FH MÜNSTER
University of Applied Sciences
Prof. Dr. Hans Effinger

ETI

$M_a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$S(M_a)$ Menge bijektive Abb $f: M_a \to M_a$

$\circ$ Hintereinanderausführung

$M = \{1, 2, \dots, n\}$

$S(M)$ — " — $M \to M$

$\circ$ Verknüpfung

$(S(M_a), \circ)$ und $(S(M), \circ)$ sind isomorph!

$\varphi: M_a \to M$ bijektiv

$\Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \in S(M)$

$f \in S(M_a)$

$\Phi(f \circ g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$

Beispiel

$M = \{1, 2, 3\}$, $S(M) = \{g_1, g_2, \dots g_6\}$

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id_M$

$g_2 \circ g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = g_1$

$\leftarrow$

$g_2 \circ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = g_3$

Gruppentafel

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	g_1	g_5	g_4	$g_?$

$\longrightarrow g_? \circ g_? = g_?$

g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	g_1	g_6	g_4	g_5
g_3	g_3	g_1	g_2	g_5	g_6	g_4
g_4	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_4	g_3	g_1	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	g_1

$\longrightarrow g_2 \circ g_6 = g_5$

$\rightarrow$ Übung

$\longrightarrow g_5 \circ g_6 \neq g_6 \circ g_5$

$(S_n, \circ)$ ist für $n = 3$ nicht kommutativ !! und damit nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ oder $(\mathbb{Z}_7^*, \odot)$

Teilmengen von S_n sind Gruppen

$(\{g_1, g_2, g_3\}, \circ)$ ist eine Gruppe, kommutativ isomorph zu $(\mathbb{Z}_3, \oplus)$

$(\{g_1, g_6\}, \circ)$ ist eine Gruppe, kommutativ isomorph zu $(\mathbb{Z}_2, \oplus), (\mathbb{Z}_3^*, \odot)$

$(\{g_1, g_5\}, \circ)$ — " —

Definition (Untergruppe)

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und U eine Teilmenge von G, $U \subset G$. Gilt für alle $a, b \in U$, $a \circ b \in U$ und ist $(U, \circ)$ eine Gruppe, dann nennt man sie eine Untergruppe.

Bem

$(G, \circ)$ $\quad \circ$ ist eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$

$(U, \circ)$ $\quad \circ$ — " — $\circ : U \times U \to U$

Definition (Permutationsgruppe)

Eine Untergruppe der (vollständigen) symmetrischen Gruppe vom Grad n, $n \in \mathbb{N}$, heißt

Permutationsgruppe.

Satz

Die vollständige symmetrische Gruppe S_n, $n \in \mathbb{N}$ besitzt $n!$ Elemente. Sie ist für $n = 1, 2$ kommutativ und nicht kommutativ für $n \geq 3$

Beweis

- verteile in die 2. Zeile des Schemas die Elemente von M

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & & & \end{pmatrix}$$

Es gibt für $f(1)$ genau n Wahlmöglichkeiten
— " — $f(2)$ — " — $n-1$ — " —
⋮
Folglich existieren $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$
Möglichkeiten für f. $\# S_n = n!$

- S_1, S_2 mit $1! = 1$ bzw $2! = 2$ Elementen sind kommutative Gruppen.
- S_3 ist per Konstruktion (s.o.) nicht kommutativ
- Ist $n > 3$ besitzt S_n die Gruppe S_3 als Untergruppe und daher nicht kommutativ.

S_3 ist Untergruppe von S_n:

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{matrix}}_{\text{variabel}} & \vdots & \underbrace{\begin{matrix} 4 & 5 & \dots & n \\ 4 & 5 & \dots & n \end{matrix}}_{\text{fest}} \end{pmatrix} \in S_3 \subset S_n$$

- 50 Studierende auf 50 Plätze verteilen

$50! \approx 3 \cdot 10^{64}$ Möglichkeiten

Zyklen zur Beschreibung von Permutationen

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 9 & 6 & 4 & 2 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} = (2,7,3,9,5,4,6)$$

Zyklus, Länge 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{(2,5,3)}_{\text{Länge } 3}\ \underbrace{(4,6)}_{\text{Länge } 2}$$

2 Zyklen der Länge 3 bzw 2, disjunkte Zyklen

in Gruppe $(S_3, \circ)$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) = (2\ 1\ 3)$$

$$g_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$$

Bem

Bei einem Zyklus dürfen die Einträge zyklisch verschoben werden.

Bsp

$$(2,7,3,9,5,4,6) = (7,3,9,5,4,6,2) = (9,5,4,6,2,7,3)$$

Definition (Zyklus, Transposition)

Sei $M = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ eine Teilmenge von M, $V \subset M$, $1 \leq \ell \leq n$.
Eine Permutation $f \in S_n$ heißt Zyklus der Länge ℓ, wenn gilt

$$f(v_i) = v_{i+1} \qquad i = 1, 2, \dots, \ell-1$$
$$f(v_\ell) = v_1$$

$$f(v_\ell) = v_1$$

und $$f(u) = u \qquad \forall u \in M \setminus V.$$

Ein Zyklus der Länge 2 heißt Transposition.

Bem

Eine Transposition vertauscht lediglich 2 Zahlen.

Bsp: $n=4$

- $(2,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad V = \{2,4\}$

$$(2,4) \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{beliebig gewählt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{(2,4)} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- $(2,4) \circ (2,4) = id_M$ und $(2,4) = (4,2)$
- $(v_1, v_2) \circ (v_3, v_4) = (v_3, v_4) \circ (v_1, v_2)$
  wenn $\{v_1, v_2\} \cap \{v_3, v_4\} = \emptyset$

Satz (Gerade und ungerade Permutationen)

Jede Permutation $f \in S_n$, $n \geq 2$, läßt sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen darstellen.

f besteht entweder aus einer geraden Anzahl von Transpositionen oder einer ungeraden Anzahl von Transpositionen.

Man spricht von einer geraden bzw ungeraden Permutation.

Man spricht von einer geraden bzw. ungeraden Permutation.

Bem

1) Man definiert das Vorzeichen bzw. Signum einer Permutation f

$\sigma(f) = 1$ wenn f eine gerade Permutation ist

$\sigma(f) = -1$ — " — ungerade — " —

$\sigma : S_n \longrightarrow \{-1, 1\}$

2) Definition von Determinanten (M II, Laplacesche Entwicklungssatz)

Definition: $A^{(n,n)}$ $n \times n$ Matrix

$$\det(A) := \sum_{f \in S_n} \sigma(f)\, a_{1 f(1)} \cdot a_{2 f(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n f(n)} \quad (*)$$

Übung: leiten Sie aus $(*)$ die explizite Form der Determinante für $n = 2$ und 3 ab.