechnung

13.1 Bestimmtes Integral

Im folgenden wollen wir uns mit der Bestimmung einer Fläche befassen, die von der x-Achse und der durch eine Funktion beschriebenen Kurve begrenzt wird. Wie in der unten stehenden Figur dargestellt, wird man bei krummlinig begrenzten Flächen eine Annäherung durch Rechtecke versuchen. Wir setzen dabei zunächst $f(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$ voraus. Hinweis: der wie hier eingeführte Integral Begriff beginnt mit einer intuitiven geometrischen Fragestellung. Tatsächlich wird der Begriff des Integrals weiter gefasst als die Flächenberechnung, so dass $f(x) \geq 0$ nicht mehr auftreten wird.

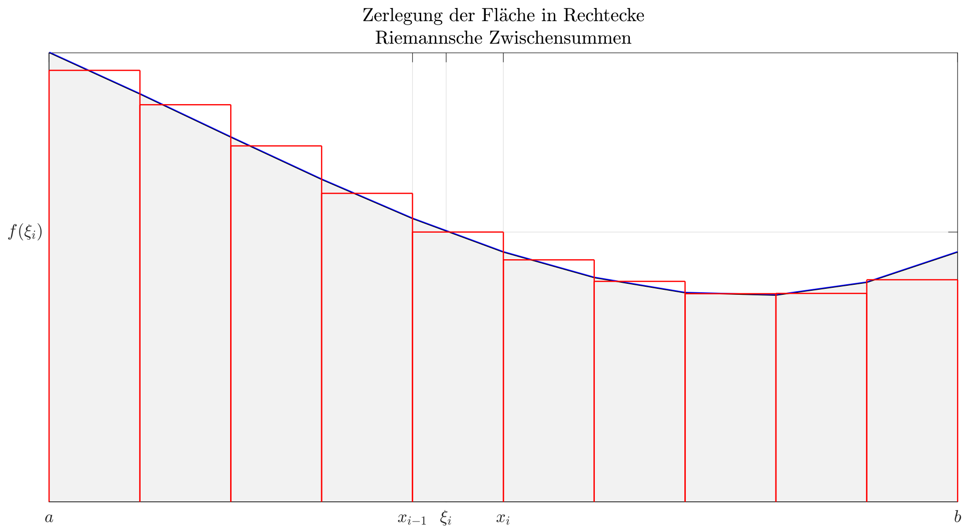


Abbildung 13.1: Riemannsche Zwischensumme

Zunächst werden noch einige Begriffsbildungen benötigt.

Definition 13.1. ***(Zerlegung)***
Sei $[a, b]$ ein Intervall. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_n$ gegeben durch

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n = b.$$

Wir definieren noch ein Maß:

$$\mu(\mathfrak{Z}_n) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|. \tag{13.1}$$

Das Maß ist also die maximale Länge der auftretenden Teilintervalle in der Zerlegung. Es bestimmt die Verfeinerung. Wir wollen nur solche Zerlegungen betrachten für die gilt:

$$\mu(\mathfrak{Z}_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Auf jedem dieser n Teilintervalle können wir nun folgende Betrachtung machen: es sei

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

ein beliebiger Zwischenpunkt. Dann können wir den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Kantenlängen $f(\xi_i)$ und $\Delta_i := (x_i - x_{i-1})$ bestimmen zu:

$$f(\xi_i)\Delta_i.$$

Summieren wir nun alle diese Rechtecke auf, wird damit sicherlich die gesamte Fläche unter der Kurve gut angenähert, sofern die Feinheit der Zerlegung entsprechend klein ist. Die **Riemannschen Zwischensummen** sind gegeben durch:

$$S(f, \mathfrak{Z}_n, [a, b]) = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta_i. \tag{13.2}$$

Nun wird das Integral erklärt durch:

Definition 13.2. ***(Bestimmtes Integral)***
Konvergiert die Riemannsche Zwischensumme für $n \to \infty$, so heißt f auf $[a, b]$ Riemann integrierbar und wir schreiben:

$$\lim_{n \to \infty} S(f, \mathfrak{Z}_n, [a, b]) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{13.3}$$

Wir werden zukünftig stets nur von integrierbaren Funktionen sprechen und von Integralen. Gemeint ist dies dann immer im Riemannschen[1] Sinn. Es soll hier erwähnt werden, dass es in der Mathematik noch andere Integral Begriffe gibt, die wir hier aber nicht betrachten. Folgerungen:

[1] Bernhard Riemann (1826-1866) war ein bedeutender deutscher Mathematiker. Er war Professor in Göttingen und arbeitete auf zahlreichen Gebieten der Mathematik. Insbesondere untersuchte er andere als die uns bekannte euklidische Geometrie. Diese Verallgemeinerungen sollten wesentlich später noch eine besondere Bedeutung bei der Entwicklung der Relativitätstheorie (1905) durch Albert Einstein erlangen.

1.
$$\sum_{i=0}^{n} \Delta_i = b - a \tag{13.4}$$

2. Ist $f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b]$ d.h. eine Konstante, so gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} c\Delta_i = c(b-a) \tag{13.5}$$

Satz 13.1. *Aus der Definition des Integrals folgen sofort:*

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x \tag{13.6}$$

Sei c mit $a \leq c \leq b$ ein Zwischenwert dann lässt sich das Integral aufspalten:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \tag{13.7}$$

Das sieht man ein, da die in der Zerlegung auftretenden Werte Δ_i alle bei Umkehrung der Integrationsgrenzen negativ werden.

Wann ist nun eine Funktion integrierbar?

Dies klärt der folgende Satz.

Satz 13.2. *Sei f auf $[a,b]$ stückweise stetig und beschränkt $\Rightarrow$ f auf $[a,b]$ integrierbar.*

Diese Voraussetzung ist hinreichend, man kann sie auch abschwächen. Für die meisten Anwendungen reicht sie jedoch aus. Es folgt unmittelbar aus der Definition: ist $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$$

und ist $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ dann ist

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq 0$$

.

Daraus folgt nun: sei $m \leq f(x) \leq M\ \forall x \in [a,b]$ dann gilt:

$$f(x) - M \leq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - M)\ \mathrm{d}x \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a) \tag{13.8}$$

und es gilt ferner:

$$f(x) - m \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (f(x) - m) \, \mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geq m(b-a). \tag{13.9}$$

. Zusammengefasst also:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq M(b-a) \tag{13.10}$$

Also existiert ein μ mit $m \leq \mu \leq M$ mit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \mu(b-a) \tag{13.11}$$

Ist nun f stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen m und M an (Zwischenwertsatz). Es existiert ein ξ mit $f(\xi) = \mu$. Dies liefert den

Satz 13.3. ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
Sei f auf $[a, b]$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \tag{13.12}$$

Die Aussage des Satzes ist anschaulich leicht verständlich. Es gibt einen Stelle ξ so , dass das Integral den gleichen Wert besitzt wie ein Rechteck mit den Kantenlängen $b - a$ und $f(\xi)$. Dies sieht man beispielhaft in der Figur 13.2.

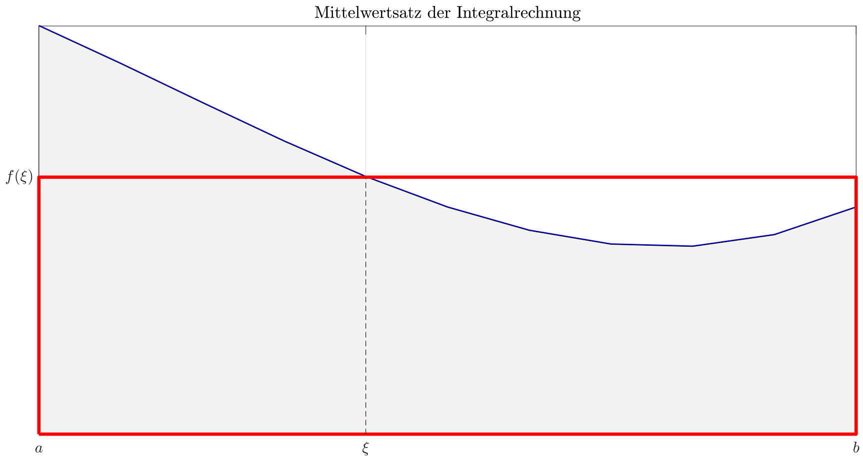


Abbildung 13.2: Mittelwertsatz der Integralrechnung

13.2 Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Nun wird der wichtige Zusammenhang der Integralrechnung mit der Differentialrechnung erklärt. Es wird sich zeigen, dass sie in gewisser Weise gegenseitig invers sind.

Definition 13.3. ***(Stammfunktion)***
F heißt Stammfunktion zu f falls gilt

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

Da die Ableitung einer Konstanten verschwindet, ist folgender Satz unmittelbar klar.

Satz 13.4. *Sei F auf $[a, b]$ eine Stammfunktion zu f dann ist auch*

$$F(x) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Das bedeutet, es gibt unendlich viele Stammfunktionen. Sie unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante. Sie bilden also eine Menge. Diese Menge bekommt einen besonderen Begriff:

Definition 13.4. ***(Unbestimmtes Integral)***
Sei f auf $[a, b]$ integrierbar, dann heißt die folgende Menge aller Stammfunktionen

$$\left\{F | F'(x) = f(x),\ x \in [a, b]\right\} \tag{13.13}$$

unbestimmtes Integral. Wir schreiben dafür abgekürzt:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x \quad . \tag{13.14}$$

Also ist

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist die Integration gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Stammfunktion, was in dem folgenden Satz zum Ausdruck kommt. Es ist auch unmittelbar klar, dass gilt:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c \qquad , (c \in \mathbb{R}) \quad . \tag{13.15}$$

13.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt werden wir die inhaltliche Verbindung der Gebiete der Differentialrechnung und der Integralrechnung kennen lernen.

Satz 13.5. ***(1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)***
Sei f auf $[a,b]$ stetig. Dann ist für ein beliebiges $x_0 \in [a,b]$ die Funktion F gegeben durch:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{13.16}$$

eine Stammfunktion von f. d.h. es gilt:

$$F'(x) = f(x) \tag{13.17}$$

Beweis: wir müssen zeigen, dass F differenzierbar ist und die Ableitung $f(x)$ ist. Dazu bilden wir den Differenzenquotienten:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x}{h} = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral lässt sich mittels des Mittelwertsatzes der Integralrechnung abschätzen zu:

$$f(\xi)(x+h-x) = hf(\xi)\,, \quad \xi \in [x, x+h]\,.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x) = f(\xi).$$

Geht nun h gegen Null, so muss ξ gegen x gehen. Insgesamt also:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$

Satz 13.6. ***(2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)*** *Es sei f auf $[a,b]$ integrierbar und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt:*

$$\int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad . \tag{13.18}$$

Beweis:
Setze F wie in 13.16 mit $x_0 = a$. Dann ist $F(a) = 0$ und

$$\int_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) + c$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow F(a) = \int_{a}^{a} f(x)\ \mathrm{d}x + c = 0 \Rightarrow F(a) = -c \\ &\Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) \end{aligned} \tag{13.19}$$

Damit ist der Weg zur Berechnung eines bestimmten Integrals auf die zwei Schritte

1. Bestimmung einer Stammfunktion und

2. Einsetzen der oberen und unteren Grenze in die Stammfunktion

zurück geführt.

13.4 Einfache Rechenregeln für Integrale

Es seien f, g integrierbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

Satz 13.7. ***(Erste Integrationsregeln)***

1. $\int\limits_a^b \mathrm{d}x = b - a$
2. $\int c\, f(x)\mathrm{d}x = c \int f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int (f(x) \pm g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x$
4. $\left| \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

An dieser Stelle können wir mit Hilfe von 12.1 einige Stammfunktionen bereits angeben:

f	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^n	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$
e^x	$e^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$+c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$

Tabelle 13.1: Stammfunktionen einiger elementarer Funktionen

Die nachfolgenden Rechenregeln beruhen auf der Ketten- bzw. Produktregel der Differentiation

13.5 Substitutionsregel

Es seien f und g Funktionen und F sei eine Stammfunktion zu f. Dann gilt mit der **Kettenregel**:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Daraus folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (13.5)

Satz 13.8. ***(Substitutionsregel)***

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz \text{ mit } z = g(x) \tag{13.20}$$

Für unbestimmte Integrale gilt die Regel entsprechend:

$$\int f(z)dz = \int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x \tag{13.21}$$

Beispiel 13.1. *Bestimme das Integral*

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

Hier wird $z = g(x) = \dfrac{x}{a}$ *substituiert. Dann ist* $g'(x) = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{a}$. *Nun rechnet man mit den infinitesimalen Größen als wären es Brüche.*

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + z^2}\mathrm{d}z.$$

Die Stammfunktion liest man aus 13.1 ab.

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{1}{1 + z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{a}\arctan(z) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Nun macht man wieder eine Rücksubstitution und erhält

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel 13.2. *Zu bestimmen ist*

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x.$$

Hier ist die Substitution $u = \sin x$ *zielführend, denn es ist*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x \qquad \Rightarrow \mathrm{d}u = \cos x \mathrm{d}x.$$

Damit ist

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x. = \int u \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{\sin^2(x)}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Folgerung 13.1. ***(Standardverfahren)***
Integrale vom Typ

1. $$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x \quad \textit{und}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$$

werden mit der Substitution $z = f(x)$ behandelt. Dann ergibt sich

a) $$\int f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f^2(x) + c,$$

b) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

2. *Integrale vom Typ*
$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$$
werden mit der Substitution $z = ax + b$ behandelt.

3. *Integrale vom Typ*
$$\int f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$$
werden mit der Substitution $z = \sqrt{x}$ behandelt.

4. *Integrale vom Typ*
$$\int f(e^x)\,\mathrm{d}x$$
werden mit der Substitution $z = e^x$ behandelt.

Beispiel 13.3. *Bestimme das unbestimmte Integral*

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Hier substituiert man $z = \sqrt{x}$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$. Also $\mathrm{d}x = 2z\mathrm{d}z$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{z}{z^2+z}\,\mathrm{d}z = 2\int \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z \\ = 2\ln(|1+z|) + c = 2\ln(1+\sqrt{x}) + c \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beispiel 13.4. *Es soll die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r bestimmt werden. Betrachte dazu einen Viertelkreis im I. Quadranten. Dort gilt*

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}\ , \qquad 0 \leq x \leq r.$$

Dann ist die Fläche

$$F = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

Führe Polarkoordinaten ein $x = r\sin\varphi$ *mit* $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = r\cos\varphi \quad \mathrm{d}x = r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\Rightarrow F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

Es gilt das Additionstheorem $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$.

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2\varphi) + 1)\mathrm{d}\varphi = \frac{r^2}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\varphi)\mathrm{d}\varphi}_{I_1} + \frac{r^2}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi}_{I_2}.$$

Mit einer weiteren Substitution $\alpha = 2\varphi$ *wird* I_1 *behandelt.*

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(\alpha)\mathrm{d}\alpha = 0, \\ I_2 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}.$$

Eingesetzt ergibt dies schließlich

$$F = \frac{\pi}{4}r^2.$$

Daraus folgt für die Fläche des Vollkreises die bekannte Formel

$$F_{Kreis} = \pi r^2.$$

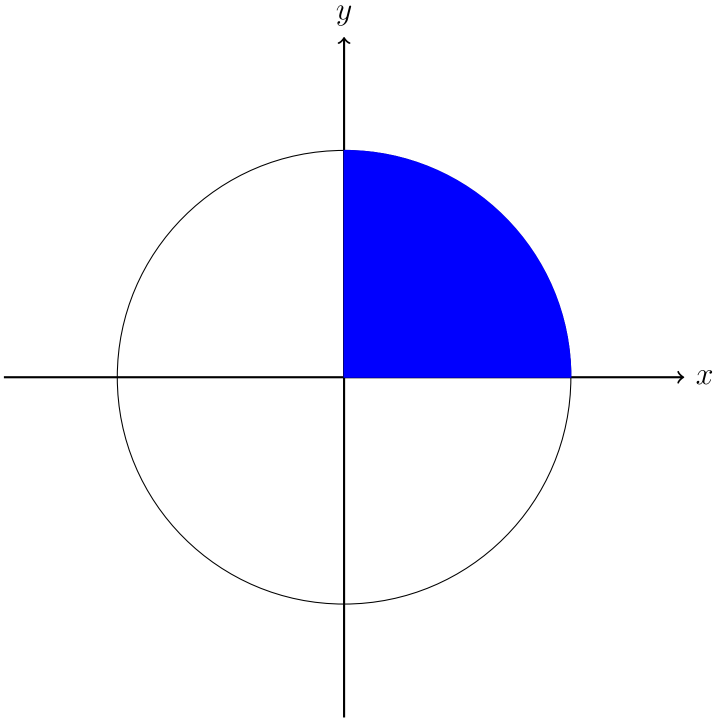


Abbildung 13.3: Viertelkreis

13.6 Partielle Integration

Wir gehen aus von der **Produktregel** für die Differentiation: Es gilt für f, g differenzierbar

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{13.22}$$

Integriert man auf beiden Seiten, so erhalten wir mit dem 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (13.5) die Gleichung

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.23}$$

Daraus erhält man die sog. partielle Integration:

Satz 13.9. ***(Partielle Integration)***
Seien f und g stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{oder} \\ \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{13.24}$$

Die Formeln gelten sinngemäß für bestimmte Integrale.

Dies ist die Formel der sog. partiellen Integration. Auf den ersten Blick scheint diese Formel kein Gewinn zu sein, da man auf der rechten Seite wieder ein Integral hat. Wendet man die Formel geschickt an, können oftmals Integrale, deren Integrand das Produkt zweier Funktionen ist, bestimmt werden. Beispiele sollen dies zeigen.

Beispiel 13.5. *Bestimme*

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 13.6. *Bestimme das unbestimmte Integral*

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Man identifiziert im Integrand zunächst die auftretenden Terme mit der Formel für die partielle Integration. Strategie ist es, die Potenzen von x abzubauen.

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{x} \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{\sin x} \, \mathrm{d}x = -x \cos x - \int (-\cos x) \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x + c \quad , c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 13.7. *Bestimme*

$$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hier geht man wie folgt vor: Man setzt

$$f'(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sin x$$

Dann ist

$$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int \left(1 - \sin^2(x)\right) \, \mathrm{d}x$$

Nichts scheint gewonnen, da das ursprüngliche Integral wieder auftaucht; aber mit entgegengesetztem Vorzeichen!

$$\Rightarrow \quad 2 \int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + \int \mathrm{d}x = -\cos x \sin x + x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \quad \int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (x - \cos x \sin x) + c, \quad c = \frac{c_1}{2} \in \mathbb{R}$$

13.7 Integration rationaler Funktionen mittels Partialbruchzerlegung

Echt gebrochen rationale Funktionen lassen sich integrieren, indem man eine Partialbruchzerlegung durchführt. Ist die Funktion unecht gebrochen rational, wird vorher eine Polynomdivision durchgeführt.

Beispiel 13.8.

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}.$$

Im ersten Schritt erfolgt eine Polynomdivision. Dies ergibt

$$\frac{x^3+2}{x^2-4} = x + \frac{4x+2}{x^2-4}.$$

Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Anteils liefert:

$$\frac{4x+2}{x^2-4} = \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^3+2}{x^2-4}\mathrm{d}x = \int \left(x + \frac{5}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}\ln(|x-2|) + \frac{3}{2}\ln(|x+2|) + C$$

13.8 Flächenberechnungen

Bisher war die Einschränkung zur Bestimmung einer Fläche unter einer Kurve, dass gilt $f(x) \geq 0 \quad x \in [a, b]$. Sonst kommt eine negative Zahl heraus, was niemals die Angabe einer Fläche sein kann. Siehe Figur 13.4a. Man spiegelt die Kurve an der x-Achse. Dies bedeutet eine Multiplikation Funktion mit (-1). Also erhält man für die Fläche A (A für Area) im Fall $f(x) < 0$:

$$A = \int_a^b -f(x)\mathrm{d}\,x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$$

Beide Fälle $f(x) > 0 \quad$ und $\quad f(x) < 0$ auf $[a, b]$ lassen sich zusammenfassen, indem man einfach den Betrag nimmt:

$$A = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x\right| \tag{13.25}$$

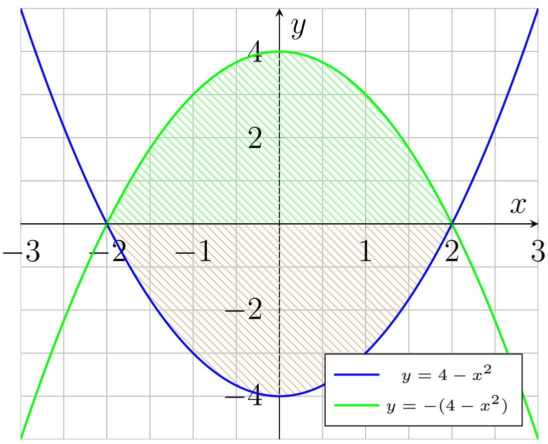
Hier ein wichtiger Hinweis: es wird immer mehr zur üblen Seuche Folgendes zu schreiben:

$$A = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x\right| = \ldots = 42 \text{ FE}$$

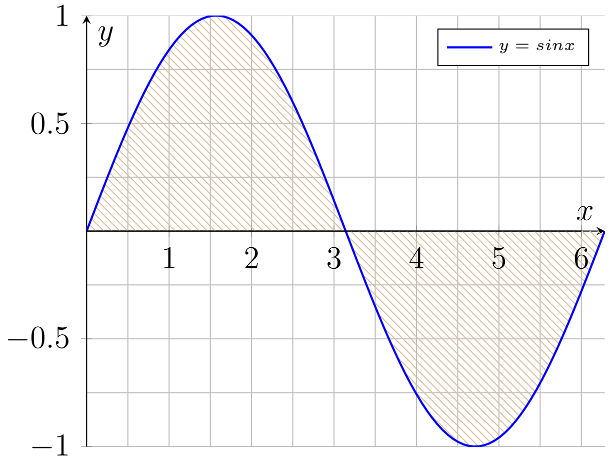
Das ist grober Unfug und auch falsch! Das Gleichheitszeichen erzwingt, dass links und rechts das Gleiche stehen muss. Das bedeutet, steht links nicht FE, dann kann es nicht rechts vom Himmel fallen. Sollten Sie in Klausuren gegen dieses grundlegende Prinzip verstoßen, werden Sie Punkte verlieren.

Hat die Funktion $f(x)$ mehrere Nullstellen, so entstehen Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x- Achse. Siehe 13.4b. Dann wird wie folgt vorgegangen:

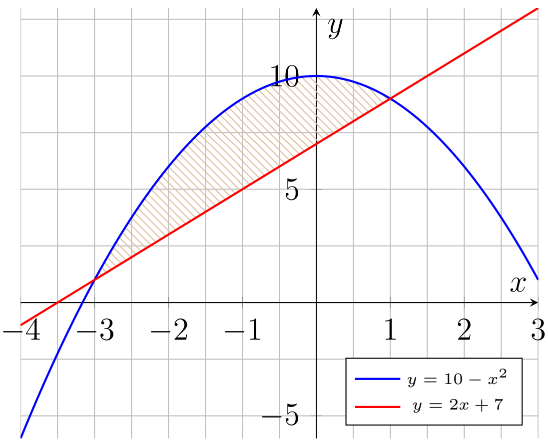
1. Bestimmung der Nullstellen von $f(x)$ auf $[a, b]$ Seien diese $x_1, x_2, \ldots x_n$.



(a) Fläche unterhalb der x-Achse



(b) Fläche oberhalb und unterhalb der x-Achse



(c) Fläche zwischen zwei Kurven

2. Dann werden die Teilflächen ermittelt und betragsmässig summiert:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}\,x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}\,x \right| + \ldots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}\,x \right| + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)\mathrm{d}\,x \right|$$

gebildet. Würde man in dem Beispiel 13.4b einfach von 0 bis 2π integrieren, käme 0 heraus, was nicht die von der x-Achse und der Kurve eingeschlossenen (geometrischen) Fläche entspricht. Möchte man, die von zwei Kurven dargestellt durch Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bestimmen, geht man ähnlich wie oben vor. Siehe dazu Figur 13.4c. Besitzen diese Funktionen nur zwei Schnittpunkte x_1 x_2, ist die eingeschlossene Fläche

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\,x \right| \tag{13.26}$$

13.9 Anwendung des Integrals in der Elektrotechnik

Wir hatten in 15 die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen in der Elektrotechnik gesehen. Hier nun werden wir eine erste, kurze Einführung der Bedeutung des Integralbegriffs in der Elektrotechnik sehen, der mit dem ursprünglichen Ansatz der Flächenberechnung nichts zu tun hat. Wir betrachten ein sinusförmiges Signal

$$s(\tau) = A\cos(2\pi f\tau + \varphi) \tag{13.27}$$

Wir betrachten dann das Integral als Funktion der oberen Grenze

$$S(t) = \int\limits_{t_1}^{t} s(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{A}{2\pi f}\sin(2\pi f\tau + \varphi) = \frac{A}{2\pi f}\cos(2\pi f t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \tag{13.28}$$

Dabei interpretieren wir t_1 als einen Zeitpunkt zu dem das Signal eingeschaltet wird und t ist die laufende Zeit. (13.28) ist wie folgt zu verstehen: das ursprüngliche Signal erscheint im wesentlichen wieder mit folgenden Änderungen:

1. die Amplitude A wird zu $\dfrac{A}{2\pi f}$
2. die Phasenlage verändert sich um $\frac{\pi}{2}$

Interessant und sehr wichtig zu verstehen, dass die Amplitude nun von der Frequenz f abhängt und zwar in der Weise $\dfrac{1}{f}$! Für hohe Frequenzen wird die Amplitude immer kleiner (gedämpft), für $f \to 0$ ergibt sich eine unendlich große Verstärkung der Amplitude. Ein solches Verhalten heißt Tiefpasscharakteristik (Dämpfung zu hohen Frequenzen). Ein Bauelement, das ein solches Verhalten besitzt, ist eine Kapazität (Kondensator). D.h. mit einer Kapazität kann man -vereinfacht gesagt- eine Integration nachbilden. Sie besitzt die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$. Die Dämpfung zu hohen Frequenzen bedeutet, dass schnelle (=hochfrequente Vorgänge), die in einem Signal vorkommen, zu einem gewissen Grad unterdrückt werden können. Es besitzt Glättungseigenschaften. Und genau dieses Verhalten ist was uns in der Elektrotechnik insb. der Nachrichtentechnik interessiert. Mehr dazu in einer tieferen Systematik erfahren Sie in "Grundlagen der Elektrotechnik II". Will man z.B. die Anzeige der Geschwindigkeit auf einem Tacho realisieren, so wird man eine Glättung durch eine Integration durchführen damit die Tachonadel ruhig steht und nicht unruhig um eine Mittellage pendelt. Die Integration ist ein sog. lineares System.

13.10 Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt werden Situationen betrachtet, in denen entweder der Integrand am Rand des Integrationsbereich nicht definiert ist oder der Integrationsbereich unendlich ausgedehnt ist. z.B. betrachte man das Integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} \quad , a, b > 0.$$

Es fällt auf, dass der Integrand bei 0 nicht definiert ist, sehr wohl aber die Stammfunktion an dieser Stelle existiert. Demzufolge kann man den Integral Begriff sinnvoll erweitern, in dem man in diesem Fall setzt:

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x := \lim_{a\to 0^+} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \quad , a, b > 0. \tag{13.29}$$

Eine zweite Situation entsteht durch einen unendlich ausgedehnten Integrationsbereich. Will man z.B. die Arbeit bestimmen, die nötig ist, um einen Massepunkt in einen Gravitationsfeld (hervorgerufen durch eine Zentralmasse) von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 zu bewegen, hängt diese nur vom Abstand r der Punkte ab (s. Physik). Ganz entsprechend gilt in einem elektrostatischen Feld, das z.B. von einer Punktladung hervorgerufen wird: die Arbeit hängt nur ab vom Abstand r der Punkte (Coulomb Kraft) . In beiden Fällen ist die Abhängigkeit der Kraft proportional $\frac{1}{r^2}$. Wenn nun die Ladung bzw. Zentralmasse im Ursprung liegt und r_1 und r_2 die Abstände der beiden Punkte vom Ursprung sind, dann ist die Arbeit proportional zu (Kraft entlang des Weges $\times$ Weg)

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}.$$

Die Proportionalitätskonstanten werden hier nicht betrachtet. Bewegt man nun das Teil in unendliche Entfernung ($r_2 \to \infty$), bleibt auf der rechten Seite nur der Term $\frac{1}{r_1}$. Das macht auch physikalisch Sinn, denn die Kraft verschwindet im Unendlichen sehr rasch $\sim \frac{1}{r_1^2}$. Dementsprechend kann man auch hier den Integral Begriff erweitern:

$$\int_a^\infty \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r := \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \tag{13.30}$$

In beiden Fällen ist also das Vorgehen das Gleiche. Dies wird in der Definition des uneigentlichen Integrals zusammengefasst:

Definition 13.5. ***(Uneigentliches Integral)***

1. *Integral mit unendlichem Integrationsbereich*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13.31}$$

   falls der Grenzwert existiert. Im Fall dass die untere Grenze ∞ ist, verfährt man sinngemäß.

2. *Integrand mit Polstelle an der oberen Grenze b*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{x_0\to b^-}\int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x. \tag{13.32}$$

   Ist die Polstelle an der unteren Grenze, verfährt man sinngemäß. Hinweis: sind die Grenzen $-\infty$ und ∞, so müssen die Grenzwerte getrennt von einander existieren. Ebenso bei Polstellen. Liegt an der unteren und oberen Grenze ein Pol vor, so muss der Grenzwertprozess für beide Grenzen unabhängig von einander gemacht werden. Macht man es simultan, kommt etwas völlig anderes heraus (Cauchyscher Hauptwert)!

14 Komplexe Zahlen

14.1 Definition, Gaußsche Zahlenebene

Bisher haben wir das Problem, zu der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine Lösungen im Bereich der reellen Zahlen angeben können. Dies wird nun durch die Einführung der komplexen Zahlen behoben. Damit wird dann $\mathbb{R}$ letztmalig erweitert. Der Begriff komplexe Zahlen suggeriert die Vorstellung, dass sie nicht existierten, sondern nur eine mathematische Spielerei seien. Das ist völliger Unsinn! Sie sind sehr existent und es ist für angehende Ingenieure zwingend erforderlich sich damit anzufreunden. Sie werden sie nie wieder los!
Die gesamte Elektrotechnik ist ohne sie nicht denkbar. Das Ohmsche Gesetz für Wechselspannungen, alle Signale, Filter, Frequenzteiler, Schwingkreise usw. werden genau damit erst greifbar. Kein Empfänger in einem (Radio, Fernsehen, WLAN, Satellit, Smartphone usw. ließe sich ohne komplexe Zahlen darstellen auch nicht digital (da geht es erst recht los!).

Definition 14.1. ***(komplexe Zahlen)***
Eine komplexe Zahl z ist gegeben durch ein Tupel (a, b) mit

$$z = a + \mathrm{j}b \; a, b \in \mathbb{R} \tag{14.1}$$

$$\mathrm{j} := \sqrt{-1} \Leftrightarrow \mathrm{j}^2 = -1; \tag{14.2}$$

j *heißt imaginäre Einheit, a heißt Realteil und b Imaginärteil der komplexen Zahl. Für Real- und Imaginärteil schreibt man: $a = \mathrm{Re}(z)$ und $b = \mathrm{Im}(z)$. Die konjugiert komplexe Zahl zu z ist definiert durch:*

$$\overline{z} = a - \mathrm{j}b \tag{14.3}$$

*Diese Darstellung einer komplexen Zahl heißt **kartesische Form**.*

Üblicherweise verwendet man in der Mathematik das Symbol i für die imaginäre Einheit. In der Elektrotechnik ist i für den Strom belegt und so verwendet man dort j. Wir verwenden hier durchgängig j.
Man erkennt sofort, dass die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen sind. Nämlich genau diejenigen für die der Imaginärteil 0 ist. Man schreibt für die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und es ist

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

.
Komplexe Zahlen werden in der sog. **Gaußschen Zahlenebene** dargestellt. Dabei

stellt die x-Achse den Realteil dar während auf der y-Achse der Imaginärteil dargestellt wird (s. 14.1). Wie man aus der Grafik entnehmen kann, ist der euklidische Abstand

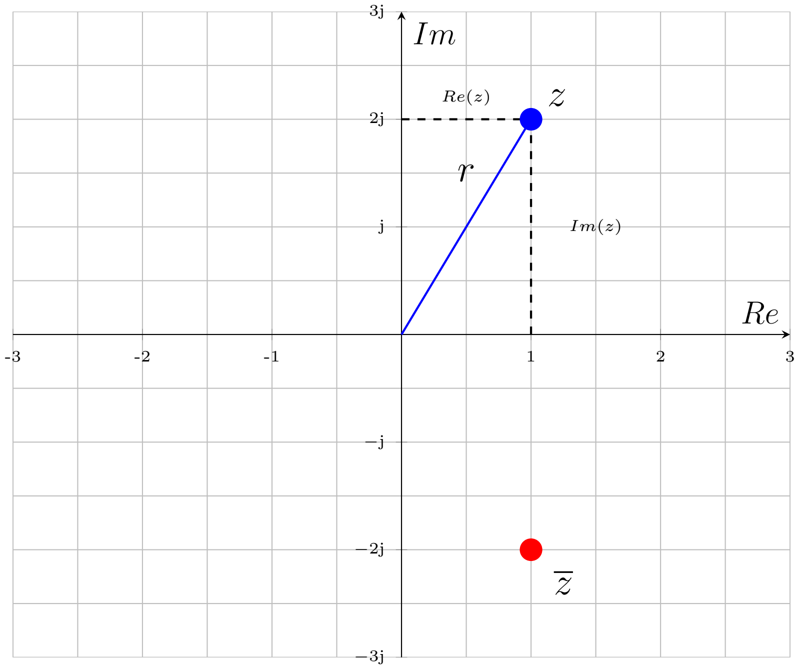


Abbildung 14.1: Darstellung komplexer Zahlen in der Gaußsche Zahlenebene

der Zahl z zum Koordinatenursprung gerade

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{14.4}$$

Dies ist konsistent mit der Abstandsdefinition für die reellen Zahlen ($b = 0$). Dann ist nämlich:

$$r = \sqrt{a^2} = |a|.$$

$|a|$ ist der Abstand vom Ursprung, den die Zahlen $\pm a$ vom Ursprung haben.

14.2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Satz 14.1. ***(Addition und Multiplikation komplexer Zahlen)***
Seien $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= a_1 \pm a_2 + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + \mathrm{j}b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{j}b_2) = a_1a_2 + \mathrm{j}b_1a_2 + \mathrm{j}a_1b_2 + \mathrm{j}^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1) \\ \frac{z}{c} &= \frac{a}{c} + \mathrm{j}\frac{b}{c} \qquad (0 \neq c \in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{14.5}$$

Wie man erkennt, rechnet man nach den bisher bekannten Rechenregel unter Beachtung des Distributionsgesetzes wobei man die ***Terme getrennt nach Real- und Imaginärteil zusammenfasst****.*
Insbesondere gilt:

$$z \;\cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{z\overline{z}} \tag{14.6}$$

Die Division wird nun wie folgt ausgeführt:

Satz 14.2. ***(Division komplexer Zahlen)***
Seien $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$ gegeben.Die Division wird durchgeführt, indem man den Bruch zunächst konjugiert komplex erweitert:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \tag{14.7}$$

Damit hat man erreicht, dass im Zähler das Produkt zweier komplexer Zahlen steht und im Nenner eine reelle Zahl.

Hinweis: Eine andere Möglichkeit der Division gibt es nicht. Sie ist auch konsistent mit der Division im Bereich der reellen Zahlen. Denn seien $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist insbesondere $\overline{z_2} = z_2$. Folglich:

$$\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1}{z_2}$$

14.3 Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen

Wie man aus der Graphik ersehen kann, lassen sich Imaginärteil und Realteil mittels des Winkels φ darstellen:

$$a = r\cos\varphi \tag{14.8}$$

und

$$b = r\sin\varphi \tag{14.9}$$

Woraus folgt:

Folgerung 14.1. ***(Polarform komplexer Zahlen)***

$$z = a + \mathrm{j}b = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{14.10}$$

Man definiert noch $\arg(z) := \varphi$ *mit* $0 \leq \varphi < 2\pi$. $\arg(z)$ *heißt* ***Argument*** *von* z *und dies ist durch die Beschränkung auf* $[0, 2\pi)$ *der Hauptwert.*
In der Elektrotechnik wird für den Hauptwert meistens das Intervall $[-\pi, \pi)$ *verwendet.*
Dies ist die Darstellung der komplexen Zahlen in ***Polarform****.*

Die Zahl $z = 0$ hat den Betrag 0. Ihr Argument ist beliebig. Wie rechnet man nun von kartesischen Koordinaten in die Polarform um und umgekehrt.

1. **kartesische Form in Polarform**
   Sei $z = x + \mathrm{j}y$. Dann ist
   $$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$
   und das Argument $\arg(z)$ muss folgenden zwei Gleichungen genügen:
   $$\cos\varphi = \frac{1}{r}\mathrm{Re}(z) \qquad \sin\varphi = \frac{1}{r}\mathrm{Im}(z) \tag{14.11}$$
   Jetzt bestimmt man, in welchem Quadranten die Zahl liegt. Dies erkennt man an den Vorzeichen von x und y.
   Die Bestimmung des Arguments wird üblicherweise mit Hilfe der Tangensfunktion vorgenommen. Es ist mit 14.11
   $$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}.$$
   Dann bestimmt man φ gemäß der Tabelle z. B. mit der arctan Funktion s. 14.1. Allerdings liefert arctan nur Winkel $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Für $x = 0$ (also Punkte auf der Imaginärachse) ist
   $$\arg(z) = \mathrm{sign}(\mathrm{Im}(z))\frac{\pi}{2},$$
   mit
   $$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$
   also das Vorzeichen von $\mathrm{Im}(z)$. Damit wird dann $z = 0$ der Winkel 0 zugewiesen, welcher ohnehin beliebig ist.

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-
φ	$\arctan(\frac{y}{x})$	$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$	$\arctan(\frac{y}{x}) + \pi$	$\arctan(\frac{y}{x})$

Tabelle 14.1: Bestimmung $\arg(z)$ mit arctan

2. **Polarform in kartesische Form**
   Sei
   $$z = re^{\mathrm{j}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\,\sin\varphi).$$
   Dann erhält man die kartesischen Koordinaten ganz einfach:
   $$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi, \\ y &= \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{14.12}$$

Folgender Zusammenhang wird oft verwendet:

Satz 14.3. *Mit 14.10 folgen die beiden Identitäten*
Sei $z = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$ *dann ist*

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2\cos\varphi \\ z - \overline{z} &= 2\mathrm{j}\sin\varphi \end{aligned} \tag{14.13}$$

Man zeigt das ganz einfach und sollte man die Formeln vergessen, kann man es wie folgt einfach herleiten:

$$\begin{aligned} z &= e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \\ \overline{z} &= e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi \\ \hline \Rightarrow \quad z + \overline{z} &= 2\cos\varphi \\ \Rightarrow \quad z - \overline{z} &= 2\mathrm{j}\sin\varphi \end{aligned} \tag{14.14}$$

14.4 Eulersche Darstellung komplexer Zahlen

Es gibt noch eine einfachere und schönere Darstellung mittels der e Funktion, die erst in Mathematik II bewiesen werden kann. Sie wird intensiv in Grundlagen Elektrotechnik II benutzt. Man kann folgende Dinge beweisen (was wir hier nicht machen):

1. Die Darstellung der e- Funktion
   $$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
   gilt auch für komplexe Zahlen.

2. Auch für Sinus und Kosinus gibt es solche Darstellungen durch Reihen

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned} \tag{14.15}$$

Die zu diesen Formeln gehörige Theorie wird in Mathematik II behandelt. Natürlich kann man diese Formeln in der Praxis nicht anwenden, da die Summation bis Unendlich geht. Aber man darf hoffen, dass ein Abbruch der Reihe nach N Gliedern eine gute Näherung darstellt (in diesem Fall wird die Hoffnung erfüllt, das geht nicht immer so gut) . Also betrachtet man

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dies ist eine Näherung durch ein Polynom! Solche Dinge sind insb. in Anwendung hochinteressant. Die nachfolgende Grafik mit $N = 2$ soll an dieser Stelle genügen, um sich hier davon zu überzeugen. Entsprechend verhält es sich mit dem Kosinus.

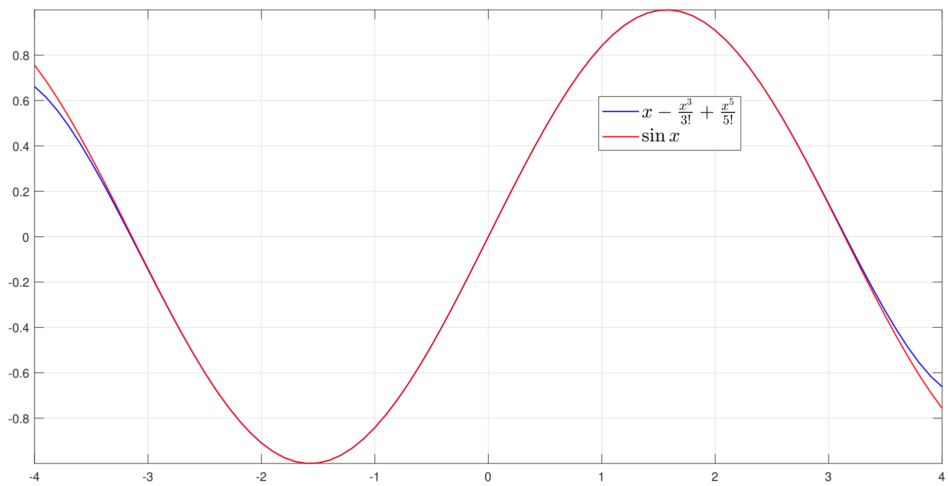


Abbildung 14.2: Annäherung der Sinus Funktion

Damit gilt

$$e^{j\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^k}{k!}. \tag{14.16}$$

Diese Reihe wird aufgeteilt für gerade und ungerade k ($k = 2n$ bzw.$k = 2n + 1$)

$$e^{j\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{14.17}$$

Es ist

$$\begin{aligned}(j\varphi)^{2n} &= \left(j^2\right)^n \varphi^{2n} = (-1)^n \varphi^{2n} \quad \text{und} \\ (j\varphi)^{2n+1} &= j^{(2n+1)}\varphi^{2n+1} = j\left(j^2\right)^n \varphi^{2n+1} = j(-1)^n\varphi^{2n+1}\end{aligned} \tag{14.18}$$

Setzt man diese Ergebnisse in 14.17 ein, so ergibt sich mit14.15:

$$\begin{aligned}e^{j\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos\varphi + j\,\sin\varphi\end{aligned} \tag{14.19}$$

Satz 14.4. ***(Eulersche Formel)***
Es gilt:

$$e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi \tag{14.20}$$

Diese Darstellung der komplexen Zahlen heißt ***Exponentialform*** *oder auch* ***Polarform****. Hier wird der Begriff Polarform synonym für die Darstellung mittels Sinus und Kosinus wie auch mittels der komplexen Exponentialfunktion verwendet.*
Damit folgt für eine beliebige komplexe Zahl

$$z = a + \mathrm{j}b = r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{14.21}$$

$$z = r\,e^{j\varphi} \tag{14.22}$$

Daraus folgen sehr oft benutzte Identitäten.

Folgerung 14.2. *Mit 14.13 folgt*

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{e^{\mathrm{j}\varphi} + e^{-\mathrm{j}\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{\mathrm{j}\varphi} - e^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\,\mathrm{j}}\end{aligned} \tag{14.23}$$

Es ist tatsächlich die uns bekannte Exponentialfunktion. Dies führt zu der wichtigen Identität von Moivre mit der Potenzen komplexer Zahlen einfach bestimmt werden können.

Satz 14.5. ***(Formel von Moivre)***
Es gilt:

$$(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)^n = (e^{\mathrm{j}\varphi})^n = e^{\mathrm{j}n\varphi} = \cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi \tag{14.24}$$

Wie sieht nun die komplex konjugierte Zahl in Exponetialschreibweise aus?

Folgerung 14.3. *Sei $z = a + \mathrm{j}b$. Dann ist (mit $r = \sqrt{a^2 + b^2}$):*

$$\overline{z} = a - \mathrm{j}b = r(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + \mathrm{j}\sin(-\varphi)) = re^{-\mathrm{j}\varphi} \tag{14.25}$$

Man verifiziert nochmals, dass gilt:

$$z\overline{z} = re^{\mathrm{j}\varphi}\, re^{-\mathrm{j}\varphi} = r^2. \tag{14.26}$$

Damit lassen sich Multiplikation, Division und Potenzieren komplexer Zahlen auf einfachste Weise darstellen

$$z^n = \left(re^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n = r^n e^{\mathrm{j}n\varphi}. \tag{14.27}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten ist ($z_1 = r_1 e^{\mathrm{j}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{\mathrm{j}\varphi_2}$)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{14.28}$$

Die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.
Die Division ist ebenfalls sehr einfach:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1 r_2 e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{14.29}$$

Die Beträge werden dividiert und die Winkel subtrahiert. Es ist alles ganz einfach.
In der Elektrotechnik wird diese Darstellung bei der Wechselstromtechnik extensiv genutzt, da sich die Formel erheblich vereinfachen. Die komplizierten Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen braucht man sich nicht mehr merken. Außerdem kann man z.B. das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom ganz einfach wie in der Gleichstromtechnik darstellen. Die Frequenzselektivität z.B. von Filtern und Schwingkreisen wird ganz einfach verständlich. Wenn man die komplexen Zahlen beherrscht wird alles ganz einfach.
Insbesondere Potenzen, Multiplikation und Division komplexer Zahlen lassen sich in der Eulerschen Darstellung also sehr einfach durchführen. Dies fasst der folgende Satz zusammen

Satz 14.6. ***(Multiplikation, Division und Potenzen in Exponentialform)*** *Sei $z_1 = r_1 e^{\mathrm{j}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{\mathrm{j}\varphi_2}$. Dann gilt*

1. $$z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, e^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{14.30}$$

2. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{14.31}$$

3. $$z = re^{\mathrm{j}\varphi} \qquad z^n = r^n\, e^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{14.32}$$

Beispiel 14.1.

$$z = \frac{1}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}^2} = -\mathrm{j} \tag{14.33}$$

Es wurde nach der Regel zur Division komplex konjugiert erweitert und es ist $\mathrm{j}^2 = -1$*!*

Beispiel 14.2. *Die Darstellung von* $z = 1$ *in Polarkoordinaten:*

$$z = 1 + \mathrm{j}0 = 1e^{\mathrm{j}0}$$

Beispiel 14.3. *Die Darstellung von* $z = \mathrm{j}$ *in Polarkoordinaten:*

$$z = 0 + \mathrm{j}1 = 1e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

Beispiel 14.4. *Die Darstellung von* $z = -1$ *in Polarkoordinaten:*

$$z = -1 + \mathrm{j}0 = 1e^{\mathrm{j}\pi}$$

Beispiel 14.5. *Die Darstellung von* $z = -\mathrm{j}$ *in Polarkoordinaten:*

$$z = 0 - \mathrm{j}1 = 1e^{\mathrm{j}3\frac{\pi}{2}}$$

14.4.1 Wurzeln aus einer komplexen Zahl

Aus der Polarkoordinatendarstellung folgt, dass eine komplexe Zahlen auf einem Kreis mit Radius r liegt. Es gilt also wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} z = re^{\mathrm{j}\varphi} &= r(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \\ &= r(\cos(\varphi + k2\pi) + \mathrm{j}\sin(\varphi + k2\pi)) \\ &= re^{\mathrm{j}(\varphi+k2\pi)} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{14.34}$$

Mit dieser Darstellung kann nun die Bestimmung der n-ten Wurzel aus einer komplexen Zahl (also auch der reellen Zahlen) einfach dargestellt werden. Sei $re^{\mathrm{j}\varphi}$ eine komplexe Zahl. Dann ist die n-te Wurzel:

$$\begin{aligned} \left(re^{\mathrm{j}\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(re^{\mathrm{j}(\varphi+k2\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}}\ e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}, \qquad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{14.35}$$

Nun betrachten wir den Exponenten getrennt $\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$: der Quotient ist nur für Zahlen $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ein echter Bruch. Da nun die komplexe e Funktion 2π periodisch ist, genügt es nur Werte von $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu betrachten. Alle anderen Werte wiederholen sich. Damit wird 14.35 zu (wir bezeichnen nun die Wurzeln mit z_k)

$$z_k = r^{\frac{1}{n}}\ e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14.36}$$

Also gibt es n verschiedene Wurzeln! Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz 14.7. ***(Wurzeln einer komplexen Zahl)***
Sei $r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ *eine komplexe Zahl. Ihre* n*-ten Wurzeln sind dann gegeben durch:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{\mathrm{j}\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\frac{k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{14.37}$$

Beispiel 14.6. *Ein einfachstes Beispiel sei* $\sqrt{2}$ *zu bestimmen. Also ist* $z = 2$ *und liegt auf der positiven reellen Achse.* $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$, $n = 2$, $r = 2$. *Gemäß 14.37 sind die Quadratwurzeln :*

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\ e^{\mathrm{j}\left(\frac{0}{2}+2\pi\frac{k}{2}\right)} \qquad k = 0, 1.$$

Für $k = 0$ *erhält man* $\sqrt{2}$ *und für* $k = 1$*:*

$$\sqrt{2}\ e^{\mathrm{j}\pi} = \sqrt{2}(\cos\pi + \mathrm{j}\sin\pi) = -\sqrt{2}$$

Man sieht, dass wir die bekannten Ergebnisse aus den reellen Zahlen wieder erhalten, nur auf einem in sich geschlossenen Weg, der alle Fälle gleich abdeckt.

Beispiel 14.7. *Was ist nun* $\sqrt{-2} = (-2)^{\frac{1}{2}}$*? Wieder ist* $n = 2, r = 2$. *Der Winkel ist nun aber* $\varphi = \pi$ *(*-2 *liegt auf dem negativen Teil der reellen Achse).*

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\ e^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\frac{k}{2}\right)} \qquad k = 0, 1$$

Damit erhalten wir die zwei Wurzeln:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j}\sqrt{2} \\ z_1 &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = -\mathrm{j}\sqrt{2} \end{aligned} \tag{14.38}$$

Dies sind zwei Lösungen auf der imaginären Achse.

Betrachten wir ein weiteres Beispiel:

Beispiel 14.8. *Es soll* $(16\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{4}}$ *bestimmt werden.Es ist* $r = 16$ *und* $\varphi = \frac{\pi}{3}$. *Gemäß 14.37 erhalten wir:*

$$z_k = 2\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)} \quad (k = 0, 1, 2, 3) \tag{14.39}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ z_1 &= 2\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} \\ z_2 &= 2\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)} \\ z_3 &= 2\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{12}+3\frac{\pi}{2}\right)} \end{aligned} \tag{14.40}$$

Die Nullstellen sind in 14.3 dargestellt.

Nun sind wir in der Lage mit Hilfe der komplexen Zahlen den Fundamentalsatz der Algebra s. 5.3 zu vervollständigen:

Satz 14.8. ***(Fundamentalsatz der Algebra)***
Sei

$$p_n(z) := a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{14.41}$$

ein Polynom n-ten Grades.
Dann besitzt p_n genau n komplexe Nullstellen (dabei wird die Vielfachheit mitgezählt) und es lässt sich vollständig faktorisieren

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n). \tag{14.42}$$

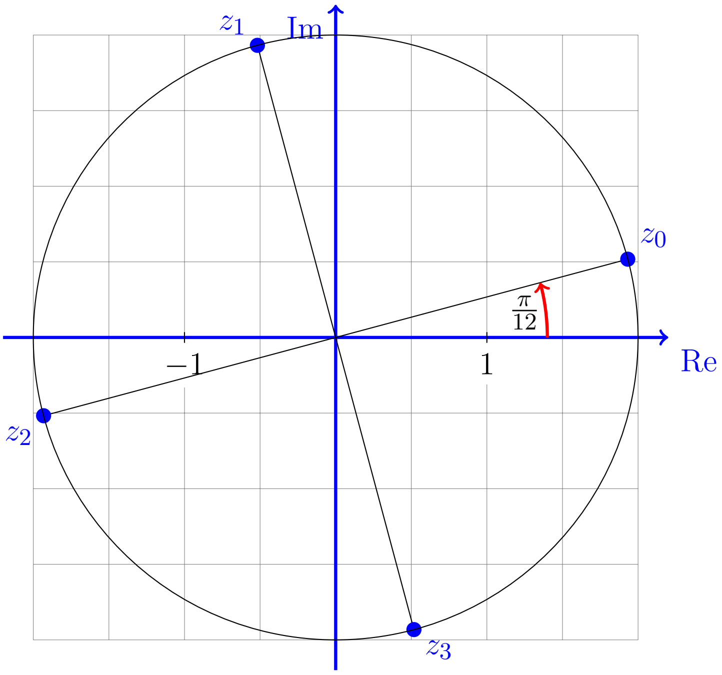


Abbildung 14.3: $(16\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{4}}$

15 Anwendung der trigonometrischen Funktionen in der Elektrotechnik

Insbesondere in der Elektrotechnik kommt den trigonometrischen Funktionen eine besondere Rolle zu. Sie beschreiben z.B. Wechselspannungen oder Wechselströme. In der Nachrichtentechnik sind sie die fundamentalen Signale zur Übertragung von Informationen. Eine Wechselspannung läßt sich wie folgt beschreiben:

$$u(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi). \tag{15.1}$$

Dabei bedeuten

$$\begin{aligned} &t && \text{Zeit [s]}, \\ &f && \text{Frequenz [Hz]}, \\ &A && \text{Amplitude z.B. in Volt [V]}, \\ &\varphi && \text{Anfangsphase zum Zeitpunkt } t = 0. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Die Einheit Hz steht für Hertz [1]. Ihre Dimension ist $\frac{1}{s}$. Oft verwendet man die Größe $2\pi f$ und kürzt sie mit ω ab. Sie heißt **Kreisfrequenz**. Damit sieht eine Schwingung dann wie folgt aus:

$$u(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{15.3}$$

Die Frequenz gibt an wie viele Schwingungszüge in einer Sekunde vorhanden sind. Die Bedeutung dieser "Basissignale"liegt darin, dass alle auftretenden Signale beschrieben werden können als die Summe solcher (unendlich) vielen "Basissignale"mit jeweils unterschiedlichen Amplituden , Frequenzen und Phasen. Analysiert man ein Signal entsprechend nach den auftretenden Frequenzen, erhält mein sein **Spektrum**. Entsprechend den auftretenden Größen Amplitude, Frequenz und Phase gibt es in der Nachrichtentechnik zur Übertragung von Information(z.B. Musik, Sprache, Daten):

1. die Amplitudenmodulation (z. B. AM richtiger wäre Mittelwellen). Die Amplitude A wird durch die zu übertragene Information verändert.

2. die Frequenzmodulation (z.B. FM richtiger wäre UKW Rundfunk).Die Frequenz f wird durch die zu übertragene Information verändert.

3. die Phasenmodulation (z.B. QPSK: Qudrature Phase Shift Keying).Die Phase φ wird durch die zu übertragene Information verändert.

[1] Heinrich Hertz

Außer der sog. Basisbandübertragung verwenden alle - auch die digitalen Systeme wie GSM, LTE, DVB, DSL usw. eine der obigen Modulationsformen in der Kommunikationstechnik. Also insbesondere für alle Luftschnittstellen und Breitbandübertragungen.
Es werden also niemals direkt irgendwelche Bits übertragen (außer in der Basisbandübertragung, welche aber nur geringe Reichweiten und Kapazitäten erreicht), sondern sie werden auf einen oder mehrere Trägerfrequenzen (1705(!) bei DVB- T) aufmoduliert nach einem der obigen Verfahren.

Stichwortverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] Frank Ayres und Elliott Mendelson. *Schaum's outline of calculus*. eng. 6th ed. Schaum's outlines. Ayres, Frank (VerfasserIn). New York: McGraw-Hill, 2012. 11 S. ISBN: 978-0071795531.

[2] Ilja N. Bronstein und Konstantin A. Semendjaev. *Taschenbuch der Mathematik*. ger. 5., überarb. und erw. Aufl., unveränd. Nachdr. Thun: Deutsch, 2001. 1191 S. ISBN: 3817120052.

[3] Richard Courant. *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Erster Band: Funktionen einer Veränderlichen*. ger. Courant, Richard (author.) Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971. ISBN: 978-3-540-05466-5. DOI: `10.1007/978-3-642-61988-5`. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-61988-5`.

[4] Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. ger. 2., korrigierte Aufl. Springer-Lehrbuch. Dahmen, Wolfgang (VerfasserIn) Reusken, Arnold (VerfasserIn). Berlin: Springer, 2008. 633 S. ISBN: 9783540764939.

[5] Gisela Engeln-Müllges und Fritz Reutter. *Numerische Mathematik für Ingenieure*. ger. 4., überarb. Aufl. Engeln-Müllges, Gisela (VerfasserIn) Reutter, Fritz (VerfasserIn). Mannheim: Bibliograph. Inst, 1985. 524 S. ISBN: 3411016884.

[6] Grigorij M. Fichtenholz. *Differential- und Integralrechnung*. Fichtenholz, Grigorij M. (VerfasserIn). Thun und Frankfurt am Main: Deutsch, 19XX. ISBN: 3817114184.

[7] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. ger. 17., aktualisierte Aufl. Studium. Heuser, Harro (Verfasser). Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009. 643 S. ISBN: 9783834807779.

[8] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Klausur- und Übungsaufgaben ; 632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung*. ger. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Papula, Lothar (VerfasserIn). Wiesbaden: Vieweg + Teubner Verlag, 2010. ISBN: 978-3834813053. DOI: `10.1007/978-3-8348-9730-5`.

[9] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 14., überarb. und erw. Aufl. Studium. Papula, Lothar (VerfasserIn). Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. 854 S. ISBN: 3658056193.

[10] Vladimir I. Smirnov. *Lehrgang der höheren Mathematik*. ger. 16. Aufl. Bd. 1. Hochschulbücher für Mathematik. Smirnov, Vladimir I. (VerfasserIn). Berlin: Dt. Verl. der Wiss, 1990. 449 S. ISBN: 3-326-00028-6.