*L*aboratoire de *M*écanique des *F*luides et d'*A*coustique
LMFA UMR 5509

ÉCOLE CENTRALE LYON

Mécanique des fluides et énergie

Christophe Bailly & Pietro Salizzoni

Centrale Lyon - UE FLE (24-10-2025)

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

En mécanique des fluides

Anderson Jr. J.D., 1991, *Fundamentals of aerodynamics*, McGraw-Hill Int. Edts.

——— , 2004, *Modern compressible flow with historical perspective*, McGraw-Hill Int. Edts.

Batchelor G.K., 1967, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Candel S., 1995, *Mécanique des fluides*, Dunod Université, 2nd édition, Paris.

Guyon E., Hulin J.P. & Petit L., 2001, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences / Editions du CNRS, Paris - Meudon (translated in english).

Kambe, T., 2007, *Elementary fluid mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Landau L. & Lifchitz E., 1971, *Mécanique des fluides*, Editions MIR, Moscou. Pergamon Press.

Lienhard IV, J.H. & Lienhard V, J.H., 2017, *A heat transfer textbook*, Phlogiston Press, Cambridge Massachusetts.

Panton, R., 2013, *Incompressible flows*, Wiley.

Scorer, R.S., 1978, *Environmental Aerodynamics*, Ellis Horwood Limited, Chichester.

Tavoularis, S., 2005, *Measurement in fluid mechanics*, Cambridge University Press, New York.

Thompson, P.A., 1988, *Compressible fluid dynamics*, Advanced engineering series, McGraw-Hill Int. Edts.

Van Dyke M., 1982, An album of fluid motion, The Parabolic Press, Stanford, California.

White F., 1991, *Viscous flow*, McGraw-Hill, Inc., New-York.

National Committee for Fluid Mechanics Films (NCFMF)
Gallery of fluid motion (APS division of fluid mechanics)

En turbulence

Bailly C. & Comte Bellot G., 2003, *Turbulence* (in french), CNRS éditions, Paris.
———, 2015, *Turbulence* (in english), Springer, Heidelberg.

Davidson P.A., 2004, *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press, Oxford.

Davidson P.A., Kaneda Y., Moffatt H.K. & Sreenivasan K.R., Edts, 2011, *A voyage through Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge.

Hinze J.O., 1975, *Turbulence*, McGraw-Hill International Book Company, New York, 1st edition in 1959.

Lesieur M., 2008, *Turbulence in fluids : stochastic and numerical modelling*, 4th revised and enlarged ed., Springer.

Pope S.B., 2000, *Turbulent flows*, Cambridge University Press.

Tennekes H. & Lumley J.L., 1972, *A first course in turbulence*, MIT Press, Cambridge, Massachussetts.

airfoil	profil
bluff body	corps non profilé
boundary layer	couche limite
bulk velocity	vitesse de débit
buoyancy	flottabilité
curl	rotationnel
chord	corde
conservative force	force qui dérive d'un potentiel (gravité par exemple)
creeping flow	écoulement rampant
Darcy friction coefficient	coefficient de pertes de charge
drag	traînée
density (mass per unit volume)	masse volumique
efficiency	rendement
energy head	charge
friction velocity	vitesse de frottement
head loss	perte de charge
inviscid flow	écoulement non visqueux
leading edge	bord d'attaque (d'un profil)
lift	portance
lift-to-drag ratio	finesse
mass fraction	fraction massique
mixture	mélange
point vortex	tourbillon ponctuel

relative density	densité
shaft work	travail de l'arbre (d'une machine tournante)
skin-friction coefficient	coefficient de frottement
slip boundary condition	condition aux limite glissante
stall	décrochage
strain (deformation) tensor	tenseur des déformations
stream function	fonction de courant
streamlined body	corps profilé
stress tensor	tenseur des contraintes
thrust	poussée
torque (angular momentum)	couple
trailing edge	bord de fuite (d'un profil)
vortex shedding frequency	fréquence du lâcher tourbillonnaire
vortex sheet	nappe (infiniment mince) de vorticité
wake	sillage
wall shear stress	contrainte pariétale

aka	also known as
wrt	with respect to

- On utilise indifféremment ici une lettre en gras ou une notation indicielle pour désigner une **quantité vectorielle**. Quelques exemples :

  vecteur vitesse $\boldsymbol{U} \equiv \overrightarrow{U}$, i^{e} composante U_i, norme U avec $U^2 = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U}$
  gravité $\boldsymbol{g}$, $g_i = -g\delta_{3i}$, $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3) = (0, 0, -g)$, $g = 9.81$ m.s^{-2}

  On note ρ (kg.m^{-3}) la masse volumique et δ_{ij} le symbole de Kronecker

  Convention de sommation d'Einstein
  Lorsqu'un indice muet apparait deux fois dans un terme, il est sommé sur toutes les valeurs que peut prendre l'indice.

  Par exemple, pour le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_i b_i \quad \text{(indice muet } i \text{ répété)}$$

  Quiz $\quad \delta_{ij} a_j = ? \quad \delta_{ij}\delta_{ij} = ?$

- **Opérateurs differentiels** (exprimés en coordonnées cartésiennes ici)

Gradient

$$\boldsymbol{b} = \nabla f \equiv \overrightarrow{\text{grad}}\, f \qquad b_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Divergence

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = \text{div}(\boldsymbol{U}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

Laplacien

$$\nabla^2 f = \Delta f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$$

Rotationnel

$$\nabla \times \boldsymbol{U} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \boldsymbol{U}$$

Opérateurs differentiels (suite)

Expression du gradient d'un vecteur,
ici le tenseur des gradients de la vitesse $\nabla \boldsymbol{U}$

$$\nabla \boldsymbol{U}\Big|_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{x}}\Big|_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Expression de la divergence d'un tenseur, qui donne un vecteur,
ici la divergence du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \qquad \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\Big|_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\Big|_i$$

Opérateurs differentiels (suite)

Un tenseur est un objet géométrique, qui est indépendant du système de coordonnées choisi, défini dans un espace vectoriel (muni d'un produit scalaire). Un tenseur du premier ordre est un vecteur, le gradient d'un vecteur comme $\nabla \boldsymbol{U}$ (sans point!) est un tenseur du second ordre, le symbole de Kronecker est un tenseur d'ordre deux aussi, parmi d'autres à venir.

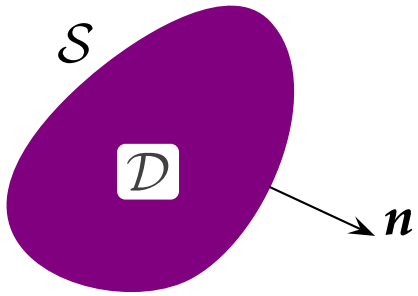
Une référence incontournable pour les passionnés de mathématiques :

Aris, R., 1962, *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*, Dover Publications, Inc., New York.

Opérateurs differentiels (suite)

Théorème de la divergence : pour un domaine $\mathcal{D}$ fermé par une surface $\mathcal{S}$ de normale extérieure $\boldsymbol{n}$, on a l'identité suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{A}}}\, dv = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{A}}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$



où $\overline{\overline{\boldsymbol{A}}}$ est un tenseur arbitraire. Ce résultat est utilisé régulièrement dans le cours, par exemple pages 43 et 253. À titre d'illustration, on a pour le gradient de pression,

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla p\, dv = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})\, dv = \int_{\mathcal{S}} p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \int_{\mathcal{S}} p\boldsymbol{n}\, ds$$

Remarque finale sur les notations : le symbole $\cdot$ n'est jamais décoratif, mais indique un produit scalaire

Opérateurs differentiels (suite)

On pourra très ponctuellement être amener à utiliser les identités vectorielles suivantes :

$$\nabla \cdot (\alpha \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{a} + \nabla \alpha \cdot \boldsymbol{a}$$
$$\nabla \times (\alpha \boldsymbol{a}) = \nabla \alpha \times \boldsymbol{a} + \alpha \nabla \times \boldsymbol{a}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = - \int_{\mathcal{D}} \nabla \times \boldsymbol{a} \, d\mathcal{V}$$

On a par exemple pour le calcul du couple associé à la force d'Archimède au transparent 49

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{x} \times (-p\boldsymbol{n}) \, d\mathcal{S} = \underbrace{- \int_{\mathcal{S}} p\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \times (p\boldsymbol{x}) \, d\mathcal{V}}_{\text{identité vectorielle précédente}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \nabla p \times \boldsymbol{x} \, d\mathcal{V}}_{\text{en notant que } \nabla \times \boldsymbol{x} = 0}$$

Nomenclature

a	diffusivité thermique (voir le transparent 268)
Bi	nombre de Biot (voir le transparent 288)
δ	épaisseur de la couche limite (voir le transparent page 144)
$\mathcal{D}$	domaine de contrôle (matériel ou pas)
D/Dt	dérivée matérielle (voir le transparent 27)
$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$	tenseur des déformations (ou des gradients de vitesse)
e	énergie spécifique interne (voir le transparent 233)
$\boldsymbol{g}$	vecteur gravité, $\boldsymbol{g} = \nabla(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x})$
$\Gamma_{\mathcal{C}}$	circulation (voir le transparent 176)
Gr	nombre de Grashof (voir le transparent 295)
h	enthalpie specifique (voir le transparent 240)
$\tilde{h}$	coefficient d'échange thermique (voir le transparent 284)
h	coefficient d'échange thermique local (voir le transparent 289)
$\mathcal{H}$	énergie locale par unité de volume (voir le transparent 96)
k	conductivité thermique (voir le transparent 246)
$\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$	tenseur identité
λ	seconde viscosité (voir le transparent 232)
m	masse d'une particule fluide (voir le transparent 23)
M_a	nombre de Mach (voir le transparent 35)
q_∞	pression dynamique (voir le transparent 60)
μ	viscosité dynamique ou de cisaillement ($\mu = \rho\nu$)
$\boldsymbol{n}$	vecteur unitaire normal sortant pour la surface $\mathcal{S}$

Nomenclature (suite)

Nu	nombre de Nusselt (voir le transparent 285)
Pe	nombre de Péclet (voir les transparents 278
Pr	nombre de Prandtl (voir le transparent 270)
ψ	fonction de courant (voir le transparent 193)
$\boldsymbol{q}$	vecteur flux de chaleur (voir le transparent 246)
ρ	masse volumique
T	température
t	temps
$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$	tenseur des contraintes
$\boldsymbol{T}$	vecteur contrainte
$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$	tenseur des contraintes visqueuses (voir les transparents 68 et 232)
$\boldsymbol{U}$	vecteur vitesse
U_d	vitesse de débit (voir les transparents 38 et 126)
U_n	échelle de vitesse pour la convection naturelle (voir le transparent 294)
$\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}$	vitesse de la surface de contrôle $\mathcal{S}$ (voir le transparent 29)
$\mathcal{V}$	volume d'une particule fluide (voir le transparent 23)
$\boldsymbol{x}$	vecteur position, $\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i$, et $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z$ en coordonnées cylindriques
$\boldsymbol{x}_P$	point matériel (voir le transparent 21)

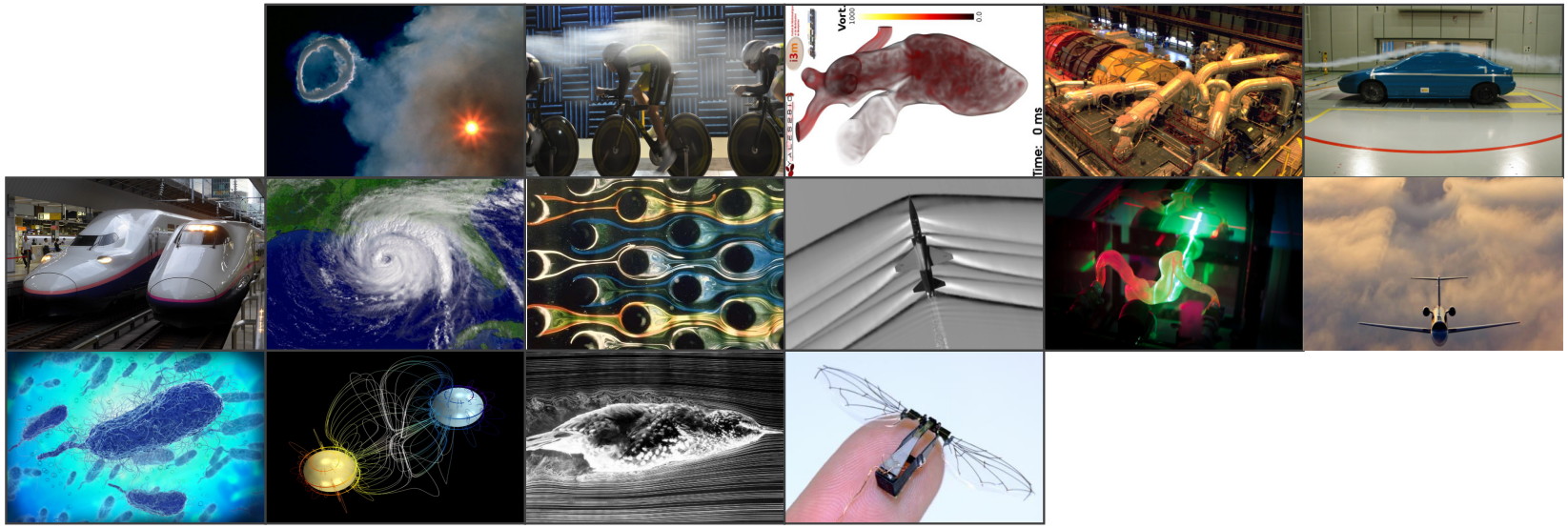
Nomenclature (suite)

$\equiv$	signifie par définition
$-_f$	indice pour désigner le fluide
$-_s$	indice pour désigner le solide
$-_w$	indice pour désigner la paroi

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux



1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux

Description du mouvement

- Échelles microscopiques et macroscopiques
- Quantities macroscopiques
- Domaine matériel
- Particule fluide
- Lignes de courant et trajectoires
- Théorème de Reynolds
- Incompressibilité

Conservation de la masse

- Formulation integrale et locale
- Reformulation du théorème de Reynolds

Forces s'exerçant sur un domaine fluide

- Forces surfaciques et volumiques
- Tenseur des contraintes

Conservation de la quantité de mouvement

- Formulation intégrale et locale

Hydrostatique

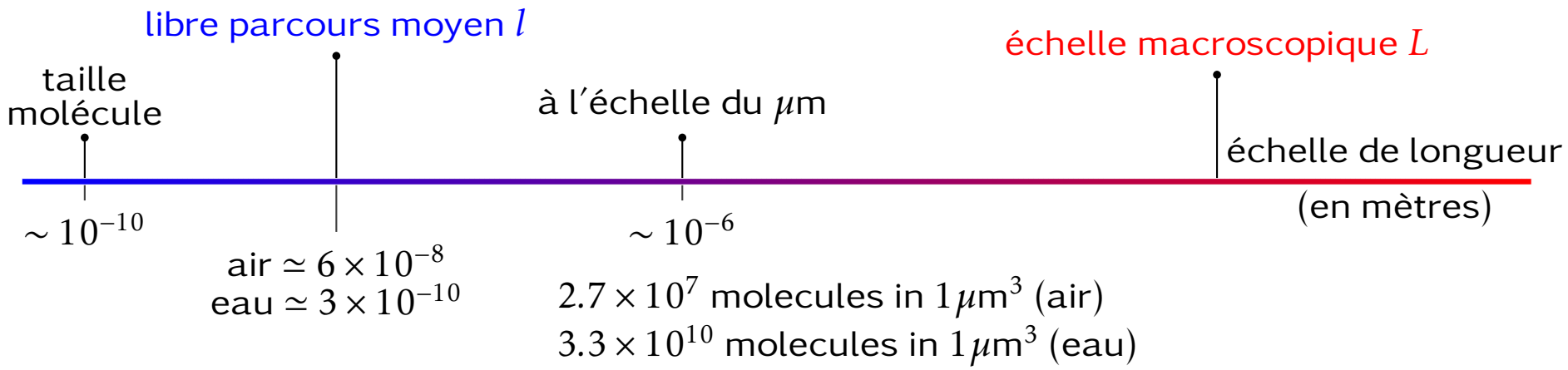
- Équation d'équilibre
- Force de flottabilité

Modèle non visqueux

- Équations d'Euler
- Équation de Bernoulli

À retenir

Échelles microscopiques et macroscopiques



Un écoulement de liquide ou de gaz peut ainsi être considéré comme un milieu continu, car toutes les échelles de longueurs d'intérêt sont très grandes par rapport à l'échelle microscopique l

On peut caractériser le milieu continu en formant le rapport de ces deux échelles de longueur, dénommé nombre de Knudsen et noté Kn,
Kn $= l/L \ll 1$

Nombre d'Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ molécules dans 1 mole
Conditions standards $T_0 = 0°$ C and $P_0 = 101325$ Pa
For une molécule diatomique, $l = \sqrt{\gamma\pi/2}\,(\nu/c)$

- **Quantités macroscopiques**

On considère un petit volume élémentaire de fluide $\mathcal{V}$ de longueur d telle que $l \ll d \ll L$. Les propriétés macroscopiques du fluide sont déterminées en prenant la moyenne de ces propriétés sur toutes les molécules contenues dans ce volume $\mathcal{V}$. On a ainsi pour la masse volumique ρ et la vitesse $\boldsymbol{U}$,

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}} \quad (\mathrm{kg/m^3}) \qquad\qquad \boldsymbol{U} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{u}_\alpha}{m} \quad (\mathrm{m.s^{-1}})$$

où m_α et $\boldsymbol{u}_\alpha$ sont la masse et la vitesse de la molécule α dans le volume $\mathcal{V}$
$m = \sum_\alpha m_\alpha$ est la masse totale du volume $\mathcal{V}$

Ces variables (macroscopiques) ρ et $\boldsymbol{U}$ sont bien définies car le nombre de molécules est très grand : la description macroscopique utilisée en mécanique des fluides repose sur cette hypothèse

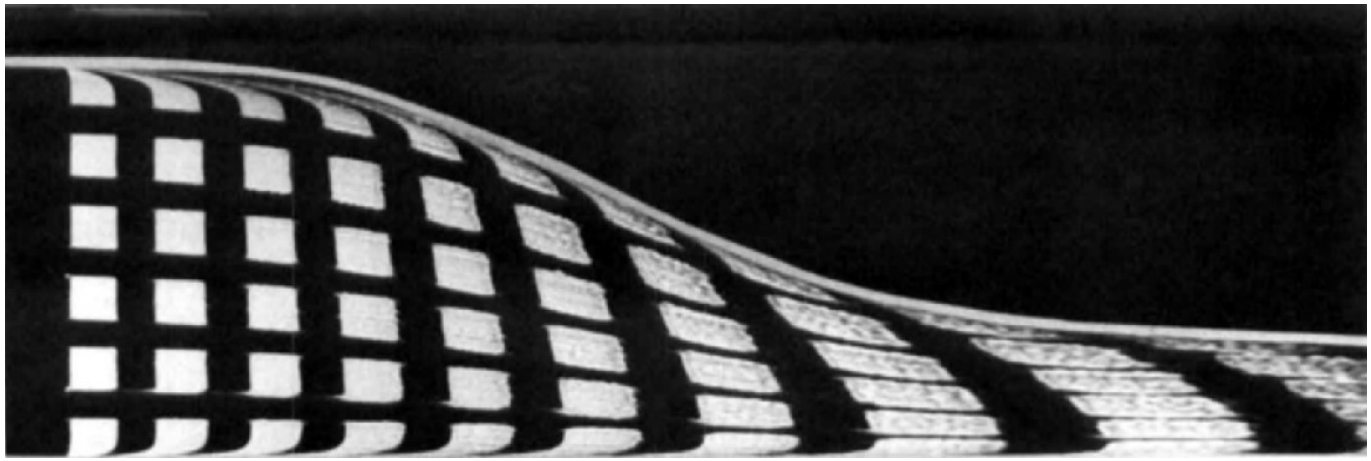
Ces variables sont des fonctions du temps t et de l'espace $\boldsymbol{x}$; par exemple $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$. L'échelle de longueur macroscopique L, échelle de longueur caractéristique de l'écoulement, est associée aux variations spatiales de ces quantités

- **Domaine matériel**

  On décrit l'écoulement par sa vitesse $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$, sa masse volumique $\rho(\boldsymbol{x},t)$ et une autre quantité $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ d'intérêt (la température ou l'énergie par exemple)

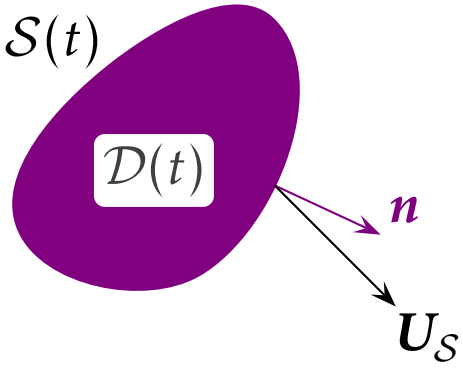
  Un point matériel $\boldsymbol{x}(t)$ est défini comme un point se déplaçant à la vitesse locale du fluide, c'est-à-dire que l'on satisfait toujours $d\boldsymbol{x}/dt \equiv \boldsymbol{U}$

  Un domaine matériel $\mathcal{D}$ est un ensemble de points matériels, qui se déplace donc à la vitesse de l'écoulement par définition



Écoulement stationnaire dans une contraction : on marque régulièrement l'écoulement avec des microbulles d'hydrogène utilisées comme traceurs pour visualiser la déformation lors de la contraction (Schraub *et al.*, 1965, électrolyse avec émission pulsée)

Domaine matériel (suite)



Considérons un domaine quelconque $\mathcal{D}$ fermé par la surface $\mathcal{S}$, et se déplaçant à la vitesse (arbitraire) $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}$

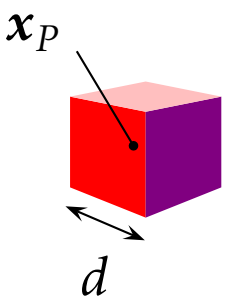
$\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}$ est la vitesse locale des points appartenant à la surface $\mathcal{S}$

$\mathcal{D}$ est un domaine matériel seulement si $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U}$, la vitesse locale de l'écoulement

$\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface et pointant vers l'extérieur depuis la surface $\mathcal{S}$

Particule fluide

Une particule fluide est le domaine matériel élémentaire (au sens de petit) que l'on va toujours utiliser pour la discrétisation de l'écoulement à l'échelle macroscopique L



volume $\mathcal{V}$
masse m

La taille d d'une particule fluide est par définition petite par comparaison avec l'échelle de longueur L, mais contient néanmoins un grand nombre de molécules

Une particle fluide est classiquement associée avec un point matériel $\boldsymbol{x}_P$, et ses propriétés sont homogènes (masse volumique, vitesse, pression, température, ...) de sorte que $\rho = \rho(\boldsymbol{x}_P, t)$ par exemple

Un domaine matériel $\mathcal{D}$ est par définition un ensemble de particules fluides

Particule fluide (suite)

La masse M d'un domaine $\mathcal{D}$ est définie par l'intégrale de la masse volumique,

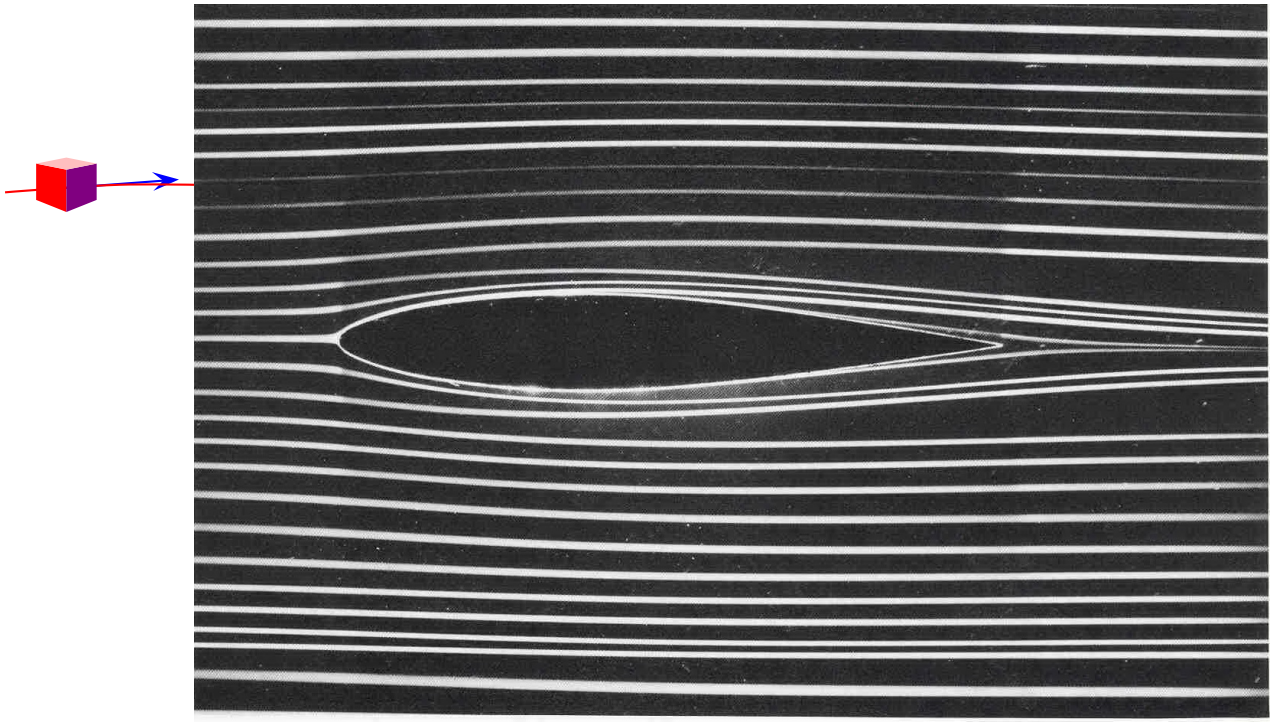
$$M = \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\mathcal{V}$$

La masse d'une particule fluide est simplement $m = \rho(\boldsymbol{x}_P, t)\mathcal{V}$
puisque la masse volumique est alors constante

Lignes de courant et trajectoires

Les lignes de courant d'un écoulement sont des courbes dont la tangente en chaque point est la vitesse locale de l'écoulement pour un temps fixé t. Ces courbes sont déterminées par la condition $\boldsymbol{U} \times d\boldsymbol{x} = 0$.

On utilise ici une description eulérienne de l'écoulement, dans laquelle $\boldsymbol{x}$ et t sont des variables indépendantes



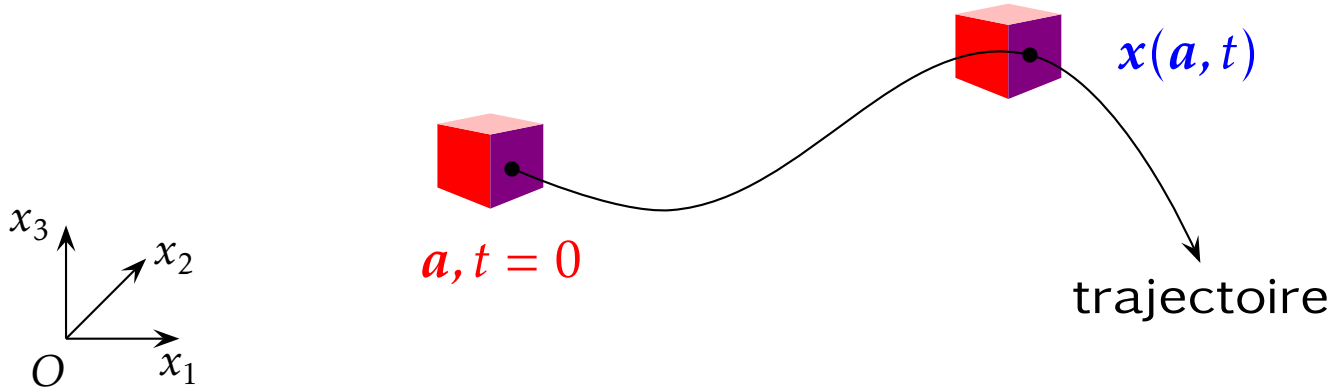
Écoulement autour d'un profil NACA 64A015 (tunnel hydraulique, $Re_c = 7 \times 10^3$, sans incidence). L'écoulement est laminaire, et reste attaché au profil (on distingue cependant une petite séparation près du bord de fuite)

Werlé (1974)
dans Van Dyke (1982, Fig. 23)

Lignes de courant et trajectoires (suite)

Dans le cadre d'une description lagrangienne, on suit le déplacement d'une particule fluide dont on connait la position initiale $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a}$ et t sont des variables indépendantes, mais pas la position $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$

La trajectoire de cette particule fluide est obtenue en résolvant $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$ avec comme condition initiale $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ à $t = 0$



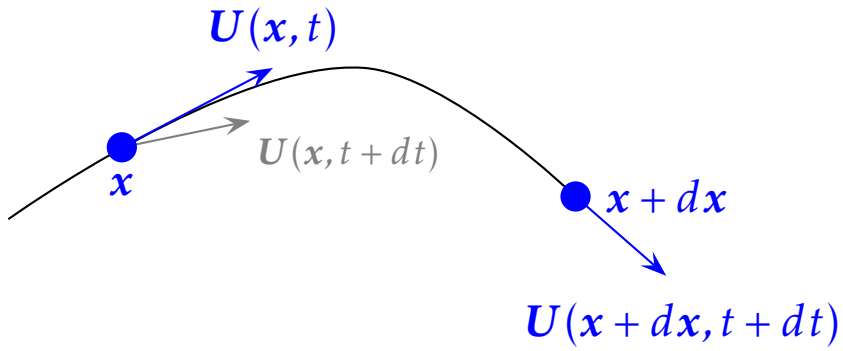
Il y a un cas particulièrement intéressant à considérer lorsque l'écoulement est stationnaire, c'est-à-dire que $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$. Les particules fluides suivent alors les lignes de courants, qui coïncident avec des trajectoires (cf. image précédente)

Dérivée matérielle

Comment définir la dérivée d'une quantité $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$ dans un écoulement ?

En écrivant la différentielle totale de $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$, on a

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}, t + dt) - \varphi(\boldsymbol{x}, t) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + d\boldsymbol{x} \cdot \nabla \varphi \end{aligned}$$



(attention à la sommation implicite sur i)

On choisit alors de suivre un point matériel $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, vérifiant par définition $d\boldsymbol{x}/dt = \boldsymbol{U}$, et on introduit pour ce choix la dérivée matérielle D/Dt

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{U} \quad \Longrightarrow \quad \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \varphi$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1}$$

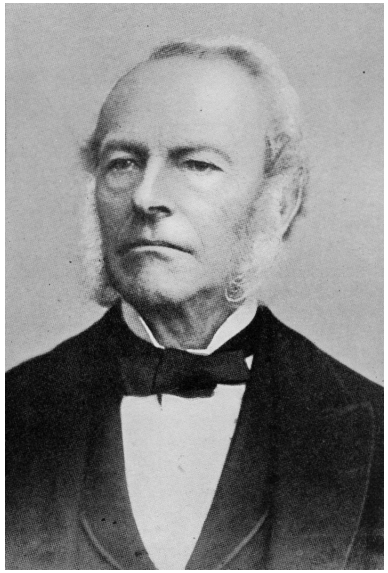
Dérivée matérielle (suite)

La variation temporelle d'une variable quelconque de l'écoulement φ (température, pression, vitesse, ...) le long de l'écoulement est donnée par

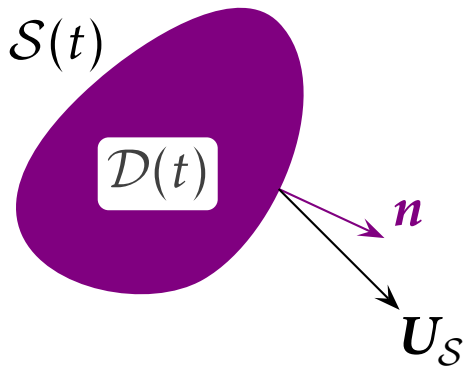
$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \varphi = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{\substack{\text{variation locale} \\ \text{de } \varphi \text{ en } \boldsymbol{x}}} + \underbrace{U_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}_{\substack{\text{variation de } \varphi \text{ induite} \\ \text{par la convection (écoulement)}}}$$

La notation D/Dt pour la dérivée matérielle, appelée encore dérivée convective, a été introduite par Stokes (1845)

Sir George Gabriel Stokes (1819-1903)



Théorème de transport de Reynolds



On considère un domaine $\mathcal{D}(t)$ fermé par la surface $\mathcal{S}(t)$ se déplaçant arbitrairement à la vitesse $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}$

$\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à la surface de contrôle $\mathcal{S}$

Que peut-on dire de la variation d'une quantité φ dans le domaine $\mathcal{D}$?

On introduit l'intégrale de la quantité d'intérêt $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ sur tout le domaine $\mathcal{D}(t)$

$$\Phi(t) = \int_{\mathcal{D}} \varphi(\boldsymbol{x}, t)\, dv$$

Le théorème de Reynolds permet d'écrire que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dv}_{\text{variation de } \varphi} + \underbrace{\int_{\mathcal{S}(t)} \varphi \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds}_{\text{mouvement de } \mathcal{S}} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{0} & \text{domaine fixe} \\ \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U} & \text{domaine matériel} \end{cases} \tag{2}$$

Théorème de transport de Reynolds (suite)

Pour mémoire, règle de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(\xi,t)d\xi = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}d\xi + \frac{db}{dt}f(b,t) - \frac{da}{dt}f(a,t)$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646 - 1716)

Le théorème de transport de Reynolds est la généralisation en 3-D de la règle de Leibniz pour différentier une intégrale avec des bornes variables.

On trouvera une preuve de ce théorème dans les références mentionnées en introduction du cours

Condition d'incompressibilité

On peut commencer par appliquer le théorème de Reynolds à un domaine matériel ($\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U}$) avec simplement $\varphi \equiv 1$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{\mathcal{D}} \varphi \, d\mathcal{V}}_{\substack{\text{volume du} \\ \text{domaine } \mathcal{D}}} = 0 + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V} \qquad \text{(avec le th. de la divergence)}$$

Pour le cas d'une particule fluide de volume $\mathcal{V}$,

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V} = (\nabla \cdot \boldsymbol{U})\mathcal{V} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\mathcal{V}}\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{U}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} < 0 & \text{contraction} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} > 0 & \text{expansion} \end{cases} \quad \text{de la particule fluide}$$

Le taux de variation du volume d'une particule fluide est donc donné par $\nabla \cdot \boldsymbol{U}$ (Euler, 1755) et conduit à la condition d'incompressibilité $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$
$\rightsquigarrow$ le volume d'une particule fluide reste constant durant son mouvement

Principes fondamentaux

Le théorème de Reynolds nous permet de calculer les variations d'une quantité en suivant une particule fluide le long de l'écoulement. On a maintenant le formalisme pour pouvoir énoncer les trois principes fondamentaux de la mécanique :

- conservation de la masse
- conservation de la quantité de mouvement (2e loi de Newton)
- conservation de l'énergie, qui sera introduit au chapitre 7 (dans le cadre des écoulements compressibles)

- **Pour un domaine matériel $\mathcal{D}$**

$$M = \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\mathcal{V} \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\mathcal{V} = 0$$

($\mathcal{D}$ contient toujours les mêmes particules fluides)

On applique alors le théorème de Reynolds (2) avec $\varphi = \rho$ et $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U}$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \rho \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) \right\} d\mathcal{V}$$

En passant à la limite pour le cas d'une particule fluide, $\mathcal{D} \to \mathcal{V}$, une expression locale de la conservation de la masse est obtenue

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0 \tag{3}$$

L'éq. (3) peut également s'écrire sous forme indicielle

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$$

- **Formulations alternatives**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \tag{4}$$

Pour un écoulement incompressible, $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$. La conservation de la masse impose alors simplement que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Autrement dit, la masse volumique ρ d'une particule fluide (c'est-à-dire en suivant l'écoulement) reste constante. On peut retrouver ce résultat en observant que nous avons pour une particule fluide,

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V}} = \frac{\text{cst}}{\text{cst}} \qquad \begin{array}{c}\text{(conservation masse)}\\ \text{(incompressibilité)}\end{array}$$

Condition d'incompressibilité revisitée

Nous avons vu avec l'éq. (4) précédente que la conservation de la masse peut s'écrire comme,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

On montrera un peu plus tard dans le cours (au Chap. 7) que

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim M_a^2 \qquad M_a \equiv \frac{U}{c} \quad \text{nombre de Mach}$$

où c est la vitesse du son. La condition d'incompressiblité est donc satisfaite pour des écoulements à faible nombre de Mach, on retient $M_a \leq 0.3$ en pratique

- **Reformulation du théorème de Reynolds** en prenant en compte la conservation de la masse

On écrit le théorème de Reynolds pour la variable $\varphi = \rho\chi$ dans un domaine $\mathcal{D}$ quelconque. En utilisant l'éq. (2)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\chi \, dv = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial(\rho\chi)}{\partial t} \, dv + \int_{\mathcal{S}} \rho\chi \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

On peut réorganiser le premier terme de la dernière expression de la manière suivante,

$$\frac{\partial(\rho\chi)}{\partial t} = \rho\frac{\partial\chi}{\partial t} + \chi\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{U}) = \underbrace{\rho\frac{\partial\chi}{\partial t} + \rho\boldsymbol{U}\cdot\nabla\chi}_{=\rho D\chi/Dt} - \nabla\cdot(\rho\chi\boldsymbol{U})$$

Variante du théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\chi \, dv = \int_{\mathcal{D}} \rho\frac{D\chi}{Dt} \, dv + \int_{\mathcal{S}} \rho\chi(\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{n} \, ds \tag{5}$$

Reformulation du théorème de Reynolds (suite)

Pour un domaine matériel, $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U}$,

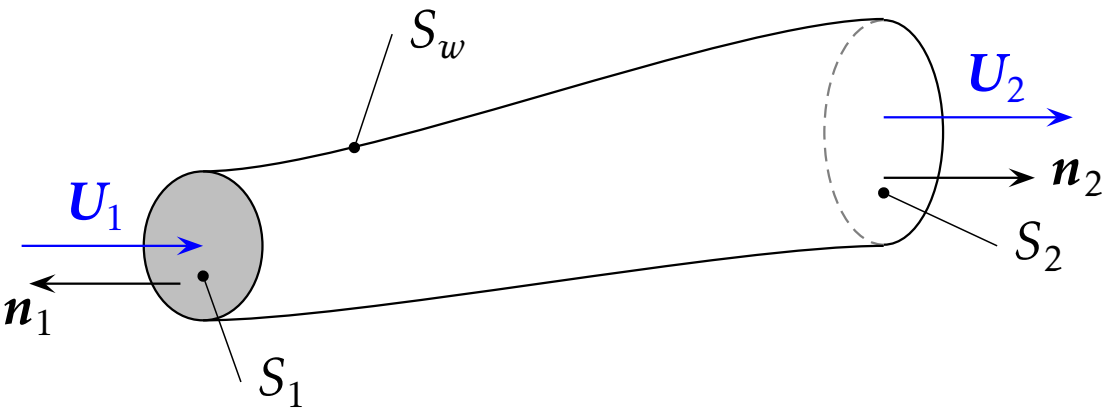
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\chi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\mathcal{V} \tag{6}$$

Pour un domaine fixe, $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = 0$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\chi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \rho\chi \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} \tag{7}$$

Dans l'éq. (5) précédente, $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}$ représente la vitesse relative du fluide traversant la surface de contrôle $\mathcal{S}$ pour un observateur lié au domaine $\mathcal{D}$

- **Un premier résultat célèbre !**
  Conservation de la masse pour un écoulement incompressible en conduit



$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \Longrightarrow \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = 0$$

avec $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_w$

$$\int_{S_1} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds + \int_{S_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds + \underbrace{\int_{S_w} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds}_{=0 \text{ (imperméable, } \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = 0)} = 0$$

Le débit volumique Q_v ($\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$) est donc constant et la vitesse de débit U_d diminue lorsque l'aire de la section droite du conduit augmente S_2 (Leonardo da Vinci, 1502)

$$Q_v = \int_{S_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds = \text{cst} \qquad U_d = \frac{1}{S_2} \int_{S_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds \qquad (\forall S_2)$$

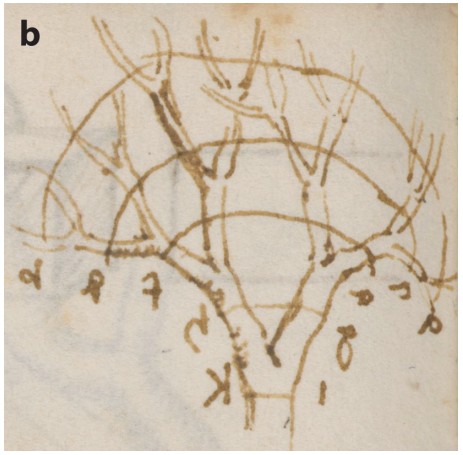
Leonardo da Vinci (1452-1519) et la mécanique des fluides

"Water that flows through a pipe which is empty and fills first the whole of its flat part, will fill up all the other parts, straight and oblique, and moving with equal speed."

An interesting analogy related to the conservation of volume, which Leonardo applied between different natural world systems, is that of the flow through branches of a tree and through rivers or closed conduits.

"each year when the branches of the plants have exhausted their growth, they comprise together as much as the size of their trunk, and in each degree of their [branch] growth, you will find the size of said trunk as in .i.K. .g.h. .e.f. .CD. .a.b. All of them will be the same the tree not being damaged; otherwise the rule does not fail."

From Marusic & Broomhall, 2021, Leonardo da Vinci and Fluid Mechanics, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **53**



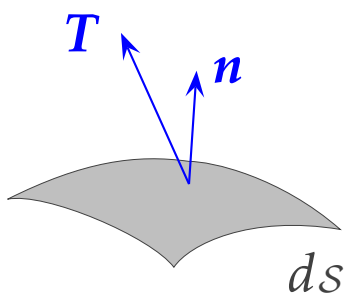
Introduction

La force totale $\boldsymbol{F}$ qui s'applique à un domaine fluide $\mathcal{D}$ peut être décomposée en une contribution surfacique $\boldsymbol{F}_s$ et une contribution volumique $\boldsymbol{F}_v$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_v$

$\boldsymbol{F}_v$ représente les forces à distance qui s'exercent en volume, la force électromagnétique pour les fluides conducteurs et la force de gravité. Pour la force de gravité, on a

$$\boldsymbol{F}_v = \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g} \, d\mathcal{V}$$

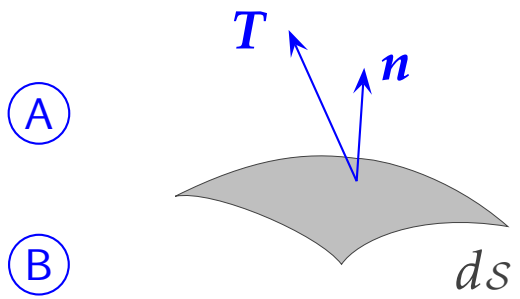
Les forces de surface $\boldsymbol{F}_s$ sont associées aux interactions microscopiques qui s'exercent au travers de la surface de contrôle $\mathcal{S}$



En introduisant $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$ la force par unité de surface, *i.e.* le vecteur contrainte (en Pascal, Pa)

$$\boldsymbol{F}_s = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T} \, d\mathcal{S}$$

Force surfacique



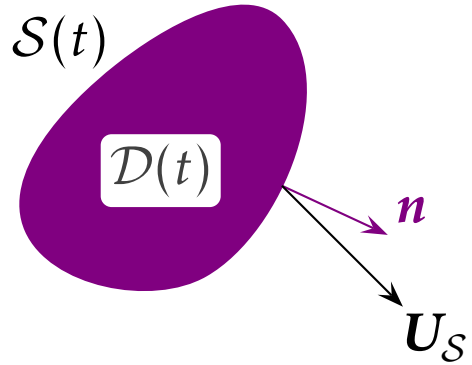
$d\boldsymbol{F}_s = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})\, dS$
est la force exercée par le milieu A sur le milieu B au travers de dS

Le principe d'action-reaction (3e loi de Newton) impose que $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, -\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})$

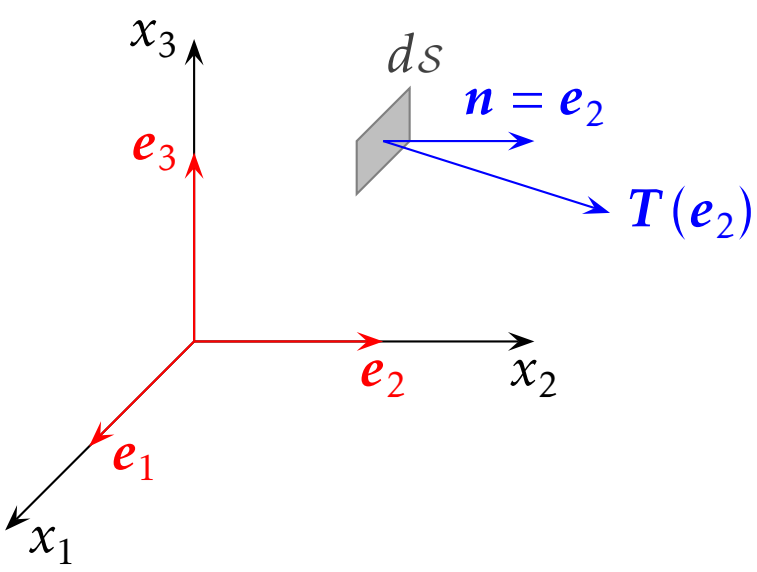
Lorsque seule la pression $p(\boldsymbol{x}, t)$ contribue à la force surfacique, pour un fluide au repos ou pour un écoulement non visqueux, $\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{F}_s = -\int_{\mathcal{S}} p\boldsymbol{n}\, dS \qquad \text{(avec la pression } p \text{ en Pa)}$$

La force due à la pression est isotropique, *i.e.* sans direction privilégiée



Tenseur des contraintes



$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i) \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{e}_i)$

$\boldsymbol{e}_i$ est le vecteur unitaire dans la direction x_i

$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$

$$\overline{\overline{\sigma}} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{e}_2$$

Le théorème de Cauchy (démonstration en annexe) permet d'écrire le vecteur contrainte sous la forme $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n}) = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$, c'est-à-dire avec une dépendance linéaire explicite entre $\boldsymbol{T}$ et la normale $\boldsymbol{n}$ de ds. La composante σ_{ij} du tenseur des contraintes représente la i^{e} composante de $\boldsymbol{T}$ dans la direction j, c'est-à-dire $T_i(\boldsymbol{e}_j)$

Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est symétrique, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
(équilibre des moments)

Tenseur des contraintes (suite)

Auguste (Louis) Cauchy (1789-1857)

Expression de la force surfacique $\boldsymbol{F}_s$

$$\boldsymbol{F}_s = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{T}\, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\, d\mathcal{V}}_{\text{th. de la divergence}}$$

Lorsque la pression seule contribue à $\boldsymbol{F}_s$ (écoulement non visqueux), on a simplement $\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ est donc vecteur propre de $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ et $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

$$\boldsymbol{F}_s = -\int_{\mathcal{S}} p\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S}$$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1 = -p\boldsymbol{e}_1 \qquad \boldsymbol{T}_2 = -p\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{T}_3 = -p\boldsymbol{e}_3$$

Équation du mouvement

Nous avons maintenant tous les éléments pour pouvoir appliquer le principe fondamental de la dynamique à une particule fluide de masse $\rho\mathcal{V}$

$$\rho\mathcal{V}\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{D}} \rho\boldsymbol{g}\, d\mathcal{V}}_{\boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{F}}$$

Accélération (dérivée matérielle de $\boldsymbol{U}$)

$$\left.\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}\right|_{i} = \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\, d\mathcal{V} = \mathcal{V}\nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \rho\boldsymbol{g}\, d\mathcal{V} = \mathcal{V}\rho\boldsymbol{g}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho\boldsymbol{g} \tag{8}$$

Version intégrale

En utilisant le théorème de Reynolds (5), la formulation locale précédente (8) peut également s'écrire comme

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U}\, d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}\, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g}\, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \qquad (9)\end{aligned}$$

avec toujours $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = 0$ pour un domaine fixe
et $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{U}$ pour un domaine matériel

- **On s'intéresse pour finir à deux cas particuliers**

L'hydrostatique et le principe d'Archimède, avec l'équilibre d'un corps flottant ou submergé dans le cadre de la statique des fluides ($\boldsymbol{U} = 0$). La pression est alors la seule contribution pour le tenseur des contraintes

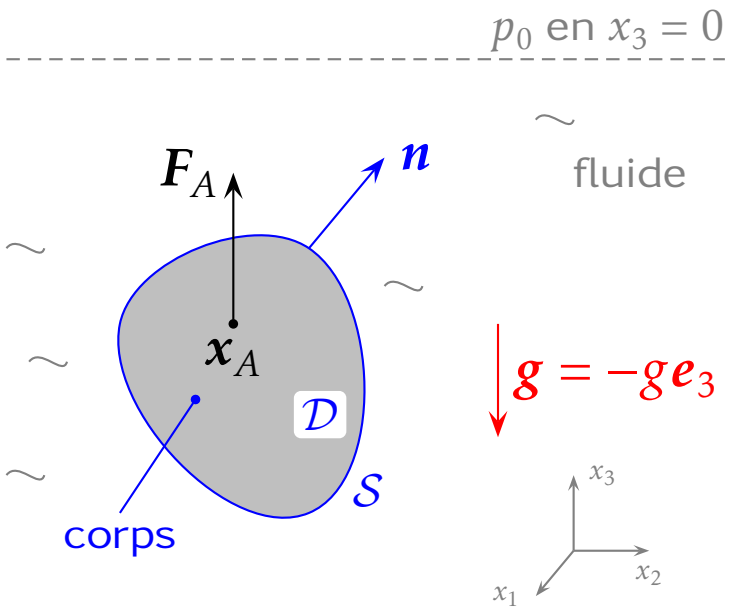
Le modèle non visqueux

Tout fluide possède une viscosité, mais les effets visqueux peuvent être négligés dans un certain nombre de cas (discuté plus tard au chapitre 4).
On peut alors introduire un modèle non visqueux, dans lequel la viscosité est nulle (pas de frottement). La seule force surfacique qui s'exerce sur une particule fluide est de nouveau due à la pression.

En hydrostatique ou pour un modèle d'écoulement non visqueux,
$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

Équilibre hydrostatique

On considère un corps immergé dans un fluide homogène ($\rho = \text{cst}$) et au repos ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$), avec donc $\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}}$



L'équation de la conservation de la quantité de mouvement (8) se réduit ici à $-\nabla p + \rho \boldsymbol{g} = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \quad \Longrightarrow \quad p = p(x_3)$$

et par intégration, on obtient $p = p_0 - \rho g x_3$ (attention $x_3 < 0$ ici)

Avec de l'eau, $\rho \simeq 10^3$ kg.m^{-3}, la pression augmente donc d'environ une atmosphère tous les 10 m de profondeur

Force d'Archimède

Force élémentaire $d\boldsymbol{F}_A$ exercée par le fluide sur le corps ($\boldsymbol{n}$ pointant ici dans le domaine fluide),

$$d\boldsymbol{F}_A = \boldsymbol{T}\ d\mathcal{S} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}\ d\mathcal{S} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{n}\ d\mathcal{S}$$

$$\boldsymbol{F}_A = \int_{\mathcal{S}} -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \cdot \boldsymbol{n}\ d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} -\nabla p\ d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{g}\ d\mathcal{V} = -\boldsymbol{g}\int_{\mathcal{D}} \rho\ d\mathcal{V} = -\boldsymbol{g}M_f$$

(cf. transparent 11)

Principe d'Archimède : la force de flottabilité ascendante $\boldsymbol{F}_A$ exercée sur un corps immergé dans un fluide est égale au poids du fluide M_f déplacé par le corps

Force d'Archimède (suite)

Quel est le point d'application de cette force d'Archimède $\boldsymbol{F}_A$?

Le couple $\boldsymbol{C}$ qui s'exerce sur le corps est donné par

$$\boldsymbol{C} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{x} \times (-p\boldsymbol{n})\, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{D}} \nabla p \times \boldsymbol{x}\, d\mathcal{V} = \boldsymbol{g} \times \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{x}\, d\mathcal{V}$$

(voir le transparent 12 pour la démonstration)

En choisissant le centre de masse $\boldsymbol{x}_A$ du fluide déplacé (point fictif), défini comme

$$M_f \boldsymbol{x}_A \equiv \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{x}\, d\mathcal{V}$$

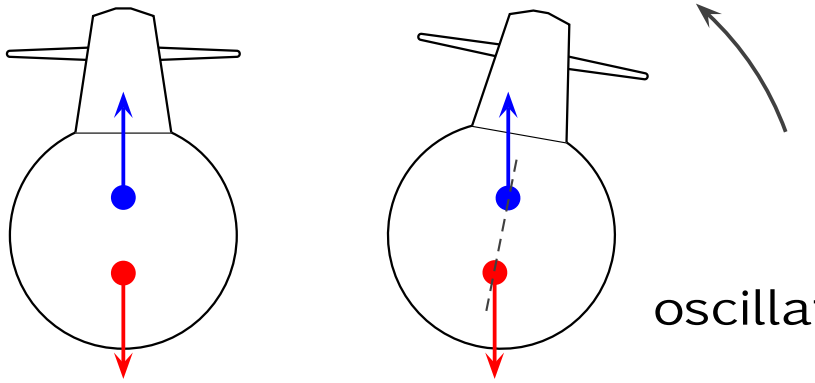
comme point de référence pour calculer le couple $\boldsymbol{C}$,
c'est-à-dire que $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A)\, d\mathcal{V} = 0 \qquad \text{et donc } \boldsymbol{C} = 0 \text{ (équilibre)}$$

La force de flottabilité $\boldsymbol{F}_A$ s'applique donc au centre de masse $\boldsymbol{x}_A$ du fluide déplacé

Force d'Archimède (suite)

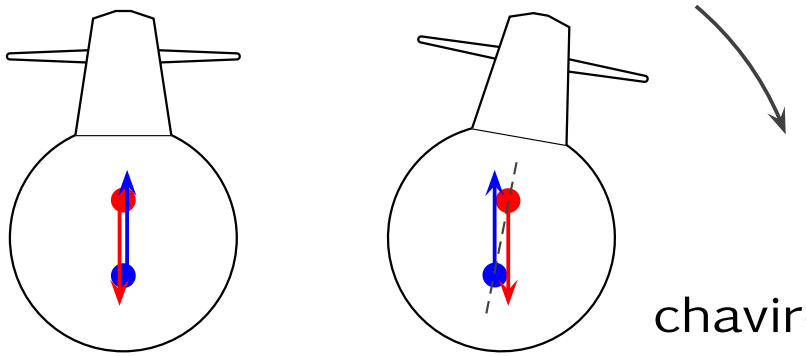
Stabilité d'un sous-marin complètement immergé



oscillations (roulis)

Centre de masse $\boldsymbol{x}_A$ du fluide déplacé

$$\int_{\mathcal{D}_{\text{im}}} \rho(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A)\, d\mathcal{V} = 0$$



chavirement !

Centre de gravité $\boldsymbol{x}_G$ du corps

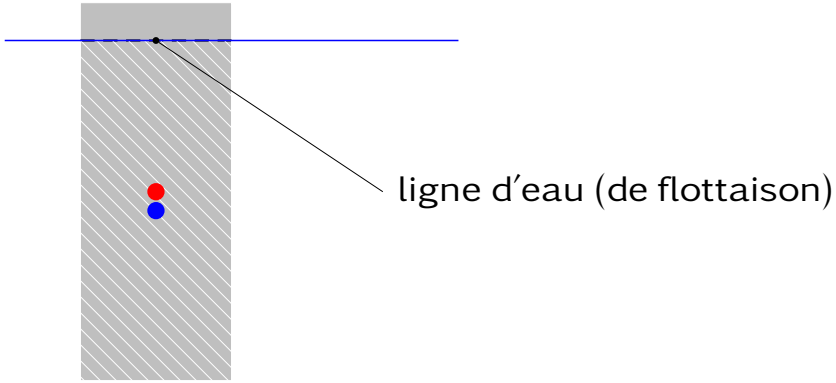
$$\int_{\mathcal{D}} \rho_s(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_G)\, d\mathcal{V} = 0$$

Le centre de gravité $\boldsymbol{x}_G$ • ($\boldsymbol{F} = M_s \boldsymbol{g}$) du corps doit être localisé en dessous du centre de masse $\boldsymbol{x}_A$ • ($\boldsymbol{F}_A$ force d'Archimède)

Partie visible d'un iceberg

eau salée, $\rho_s \simeq 1025$ kg.m^{-3}
eau douce glacée, $\rho_f \simeq 920$ kg.m^{-3}

$\mathcal{V}$ volume total et
$\mathcal{V}_i$ volume immergé de l'iceberg



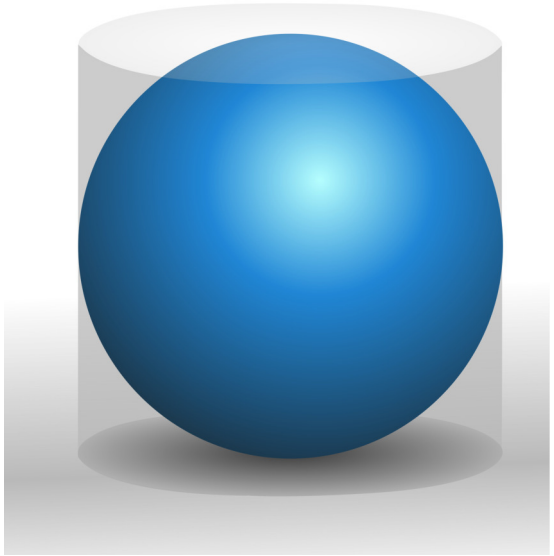
copyright Erwan AMICE/LEMAR/CNRS Photothèque

Dessinez votre propre iceberg ici !

$$\rho_f g \mathcal{V} = \rho_s g \mathcal{V}_i \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathcal{V}_i}{\mathcal{V}} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \simeq 0.9$$

Voir Pollack, 2019, *Phys. Today*, **72**(12), 70-71 (sur moodle)
pour poursuivre la discussion sur la stabilité ...

- **Archimède (Grec, Syracuse en Sicile, 287-212 av. J.-C.)**
  Archimède est considéré comme l'un des plus grands scientifiques de tous les temps et le plus grand mathématicien de l'Antiquité



Médaille Fields

Archimède montre que le volume de la boule est égal aux deux tiers du volume du cylindre de révolution circonscrit à la sphère qui la borde.

Vis d'Archimède (vis sans fin)

(Électricité de France / Julien Goldstein)

Centrale nucléaire de Flamanville 3 (EPR, 3e génération de réacteur nucléaire à eau pressurisée). Station de pompage d'eau de mer : les deux vis d'Archimède (15 m de longueur, 1.5 m de diamètre, 6 tonnes ; $Q_v = 1500$ m^3/h)

https://www.edf.fr/centrale-nucleaire-flamanville3

Équations d'Euler

Un écoulement non visqueux est un modèle d'écoulement pour lequel la viscosité est nulle : il n'y a ni frottement, ni quelconque effet visqueux. La seule force surfacique à considérer est due à la pression, et le tenseur des contraintes est simplement $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

L'écoulement (incompressible on rappelle ici dans cette première partie du cours) est alors gouvernée par les équations Euler (1757)

$$\begin{cases} \dfrac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Dans un modèle non visqueux, l'écoulement possède une composante tangentielle de vitesse non nulle à la paroi (glissement), en observant que la condition aux limites d'imperméabilité à la paroi s'écrit $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = 0$

Pour une interface entre deux milieux A et B, $\boldsymbol{U}_A \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_B \cdot \boldsymbol{n}$

Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler est, avec Isaac Newton (1643-1727), le fondateur de la mécanique analytique (résolution du problème des deux corps en mécanique céleste par exemple), et de la dynamique des fluides, en utilisant le calcul différentiel introduit par Gottfried Leibniz (1646-1716)

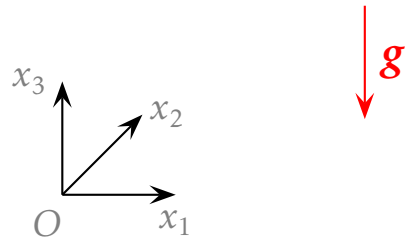
Équation de Bernoulli

Il est déjà possible d'établir un des résultats les plus célèbres de la mécanique des fluides, simple à appliquer (lorsque les hypothèses sont vérifiées). Pour cela, nous allons d'abord écrire la conservation de l'énergie cinétique à partir des équations d'Euler (10)

$$\boldsymbol{U}\cdot\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \boldsymbol{U}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{g}\right)$$

Pour des forces conservatives, comme la gravité, il est toujours possible de trouver une fonction potentielle pour exprimer cette force†, $\boldsymbol{g} = \nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})$

Ici par exemple, $g_i = -g\delta_{3i}, \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} = -gx_3$



† l'existence du potentiel requière que $\nabla\times\boldsymbol{g} = 0$

$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g} = \boldsymbol{U}\cdot\nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})$, et la conservation de l'énergie cinétique peut alors se mettre sous la forme

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{U^2}{2}\right) + \boldsymbol{U}\cdot\nabla p - \rho\boldsymbol{U}\cdot\nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}) = 0$$

Équation de Bernoulli (suite)

Avec les hypothèses suivantes, pour un écoulement

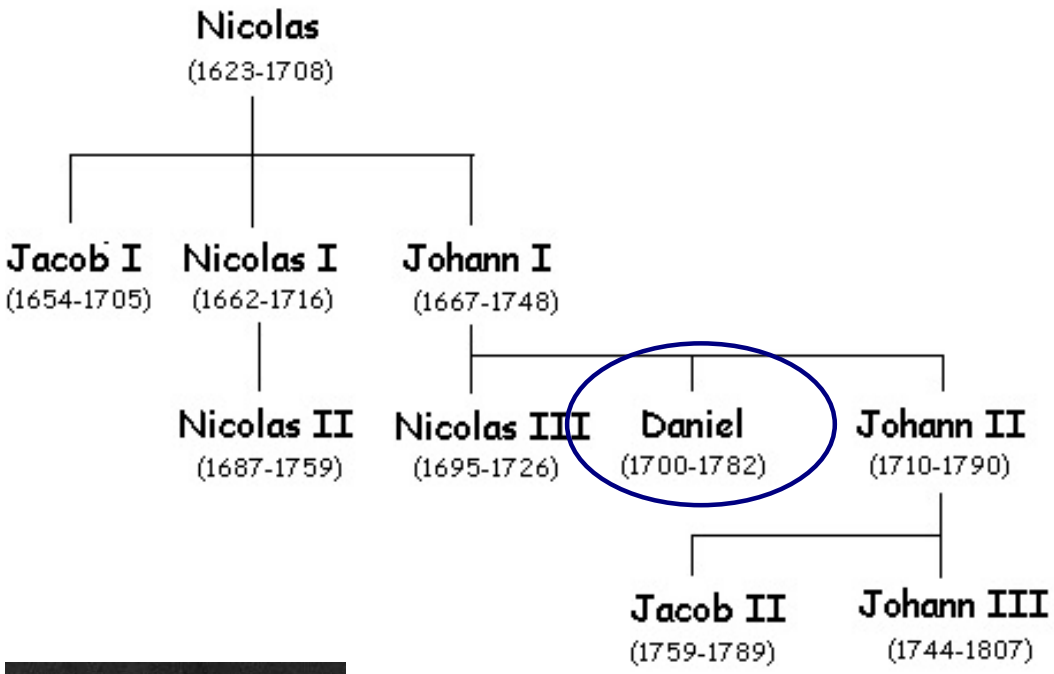
1. non visqueux $(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}})$
2. stationnaire $(\partial_t = 0)$
3. incompressible $(\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$ and $\rho = \text{cst})$
4. soumis à des forces volumiques conservatives $(\boldsymbol{g} = \nabla(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x})$ ici)

la conservation de l'énergie cinétique se réduit à $\boldsymbol{U} \cdot \nabla\left(\rho U^2/2 + p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}\right) = 0$, conduisant à l'équation de Bernoulli

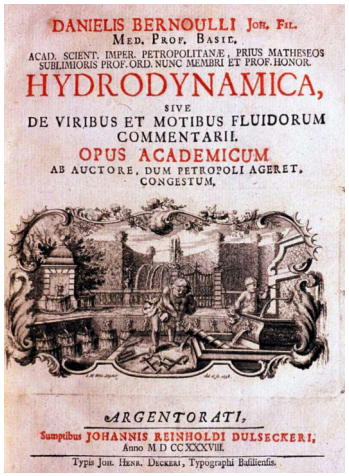
$$\mathcal{H} \equiv p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} + \rho \frac{U^2}{2} = \text{cst} \quad \text{le long d'une ligne de courant} \tag{11}$$

$\mathcal{H}$ prend des valeurs différentes pour chaque ligne de courant. Par ailleurs, pour un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont aussi les trajectoires, $\mathcal{H}$ est donc constant pour une particule fluide. L'éq. (11) traduit la conservation de l'énergie mécanique (le travail des forces est équilibré par la variation de l'énergie cinétique, $\mathcal{H} \sim \text{J.m}^{-3}$ énergie par unité de volume)

La célèbre famille Bernoulli



Daniel Bernoulli (1700-1782)

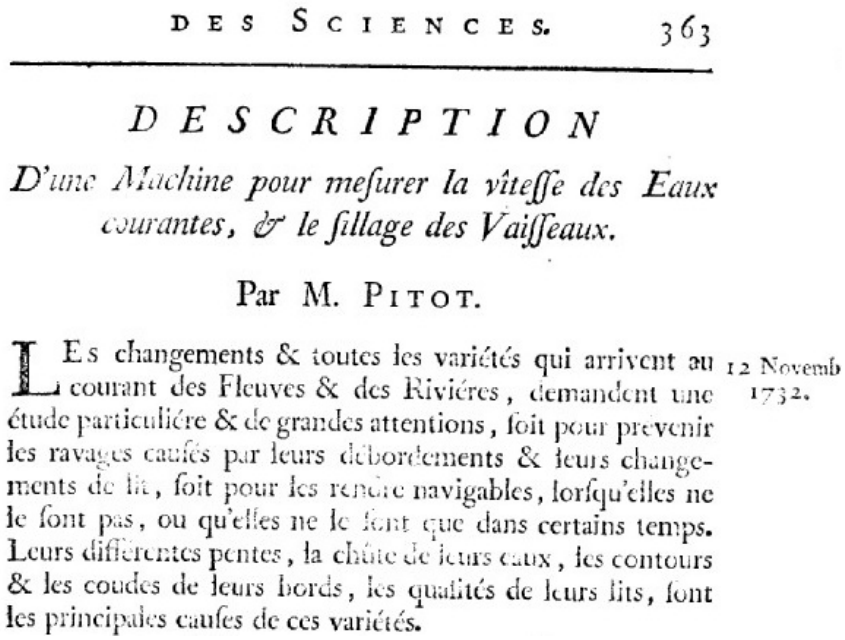

DANIELIS BERNOULLI Joh. Fil.
Med. Prof. Basil.,
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM,
ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis.

Hydrodynamica (1738)

Le mot hydrodynamique a été introduit par Bernoulli pour fusionner les deux domaines de l'hydrostatique et de l'hydraulique

Tube de Pitot

Henri Pitot (1732) a développé cet instrument (tube de Pitot combiné à un manomètre) pour pouvoir mesurer la vitesse de la Seine à Paris



DES SCIENCES. 363

DESCRIPTION

D'une Machine pour mesurer la vîtesse des Eaux courantes, & le sillage des Vaisseaux.

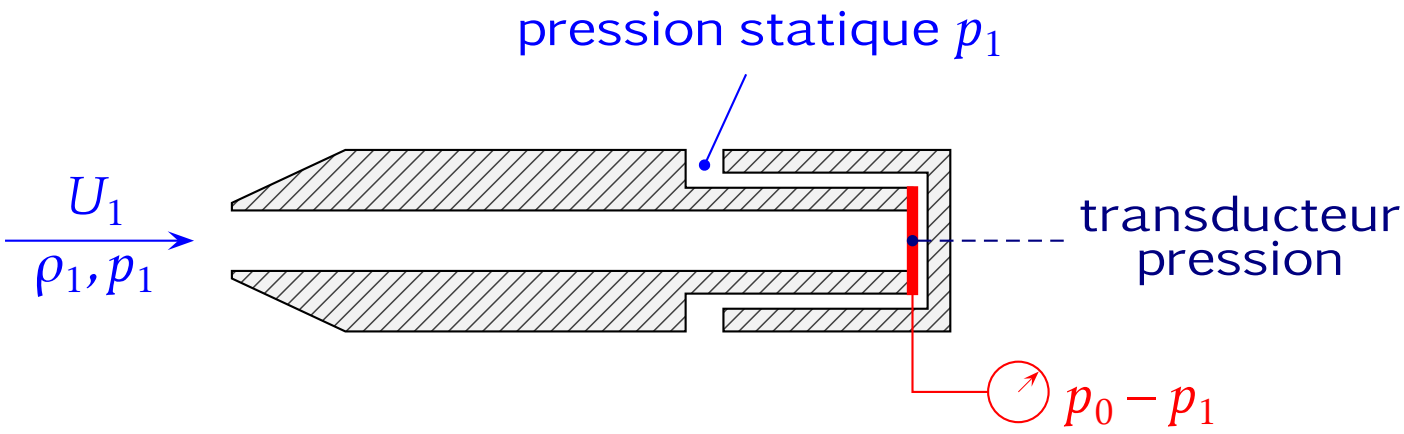
Par M. PITOT.

LES changements & toutes les variétés qui arrivent au courant des Fleuves & des Riviéres, demandent une étude particuliére & de grandes attentions, soit pour prévenir les ravages causés par leurs débordements & leurs changements de lit, soit pour les rendre navigables, lorsqu'elles ne le sont pas, ou qu'elles ne le sont que dans certains temps. Leurs différentes pentes, la chûte de leurs eaux, les contours & les coudes de leurs bords, les qualités de leurs lits, sont les principales causes de ces variétés. 12 Novemb 1732.

Plusieurs tubes de Pitot sont utilisés sur les avions pour mesurer sa vitesse (ainsi que l'angle d'incidence avec des sondes similaires)

(Airbus A350 XWB)

Tube de Pitot (suite)



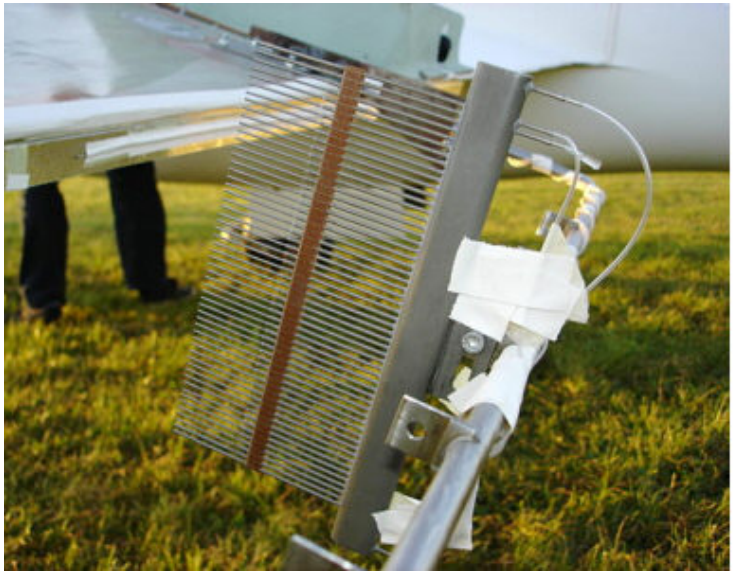
Pour un écoulement incompressible, la différence de pression mesurée par le capteur est (application de l'équation de Bernoulli $p + \rho U^2/2 = \text{cst}$)

$$\begin{cases} \text{à gauche, pression totale } p_0 = p_1 + \dfrac{1}{2}\rho_1 U_1^2 \\ \text{à droite, pression statique } p_1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad U_1 = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho_1}}$$

Le terme $q_1 = \frac{1}{2}\rho_1 U_1^2$ désigne la pression dynamique. La pression totale p_0 est la somme de la pression statique et de la pression dynamique : valide seulement en incompressible (une formulation en régime compressible sera donnée plus loin dans le cours, voir transparent 255)

Peigne de tubes de Pitot

Formula 1 pré-saison de test en 2020, circuit de Barcelona, Williams FW43 pilotée par George Russell



(source inconnue)

y-250 vortex

Les peignes de Pitot permettent de mesurer la distribution de la pression totale (dans un plan ou le long d'une ligne par exemple)

- Concept de particule fluide, de domaine matériel et de dérivée matérielle

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

- Écoulement incompressible $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$ (vérifié lorsque $M_a \leq 0.3$)

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \boldsymbol{T} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}$$

- Écoulement non visqueux : $\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{n} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

- Formulations intégrales pour un domaine de contrôle quelconque avec le théorème de Reynolds, éqs (2), (5) & (9)

Théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \varphi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \varphi \boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}$$

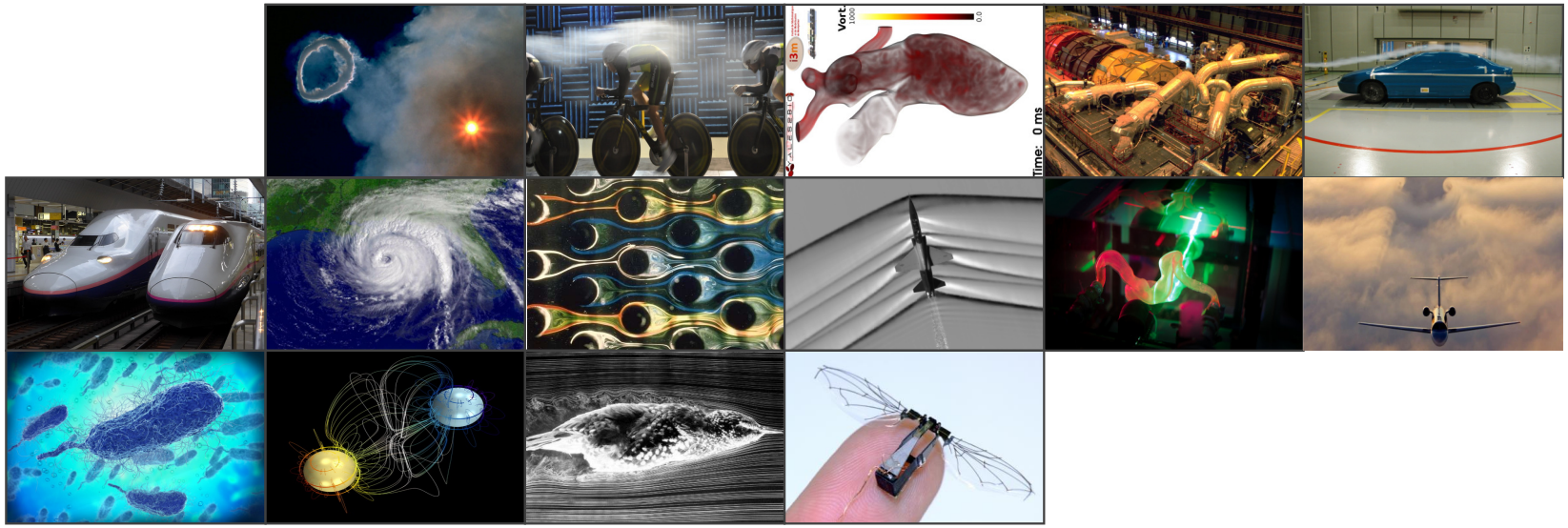
$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\chi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \rho \frac{D\chi}{Dt} \, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{S}} \rho\chi(\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} - \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}$$

- Modèle non visqueux : équilibre hydrostatique, équations d'Euler (10), équation de Bernoulli (11)

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

2 - Fluide visqueux newtonien



2 - Fluide visqueux newtonien

Fluide visqueux

- Loi de comportement newtonienne
- Mouvement d'une particule fluide
- Écoulement de Couette plan
- Forces de portance et de traînée, finesse

Équations de la dynamique des fluides

- Équations de Navier-Stokes
- Conditions aux limites

Bilan de l'énergie cinétique

- Forme intégrale
- Dissipation visqueuse
- Plane channel flow

Energétique d'un système à flux continu

- Bilan d'énergie mécanique
- Perte de charge

À retenir

Loi de comportement newtonienne

On rappelle l'équation de conservation de la quantité de mouvement (8) introduite au chapitre 1,

$$\rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} + \rho \boldsymbol{g}$$

où $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ est le tenseur des contraintes (les forces internes dans le fluide)

Pour un fluide au repos (hydrostatique) ou pour un écoulement non visqueux, on a seulement la contribution de la pression, $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$, mais plus généralement, on a une relation de la forme $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ où $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ est le tenseur des contraintes visqueuses

$$\rho \frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho \boldsymbol{g} \qquad \begin{cases} -\nabla p & \text{force de pression} \\ \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} & \text{force visqueuse exercée sur la particule fluide} \end{cases}$$

i^{e} composante du vecteur $\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$

$$\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\Big|_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial (p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \text{(implicite sommation sur } j\text{)}$$

Loi de comportement newtonienne

C'est la loi de comportement rhéologique utilisée pour les fluides usuels (gaz, liquides), et qui sera utilisée dans tout ce cours. Pour un écoulement incompressible (expression plus complexe en compressible, voir le transparent 232),

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{D}}$$

μ viscosité dynamique ou de cisaillement, propriété intrinsèque du fluide

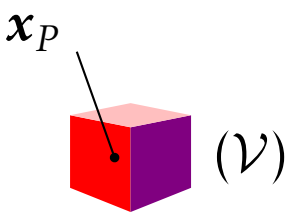
$\overline{\overline{D}}$ tenseur des déformations $\quad D_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$

Cette relation traduit le lien local, instantané et linéaire entre le tenseur visqueux $\overline{\overline{\tau}}$ et le tenseur des déformations $\overline{\overline{D}}$

Le tenseur des déformations $\overline{\overline{D}}$ est directement associé à la déformation des particules fluides

Mouvement d'une particule fluide

En effectuant un développement limité dans le voisinage de la particule fluide en $\boldsymbol{x}_P$ (pour un temps t donné)



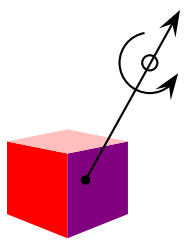
$$U_i(\boldsymbol{x}) \;=\; U_i(\boldsymbol{x}_P) + \left.\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right|_{x_P} (x_j - x_{Pj}) + \cdots$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)}_{D_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

$$\begin{cases} \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \text{ partie symétrique de } \nabla \boldsymbol{U} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \text{ partie antisymétrique de } \nabla \boldsymbol{U} \end{cases}$$

Ω_{ij} représente la rotation solide (en bloc) de la particule fluide

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{U}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} \neq \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}})$$

Mouvement d'une particule fluide (suite)

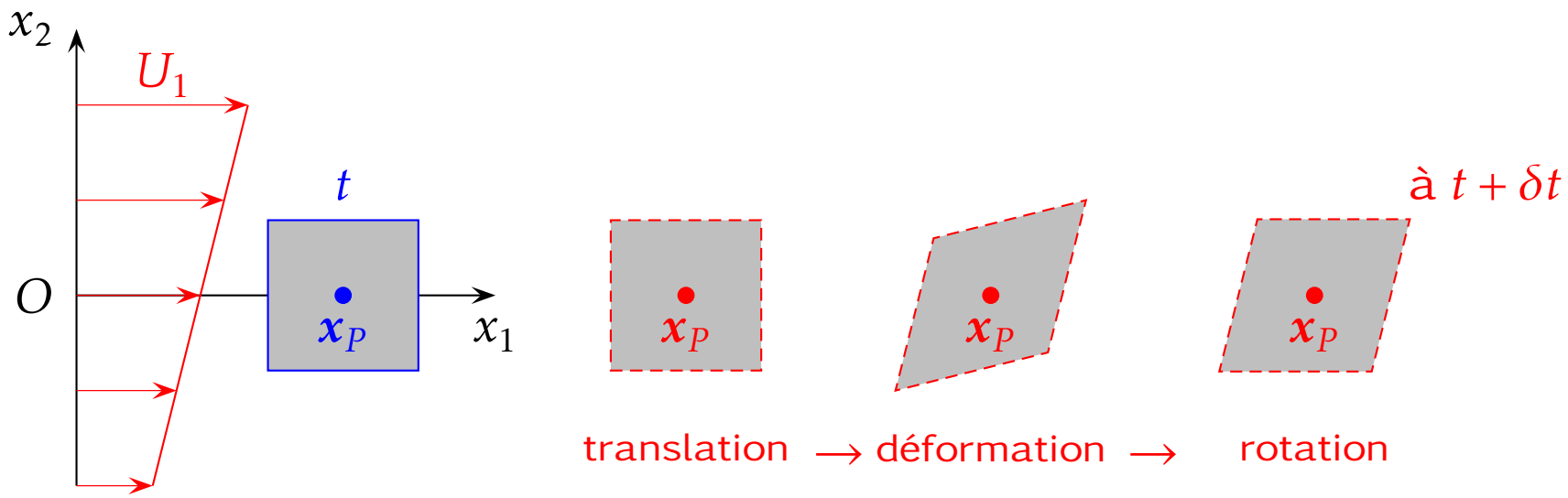
$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \simeq \underbrace{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_P)}_{\text{translation}} + \underbrace{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P)}_{\text{déformation}} + \underbrace{\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P)}_{\text{rotation à } \boldsymbol{\Omega}} + \cdots$$

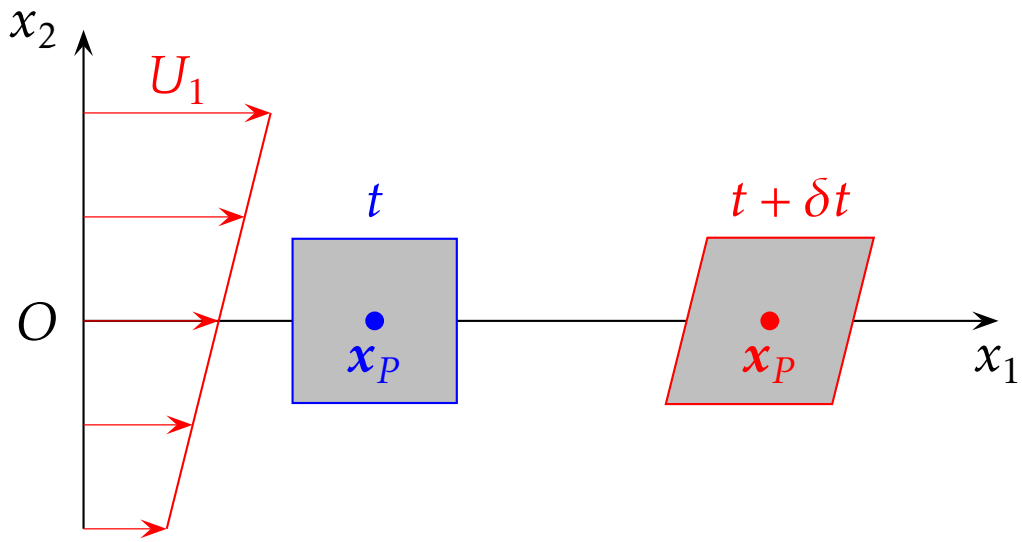
Ni la translation ni la rotation ne déforment la particule fluide (pas de frottement interne) : les déformations sont seulement induites au travers du bien nommé tenseur des déformations $\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$

Illustration avec la déformation d'une particule fluide dans un écoulement cisaillé 2-D : $U_1 = S x_2$ et $U_2 = U_3 = 0$ (écoulement incompressible puisque $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$)

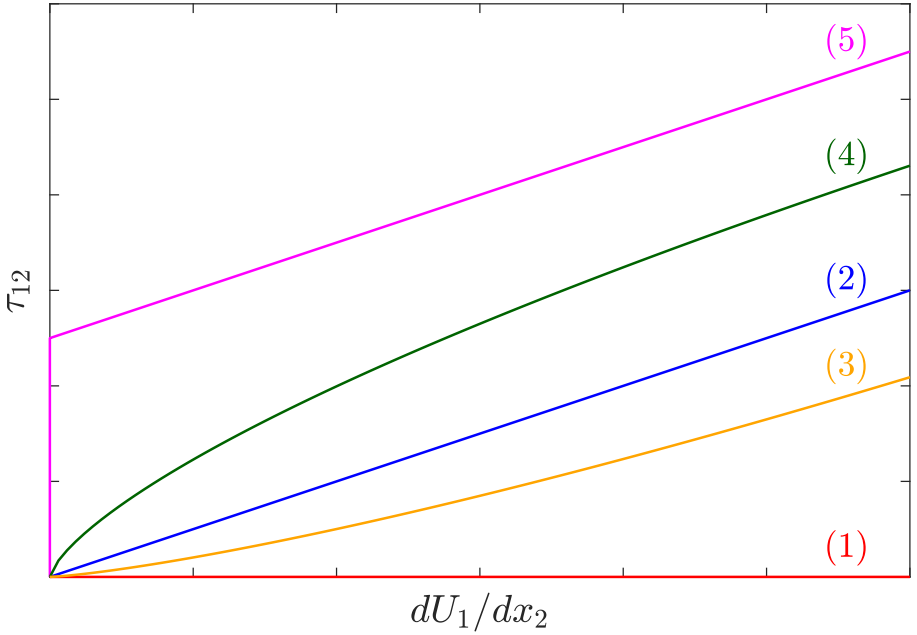
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}} + \underbrace{\frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}} \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{S}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mouvement d'une particule fluide (suite)





Quelques lois rhéologiques pour un fluide



La viscosité apparente (car n'est plus une propriété intrinsèque du fluide) qui diminue (rhéo-fluidifiant) ou augmente (rhéo-épaississant) avec le gradient de vitesse dU_1/dx_2

(1) fluide parfait, $\tau_{12} = 0$
modèle de fluide non visqueux $\mu = 0$

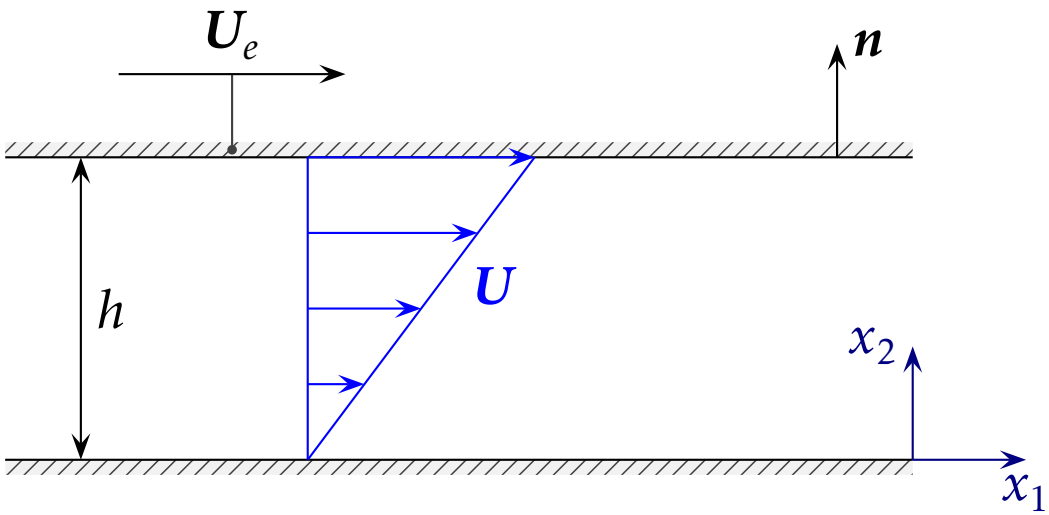
(2) fluide newtonien, $\tau_{12} = \mu dU_1/dx_2$
μ seulement fonction de la température">

(3) fluide rhéo-épaississant, $\tau_{12} = \mu(dU_1/dx_2)^n$, $n > 1$, viscosité apparente $\mu(dU_1/dx_2)^{n-1}$
mélange eau-maïzena, miel par exemple

(4) fluide rhéo-fluidifiant, $\tau_{12} = \mu(dU_1/dx_2)^n$, $n < 1$, viscosité apparente $\mu(dU_1/dx_2)^{n-1}$
sang, peinture, ketchup, moutarde par exemple

(5) fluide de Bingham (seuil τ_0)
$\tau_{12} - \tau_0 = \mu dU_1/dx_2$ si $\tau_{12} > \tau_0$
fluides avec particules (polymères), dentifrice

Écoulement de Couette plan



U_e est la vitesse constante imposée par le plan supérieur

$\boldsymbol{U} = (U_1(x_2), 0, 0)$
$U_1 = U_e x_2/h$ (montré plus tard)

$$\nabla \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/(2h) & 0 \\ U_e/(2h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p & \mu U_e/h & 0 \\ \mu U_e/h & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

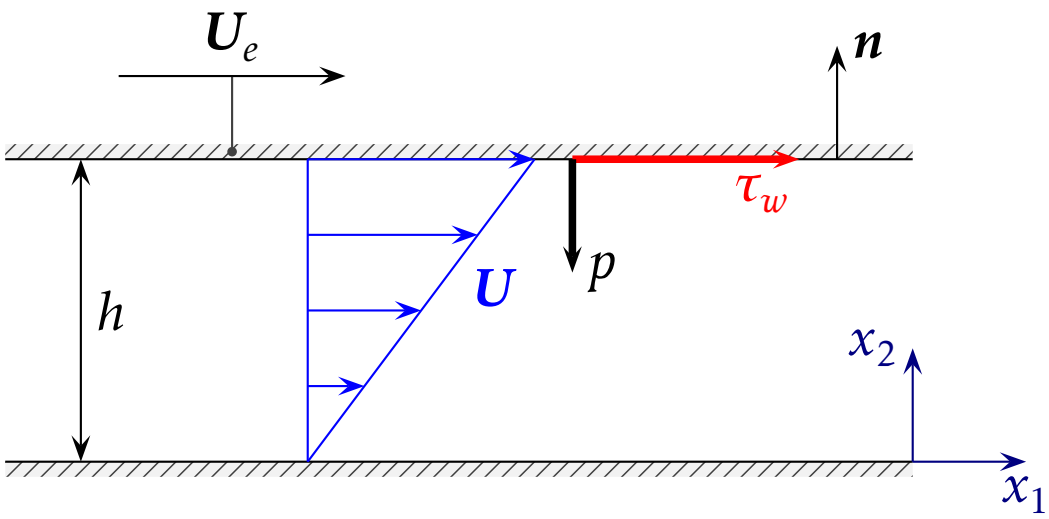
La contrainte de cisaillement est ici constante,

$$\tau_{12} = \mu \frac{U_e}{h} = \text{cst}$$

Écoulement de Couette plan (suite)

Quelle est la force $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}\ ds$ exercée par le plan supérieur sur le fluide ?
En introduisant le vecteur normal pointant vers l'extérieur du volume de contrôle $\boldsymbol{n} = (0, 1, 0)$

$$\boldsymbol{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}\Big|_{x_2=h} = \begin{pmatrix} -p & \mu U_e/h & 0 \\ \mu U_e/h & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu U_e/h \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\tau_w = \tau_{12}|_{\text{wall}} = \frac{\mu U_e}{h}$$

contrainte (de cisaillement) pariétale exercée par le plan mobile sur le fluide

Écoulement de Couette plan (suite)

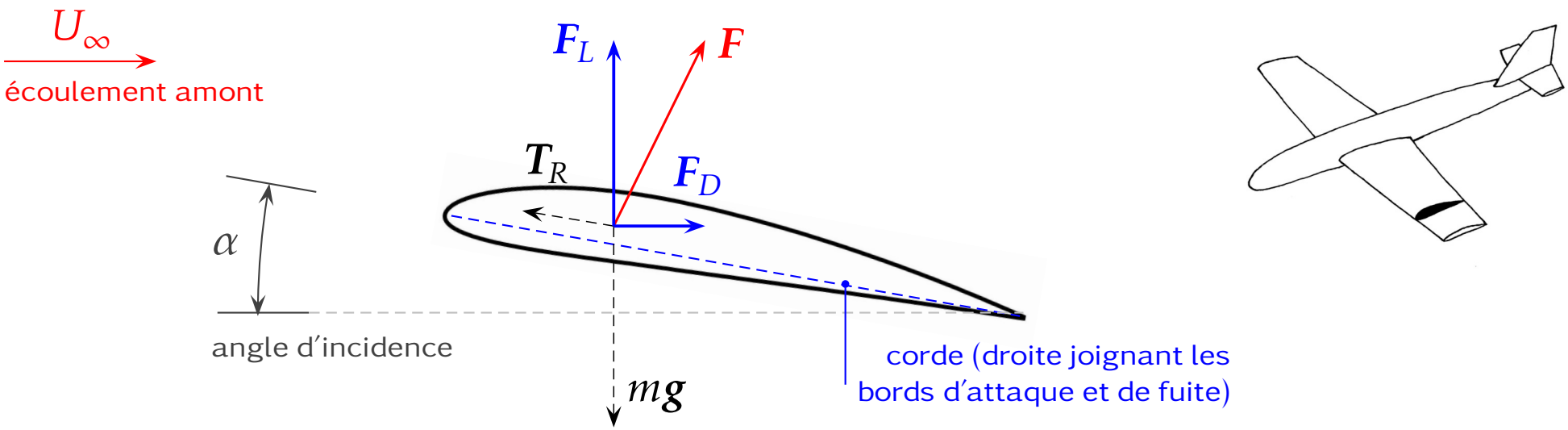
Par curiosité, qu'en est-il de la rotation de la particule fluide ?

$$\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & U_e/(2h) & 0 \\ -U_e/(2h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_e/(2h) \end{pmatrix} \qquad \text{(sens horaire)}$$

Maurice Couette (1858-1943)
(*Rhéologie*, **8**, 2005)

Forces de portance et de traînée

Illustration avec un profil cambré



La force aérodynamique résultante $\boldsymbol{F}$ exercée par l'écoulement sur le profil est classiquement décomposée en une force de portance $\boldsymbol{F}_L$, définie comme la composante perpendiculaire à l'écoulement incident $\boldsymbol{U}_\infty$, et une force de traînée $\boldsymbol{F}_D$ qui s'oppose au déplacement du profil.

$\boldsymbol{T}_R$ est la force de poussée induite par le système de propulsion,
et $m\boldsymbol{g}$ la force de gravité

Finesse : ratio entre portance et traînée F_L/F_D

F_L/F_D

70 planeur ETA

$40-60$ planeur (DG1000)

$\simeq 34$ Solar Impulse 2

$18-20$ A380 (20.0), B787 (20.6)

Airbus 320 (17), Boeing 747 (17.7)

7.5 Concorde $M = 2$

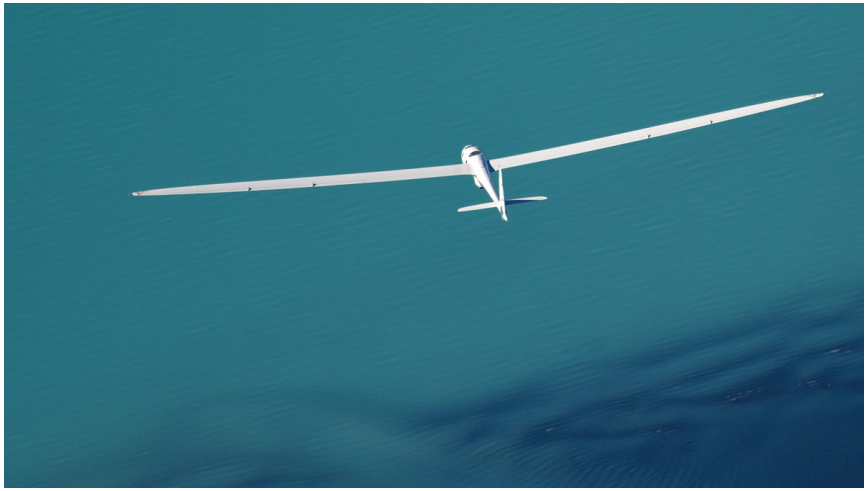
$= 4$ au décollage, $= 12$ pour $M = 0.95$

$\simeq 1.0$ navette spatiale (hypersonique)

- **Solar Impulse 2**

Planeur stratospherique : projet Perlan

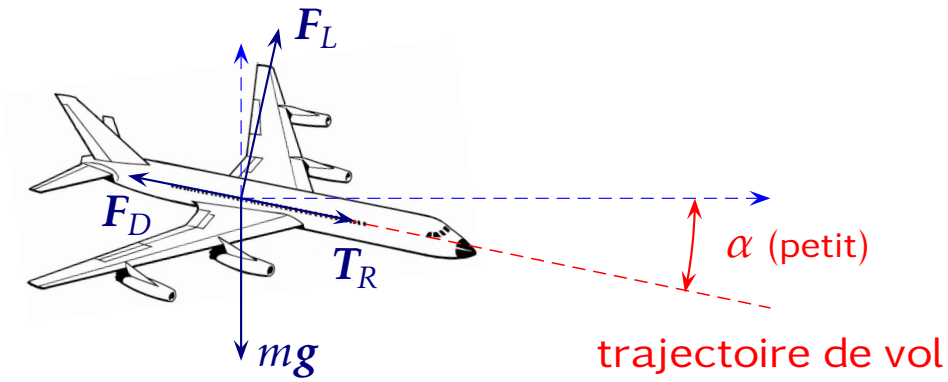
planeur de 26 m d'envergure, de 10 m de long, $U_f \leq 194$ m.s^{-1}
76 124 ft (23.2 km) le 02-09-2018, objectif ultime de 90 000 ft (27000 m)



Button, K., *Aerospace America*, nov. 2019, 14-17 (Perlan 2 versus Airbus A350 XWB en fond pour l'échelle !)

Interprétation de la finesse F_L/F_D

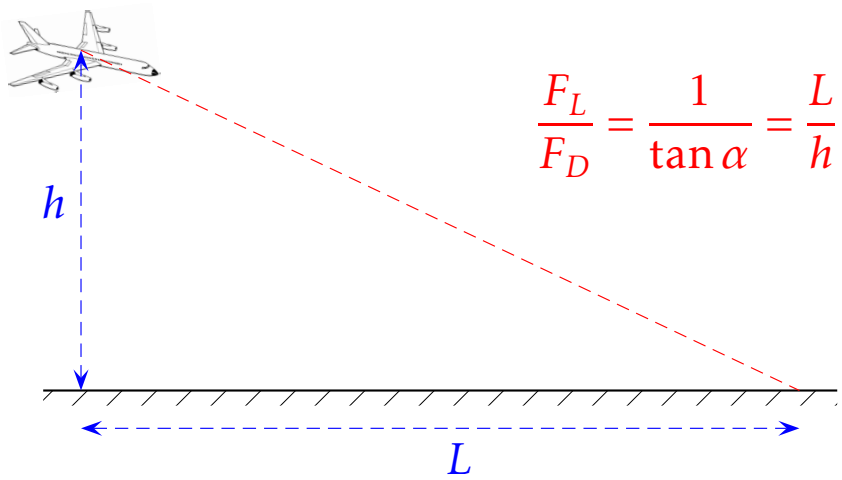
Pour un avion volant à vitesse constante, $0 = \boldsymbol{T}_R + \boldsymbol{F}_L + \boldsymbol{F}_D + m\boldsymbol{g}$



$$\begin{cases} -F_D + mg\sin\alpha + T_R = 0 \\ F_L - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Avec les moteurs éteints ($T_R = 0$),

$$\frac{F_L}{F_D} = \frac{1}{\tan\alpha}$$



Avion moderne en condition de croisière $h \simeq 13150$ m, $F_L/F_D \simeq 20$

angle de glissement $\alpha = 2.86°$
distance parcourue $L \simeq 263$ km

- **On rappelle ci-dessous les équations du mouvement pour un écoulement incompressible**

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 & \text{conservation de la masse (en incompressible)} \\ \rho \dfrac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho \boldsymbol{g} & \text{conservation de la quantité de mouvement} \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} & \text{loi de comportement pour les fluides newtoniens} \end{cases}$$

Nous allons conserver la condition d'incompressibilité jusqu'au chapitre 7, et supposer également que la masse volumique reste constante, pour permettre un découplage formel entre les équations de la dynamique des fluides, et l'équation sur l'énergie.

La masse volumique en incompressible doit vérifier $D\rho/Dt = 0$. Il suffit donc d'avoir à un instant donné ρ homogène, pour satisfaire $\rho(\boldsymbol{x}, t) = \text{cst}$. Pouvez vous néanmoins citer un contre-exemple en incompressible ?

Équations de Navier-Stokes

Nous connaissons l'expression du tenseur visqueux en incompressible $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$ et on peut calculer sa divergence, terme qui apparaît dans la conservation de la quantité de mouvement $\nabla \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu\nabla^2\boldsymbol{U}$

On obtient ainsi les équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire les équations de la dynamique des fluides pour un écoulement incompressible

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\ \\ \dfrac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{U} + \boldsymbol{g} \end{cases} \tag{12}$$

où $\nu \equiv \mu/\rho$ est la viscosité cinématique en $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$

Pour de l'air, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$
Pour de l'eau, $\nu = 1.0 \times 10^{-6}$ $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$
(valeurs à la pression atmosphérique pour une température de 20°C)

Navier & Stokes

MÉMOIRE

SUR LES LOIS DU MOUVEMENT DES FLUIDES;

PAR M. NAVIER.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 mars 1822.

On voit donc en premier lieu que les équations indéfinies du mouvement du fluide deviendront respectivement

$$P - \frac{dp}{dx} = \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right),$$

$$Q - \frac{dp}{dy} = \rho\left(\frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right),$$

$$R - \frac{dp}{dz} = \rho\left(\frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right) - \varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right).$$

Navier, C.L.M.H., 1823, Mémoire sur les lois du mouvement des fluides (lu à l'Académie le 18 mars 1822), *Mémoires de l'Académie Royal des Sciences de l'Institut de France*, 389-440

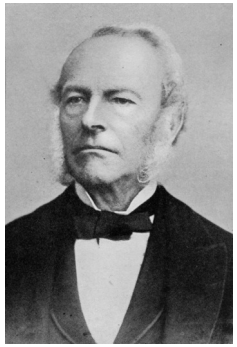
XXII. *On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids.* By G. G. STOKES, M.A., *Fellow of Pembroke College.*

* The same equations have also been obtained by Navier in the case of an incompressible fluid, (*Mém. de l'Institut*, T. VI.) but his principles differ from mine still more than do Poisson's.

$$\rho\left(\frac{Du}{Dt} - X\right) + \frac{dp}{dx} - \mu\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) - \frac{\mu}{3}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) = 0, \quad \&c.\ldots\ldots(12)$$

Stokes, G. G., 1845, On the theory of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, **8**, 287-305

Navier (1785-1836)



Stokes (1819-1903)

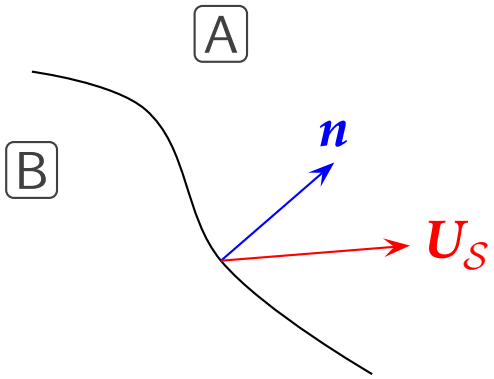
Conditions aux limites

Les équations de Navier-Stokes (12) ne peuvent être résolues qu'avec des conditions aux limites appropriées (résolution d'un problème aux limites)

Paroi solide :
condition d'adhérence (de non glissement) $\boldsymbol{U}_{\text{fluide}} = \boldsymbol{U}_{\text{paroi}}$
(*e.g.* écoulement de Couette plan)

Interface entre deux fluides A et B (sans transfert de masse et en négligeant la tension superficielle) :

condition d'adhérence $\boldsymbol{U}_A = \boldsymbol{U}_B$
continuité des efforts $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_A \cdot \boldsymbol{n} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_B \cdot \boldsymbol{n}$
imperméabilité de l'interface $\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}$

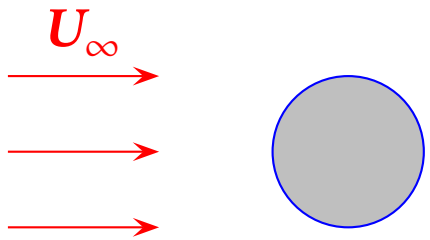


Conditions aux limites (suite)

Illustration avec l'écoulement se développant autour d'un corps

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\ \dfrac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla(p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} \end{cases}$$



avec comme conditions aux limites : $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}$ sur la surface du corps, et $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}_\infty$ loin de ce dernier

La géométrie du corps et la vitesse de l'écoulement incident $\boldsymbol{U}_\infty$ interviennent dans les conditions aux limites. La force de gravité peut-être intégrée à la pression, et n'apparaît alors que comme une correction $p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}$ (« pression effective »)

Le fluide lui-même est caractérisé par sa masse volumique ρ et sa viscosité ν

Après un transitoire, on observe un écoulement développé ou établi : les conditions initiales ont été oubliées. Bien noter que l'écoulement n'est pas nécessairement stationnaire ou permanent (indépendant du temps)

Forme intégrale

Dans cette dernière partie, on cherche à avoir une vue globale de l'écoulement, qui va nous servir pour modéliser les écoulements internes. On commence par établir le bilan de l'énergie cinétique turbulente en prenant le produit scalaire de la vitesse avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\boldsymbol{U}\cdot\left\{\rho\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}=\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}+\rho\boldsymbol{g}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{U^2}{2}\right)=\boldsymbol{U}\cdot\left(\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}+\rho\boldsymbol{g}\right)$$

On utilise alors le théorème de Reynolds (5) pour un domaine fixe ($\boldsymbol{U}_{\mathcal{S}}=0$) avec $\chi=U^2/2$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\rho\frac{U^2}{2}\,dv=\underbrace{\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{U}\cdot\left(\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}+\rho\boldsymbol{g}\right)dv}_{=\text{(a)}}-\int_{\mathcal{S}}\rho\frac{U^2}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}\,ds$$

Forme intégrale (suite)

et en utilisant l'identité vectorielle suivante (discutée juste après)

$$\boldsymbol{U}\cdot(\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) - \overline{\overline{\sigma}}:\nabla\boldsymbol{U} = \nabla\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) - \overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$$

$$(a) = \begin{cases} P_{\text{ext}} \equiv \displaystyle\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U}\cdot(\overline{\overline{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})\,d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{D}} \rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g}\,d\mathcal{V} & \text{forces externes } \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_v \\ P_{\text{int}} \equiv -\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\sigma}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\,d\mathcal{V} & \text{forces internes} \end{cases}$$

- **Courte pause ...**

... pour correctement définir l'expression $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}$

Produit scalaire entre deux tenseurs : le résultat est un scalaire (multiplication terme à terme et sommation)

$$\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} = \sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{11} D_{11} + \sigma_{12} D_{12} + \cdots + \sigma_{32} D_{32} + \sigma_{33} D_{33}$$

... et pour démontrer l'identité vectorielle suivante

$$\boldsymbol{U} \cdot (\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma}}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\overline{\sigma}}) - \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}}$$

$$\begin{aligned} U_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i \sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} D_{ij} \qquad (i \leftrightarrow j, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}) \end{aligned}$$

Forme intégrale (suite)

On retient au final

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{U^2}{2} d\mathcal{V} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} - \int_{\mathcal{S}} \rho \frac{U^2}{2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}\, ds \tag{13}$$

La puissance des forces extérieures P_{ext} sert à accroître l'énergie cinétique (avec le terme de bord à droite pour un domaine fixe $\mathcal{D}$) mais une partie est aussi utilisée avec la puissance des efforts internes P_{int} pour la déformation des particules fluides à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}$. Ce dernier terme P_{int} peut s'arranger comme suit pour un écoulement incompressible

$$-P_{\text{int}} = \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\, d\mathcal{V} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\, d\mathcal{V}}_{\substack{\text{dissipation} \\ \text{visqueuse} > 0}} \tag{14}$$

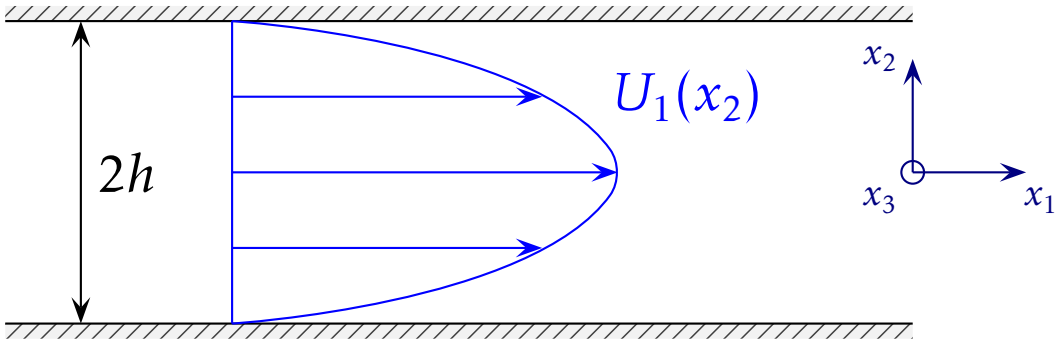
Définition

La puissance des forces visqueuses qui s'exerce sur les particules fluides induit une dissipation visqueuse, une transformation irréversible de l'énergie mécanique en chaleur par frottements

Pour un écoulement incompressible,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = 2\mu \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)^2 > 0 \qquad (\mathrm{W.m^{-3}})$$

- **Illustration avec l'écoulement laminaire dans un canal plan (entre deux plaques parallèles, écoulement de Poiseuille)**



Le champ de vitesse est donné $\boldsymbol{U} = (U_1(x_2), 0, 0)$ avec

$$U_1 = \frac{U_0}{h^2}(h^2 - x_2^2)$$

(voir page 124)

Quelle est la force visqueuse exercée par l'écoulement sur les parois du canal ?

Tenseur des contraintes : $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ avec $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}$

$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 \\ -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 \\ -\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{pmatrix} -p & -2\mu\frac{U_0 x_2}{h^2} & 0 \\ -2\mu\frac{U_0 x_2}{h^2} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Écoulement laminaire dans un canal plan (suite)

Sur la paroi du haut, $x_2 = h$, $\boldsymbol{n} = (0,1,0)$, vecteur contrainte $\boldsymbol{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -2\mu \dfrac{U_0}{h} \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} \qquad d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}\, ds$$

(force exercée par la paroi du haut sur l'écoulement)

La force visqueuse exercée par l'écoulement sur la paroi supérieure par unité de surface est donc donnée par $\boldsymbol{F} = 2(\mu U_0/h)\boldsymbol{e}_1$. En effectuant le même raisonnement pour la paroi du bas, on en déduit que la force totale est $\boldsymbol{F} = 4\mu(U_0/h)\boldsymbol{e}_1$

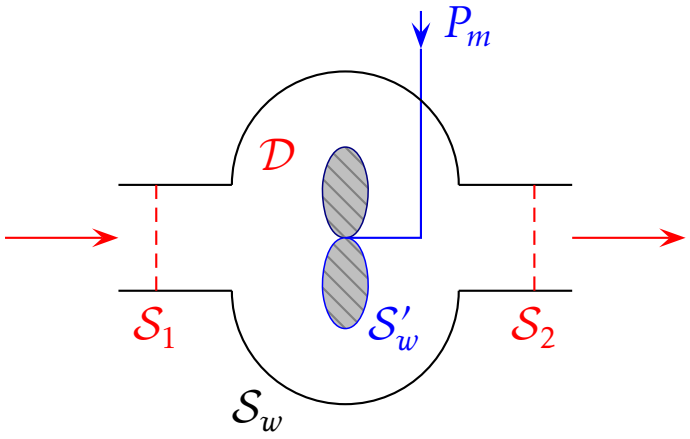
Dissipation visqueuse ?

$$\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} = 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{D}} = 2\mu(D_{12}^2 + D_{21}^2) = 4\mu \left(\frac{U_0 x_2}{h^2} \right)^2$$

$$\int_{-h}^{+h} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}\, dx_2 = \frac{8\mu U_0^2}{3h}$$ W.m^{-2} c'est-à-dire par m^2 dans le plan (x_1, x_3)

$\rightsquigarrow$ dissipation visqueuse proportionnelle à U_0^2

Bilan d'énergie mécanique



Domaine de contrôle $\mathcal{D}$ avec comme surface associée $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_w \cup \mathcal{S}'_w$

$\mathcal{S}'_w$ surface imperméable mobile avec $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_w$ surfaces fixes ($\boldsymbol{U}_\mathcal{S} = 0$)

P_m puissance mécanique fournie à l'écoulement avec le travail de l'arbre (ce dernier traversant la surface de contrôle)

Hypothèses : écoulement incompressible, pas de contribution des contraintes visqueuses sur $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ (sera justifié en travaux dirigés)

Conservation de la masse

$$\int_\mathcal{D} \nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V} = \int_\mathcal{S} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = Q_{v2} - Q_{v1} = 0$$

$$Q_{v1} = Q_{v2} = Q_v \quad (\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1})$$

Bilan d'énergie mécanique (suite)

Conservation de l'énergie cinétique

En se rappelant que pour la force de gravité, $\boldsymbol{g} = \nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x})$, le bilan d'énergie cinétique (voir page 86) peut s'écrire comme

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g} = \boldsymbol{U}\cdot\nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}) = \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}) \quad \Longrightarrow \quad \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{U^2}{2} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{U}\cdot\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}} \tag{15}$$

On introduit alors la puissance des efforts surfaciques externes plutôt que P_{ext}

$$P_{\text{ext}}^{\mathcal{S}} \equiv \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U}\cdot(\overline{\overline{\sigma}}\cdot\boldsymbol{n})\, d\mathcal{S}$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour la forme intégrale (13) de la conservation de l'énergie cinétique pour un domaine fixe et des surfaces mobiles imperméables $\mathcal{S}'_w$ (sans terme de bord pour le théorème de Reynolds)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\left(\frac{U^2}{2} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}\right) d\mathcal{V} = P_{\text{ext}}^{\mathcal{S}} + P_{\text{int}} - \int_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} \rho\left(\frac{U^2}{2} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \tag{16}$$

Bilan d'énergie mécanique (suite)

On peut détailler chacun des deux termes de puissance de l'éq. (16), à savoir

$$\begin{cases} P_{\text{ext}}^{\mathcal{S}} = \displaystyle\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n})\, d\mathcal{S} = \underbrace{P_m}_{\text{via } \mathcal{S}'_w} - \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} p\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \\ P_{\text{int}} = - \underbrace{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\, d\mathcal{V}}_{\substack{\text{dissipation visqueuse} \\ \mathcal{D}_\nu > 0}} = -\mathcal{D}_\nu \end{cases}$$

(On ne souhaite pas connaître de détails sur P_m)

On peut regrouper le terme de pression avec les deux autres termes dans l'intégrale surfacique précédente

Bilan d'énergie mécanique (suite)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho\left(\frac{U^2}{2} - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x}\right) d\mathcal{V} = P_m - \mathcal{D}_\nu - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} \mathcal{H}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S}}_{(a)}$$

où $\mathcal{H} = p - \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{x} + \rho U^2/2$ est l'énergie locale par unité de volume (J.m^{-3}) déjà introduite avec l'éq. de Bernoulli (11). Le terme (a) représente ce flux d'énergie entrant et sortant au travers des surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. En prenant alors la moyenne temporelle de cette équation

$$\underbrace{\bar{P}_m}_{\substack{\text{puissance moyenne}\\ \text{fournie à l'écoulement}}} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_2} \overline{\mathcal{H}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}}\, d\mathcal{S}}_{\substack{\text{variation du flux d'énergie}\\ \text{entre l'entrée et la sortie}}} + \underbrace{\bar{\mathcal{D}}_\nu}_{\substack{\text{dissipation}\\ \text{visqueuse}}}$$

Perte de charge

Avec l'équation précédente, nous avons presque un modèle 1-D pour représenter notre système à flux continu, à condition de pouvoir modéliser l'intégrale de flux. On introduit pour cela la charge H (attention $\neq \mathcal{H}$) telle que

$$\bar{Q}_v H \equiv \int_{\mathcal{S}} \overline{\mathcal{H}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}}\, d\mathcal{S}$$

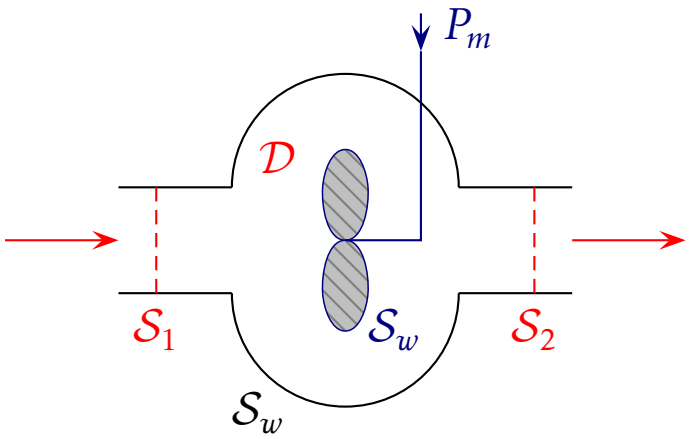
H est donc une valeur moyenne du flux de $\mathcal{H}$ en temps (on pourra plus tard tenir compte du régime turbulent) et dans la section droite, divisé par le flux volumique moyen $\bar{Q}_v$. On retient alors pour la conservation de l'énergie mécanique la forme compacte suivante

$$\bar{P}_m + \bar{Q}_v(H_1 - H_2) = \bar{\mathcal{D}}_v \quad (\sim \mathrm{J.s^{-1}} \sim \mathrm{W}) \tag{17}$$

Pour une simple conduite sans machine ($\bar{P}_m = 0$), on a $\bar{Q}_v(H_1 - H_2) = \bar{\mathcal{D}}_v > 0$, on observe une perte de charge entre H_1 et H_2 induite par les effets visqueux (une dégradation irréversible de l'énergie mécanique), voir par exemple l'écoulement de Poiseuille précédent page 124 pour connaître $\bar{\mathcal{D}}_v$

Perte de charge (suite)

Dans ce contexte, on introduit aussi le rendement η de la machine pour déterminer la puissance transmise (pompe) ou récupérée (turbine) par l'arbre de la machine



Pour une pompe ou un ventilateur :

$$Q_v(H_2 - H_1) = (P_m - \mathcal{D}_v) = \eta P_m > 0$$

$$Q_v \Delta H_P = \eta P_m > 0$$

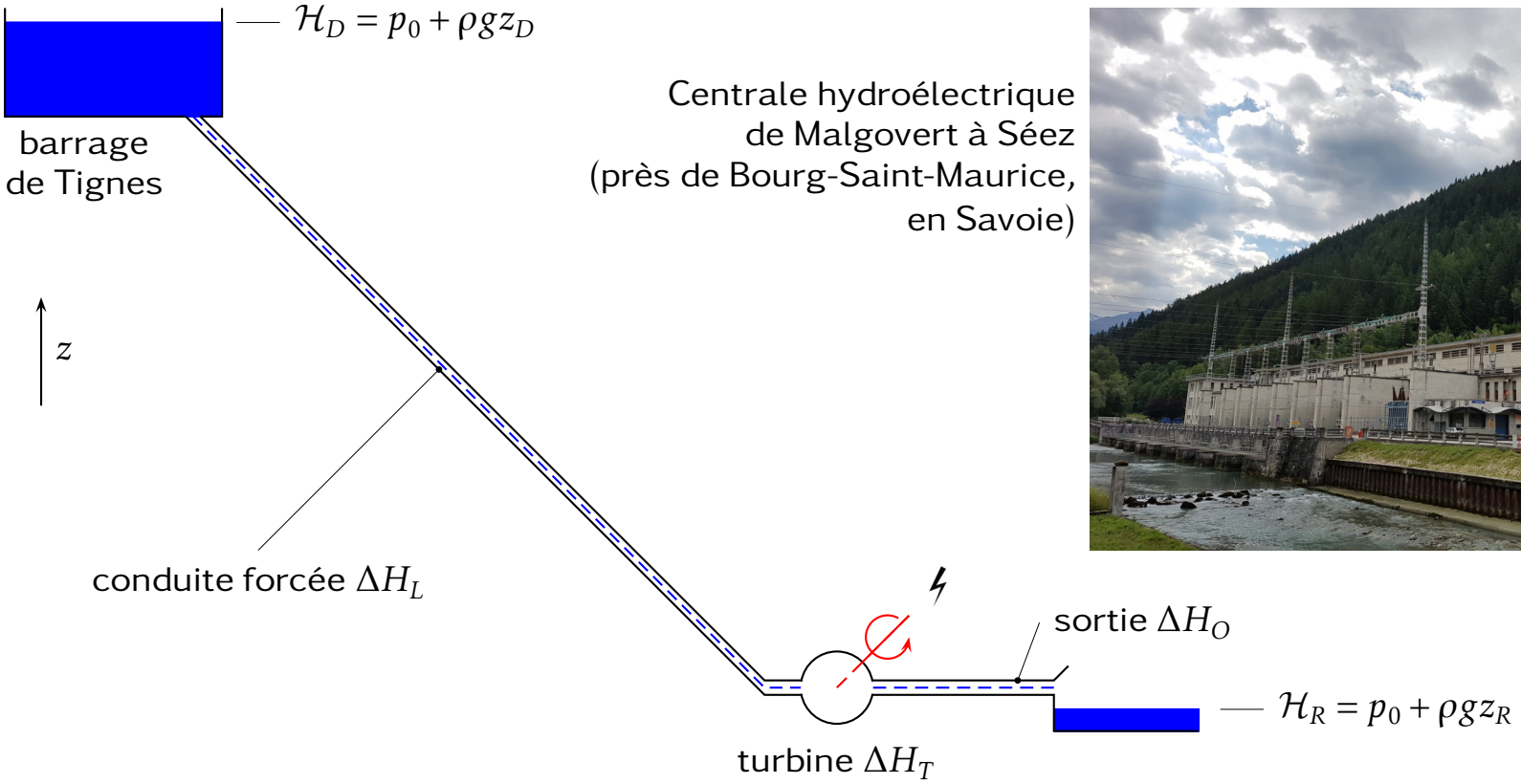
Pour une turbine :

$$P_T = -P_m = Q_v(H_1 - H_2) - \mathcal{D}_v = \eta Q_v(H_1 - H_2) > 0$$

$$P_T = \eta Q_v \Delta H_T > 0$$

$\rightsquigarrow$ Par abus de notation, les barres indiquant la moyenne temporelle seront souvent omises

Illustration avec un barrage de montagne



Centrale hydroélectrique
de Malgovert à Séez
(près de Bourg-Saint-Maurice,
en Savoie)

EDF Hydro Alpes

$$H_D - H_R = \rho g(z_D - z_R) = \Delta H_L + \Delta H_T + \Delta H_O \qquad \Delta H_L, \Delta H_O \text{ pertes de charge}$$

$$P_T = \eta_T Q_v \Delta H_T = \eta_T Q_v \left[\rho g(z_D - z_R) - \Delta H_L - \Delta H_O\right]$$

Illustration avec un barrage de montagne (suite)

Remarque - Pour déterminer la charge H_D à la surface de la retenue d'eau du barrage en $z = z_D$, on doit d'abord observer que

$\mathcal{H}_D = p_0 + \rho g z_D + \rho U_D^2/2 \simeq p_0 + \rho g z_D = \text{cst}.$

Le débit volumique $Q_v = U_D \times \mathcal{S}$ est en effet réalisé avec une très grande surface $\mathcal{S}$ et une très faible vitesse U_D

Cela permet d'écrire dans ce cas

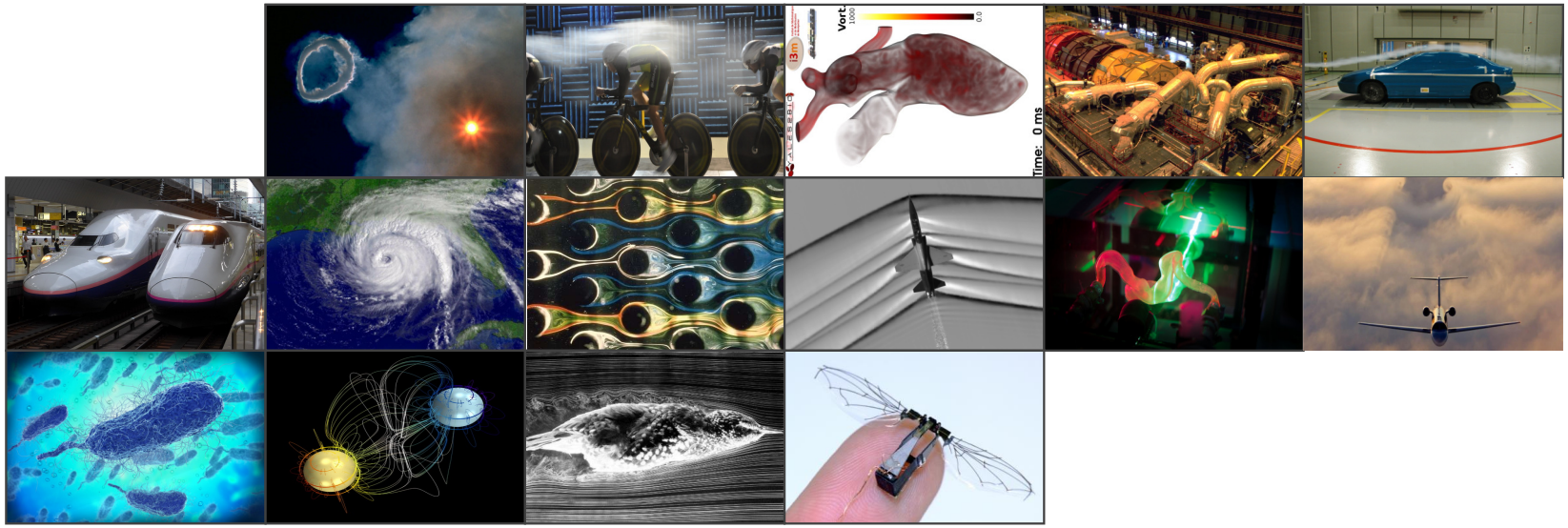
$$H_D = \frac{\int_{\mathcal{S}} \mathcal{H}_D \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}}{Q_v} \simeq \mathcal{H}_D \frac{\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S}}{Q_v} \simeq \mathcal{H}_D$$

- Tenseur visqueux pour un fluide newtonien (version incompressible dans ce chapitre)
- Expression et le sens de la dissipation visqueuse
- Équations de Navier-Stokes (12) & conditions aux limites
- Écoulements de Couette et de Poiseuille
- Perte de charge dans un système à flux continu (17)

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds



3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds

Analyse dimensionnelle

- Motivation
- Unités et dimensions
- Théorème Π
- Illustrations

Nombre de Reynolds

- Définition
- Interprétation
- Éq. de Navier-Stokes adimensionnelle

Écoulement autour d'un obstacle

- Analyse dimensionnelle
- Coefficient de traînée
- Maquette et nombre de Reynolds

Applications du théorème Π

- Traînée de la coque d'un bateau
- Vitesse d'une embarcation d'aviron

Écoulement en conduite

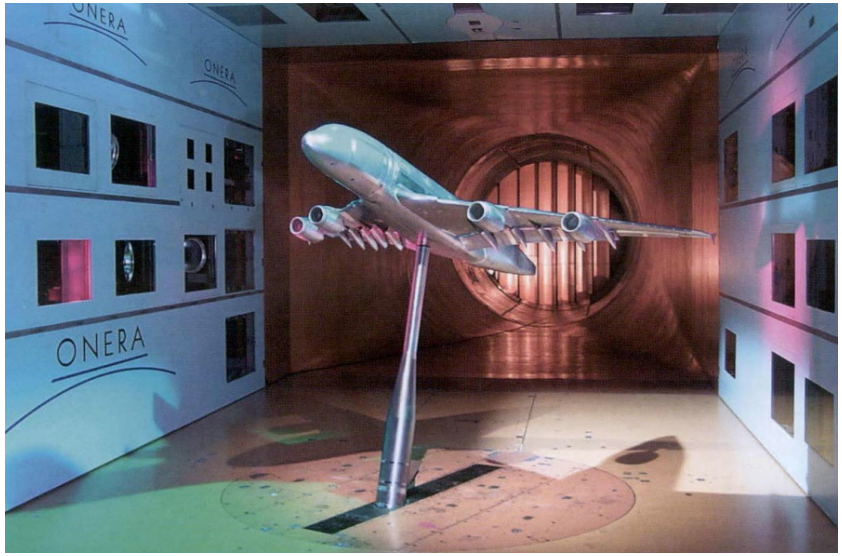
- Solution de Poiseuille
- Coefficient de frottement
- Modèle 1-D

À retenir

Motivation

Les performances aérodynamiques déterminées sur une maquette d'avion dans une soufflerie peuvent-elles être utilisées pour prédire celles à échelle réelle ?

Peut-on identifier de manière systématique les paramètres qui gouvernent le comportement d'un écoulement en particulier (détachement tourbillonnaire derrière un cylindre par exemple) sans avoir à réaliser de nombreuses expériences ?



Maquette d'un airbus A380 installée dans la soufflerie F1 de l'ONERA du Fauga-Mauzac
(avec l'autorisation de Jean Délery)

La réponse est oui, en s'appuyant sur l'analyse dimensionnelle qui permet de formuler des lois dimensionnelles (liées à des solutions autosimilaires, de similitude)

Unités et dimensions

Dimensions principales	[ ]	unité
masse	$[M]$	kg
longueur	$[L]$	m
temps	$[T]$	s
température	$[\Theta]$	K

(le choix des unités est totalement arbitraire)

vitesse $[V] = LT^{-1}$
force $[F] = MLT^{-2}$
presssion $[P] = ML^{-1}T^{-2} (= [F]/L^2)$
viscosité cinématique $[\nu] = L^2T^{-1}$
masse volumique $[\rho] = ML^{-3}$
viscosité dynamique $[\mu] = ML^{-1}T^{-1} (= [\rho][\nu])$
énergie $[E] = ML^2T^{-2}$
puissance $[P] = ML^2T^{-3}$

Théorème de Vaschy - Buckingham (théorème Π)

Vaschy (*Annales Télégraphiques*, 1892) & Buckingham (*Phys. Rev. Let.*, 1914)

Le théorème Π permet de connaître le nombre de nombres sans dimension Π_k indépendants dans un problème donné. On considère :

- n quantités dimensionnelles physiques a_i du problème considéré, incluant la variable d'intérêt a_1 (la traînée par exemple) : on suppose qu'il existe une relation implicite $\mathcal{F}(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ entre toutes ces variables
- r le rang de la matrice formée avec les exposants des dimensions de chaque variable a_i

$$\left[a_i\right] = L^{\alpha_i} T^{\beta_i} M^{\gamma_i} \Theta^{\delta_i}$$

paramètres adimensionnels :

$$\left[a_1\right]^{\lambda_1} \cdots \left[a_n\right]^{\lambda_n} = L^0 T^0 M^0 \Theta^0$$

Valeurs de $\lambda_1, ..., \lambda_n$?

$$\begin{array}{c|ccc} & [a_1] & \cdots & [a_n] \\ \hline L & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ T & \beta_1 & & \beta_n \\ M & \gamma_1 & & \gamma_n \\ \Theta & \delta_1 & \cdots & \delta_n \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

Vaschy - Buckingham theorem (suite)

Le problème peut être décrit par une loi sans dimension $\mathcal{F}_0$ (inconnue) impliquant $n-r$ paramètres sans dimension Π_k,

$$\Pi_1 = \mathcal{F}_0(\Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})$$

où Π_1 est le nombre sans dimensions associé à la quantité d'intérêt a_1. Lorsque $n-r=1$, alors $\Pi_1 = \text{cst}$.

Une formulation opérationnelle du théorème Π

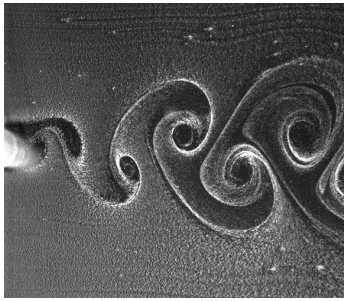
Pour un problème avec n variables et r dimensions pour ces variables, une loi physique impliquant $n-r$ paramètres sans dimension Π_k peut-être observée

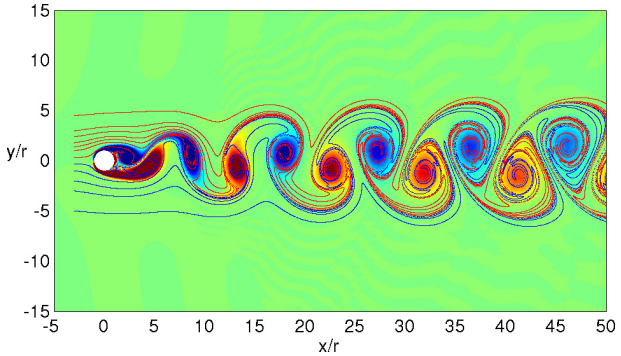
$$\Pi_1 = \mathcal{F}_0(\Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r})$$

Première application du théorème Π

Fréquence f du détachement tourbillonnaire derrière un cylindre

$\mathcal{F}(f, U_\infty, \rho, \mu, D) = 0 \qquad \Longrightarrow n = 5$





(vorticité $\omega_3 = \partial_{x_1} U_2 - \partial_{x_2} U_1$ superposée à des trajectoires de particules fluides)

	U_∞	ρ	μ	D	f
L	1	-3	-1	1	0
T	-1	0	-1	0	-1
M	0	1	1	0	0
Θ	0	0	0	0	0

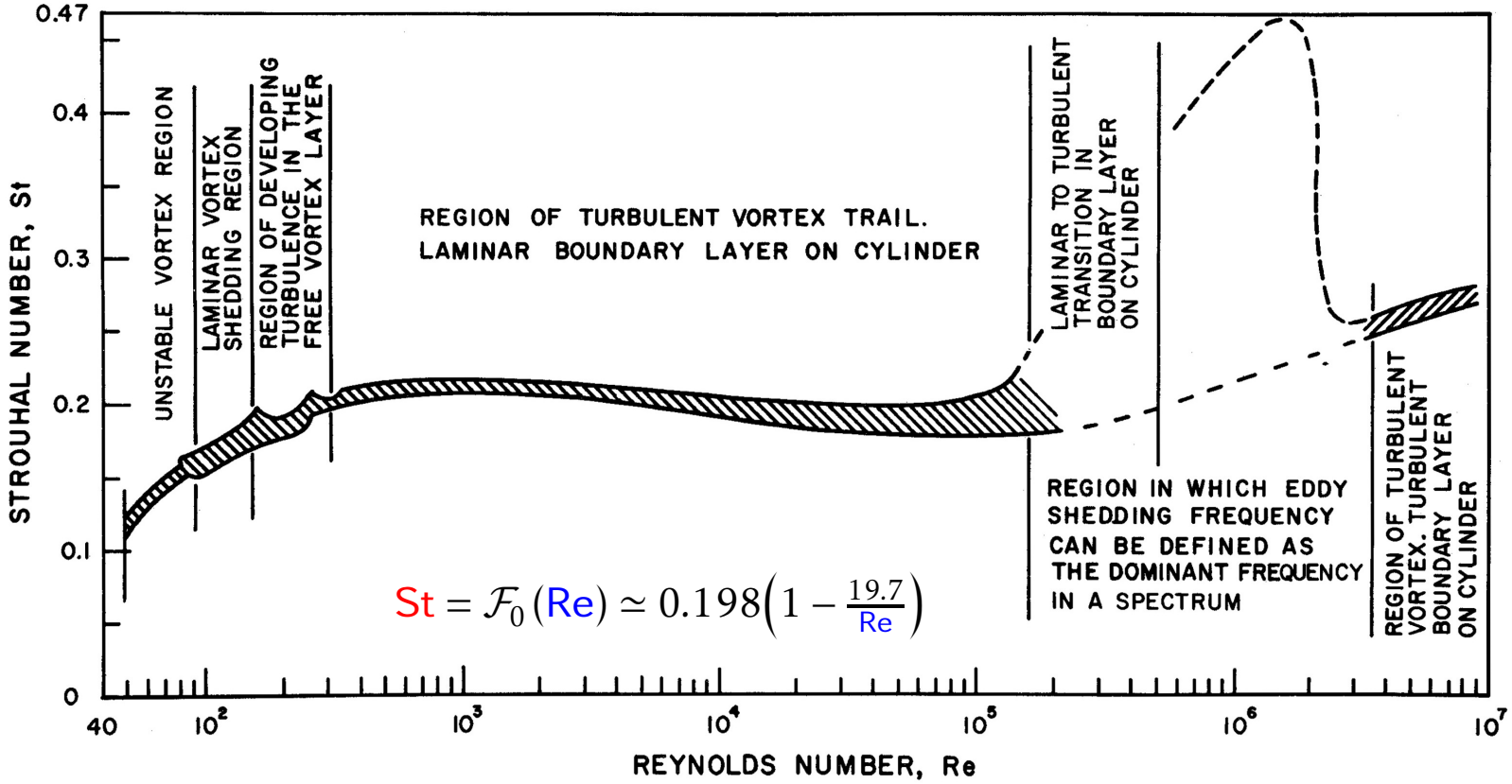
$\Longrightarrow r = 3$ (c4 = c3-c2-c1 ; c4+c5 = c1)

on peut construire $n - r = 2$ paramètres sans dimension Π_k

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{f D}{U_\infty} = \mathrm{St} \quad \text{nombre de Strouhal} \\ \Pi_2 &= \frac{\rho U_\infty D}{\mu} = \mathrm{Re} \quad \text{nombre de Reynolds} \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{St} = \mathcal{F}_0(\mathrm{Re})$$

La même valeur du nombre de Strouhal (fréquence adimensionnelle) sera observée dans deux expériences ou simulations possédant le même nombre de Reynolds Re

Première application du théorème Π (suite)



Lienhard (1966), Blevins (1990)

Simulation numérique de l'écoulement autour d'un cylindre à bas nombre de Reynolds Re $= 150$, $M_\infty \simeq 0.33$, $D = 2 \times 10^{-5}$ m

Définition et interprétation

U, L échelles caractéristiques de vitesse et de longueur de l'écoulement
ν viscosité cinématique du fluide

$\mathrm{Re} = \dfrac{UL}{\nu}$ Le nombre sans dimension le plus important en mécanique des fluides

En reprenant l'équation de Navier-Stokes (12)

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}}_{\sim \frac{U^2}{L}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \underbrace{\nu \nabla^2 \boldsymbol{U}}_{\sim \nu \frac{U}{L^2}} + \boldsymbol{g}$$

$$\frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} \sim \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re}$$

Interprétation (suite)

Le nombre de Reynolds représente une mesure du rapport des forces inertielles sur les viscous forces visqueuses pour un écoulement donné.

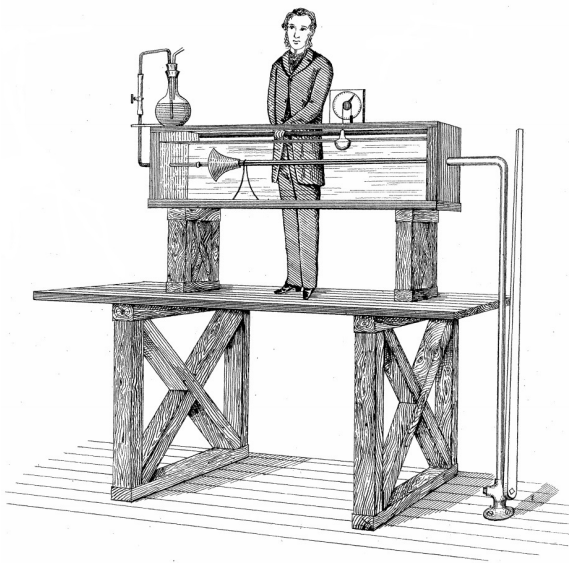
Re $\ll 1$: terme convectif négligeable, écoulement de Stokes or « rampant »
Re $\gg 1$: condition nécessaire pour appliquer un modèle non visqueux

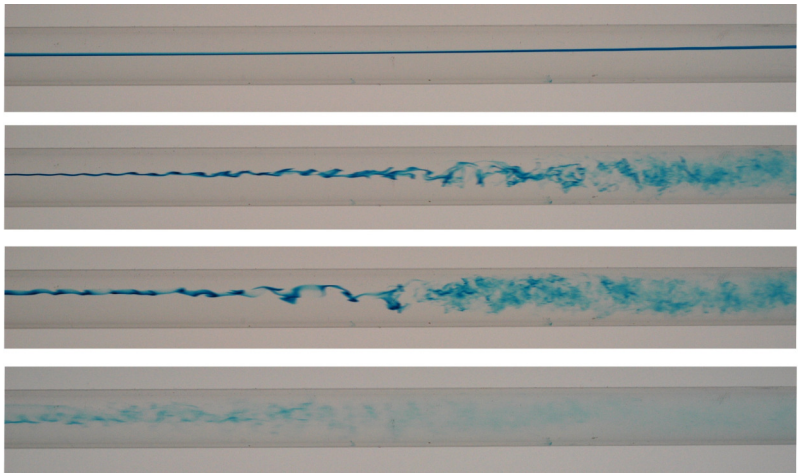
Le nombre de Reynolds peut aussi s'interpréter comme le rapport de deux temps caractéristiques

$$\mathrm{Re} = \frac{L^2/\nu}{L/U} \sim \frac{\text{temps visqueux}}{\text{temps convectif}}$$

Autrement dit, un temps visqueux petit $L^2/\nu \ll L/U$ correspond à des effets visqueux efficaces : une petite perturbation est amortie durant sa convection, et l'écoulement reste ainsi laminaire

Expérience de Reynolds : régime laminaire versus turbulent

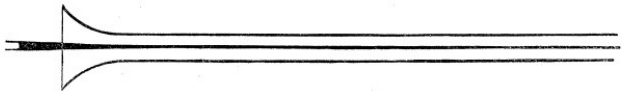




The general results were as follows :—

(1.) When the velocities were sufficiently low, the streak of colour extended in a beautiful straight line through the tube, fig. 3.

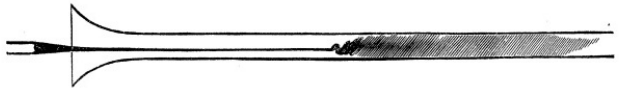
Fig. 3.



(2.) If the water in the tank had not quite settled to rest, at sufficiently low velocities, the streak would shift about the tube, but there was no appearance of sinuosity.

(3.) As the velocity was increased by small stages, at some point in the tube, always at a considerable distance from the trumpet or intake, the colour band would all at once mix up with the surrounding water, and fill the rest of the tube with a mass of coloured water, as in fig. 4.

Fig. 4.



Any increase in the velocity caused the point of break down to approach the trumpet, but with no velocities that were tried did it reach this.

On viewing the tube by the light of an electric spark, the mass of colour resolved itself into a mass of more or less distinct curls, showing eddies, as in fig. 5.

Fig. 5.

Reynolds, O., 1883, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **174**, 935-982
Osborne Reynolds (1842-1912)

Équation de Navier-Stokes adimensionnée

$$\tilde{U}_i = \frac{U_i}{U_\infty} \qquad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U_\infty^2} \qquad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \qquad \boxed{\tilde{t} = \frac{t}{L/U_\infty}}$$

(le temps t est ici normalisé par par l'échelle de temps convectif)

L'équation de Navier-Stokes s'écrit

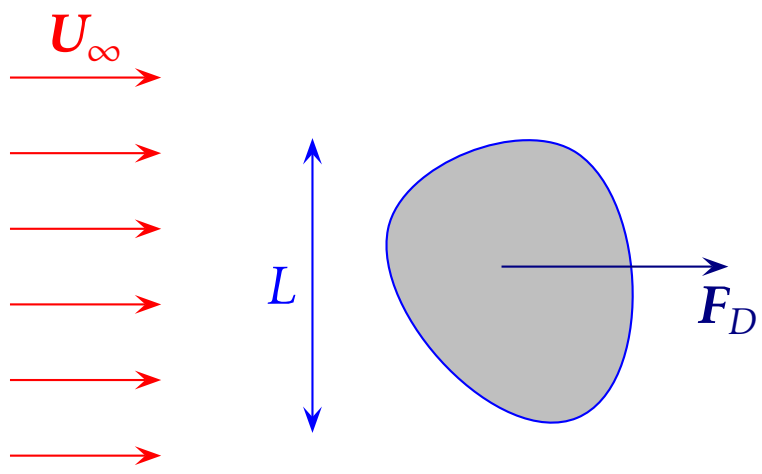
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\boldsymbol{U}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\boldsymbol{U}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\boldsymbol{U}} \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{U}} = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

avec les condtions aux limites

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{U}} = 0 \ \text{ sur la surface d'un obstacle} \\ \tilde{\boldsymbol{U}} \to (1,0,0) \ \text{ loin de l'obstacle} \end{cases}$$

L'écoulement pleinement développé (lorsque les conditions initiales sont oubliées) est une fonction du nombre de Reynolds Re seulement

Force de traînée F_D exercée par un écoulement sur un obstacle



$n = 5$ paramètres $F_D, \mu, \rho, U_\infty, L$

	F_D	μ	ρ	U_∞	L
L	1	−1	−3	1	1
T	−2	−1	0	−1	0
M	1	1	1	0	0
Θ	0	0	0	0	0

$(c_1 = c_2 + c_4 + c_5\,;\, c_2 = c_3 + c_4 - 2c_5)$

$n - r = 2 \Longrightarrow 2$ paramètres à construire

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{q_\infty S} = C_D \qquad q_\infty \equiv \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$$

(pression dynamique, voir le tube de Pitot)

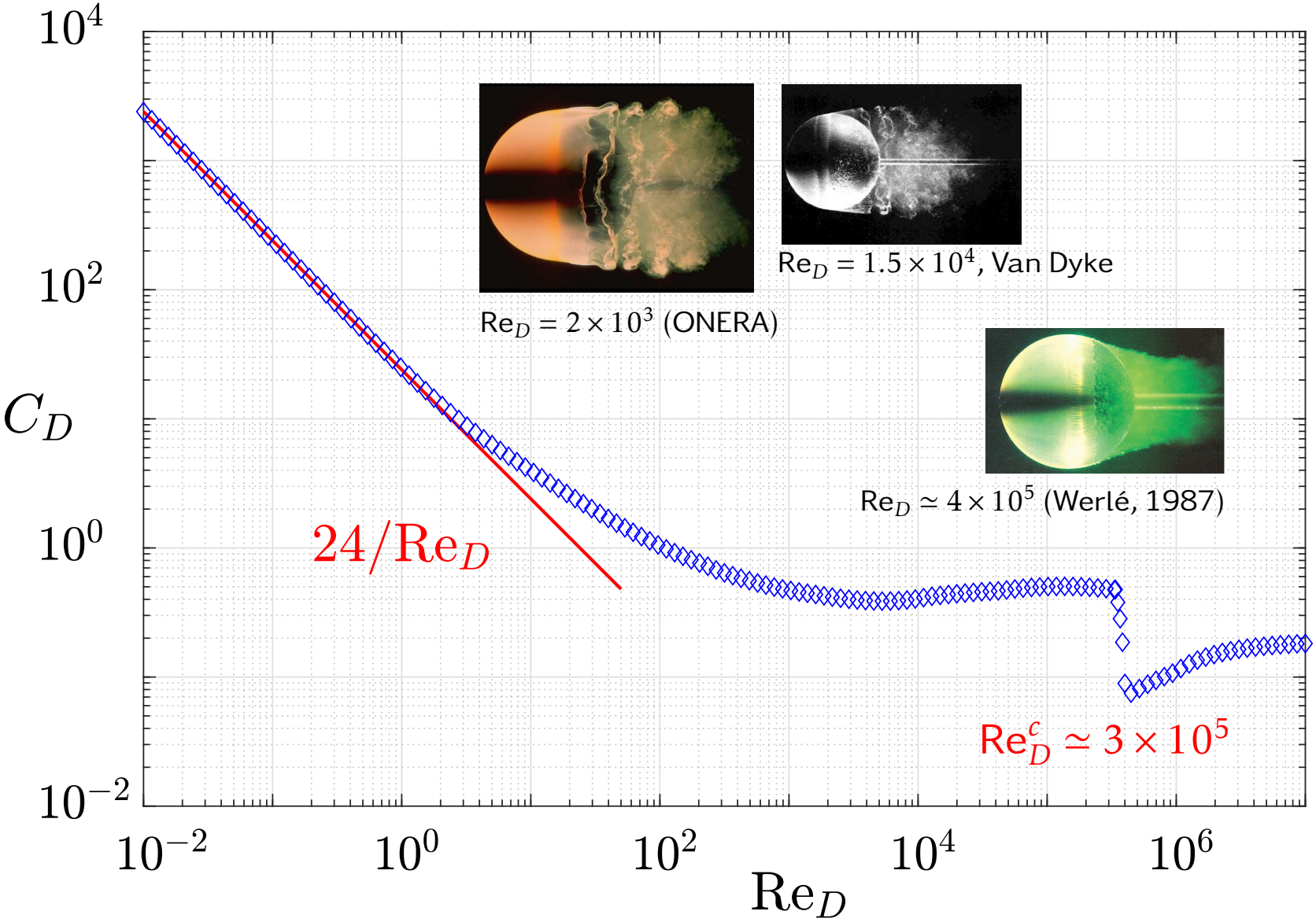
$$S \propto L^2$$

$$\Pi_2 = \frac{\rho U_\infty L}{\mu} = \mathrm{Re}$$

$$\boxed{C_D = C_D(\mathrm{Re})}$$

coefficient de traînée

- **Coefficient de traînée pour une sphère lisse** (diamètre D, $S = \pi D^2/4$, voir Ch. 4)



Maquette et nombre de Reynolds

pleine échelle $\mathrm{Re}' = \dfrac{\rho'_\infty U'_\infty c'}{\mu'_\infty}$ maquette $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho_\infty U_\infty c}{\mu_\infty}$

En aéronautique, $U_\infty \simeq U'_\infty$ (plus exactement le nombre de Mach), mais la corde c est plus petite que c' : comment alors augmenter Re en soufflerie pour atteindre Re′, et mesurer correctement $C_D = C_D(\mathrm{Re}')$

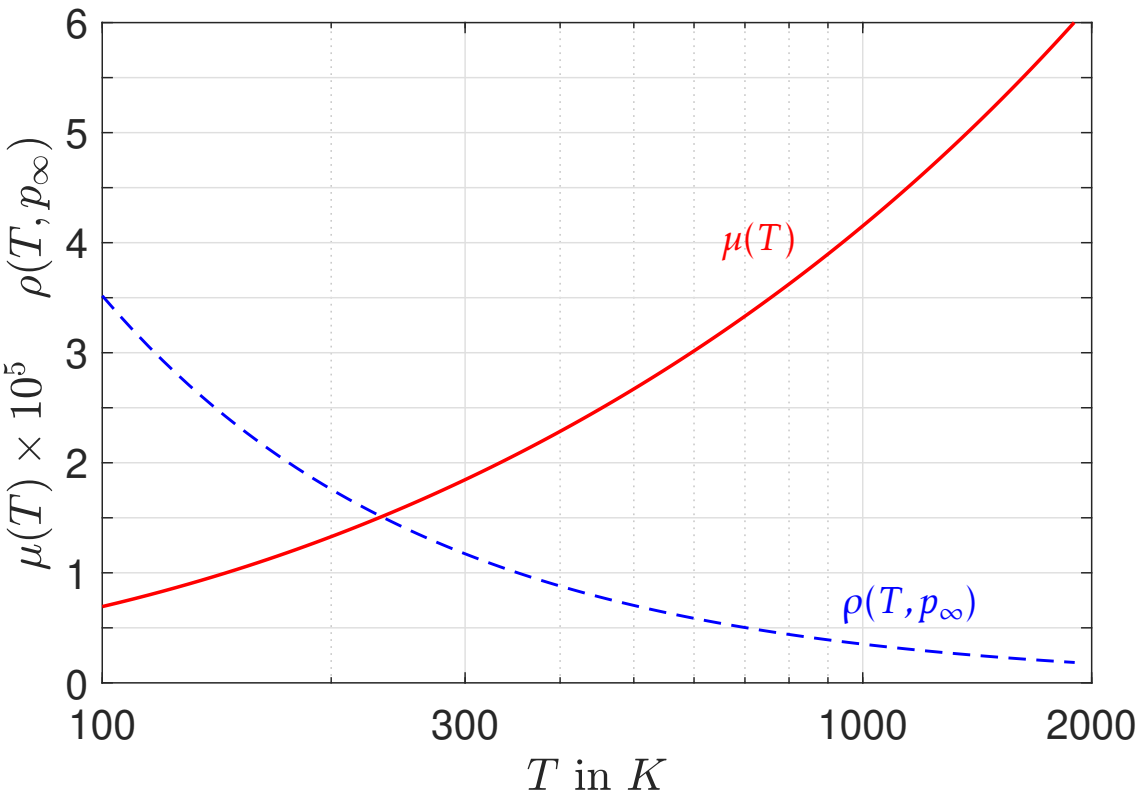
Deux grandes techniques pour un écoulement de gaz parfait, en se rappelant que :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty U_\infty c}{\mu_\infty} \qquad \rho_\infty = \frac{p_\infty}{rT_\infty} \qquad q_\infty \equiv \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 = \frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2$$

$p_\infty \nearrow$ soufflerie pressurisée (on induit cependant des contraintes mécaniques avec l'augmentation de la pression dynamique q_∞), voir le cas du *Superpipe* au transparent 127 !

$T_\infty \searrow$ soufflerie cryogénique ($\mu_\infty \searrow$ $\rho_\infty \nearrow$)

- **Gros plan sur la viscosité dynamique μ pour un gaz parfait**



Loi de Sutherland (1893)

$$\mu(T) \simeq \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}$$

Air

$T_0 = 273$ K $\quad T_s = 111$ K

$\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5}$ kg/(m.s)

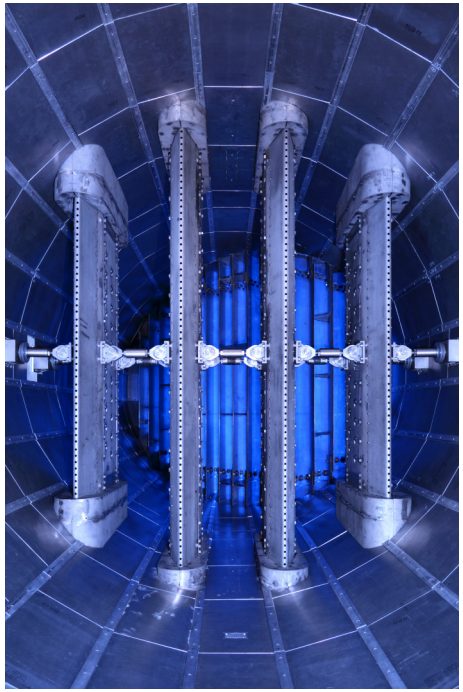
White (1988)

Pour des gaz usuels, $\mu = \mu(T)$ mais la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho = \nu(p, T)$

Air à $T = 20°$ C et $p_\infty = 1$ bar, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}

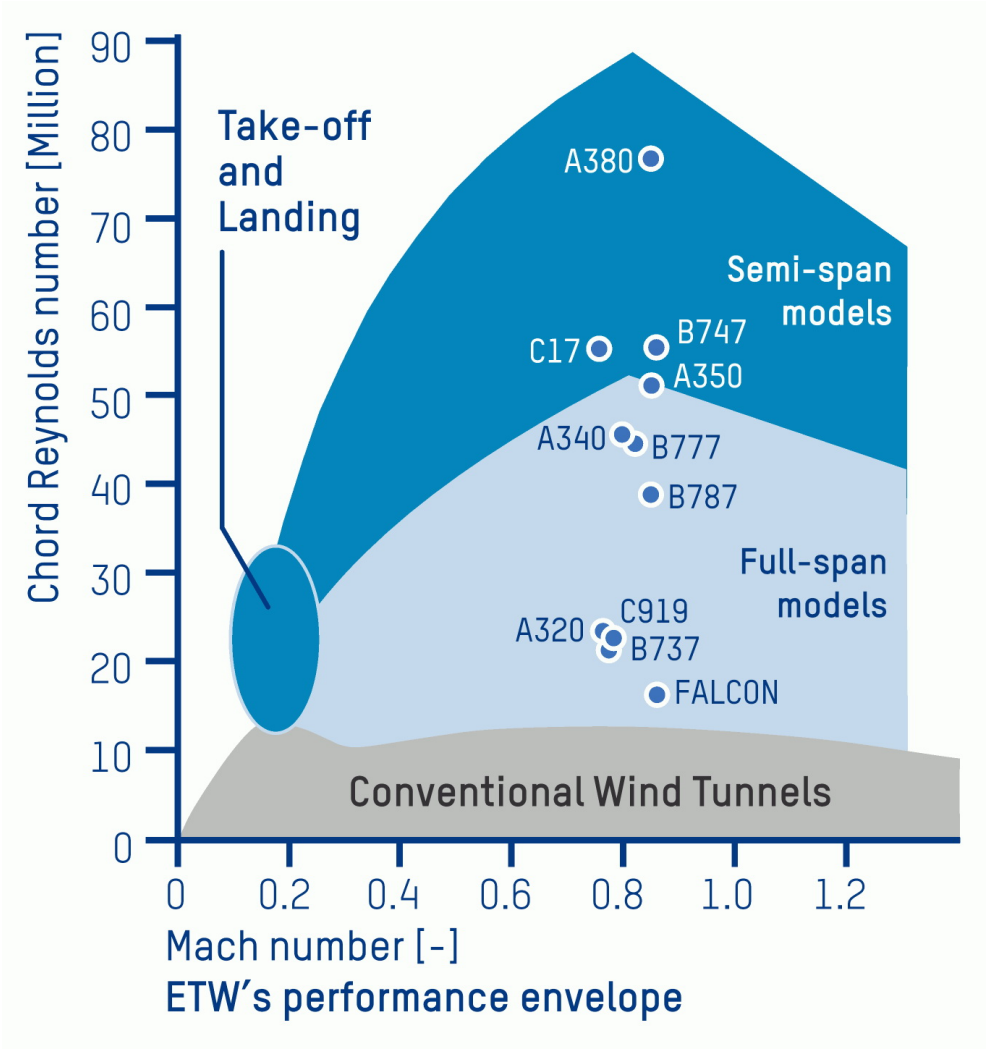
(Pour mémoire, $\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1} pour l'eau)

European Transonic Windtunnel (ETW, Cologne, Germany)



LN2 Injection Rakes

A340



Section test : 2.4 m × 2.0 m ; longueur 9 m
nombre de Mach : 0.15 - 1.3
Pression : 1.25 - 4.5 bar
Température : 110 - 313 K

http://www.etw.de/

Traînée de la coque d'un bateau

Porte-avions USS John F. Kennedy accompagné de 2 destroyers

Canards nageant sur un lac (même angle $\simeq 39^o$ pour le sillage!)

Variables F_D, μ, ρ, U_∞, L, g

	F_D	μ	ρ	U_∞	L	g
L	1	−1	−3	1	1	1
T	−2	−1	0	−1	0	−2
M	1	1	1	0	0	0
Θ	0	0	0	0	0	0

$(c_1 = c_2 + c_4 + c_5\,;\, c_3 = c_2 - c_4 - 2c_5\,;\, c_6 = 2c_4 - c_5)$

$n - r = 6 - 3 = 3$ paramètres adimensionnels

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} = C_D \qquad \text{(S = aire surf. mouillée)}$$

$$\Pi_2 = \mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}$$

$$\Pi_3 = \mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \qquad \text{nombre de Froude}$$

Traînée de la coque d'un bateau (suite)

La traînée est induite par les ondes de gravité de surface (vagues) et par le frottement visqueux classique le long de la coque, $C_D = C_D(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr})$. Il n'est pas possible de préserver la similitude à la fois pour les nombres de Reynolds et de Froude dans les expériences.

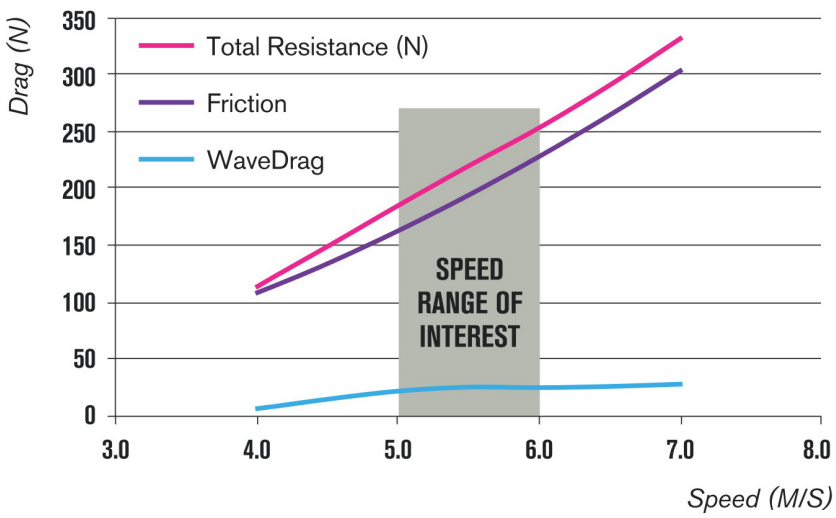
Hypothèse de Froude $C_D \simeq C_F(\mathrm{Re}) + C_R(\mathrm{Fr})$
en notant que la traînée de frottement C_F et la traînée résiduaire (ondes de surfaces) C_R sont induites par deux physiques distinctes

- Pour les essais sur maquette, la vitesse et la taille de cette maquette sont imposées par le nombre de Froude (conservé) : la traînée totale C_D est mesurée, et de la connaissance la loi dimensionnelle classique pour C_F avec $\mathrm{Re}_{\mathrm{maquette}}$, on calcule la traînée résiduelle C_R.
- Pour le bateau à échelle un, la traînée résiduaire C_R est connue des expériences précédentes (Fr conservé), et de nouveau la traînée de frottement est calculée en fonction du nombre de Reynolds nominal

Embarcation d'aviron

Pourquoi les bateaux plus grands, qui comptent plus de rameurs, devraient-ils aller plus vite que les bateaux plus petits, qui comptent moins de rameurs ?

(McMahon, T.A., *Sciences*, 1971, **173**, 349-351)



4 personnes (aviron de couple), 88% de la traînée est due au frottement sur la surface mouillée (Killing, S., 2017, *Row360*, **009**, 1-4)

Rowing From Above

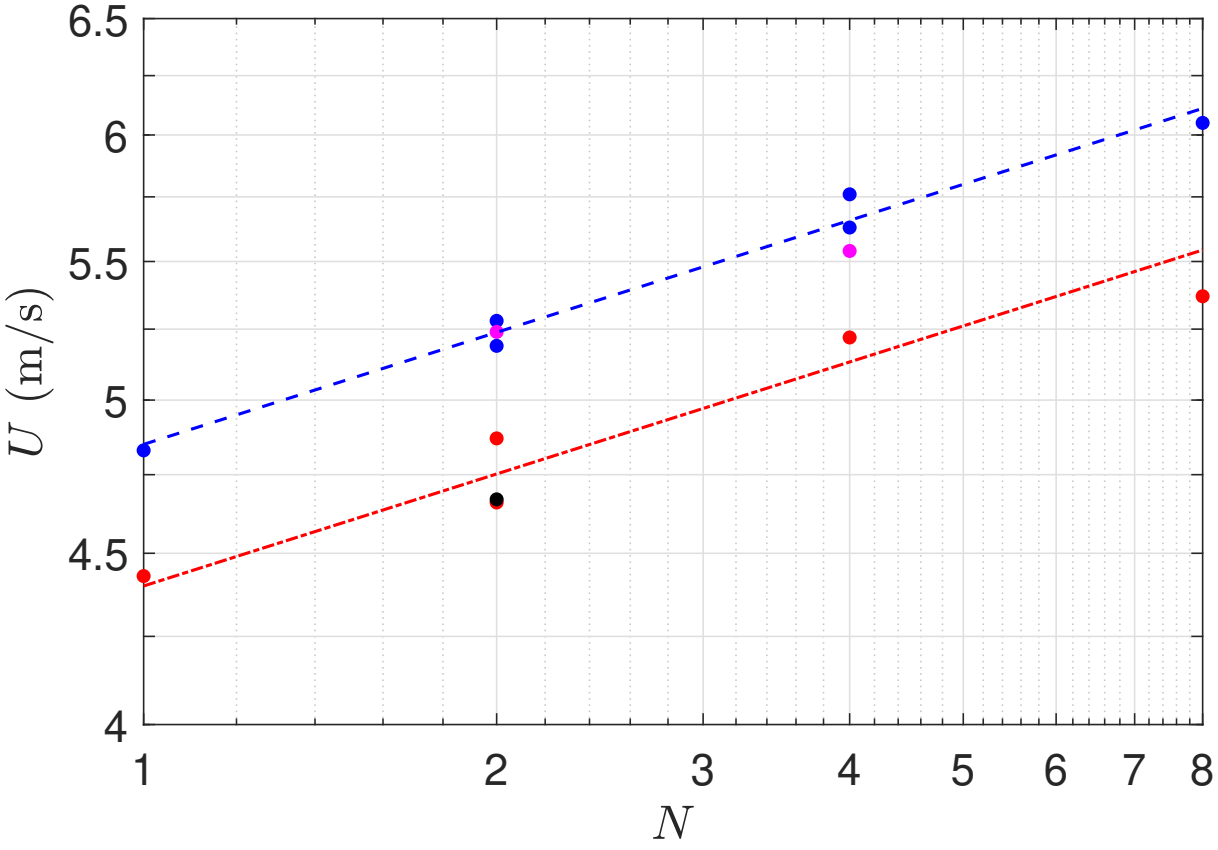
N rameurs identique (puissance P, poids), similarité géométrique entre les embarcations ; la traînée est dominée par le frottement $C_D \simeq C_F(\mathrm{Re})$ pour un bateau profilé, et la valeur du nombre de Reynolds ne change pas avec le nombre de rameurs

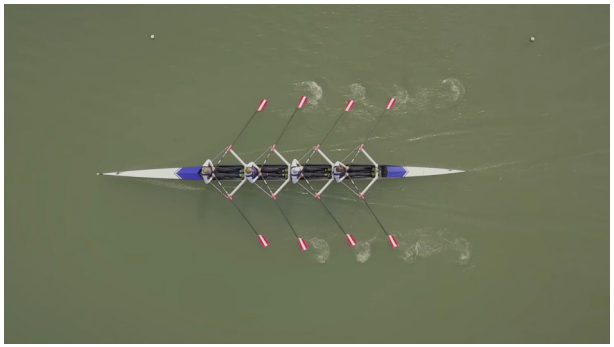
$$\text{puissance} \propto C_F \frac{1}{2}\rho U^2 S \times U \propto N \times P$$

Le volume submergé est $\mathcal{V} \sim N$, ce qui conduit à $S \sim N^{2/3}$ pour la surface mouillée

On obtient finalement $U \sim N^{1/9}$

Embarcation d'aviron (suite)



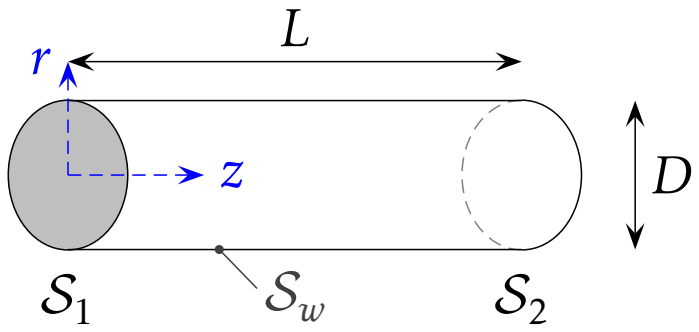


Rowing From Above

Données – Lucerne 2010 A-finals (Sunday 11 July 2010)
http://sanderroosendaal.wordpress.com/

Écoulement de Poiseuille

On revisite le cas d'un écoulement laminaire établi dans une conduite circulaire, avec l'objectif ici de construire un modèle 1-D, voir l'éq. (17), à partir de la solution analytique



Coordonnées cylindriques (r, θ, z)
$\boldsymbol{U} = (0, 0, U(r)) \quad \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$

Conservation de la masse, $Q_{v2} = Q_{v1} = Q_v$ (débit volumique $\sim$ m^3.s^{-1})

Éq. de Navier-Stokes (force de gravité négligée, conduite horizontale)

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dU}{dr}\right) \end{cases}$$

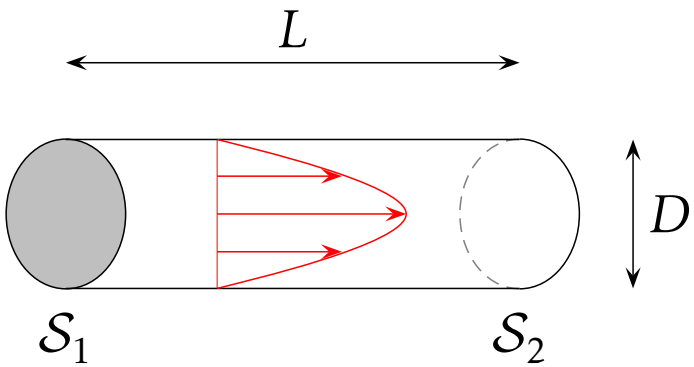
Écoulement de Poiseuille (suite)

On déduit de l'équation de Navier-Stokes que

$$p = p(z) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\frac{dp}{dz}}_{\text{fct of } z} = \underbrace{\mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)}_{\text{fct of } r} = \text{cst} \equiv G$$

En intégrant alors deux fois avec les conditions aux limites appropriées,

$$U(r) = -\frac{GR^2}{4\mu}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = U_0\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$



$\rightsquigarrow$ profil de vitesse parabolique pour $U(r)$

et $p = Gz$, p décroît linéairement avec z ($G < 0$ if $U_0 \geq 0$)
La chute de pression est associée au frottement visqueux (voir planche 92)

Écoulement de Poiseuille (suite)

Vitesse de débit U_d

$$U_d \equiv \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R U(r) 2\pi r dr = \frac{U_0}{2}$$

Contrainte pariétale (de cisaillement) τ_w

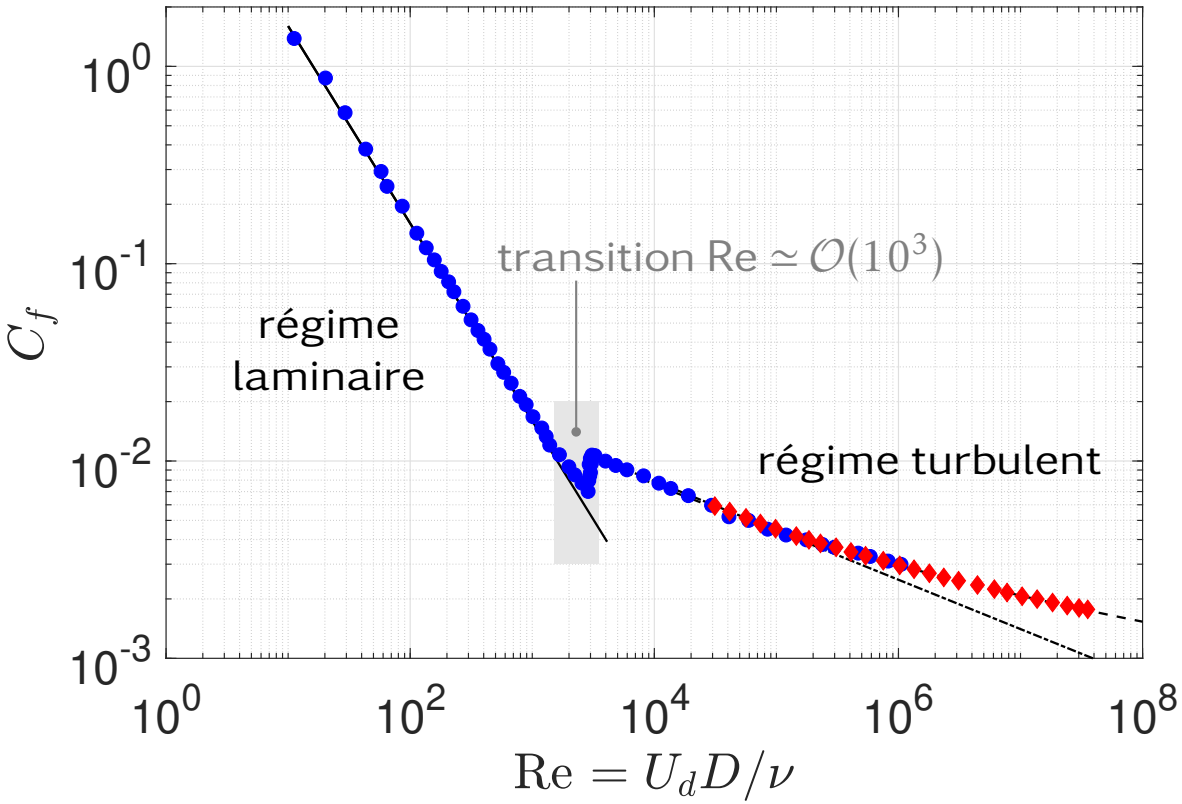
$$\tau_w = \tau_{zr}(r = R) = -2\mu \frac{U_0}{R}$$

Coefficient de frottement local C_f ($\propto C_D$)

$$C_f \equiv \frac{|\tau_w|}{\rho U_d^2/2} = \frac{16}{\mathrm{Re}_D} \qquad \mathrm{Re}_D \equiv \frac{U_d D}{\nu}$$

L'indice D indique que le nombre Reynolds Re_D est construit en prenant D comme échelle de longueur

- **Coefficient de frottement $C_f = \tau_w/(\rho U_d^2/2)$ pour une conduite circulaire**



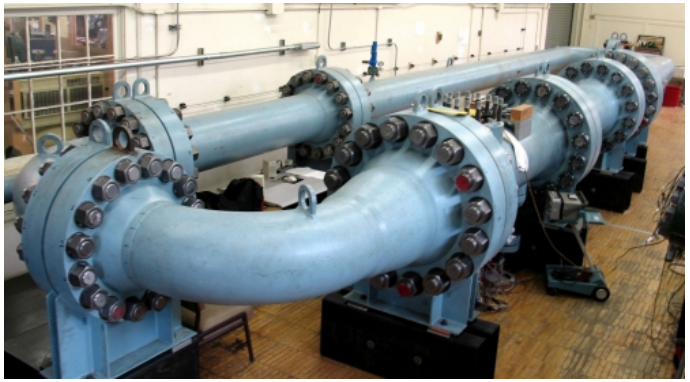
— régime laminaire $C_f = 16/\mathrm{Re}$

-·-·- relation de Blasius, $C_f \simeq 0.0791\,\mathrm{Re}^{-1/4}$

- - - $1/C_f^{1/2} \simeq 3.860 \log_{10}(\mathrm{Re}\, C_f^{1/2}) - 0.088$

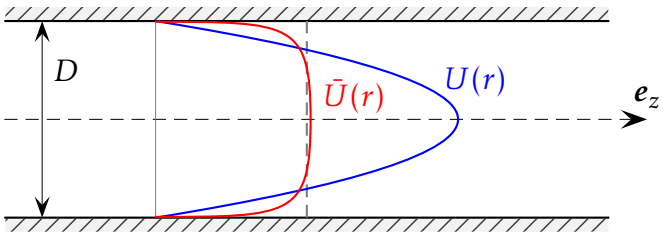
● Oregon facility

♦ Princeton *Superpipe*



McKeon *et al.* (2004) - *Superpipe*, le nombre de Reynolds est augmenté au moyen de la pression

Régime laminaire versus turbulent



Écoulement de Poiseuille (suite)

Jean-Léonard-Marie Poiseuille (1797-1869)

Physicien et médecin, il s'intéressait à la circulation sanguine dans les petits vaisseaux

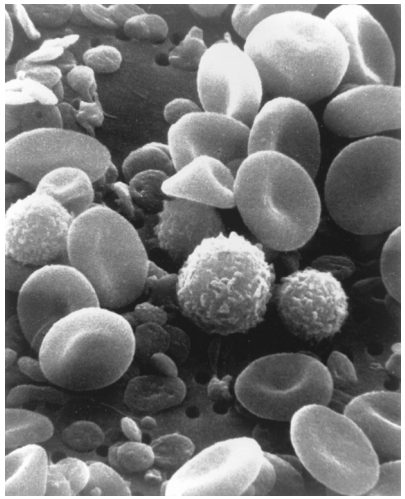
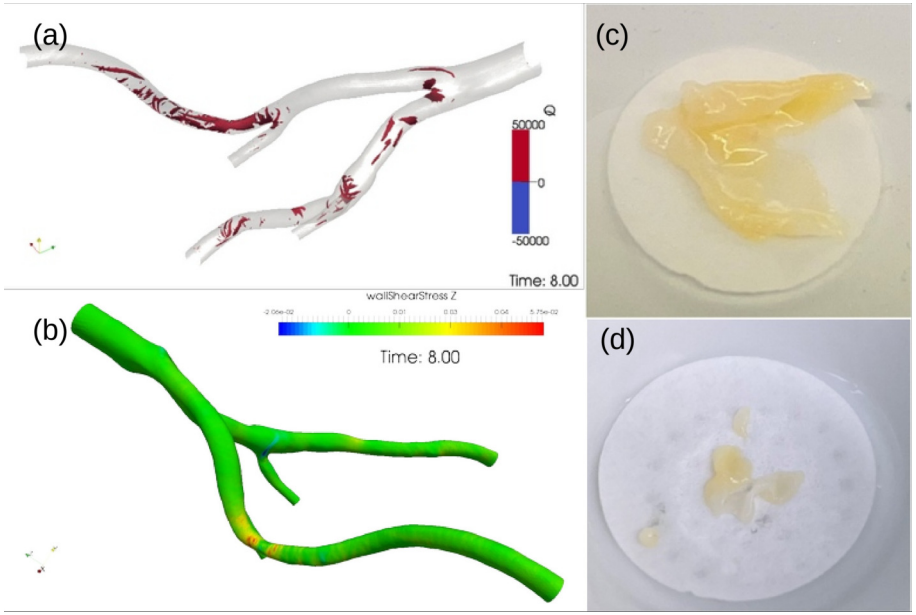


Image au microscope électronique à balayage de cellules sanguines

Les écoulements hémodynamiques sont toujours un sujet de recherche en mécanique des fluides (en particulier pour le LMFA !)



Endofibrose de l'artère iliaque : structures tourbillonnaires (a) et contraintes pariétales (b) accrue au niveau de la sténose. Traitement acoustique des tissus fibreux, avant (c) et après (d)
(extrait du rapport Hcéres du LMFA, juin 2025)

- **Modèle 1-D de l'écoulement de Poiseuille**
  (on s'appuie sur le bilan d'énergie d'un système à flux continue, voir planche 96)

$$\int_{\mathcal{S}_1} \mathcal{H}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \equiv H_1 Q_v$$

avec $\mathcal{H} \equiv p + \frac{1}{2}\rho U^2$ (local)

$$Q_v(H_1 - H_2) = \mathcal{D}_v$$

qui traduit la conversion de l'énergie mécanique en chaleur *via* les frottements visqueux

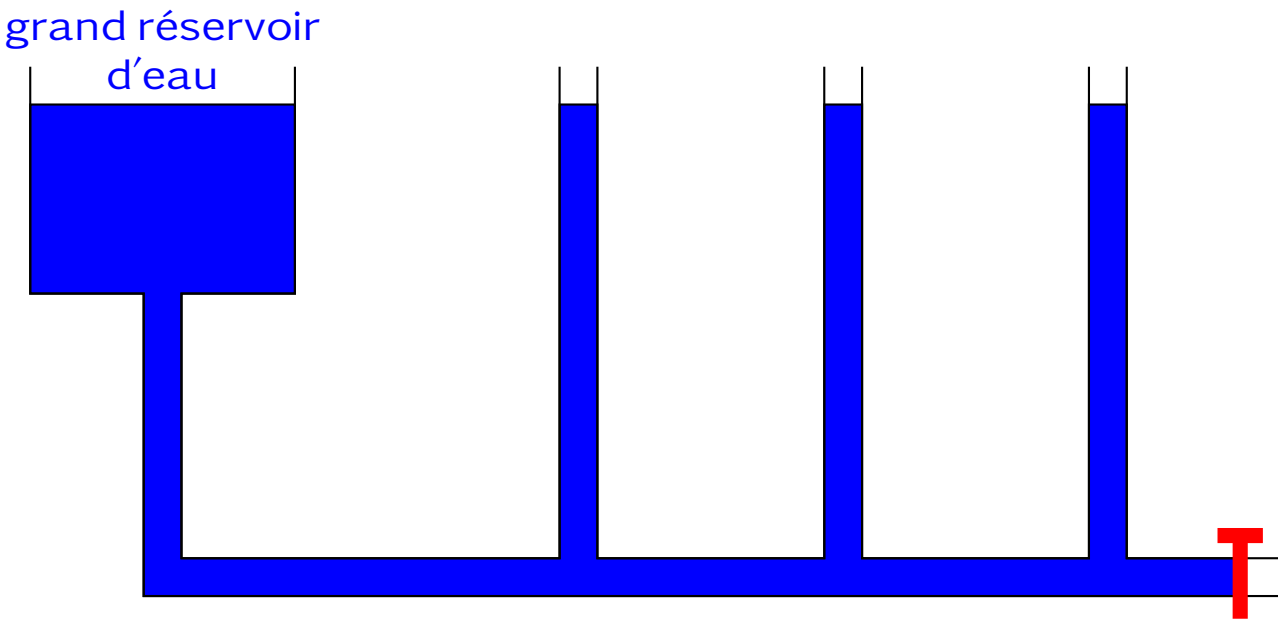
Modèle 1-D pour la perte de charge, en observant que seulement la pression p contribue aux variations de H

$$\Delta H = [H]_2^1 = [p]_2^1 = \underbrace{-GL = \frac{4\mu U_0}{R^2}L}_{\text{Poiseuille}} = \underbrace{\frac{64}{\mathrm{Re}_D}}_{\psi(\mathrm{Re}_D)} \frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho U_d^2$$

Plus généralement, on met les lois de perte de charge sous la forme :

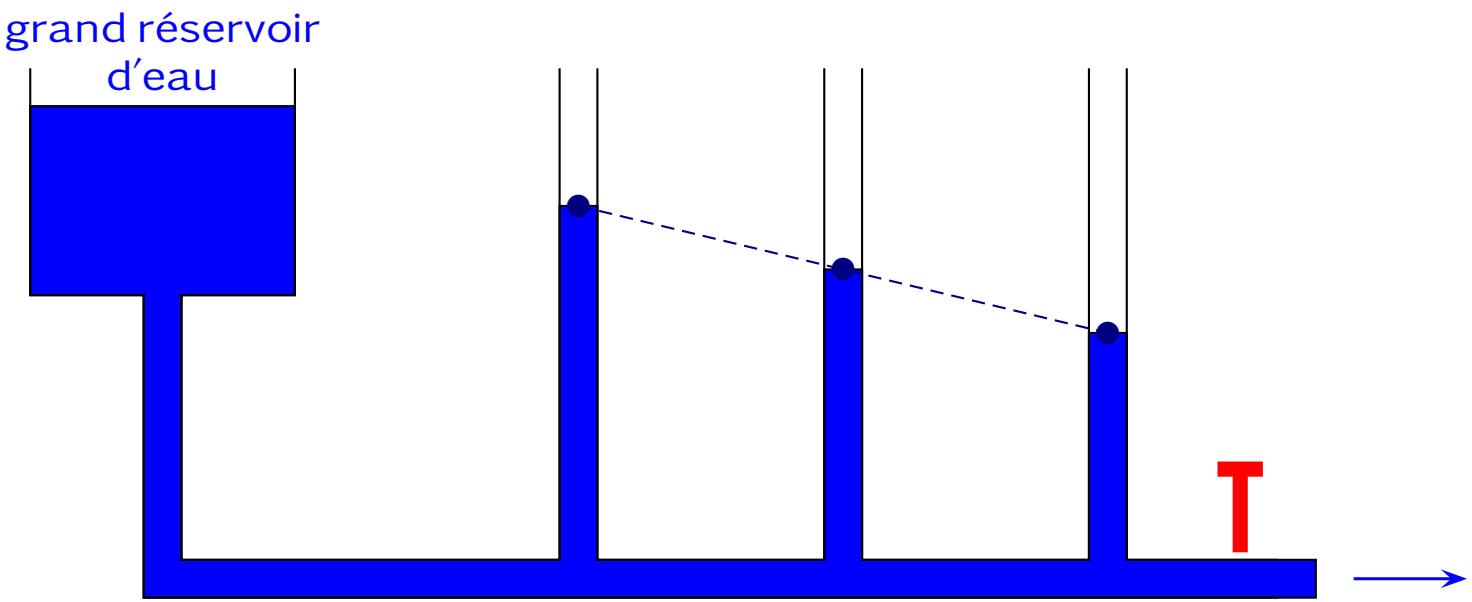
$$\Delta H = \psi(\mathrm{Re}_D)\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho U_d^2 \qquad \psi(\mathrm{Re}_D) = \frac{64}{\mathrm{Re}_D} \text{ pour l'écoulement de Poiseuille}$$

- **Quiz rapide !**



Quelle est la hauteur d'eau dans chaque tube ouvert lorsque la vanne est ouverte ? (tiré de la formation des pompiers)

Quiz rapide (suite)



Très bonne illustration de la chute linéaire de la perte de charge dans un tuyau,

$$\Delta H = [\Delta p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}]_2^1 = \psi(\mathrm{Re}) \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho U_d^2$$

- Formulation opérationnelle du théorème Π (on passe rarement par la formulation matricielle)
- Expression de quelques nombres adimensionnels classiques et de leur interprétation : nombre de Reynolds, de Strouhal, de Froude, coefficients de portance et de traînée
- Écoulement de Poiseuille et sa modélisation 1-D

Pour en savoir plus (sur moodle)

Macagno, E.O., 1971, Historico-critical review of dimensional analysis, *Journal of the Franklin Institute*, **292**(6), 391-402

Boster, D., Hershberger, R.E. & Donnelly, R.J., 2011, Dynamic similarity, the dimensionless science, *Physics Today*, **64**(9), 42-47

Rayleigh, 1915, The principle of similitude, *Nature*, **2368**, Vol. 85, 66-68

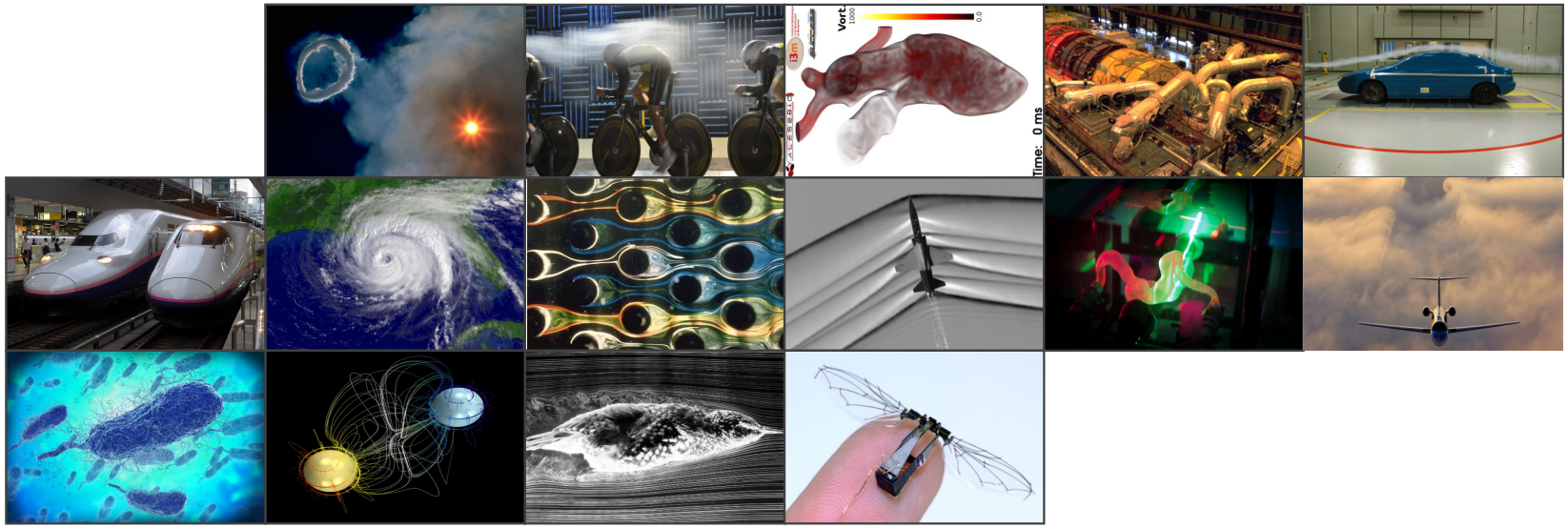
Green, J. & Quest, J., 2011, A short history of the European Transonic Wind Tunnel ETW, *Prog. Aero Sci.*, **47**, 319-368

La maquette peut-être quelques fois plus grande que l'objet à l'échelle un : drones insectes volants

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds



4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds

Écoulement à bas nombre de Reynolds

- Nombre de Reynolds
- Écoulement de Stokes
- Stokes force
- Drag coefficient for a sphere

Écoulement à haut nombre de Reynolds

- Introduction
- Concept de couche limite
- Corps profilé
- Corps non profilé
- Crise de traînée
- Applications

Couche limite laminaire

- Écoulements minces
- Équations de Prandtl
- Rôle du gradient de pression
- Solution de Blasius

À retenir

Nombre de Reynolds

On rappelle l'équation de Navier-Stokes, voir l'éq. (12), qui s'écrit

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U}$$

$$\sim \frac{U^2}{L} \qquad \sim \nu \frac{U}{L^2} \qquad \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} \sim \frac{UL}{\nu} = \mathrm{Re}_L$$

U, L vitesse et longueur caractéristiques de l'écoulement
ν viscosité cinématique du fluide

Le terme convectif peut donc être négligé lorsque $\mathrm{Re}_L \ll 1$

Écoulement de Stokes ($\mathrm{Re}_L \ll 1$)

Pour adimensionnaliser l'éq. de Navier-Stokes, on privilégie comme temps caractéristique le temps de diffusion visqueux L^2/ν, contrairement à ce que l'on a choisit au transparent 114 du chapitre précédent (qui ne permet pas de prendre la limite $\mathrm{Re} \to \infty$ par ailleurs)

$$\tilde{U}_i = \frac{U_i}{U_\infty} \qquad \boxed{\tilde{t} = \frac{t}{L^2/\nu}} \qquad \tilde{p} = \frac{p}{\mu U_\infty/L} = \frac{p}{\rho U_\infty^2}\frac{\rho U_\infty L}{\mu} \qquad \mathrm{Re}_L = \frac{\rho L U_\infty}{\mu}$$

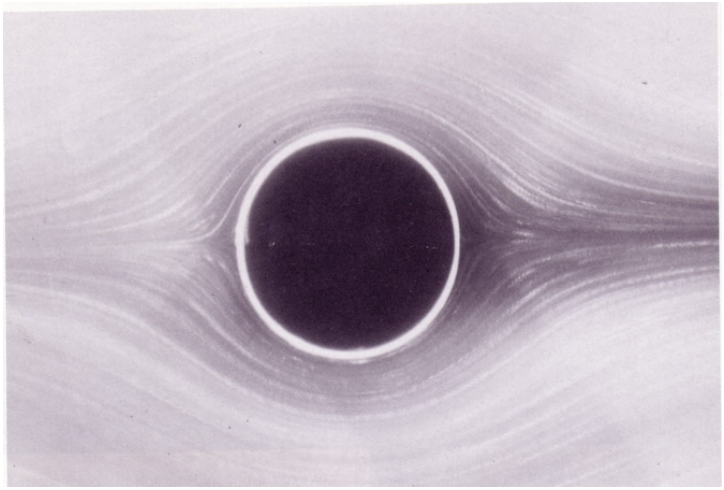
$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial \tilde{t}} + \mathrm{Re}_L\, \tilde{\boldsymbol{U}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{U}} = -\tilde{\nabla}\tilde{p} + \tilde{\nabla}^2\tilde{\boldsymbol{U}}$$

Pour des bas nombres de Reynolds, le terme $\mathrm{Re}_L\, \tilde{\boldsymbol{U}} \cdot \tilde{\nabla}\tilde{\boldsymbol{U}} \ll 1$ est supposé rester petit (doit être vérifié une fois la solution approchée déterminée, condition très restrictive en pratique) : on parle d'écoulement rampant ou de Stokes

Écoulement de Stokes (suite)

Éqs. à résoudre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$

complétées par des conditions initiales et des conditions aux limites. Dans certains cas, l'écoulement pleinement développé peut atteindre un état stationnaire lorsque $t \to \infty$.



Écoulement amont uniforme à U_∞ autour d'un cylindre circulaire de diamètre D, $\mathrm{Re}_D = 0.16$

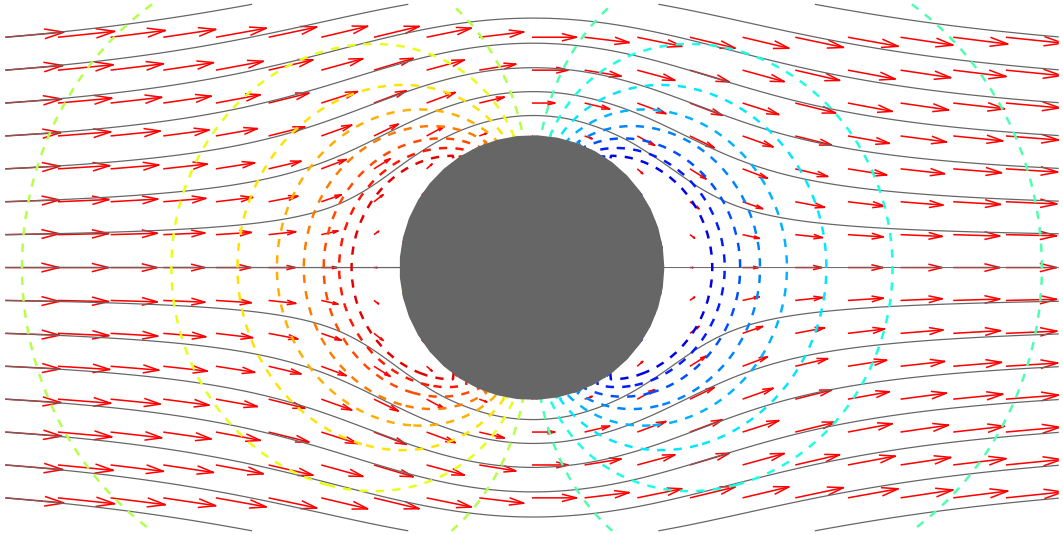
Visualisation des lignes de courant avec un écoulement en eau contenant des particules d'aluminium (S. Taneda ; fig. 6 dans Van Dyke, 1982)

On illustre ici le caractère rampant de l'écoulement qui ne se détache pas du cylindre en aval

Écoulement de Stokes stationnaire

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \boldsymbol{U} = \nabla p \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \quad + \text{ conditions aux limites 3-D (stationnaires)}$$

Problème mathématique et physique bien plus simple à résoudre que le cas à haut nombre de Reynolds (faire attention aux limites des modèles 2-D)

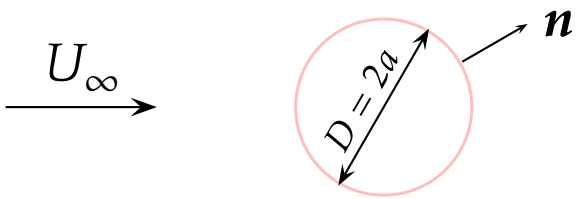


Écoulement de Stokes autour d'une sphère : solution analytique 3-D de Stokes (1851)

champ de vitesse (flèches rouges), lignes de courant (en gris) et iso-contours de la pression (du bleu – au rouge + ; pression plus élevée à l'amont et plus faible à l'arrière)

Coefficient de traînée pour une sphère lisse

$$\boldsymbol{F}_{\text{éclt} \to \text{sphère}} = \int_S -p\boldsymbol{n}\, ds + \int_S \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$



force de traînée $F_D = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_x$
= traînée de forme (pression) + traînée de frottement

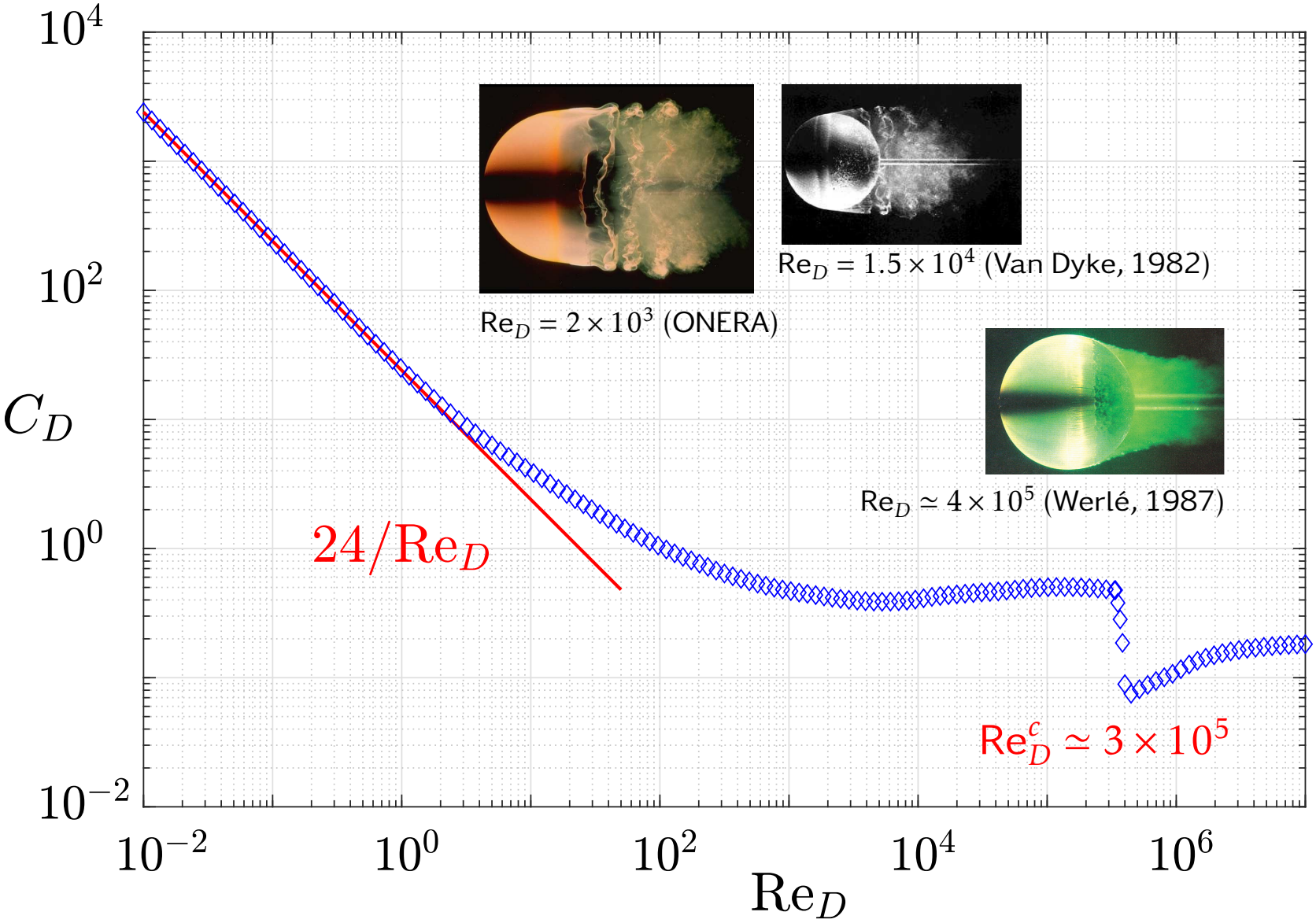
- Pour des petits nombres de Reynolds, $\text{Re}_D = U_\infty D/\nu < 1$, la force de traînée ou de Stokes se calcule comme $F_D = 6\pi\mu a U_\infty$ avec $D = 2a$ et $6\pi = 2\pi + 4\pi$, 2π dû la différence de pression entre l'avant et l'arrière

Coefficient de traînée $C_D = C_D(\text{Re}_D)$

$$C_D \equiv \frac{F_D}{\rho U_\infty^2/2 \times S} = \frac{6\pi\mu a U_\infty}{\rho U_\infty^2/2 \times \pi a^2} = \frac{24}{\rho U_\infty D/\mu} = \frac{24}{\text{Re}_D}$$

Coefficient de traînée pour une sphère lisse

(adapté de Clift, Grace, & Weber, 1978)



Applications de la force de Stokes

Justifié pour des petites particules (dispersion de particules en suspension) ou les écoulements à haute viscosité (écoulement d'un glacier)

- Ensemencement de particules pour les mesures optiques en mécanique des fluides :

  gouttes d'huile d'olive
  $\rho = 970$ kg.m^{-3}, $\nu = 1.5 \times 10^{-5}$ m^2.s^{-1}, $d_p = 1.5$ μm

  traînée donnée par la force de Stokes, applicable si
  Re $= U_\infty d_p/\nu \leq 1 \Longrightarrow U_\infty < 9.7$ m.s^{-1}

- Célèbre expérience de Millikan (1913) avec des gouttes d'huile électrisées pour mesurer la charge élémentaire $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C d'un électron.

  Pour en savoir plus, sur moodle :
  Perry, M.F., 2007, Remembering the oil-drop experiment, *Phys. Today*, **56**(5)

Introduction

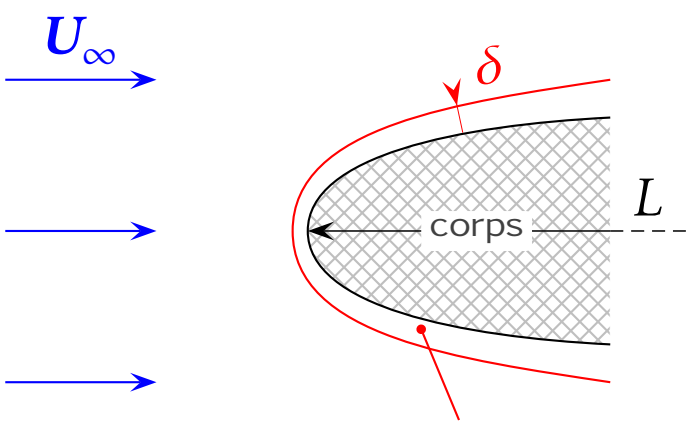
Le terme visqueux est maintenant supposé petit par rapport au terme convectif non linéaire dominant, la variation de pression est proportionnelle à ρU^2, et le modèle non visqueux déjà introduit au premier chapitre peut-être appliqué

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$

Équations d'Euler

L'hypothèse d'un haut nombre de Reynolds Re $\gg 1$ est associée à une vue globale de l'écoulement avec un nombre de Reynolds nominal, mais certaines régions de l'écoulement subissent néanmoins de forts gradients de vitesse associés aux effets visqueux, même à grand nombre de Reynolds, tout particulièrement près des parois à cause de la condition d'adhérence : on a la présence d'une couche limite, une mince couche de fluide près de la surface dans laquelle les effets visqueux dominent

- **Concept de couche limite** (introduit par Prandtl en 1904)



Le modèle non visqueux s'applique en dehors de la couche limite. Son épaisseur δ tend vers zéro lorsque le nombre de Reynolds tend vers l'infini

couche limite ($\delta \ll L$) : forte décélération de l'écoulement imposée par la condition d'adhérence à la paroi (effets visqueux importants)

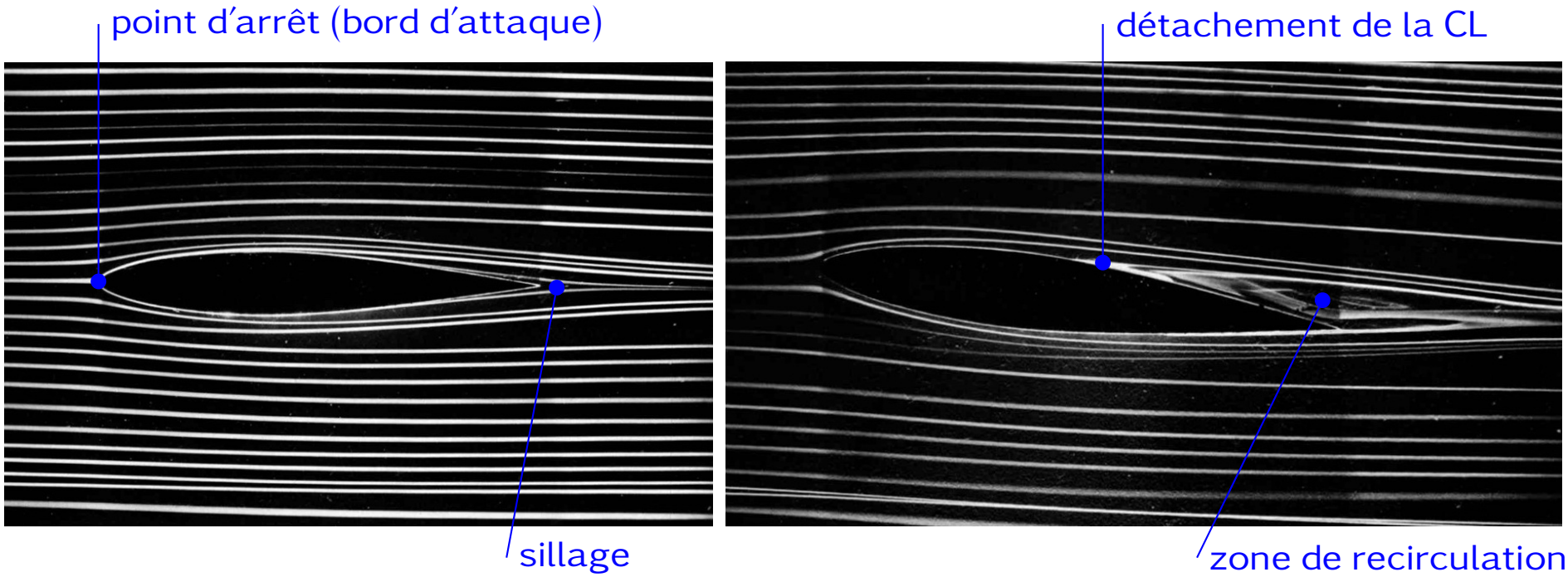
Deux remarques complémentaires :

Lorsque le nombre de Reynolds décroît, la couche limite s'épaissit et il n'y a plus de structuration particulière de l'écoulement pour Re $\leq \mathcal{O}(1)$

Lorsque le nombre de Reynolds devient suffisamment élevé, la couche limite laminaire transitionne vers une couche limite turbulente (pouvant conduire à la crise de traînée)

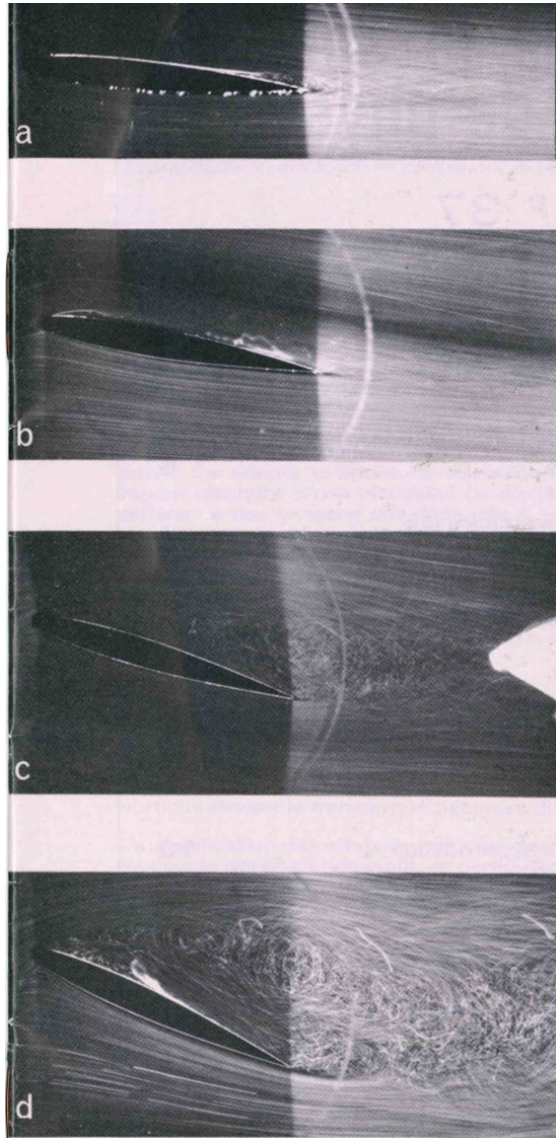
Écoulement autour d'un corps profilé

Pour un corps profilé, une très grande partie de la couche limite (CL) qui se forme le long de la surface doit rester attachée au corps.



Visualisation (colorant dans un écoulement en eau) de la séparation laminaire le long d'un profil 64A015, $\mathrm{Re}_c = 7000$; sans incidence à gauche et avec un angle d'attaque de $\alpha = 5°$ à droite (Werlé, 1974, ONERA)

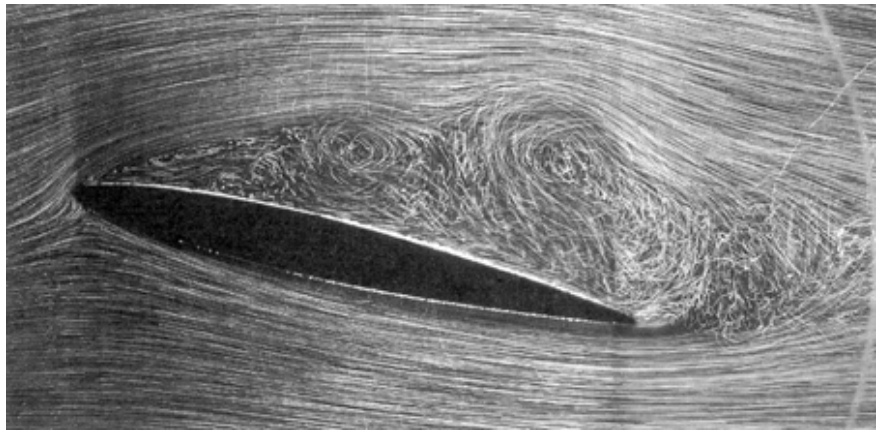
Séparation (détachement) de la couche limite



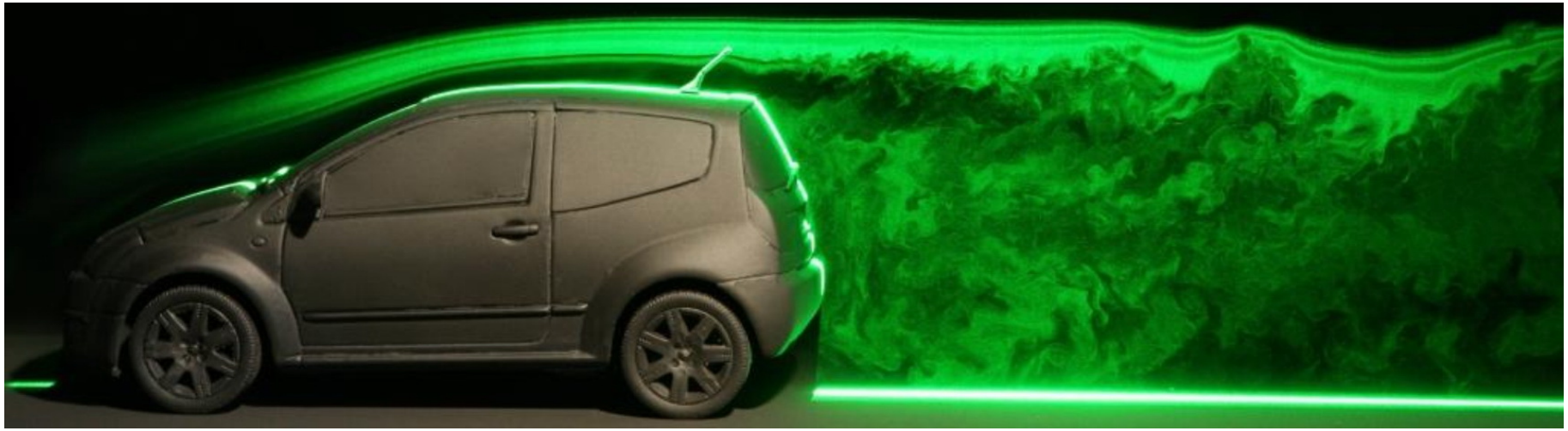
Airfoil (ONERA, profil D)
corde $c = 100$ mm, $e/l = 10.5\%$
$10^4 \leq \mathrm{Re}_l \leq 5 \times 10^4$

tiré de Werlé, SFP **37** (1980)

corps profilé → corps non profilé
(a) $\alpha = 5°$
(b) $\alpha = 10°$
(c) $\alpha = 17.5°$
(d) $\alpha = 25°$



- **Écoulement autour d'un véhicule réel avec arrière tronqué**
  (corps non profilé par conséquent)



Citroën C2 à l'échelle 1/24, veine de section carrée de 40 cm × 40 cm dans une soufflerie Eiffel, vitesse de quelques km/h ; vue globale de l'écoulement détaché par PIV (combinée à une illumination permanente)

avec l'autorisation de Mathieu Grandemange (PhD thesis, ENSTA-ParisTech, 2013)

Écoulement autour d'un corps non profilé

Crise de traînée – se produit pour un nombre de Reynolds critique Re^c pour lequel la structure de l'écoulement change, conduisant à un sillage turbulent moins large : la couche limite se développant sur le corps devient turbulente

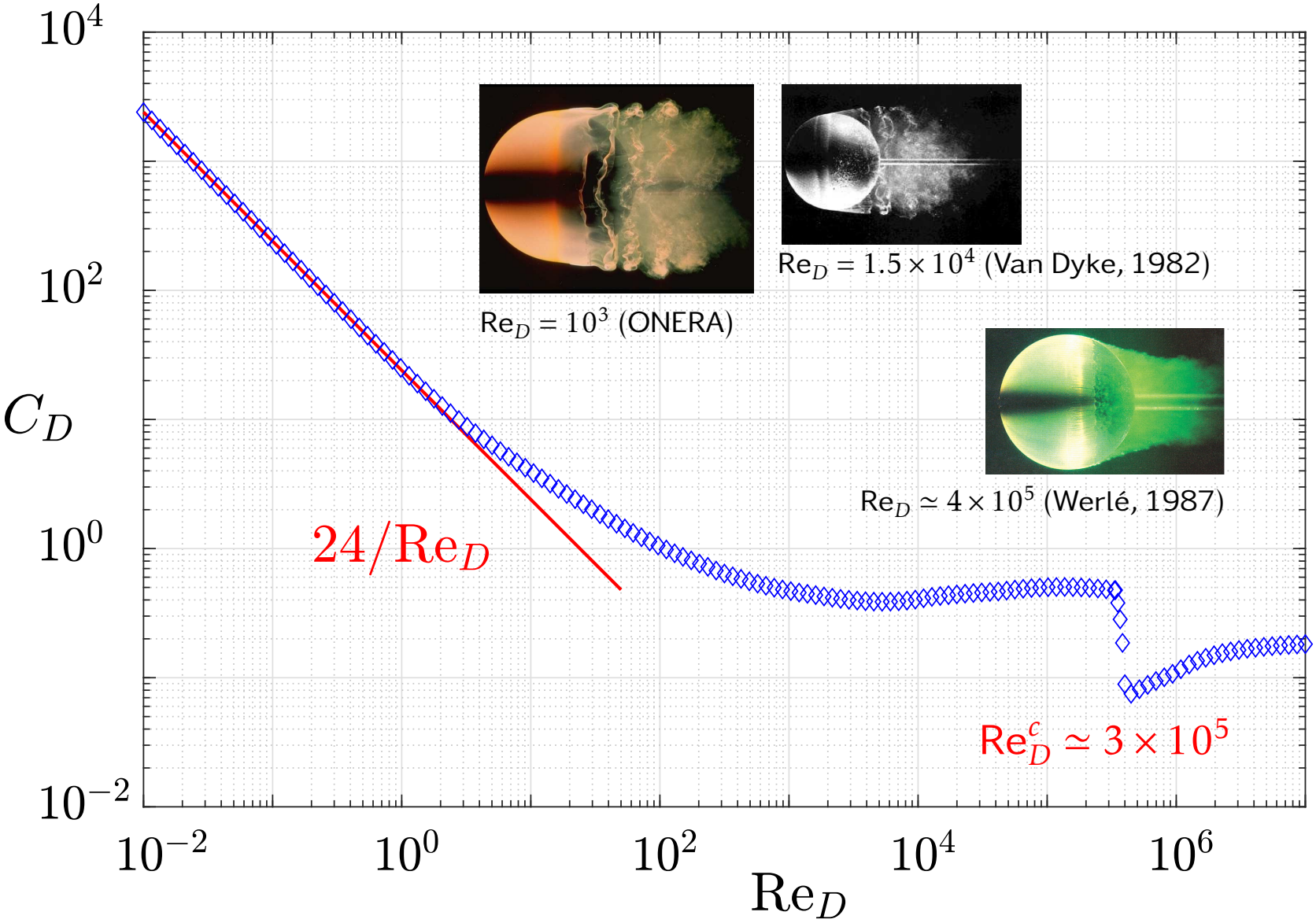
La réduction de la traînée de forme (induite par un sillage plus fin) est plus importante que l'augmentation de la traînée de frottement (induite par la transition laminaire-turbulent de la couche limite)

$$\boldsymbol{F}_{\text{éclt} \to \text{corps}} = \int_{\mathcal{S}} -p\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{S}} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} \qquad (\boldsymbol{n} \text{ normale extérieure au corps ici})$$

force de traînée $F_D = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}_x$
traînée de forme (pression) + traînée de frottement

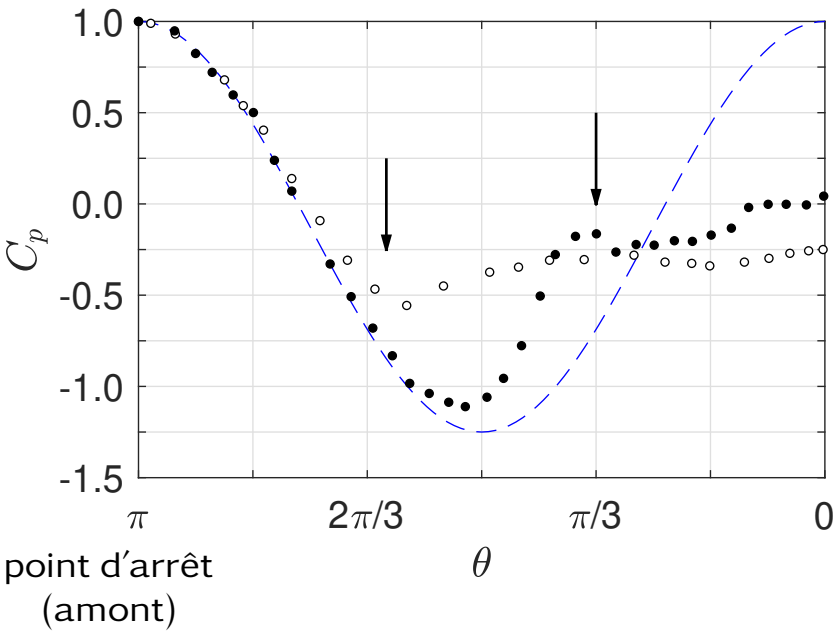
Coefficient de traînée sur une sphère lisse

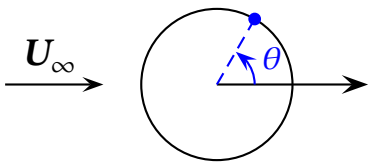
(adapté de Clift, Grace, & Weber, 1978)



Coefficient de pression sur une sphère lisse

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty} \qquad q_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \qquad C_p \text{ coefficient de pression}$$





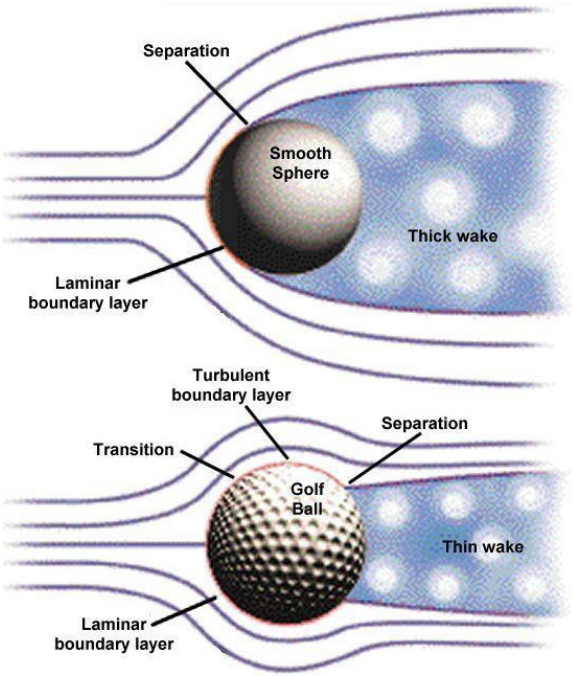
--- écoulement potentiel (non visqueux), $C_p = 1 - (9/4)\sin^2\theta$

○ Expts de Achenbach (1972) pour $\mathrm{Re}_D \simeq 1.65 \times 10^5$ (subcritique, avant la crise de traînée)

● Expts de Achenbach (1972) pour $\mathrm{Re}_D > \mathrm{Re}_D^c$ (supercritique, après la crise de traînée)

(Se rappeler la solution de Stokes for $\mathrm{Re} \ll 1$ lorsque les effets visqueux dominent l'écoulement)

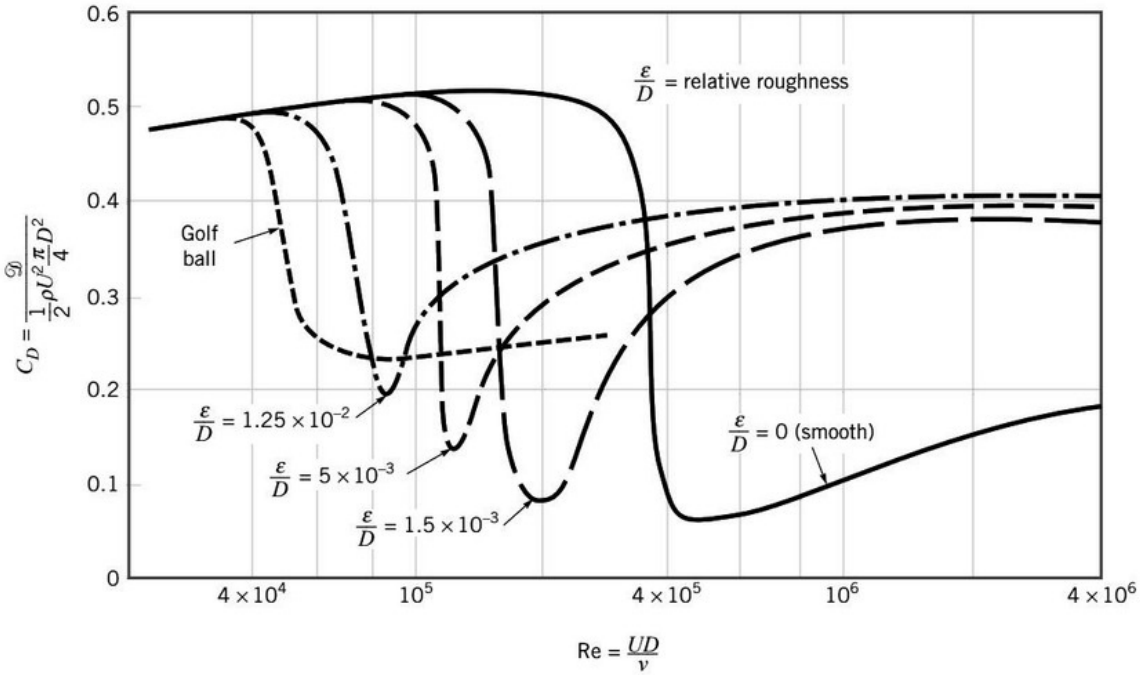
Pourquoi les balles de golf ont-elles des alvéoles ?



Moin & Kim, 1997, *Scientific American*
Goff, E., 2010, Power and spin in the beautiful game, *Phys. Today*, **67**(3)

Coefficient de traînée de sphères avec différentes rugosités. La crise de traînée, la chute soudaine de la traînée lorsque le nombre de Reynolds augmente, se produit lorsque la couche limite transitionne en amont de la séparation

$D = 4.3$ cm, $U \simeq 67$ m.s^{-1}, Re $\simeq 1.9 \times 10^5$ (golfeur professionnel)



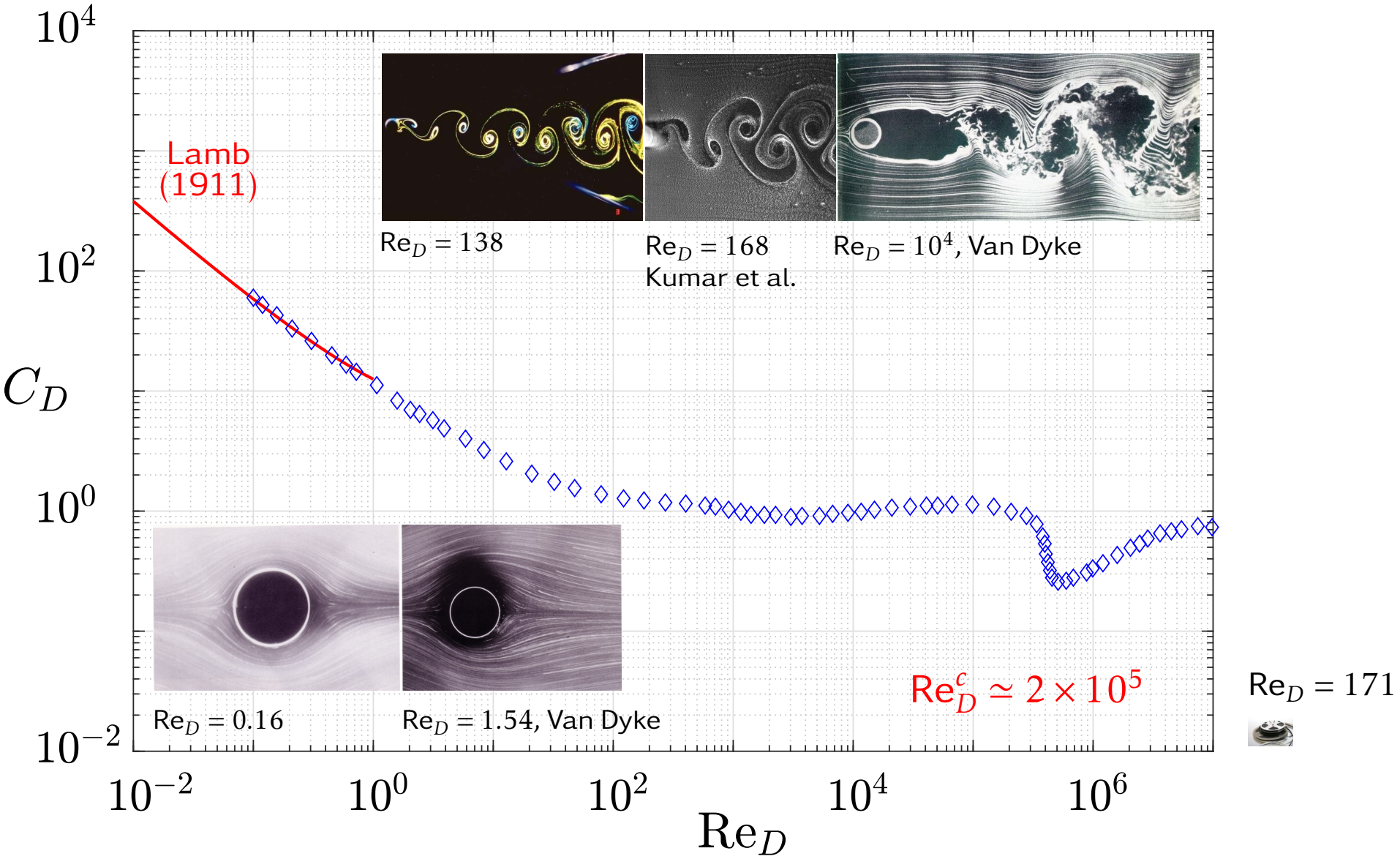
Munson *et al.*, 2014, *Fundamentals of fluid mechanics*

- **Générateur de vortex**
  pour retarder la séparation de la couche limite (génération de tourbillons qui favorisent la transition)

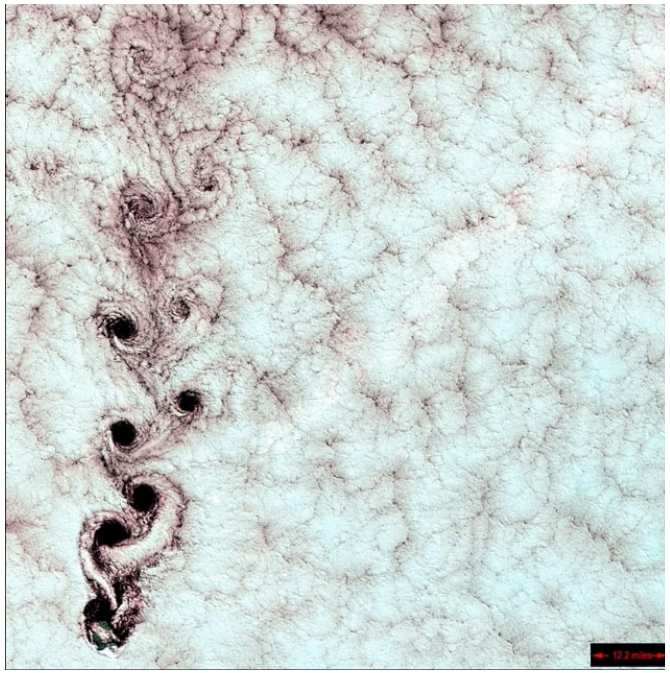
Beechcraft Baron
(twin-engined piston aircraft)

Boeing-777-3ZG-ER http://www.airliners.net/

Coefficient de traînée pour un cylindre lisse



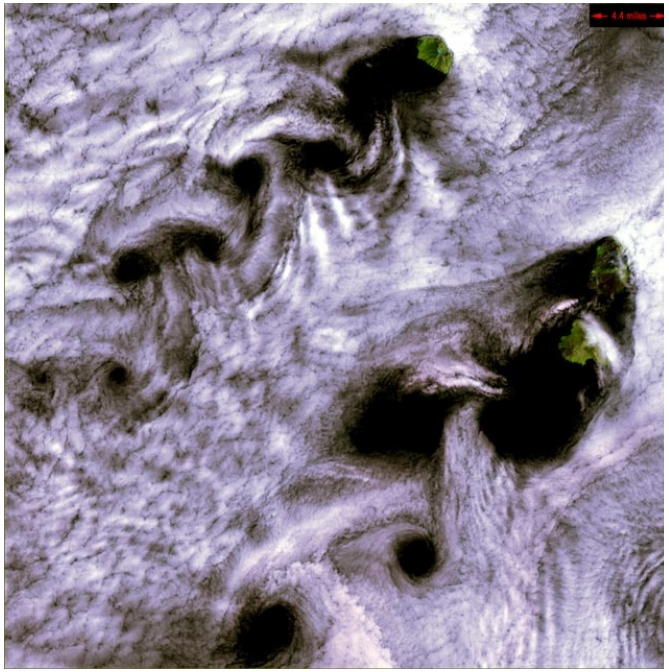
Sillage derrière un obstacle : allée de tourbillons de Kármán



Alexander Selkirk Island in the southern Pacific Ocean.

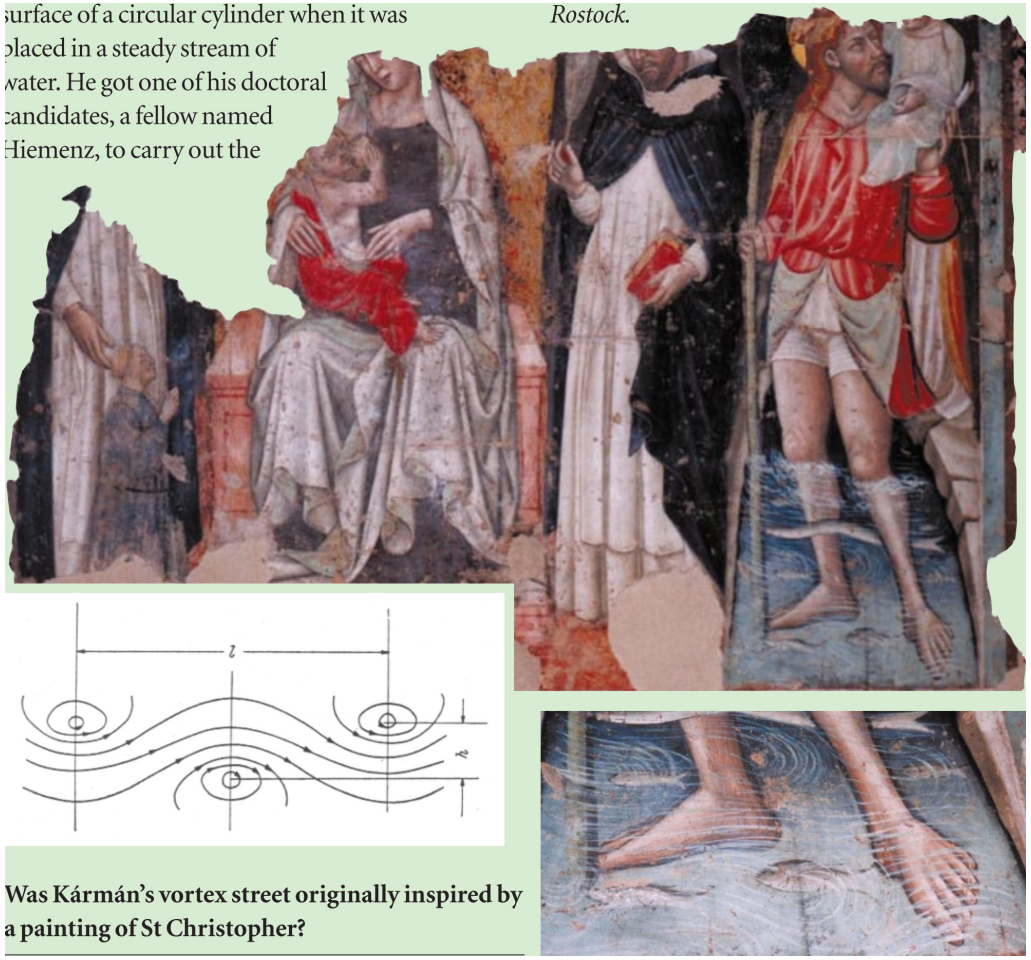
←

→



These Karman vortices formed over the islands of Broutona, Chirpoy, and Brat Chirpoyev ("Chirpoy's Brother"), all part of the Kuril Island chain found between Russia's Kamchatka Peninsula and Japan.

Allée de tourbillons de Kármán (1911)

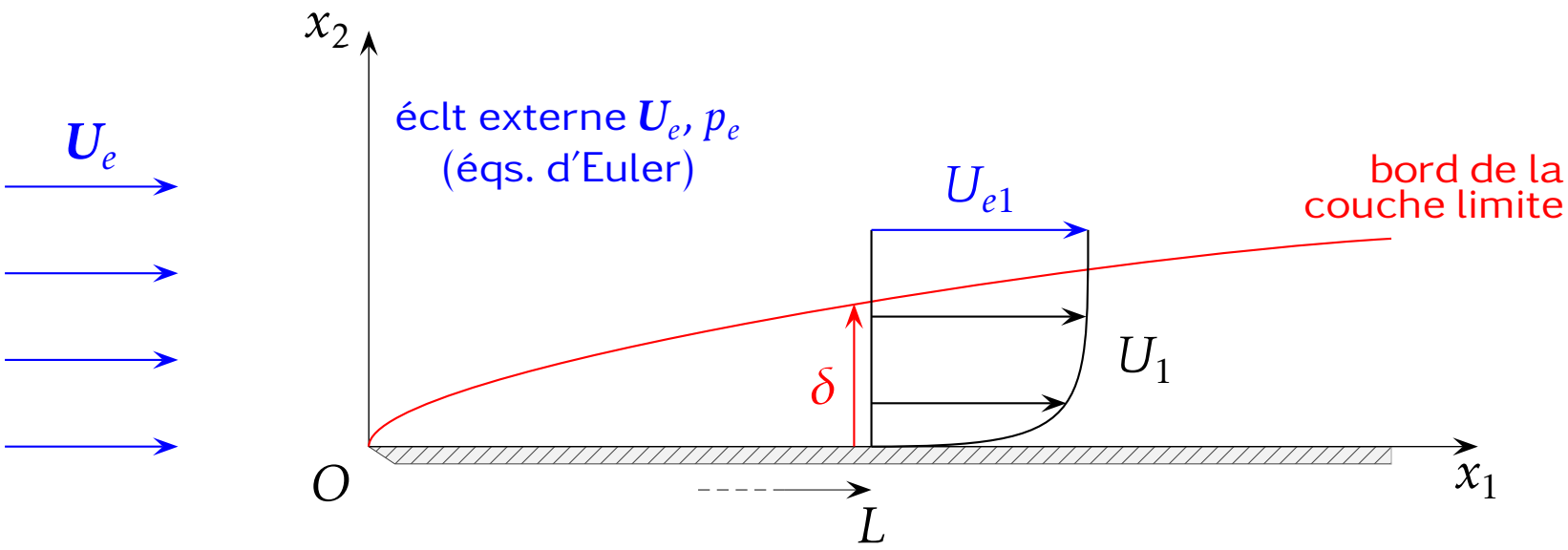


Mizota *et al.*, 2000, Nature, **404**

La légende raconte que Theodore von K'arm'an a été inspiré par un tableau représentant Saint Christophe (église Saint-Dominique à Bologne, Italie) pour étudier son allée de tourbillons ...

Voir aussi
la fréquence du lâcher tourbillonnaire

- **Couche limite se développant sur une plaque plane**
  écoulement 2-D stationnaire et laminaire (pleinement turbulent pour $\mathrm{Re}_\delta = U_{e1}\delta/\nu \geq 2800$, soit encore $\mathrm{Re}_L \geq 3\times 10^5$)



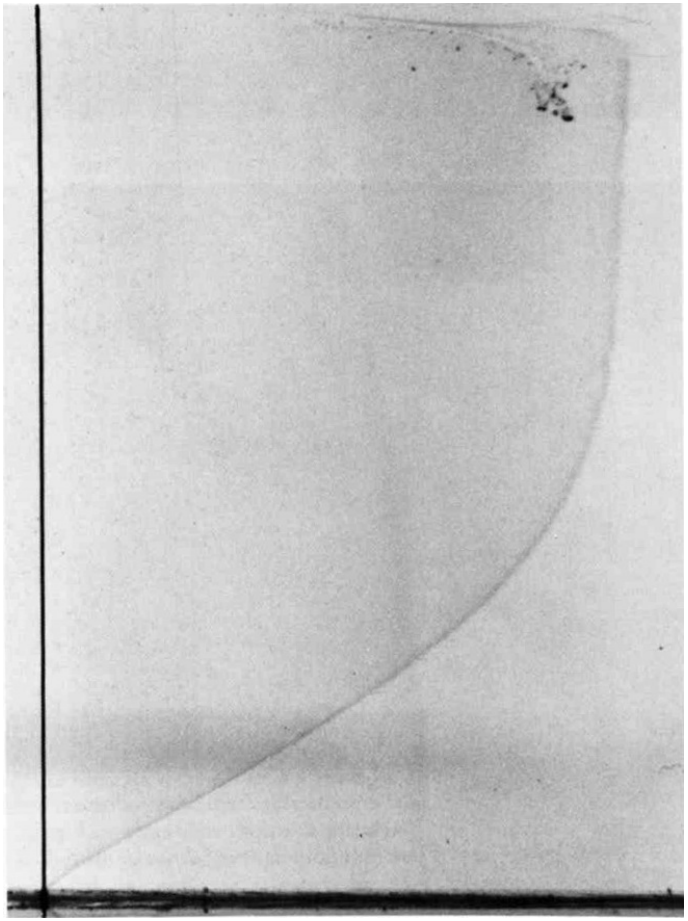
Échelles caractéristiques

- épaisseur de la couche limite δ
- distance L associée à δ selon x_1
- vitesse de l'écoulement externe $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$

Hypothèse d'écoulement mince : $\delta \ll L$

(typiquement, $\delta \simeq 1$ cm pour $L \simeq 1$ m sur une aile d'avion)

Couche limite se développant sur une plaque plane



Visualisation d'une couche limite laminaire,
$U_{e1} = 9$ m.s^{-1}, $\mathrm{Re}_L \simeq 500$, $\delta_1 = 5$ mm

(L distance depuis le bord d'attaque de la plaque)

On produit une impulsion électrique d'une durée de quelques millisecondes à un fin fil de tellurium placé perpendiculairement à la plaque (à gauche). Une réaction chimique produit un mince filet colloïdal, convecté par l'écoulement de la couche limite et photographié un instant plus tard afin de matérialiser le profil de vitesse

(Van Dyke, 1982, fig. 30)

Approximations de la couche limite

Éqs. de Navier-Stokes pour un écoulement $2-D$ stationnaire (laminaire)

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}\cdot\nabla\boldsymbol{U} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{U} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} U_1 = U_1(x_1,x_2) \\ U_2 = U_2(x_1,x_2) \\ U_3 = 0 \end{cases}$$

Conservation de la masse

Les deux termes sont nécessairement du même ordre de grandeur,

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0$$

$$\sim \frac{\mathcal{U}_1}{L} \qquad \sim \frac{\mathcal{U}_2}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{U}_2 \sim \frac{\delta}{L}\mathcal{U}_1}$$

Approximations de la couche limite (suite)

Éq. de Navier-Stokes selon x_1

$$\begin{cases} U_1 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) U_1 \\ \sim \dfrac{\mathcal{U}_1^2}{L} \qquad \sim \dfrac{\mathcal{U}_1^2}{L} \qquad \sim \nu \dfrac{\mathcal{U}_1}{L^2} \quad \sim \nu \dfrac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} \end{cases}$$

Le premier terme de viscosité peut-être négligé par comparaison avec le second en $\sim \nu\, \mathcal{U}_1/\delta^2$. Les termes convectifs à gauche doivent équilibrer le terme de viscosité à droite : ces termes ne peuvent pas être dominant, ce qui conduirait alors à une solution non visqueuse ; et ne peuvent pas être négligés, ce qui conduirait à un écoulement de Stokes ($\mathrm{Re}_L \leq 1$)

$$\frac{\mathcal{U}_1^2}{L} \sim \nu \frac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\delta}{L} \sim \mathrm{Re}_L^{-1/2}} \qquad \mathrm{Re}_L \equiv \frac{\mathcal{U}_1 L}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds doit par conséquent être suffisamment élevé pour assurer que $\delta \ll L$, avec par ailleurs, $\delta \sim \sqrt{L}$

Approximations de la couche limite (suite)

Éq. de Navier-Stokes selon x_2

$$\begin{cases} U_1 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} + U_2 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_2} + \nu\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) U_2 \\ \sim \left(\dfrac{\delta}{L}\right)^2 \dfrac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \quad \sim \left(\dfrac{\delta}{L}\right)^2 \dfrac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \qquad \sim \nu \dfrac{\delta}{L}\dfrac{\mathcal{U}_1}{L^2} \quad \sim \nu \dfrac{\delta}{L}\dfrac{\mathcal{U}_1}{\delta^2} \\ \sim \dfrac{1}{\mathrm{Re}_L}\dfrac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \quad \sim \dfrac{1}{\mathrm{Re}_L}\dfrac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \qquad \sim \dfrac{1}{\mathrm{Re}_L}\dfrac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \end{cases}$$

(Tous les termes sont plus petits d'un facteur $(\delta/L)^2 \sim 1/\mathrm{Re}_L$ par rapport à l'éq. selon x_1)

Le terme de pression doit avoir le même ordre de grandeur pour assurer l'équilibre. Par intégration dans la direction transverse avec $p \sim \rho \mathcal{U}_1^2$,

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{\mathcal{U}_1^2}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad [\,p\,]_0^\delta \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_L}\rho \mathcal{U}_1^2$$

La variation de la pression au travers de la couche limite est donc petit, et peut-être négligé : $p(x_1, x_2) \simeq p(x_1)$ and $\partial p/\partial x_2 \simeq 0$.
À x_1 donné, $p = p_e$ en $x_2 = \delta$ et $p = p_e$ à la paroi en $x_2 = 0$

Approximations de la couche limite (suite)

On retient finalement les simplifications suivantes,

$$\begin{cases} U_1 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

avec pour les ordres de grandeurs des variables,

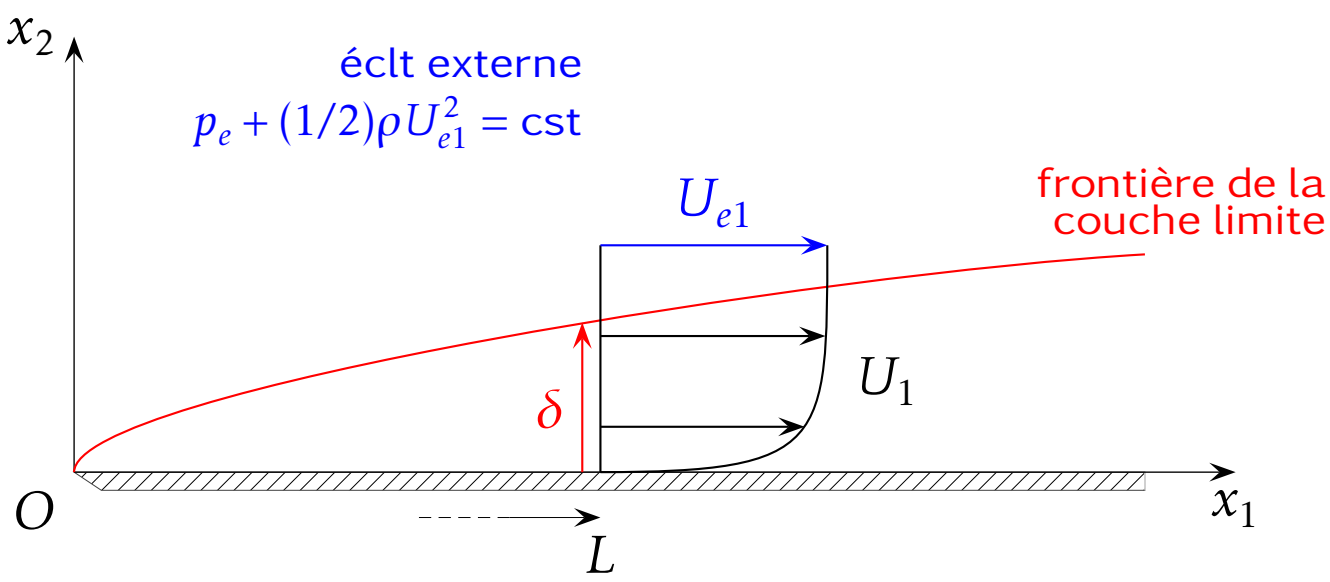
$$U_1 \sim \mathcal{U}_1 \qquad U_2 \sim \frac{\delta}{L}\mathcal{U}_1 \qquad \frac{\delta}{L} \sim \mathrm{Re}_L^{-1/2} \qquad \mathrm{Re}_\delta = \mathrm{Re}_L^{-1/2}\,\frac{\mathcal{U}_1 L}{\nu} \sim \mathrm{Re}_L^{1/2}$$

Re_δ est aussi un paramètre important pour la théorie de la stabilité de la couche limite (transition laminaire-turbulent) ; Par construction, $1 \ll \mathrm{Re}_\delta \ll \mathrm{Re}_L$

Approximations de la couche limite (suite)

La pression est constante au travers de la couche limite, $p = p(x_1) = p_e(x_1)$, ce qui signifie que la pression est imposée par l'écoulement externe eulérien dans notre cas,

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp_e}{dx_1} = -\rho U_{e1} \frac{dU_{e1}}{dx_1}$$



Équations de Prandtl (1904)

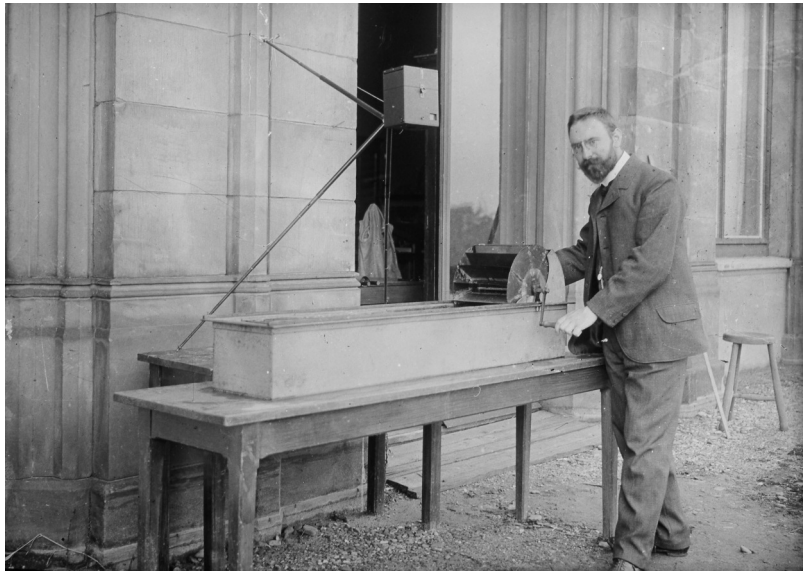
$$\boxed{\begin{cases} U_1 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + U_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} = U_{e1} \dfrac{dU_{e1}}{dx_1} + \nu \dfrac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} U_1 = U_2 = 0 \text{ at } x_2 = 0 \\ U_1 \to U_{e1} \text{ as } x_2 \to \infty \end{array}} \tag{18}$$

Les équations de Prandtl sont la forme parabolisée des équations de Navier-Stokes. On a formellement,

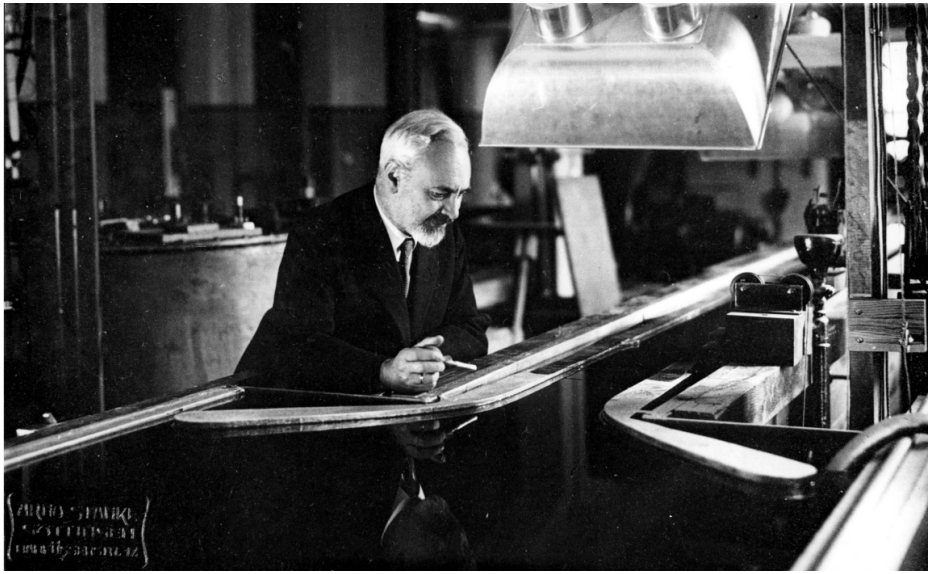
$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = f\left(U_1, U_2, \frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2}\right) \qquad U_2 = -\int_0^{x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_2$$

où l'écoulemet externe $(\boldsymbol{U}_e, p_e)$ est supposé connu. Pour l'intégration selon x_1, on a besoin de connaître un profil de vitesse initial $U_1(x_2)$ à une position x_1

Ludwig Prandtl (1875-1953)



Ludwig Prandtl et son tunnel hydraulique en 1903 (pour la visualisation des larges structures à l'aide de particules traceurs)



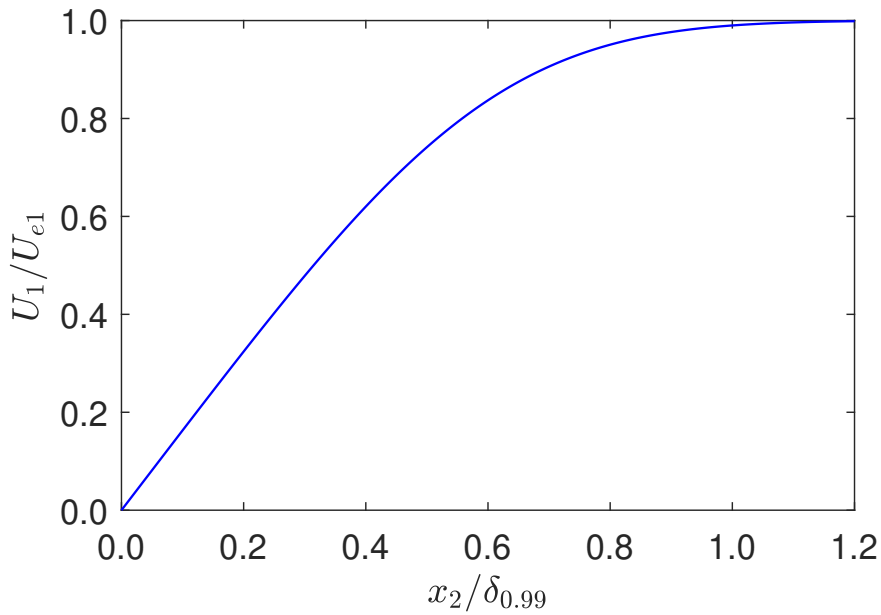
et entre le milieu et la fin des années 1930

A voyage through Turbulence
edited by, P. A. Davidson, Y Kaneda, H.K. Moffatt & K.R. Sreenivasan
(Cambridge University Press, 2011)

Anderson Jr, D.J., 2005, *Physics Today*, **58**(12), 42–48.

Solution de Blasius

Solution autosimilaire calculée pour l'écoulement sur une plaque plane (U_{e1} = cst, sans gradient de pression), le profil peut-être comparé à la visualisation page 157



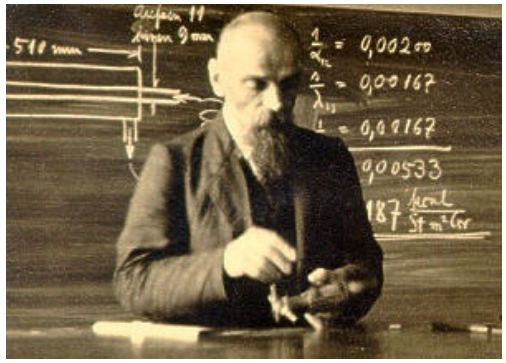
Évolution de l'épaisseur de la couche limite δ

$$\frac{\delta}{x_1} \simeq 4.92 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x_1}}} \qquad (\delta \sim x_1^{1/2})$$

Coefficient de forttement C_f

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_{e1}^2} \sim \frac{\mu \frac{\mathcal{U}_1}{\delta}}{\rho \mathcal{U}_1^2} \sim \frac{\nu}{\mathcal{U}_1 \delta} \sim \frac{1}{\mathrm{Re}_l^{1/2}}$$

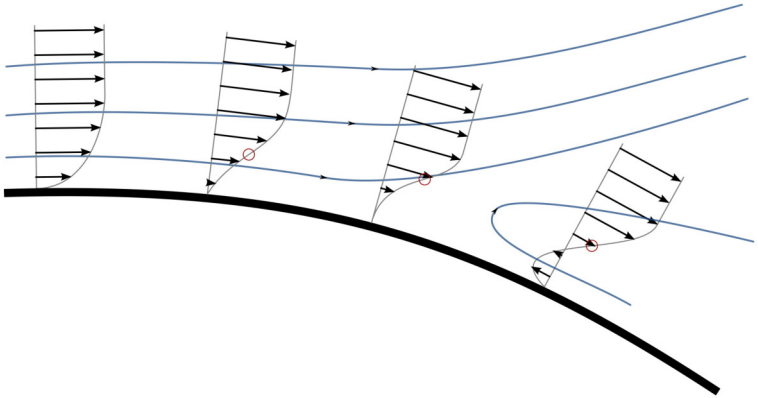
$$C_f \simeq \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_{x_1}}}$$



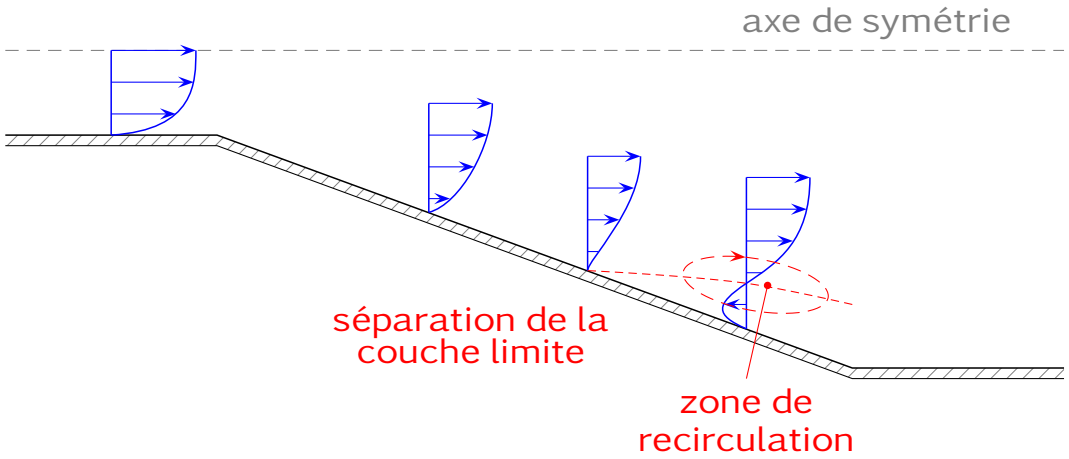
Heinrich Blasius (1883-1970), premier doctorant de L. Prandtl

Rôle du gradient de pression

Gradient de pression favorable, $dp_e/dx_1 < 0$ (écoulement accéléré)
Gradient de pression adverse, $dp_e/dx_1 > 0$ (écoulement décéléré)



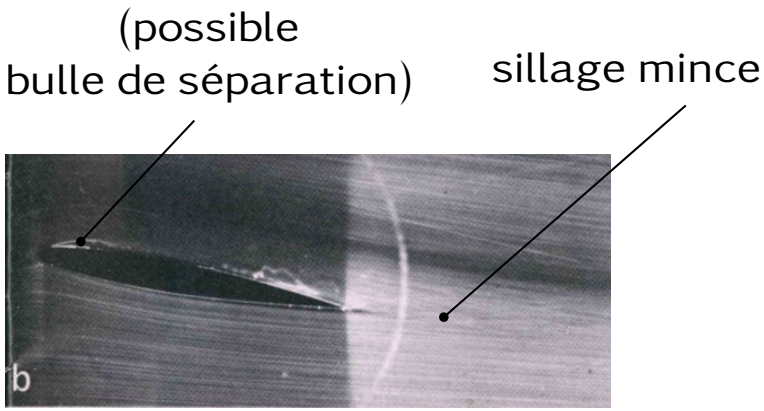
Gradient de pression adverse induit par la courbure de la surface, conduisant à la séparation de l'écoulement
(tiré de Wikipedia, Olivier Cleynen)



Écoulement dans un diffuseur conique

- Écoulement de Stokes ou rampant ; force de Stokes (traînée pour une sphère lisse) ; écoulement à bas nombre de Reynolds
- Écoulement à haut nombre de Reynolds autour d'un corps profilé, d'un corps non profilé ; crise de traînée ; concept de couche limite
- Couche limite laminaire, équations simplifiées de Prandtl

Corps profilé et non profilé

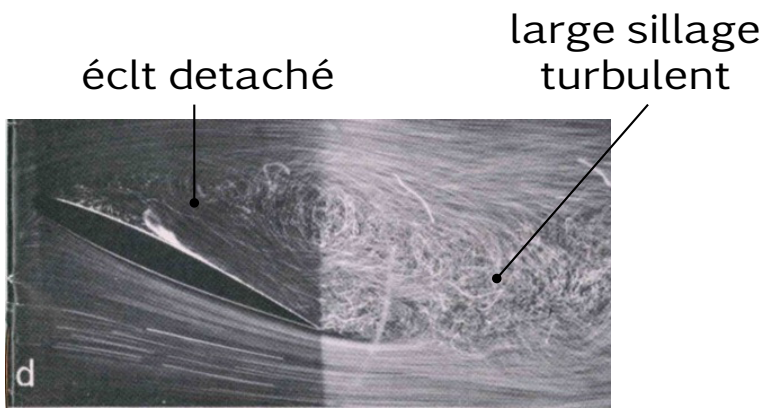


Profil non décroché

Écoulement autour d'un corps profilé

L'échelle de longueur caractéristique de l'écoulement est beaucoup plus grande que l'échelle transverse

Pas de (petite) crise de traînée



Décrochage (perte de portance)

Écoulement autour d'un corps non profilé

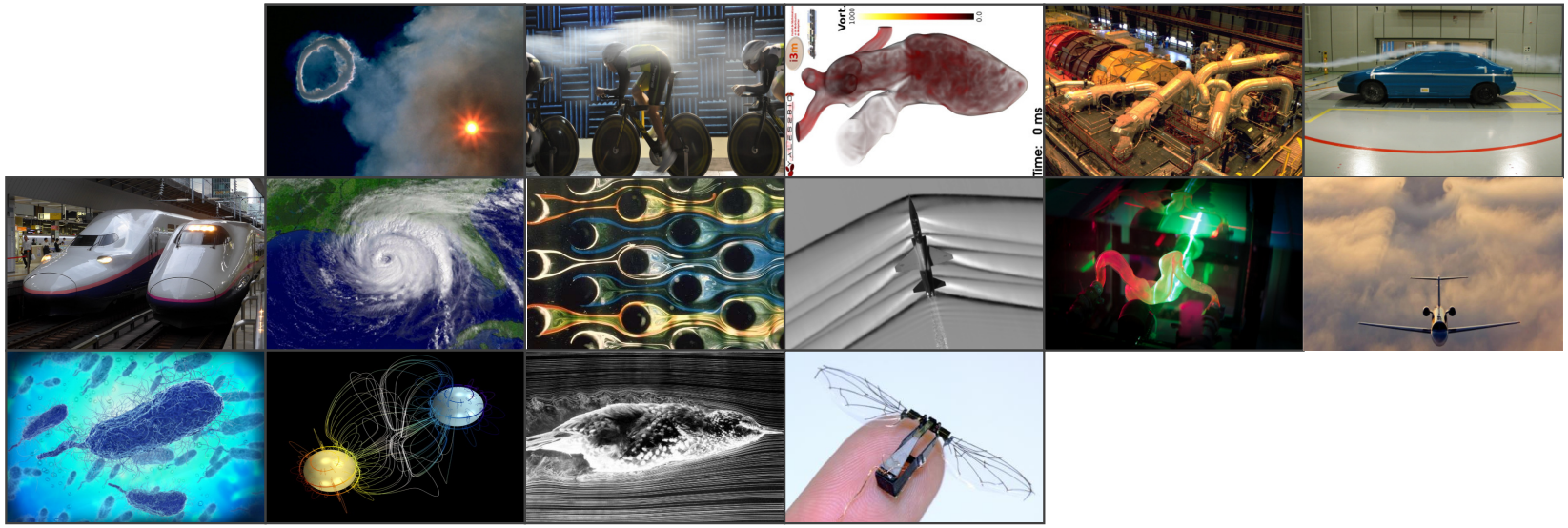
Les dimensions caractéristiques longitudinale et transversale sont similaires

Crise de traînée, voir la planche 148

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

5 - Vorticité



5 - Vorticité

Vorticité

- Définition
- Tourbillon circulaire
- Circulation
- Version forte de l'équation de Bernoulli
- Équation de transport de la vorticité
- Écoulement bidimensionnel
- Vorticité produite par les parois

Écoulement autour d'un corps à grand Reynolds

- Écoulement autour d'un corps non profilé
- Écoulement autour d'un corps profilé
- Modélisation pour un corps profilé

Bases de l'aérodynamique

- Théorème de Kutta-Joukowski
- Effet Magnus

À retenir

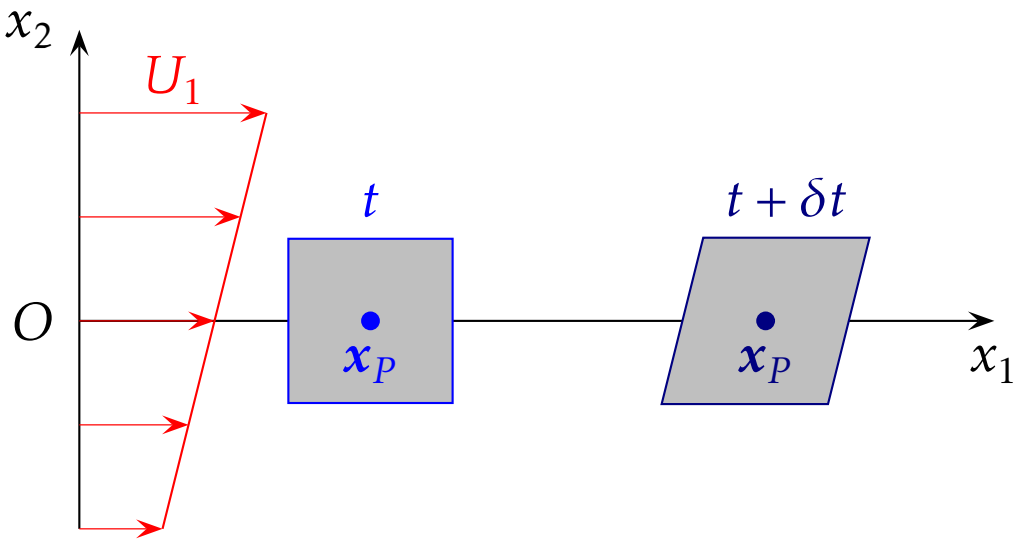
Définition

Le vecteur vorticité est défini par $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{U}$

Lorsque $\boldsymbol{\omega} = 0$, l'écoulement est irrotationnel

Le vecteur vorticité est deux fois le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ associé à la rotation solide d'une particule fluide, voir le transparent 69

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_P) + \underbrace{\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}(\boldsymbol{x}_P)\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_P)}_{\text{déformation}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x}_P)\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_P)}_{\text{rotation}} \text{ as } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_P \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$$

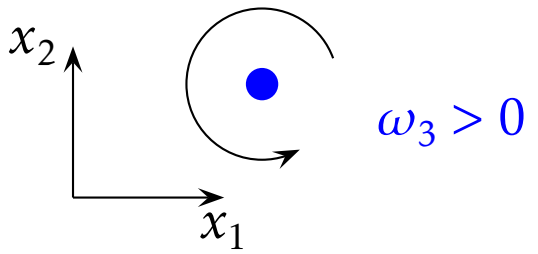


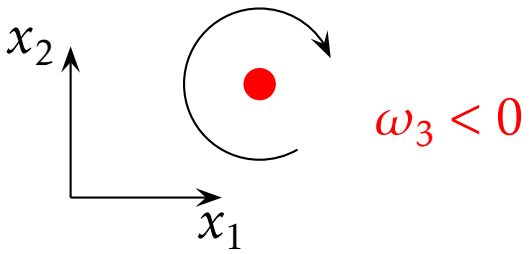
Décomposition du mouvement d'une particule fluide dans un écoulement cisaillé

Définition (suite)

Pour un écoulement bidimensionnel $\boldsymbol{U} = (U_1(x_1, x_2, t), U_2(x_1, x_2, t), 0)$

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3) \qquad \omega_3 = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

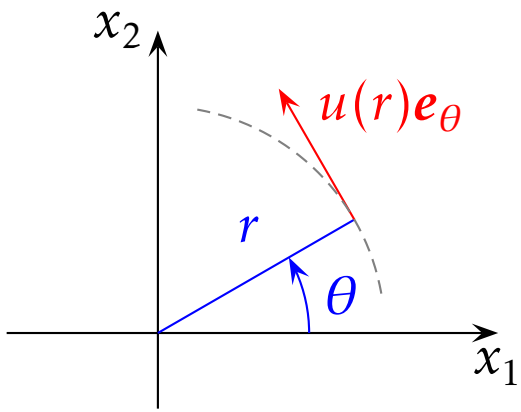




Tourbillon circulaire

En utilisant des coordonnées cylindriques, la vitesse d'un tourbillon circulaire est donnée par $\boldsymbol{U} = u(r)\boldsymbol{e}_\theta$

$U_\theta = u(r)$, $U_r = U_z = 0$



$$\omega_z(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) \quad \Longrightarrow \quad u(r) = \frac{1}{r}\int_0^r r'\omega_z(r')dr'$$

On peut déterminer le champ de vorticité connaissant le champ de vitesse et réciproquement (mais dans ce dernier sens, cela requière un calcul souvent fastidieux en s'appuyant sur la loi de Biot & Savart)

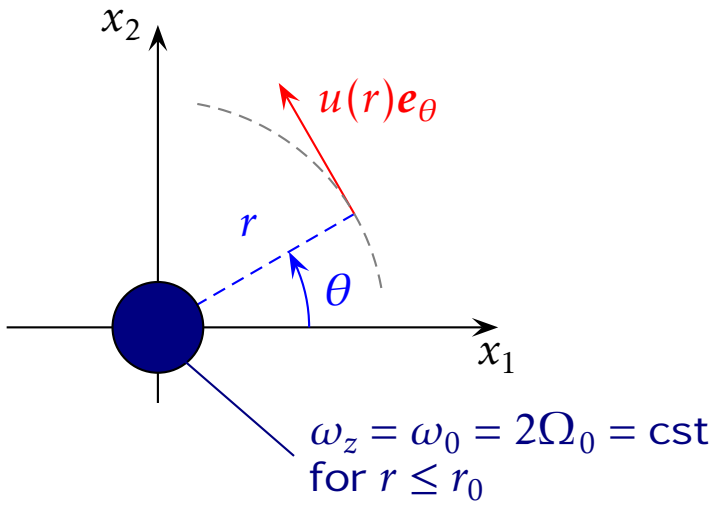
Il y a une relation spatiale non locale entre la vitesse et la vorticité : la vorticité qui est concentratée ou localisée produit un champ de vitesse dans tout l'espace

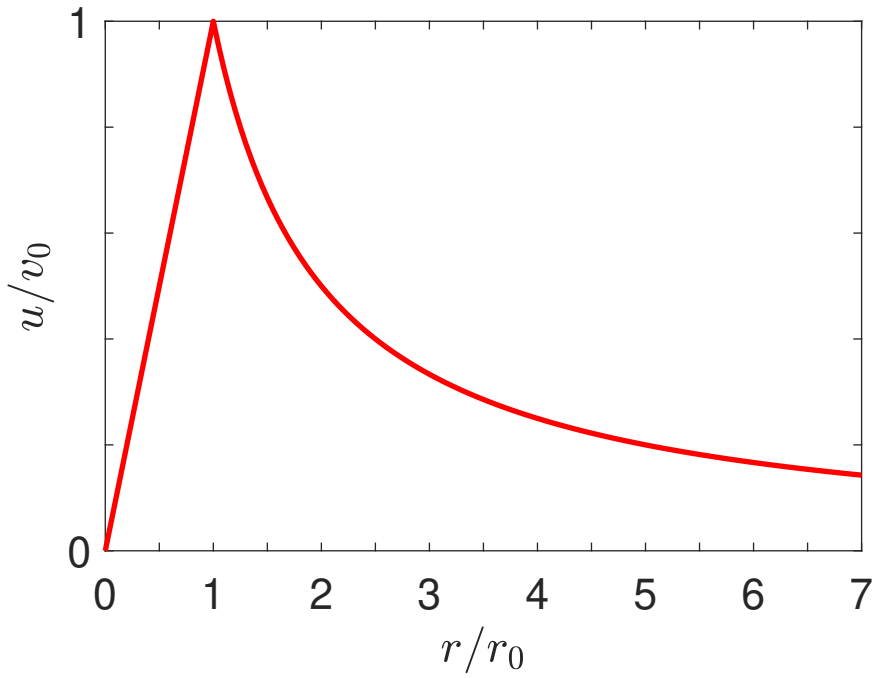
On utilise indifféremment tourbillon et vortex

Illustration avec le tourbillon de Rankine (1858)

$$\begin{cases} u(r) = v_0 \dfrac{r}{r_0} = \Omega_0 r & r \leq r_0 \\ u(r) = v_0 \dfrac{r_0}{r} = \Omega_0 r_0 \dfrac{r_0}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$(v_0 = \Omega_0 r_0 = \omega_0 r_0/2)$





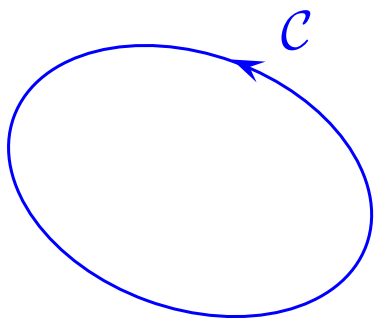
Mouvement de rotation solide à l'intérieur du vortex lui même, *i.e.* for $r \leq r_0$ dans la région rotationnelle

Écoulement irrotationnel à l'extérieur, pour $r > r_0$: le disque localisé de vorticité produit un champ de vitesse $u \sim 1/r$ partout dans l'espace

Circulation

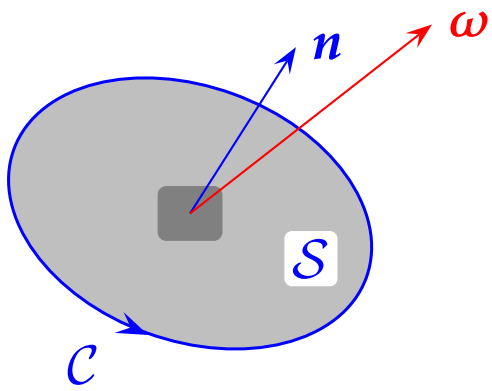
L'intégrale de la composante tangentielle de la vitesse le long d'une ligne fermée $\mathcal{C}$ fournit la circulation $\Gamma_{\mathcal{C}}$

$$\Gamma_{\mathcal{C}} \equiv \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad (\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1})$$



Considérons alors la surface $\mathcal{S}$ fermée par la courbe $\mathcal{C}$. En appliquant le théorème de Stokes, on observe que la circulation représente et mesure le flux de vorticité flux traversant cette surface

$$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

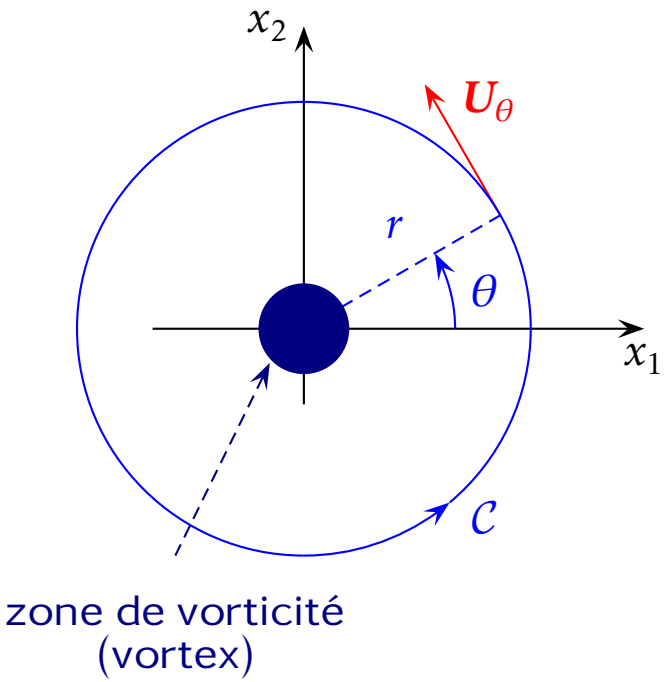


Circulation d'un tourbillon circulaire

En choisissant la courbe $\mathcal{C}$ pour contenir toute la vorticité, la circulation Γ est alors indépendante d'un choix particulier de $\mathcal{C}$, et permet donc de caractériser le tourbillon considéré. On a en effet dans ce cas,

$$\Gamma = 2\pi r u(r) \quad \Longrightarrow \quad u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Dans la région irrotationnelle (à l'extérieur de la zone de vorticité), la vitesse décroit comme $1/r$



Il est possible de définir un tourbillon ponctuel, pour lequel toute la vorticité est concentrée en un point, avec la composante $\omega_3 = \Gamma\delta(x_1)\delta(x_2)$ en s^{-1}. La relation précédente $u(r) = \Gamma/(2\pi r)$ est alors valable partout à l'exception du point occupé par le tourbillon

Version forte de l'équation de Bernoulli

On rappelle la conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} + \boldsymbol{g}$$

En utilisant l'identité vectorelle suivante,

$$\boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{U} + \nabla \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \right)$$

et en se souvenant également que $\boldsymbol{g} = \nabla(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x})$, on obtient alors la forme équivalente suivante

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathcal{H} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} \qquad \mathcal{H} = p - \rho \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \rho U^2 \tag{19}$$

On retrouve l'équation de Bernoulli pour un écoulement non visqueux et stationnaire en prenant le produit scalaire de l'éq. (19) avec $\boldsymbol{U}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{U} \cdot \nabla \mathcal{H} = 0$ et donc $\mathcal{H} = \text{cst}$ le long d'une ligne de courant.

Pour un écoulement irrotationnel (sans vorticité), $\mathcal{H} = \text{cst}$ dans tout l'écoulement : c'est une version forte de l'éq. de Bernoulli

Équation de transport de la vorticité

En prenant le rotationel de l'éq. (19) et en utilisant les deux identités vectorielles suivantes

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \qquad (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{U} = 0)$$

$$\nabla \times \nabla \mathcal{H} = 0 \quad \text{(avec } \rho = \text{cst)}$$

l'équation de transport sur la vorticité est finalement obtenue

$$\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}}_{\substack{\text{convection} \\ = D\boldsymbol{\omega}/Dt}} = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U}}_{\text{évolution 3-D}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}_{\substack{\text{diffusion} \\ \text{visqueuse}}} \tag{20}$$

L'évolution du champ de vorticité est avant tout liée aux effets tridimensionnels, tout particulièrement pour les écoulements turbulents, et aux effets plus classiques de diffusion par la viscosité

Pour un écoulement non visqueux, $D\boldsymbol{\omega}/Dt = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U}$. Sans vorticité initiale, le mouvement d'une particule fluide reste alors irrotationnel (d'où l'intérêt des écoulements irrotationnels lorsque cela a un sens)

Écoulement bidimensionnel

Pour des écoulements en deux dimensions, $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ et $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = 0$ par conséquent. L'équation (scalaire) sur la vorticité s'écrit alors comme

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \omega_3 = \nu \nabla^2 \omega_3 \tag{21}$$

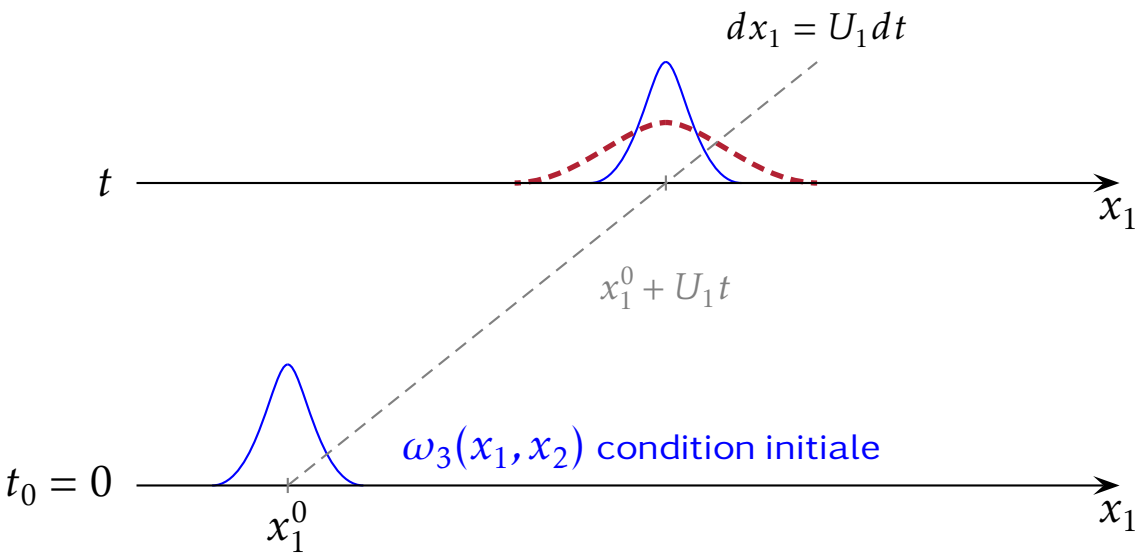
La convection d'une particle fluide est donc seulement affectée par la diffusion visqueuse (on mentionne de nouveau que c'est une classe d'écoulements très particulière)

On observe également que pour un écoulement non visqueux bidimensionnel, $D\omega_3/Dt = 0$. La vorticité issue des conditions initiales est simplement convectée par l'écoulement

Écoulement bidimensionnel (suite)

Interprétation de l'équation d'advection-diffusion (21) :

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{D\omega_3}{Dt} = 0 \quad \text{le long de la courbe} \quad \frac{dx_1}{dt} = U_1$$



La dérivativée matérielle D/Dt est la différentielle totale de ω_3 le long de la courbe $dx_1 = U_1 dt$ (une droite ici en supposant que $U_1 =$ cst)

—— solution pour $\dfrac{D\omega_3}{Dt} = 0$, à savoir $\omega_3(x_1 - U_1 t)$

- - - solution pour $\dfrac{D\omega_3}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega_3$

Diffusion visqueuse en 2-D

On considère de nouveau un tourbillon circulaire en coordonnées cylindriques $\boldsymbol{U} = (U_r, U_\theta, U_z) = (0, u(r), 0)$ et $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ avec $\omega_z = \omega_z(r, t)$

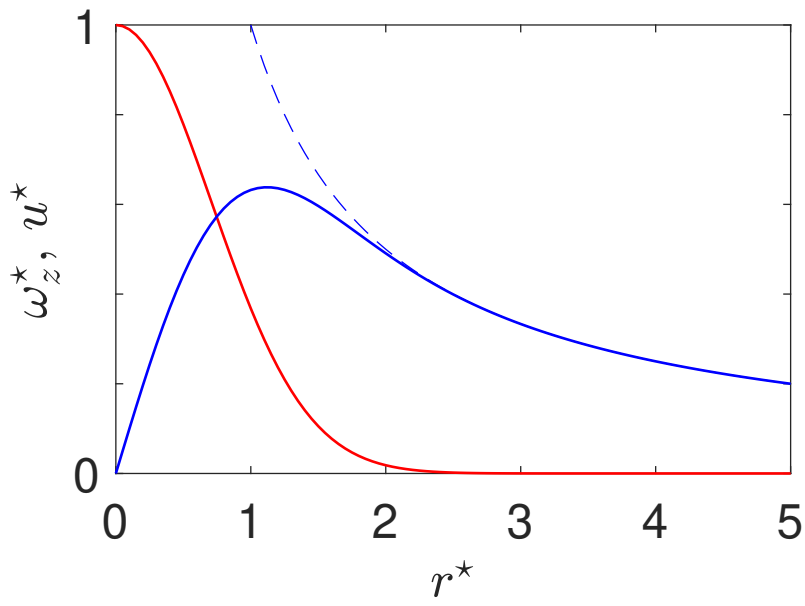
$$\boldsymbol{U} \perp \nabla\omega_z \Longrightarrow \boldsymbol{U} \cdot \nabla\omega_z = 0 \quad \text{(pas de convection)}$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega_z \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \omega_z}{\partial r}\right)$$

Une solution particulière connue est le tourbillon de Lamb-Oseen

$$\omega_z = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad u = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right)\right]$$

Le rayon du cœur du vortex varie comme $r_c(t) = \sqrt{4\nu t} \propto \sqrt{\nu t}$, qui est la signature de la diffusion moléculaire



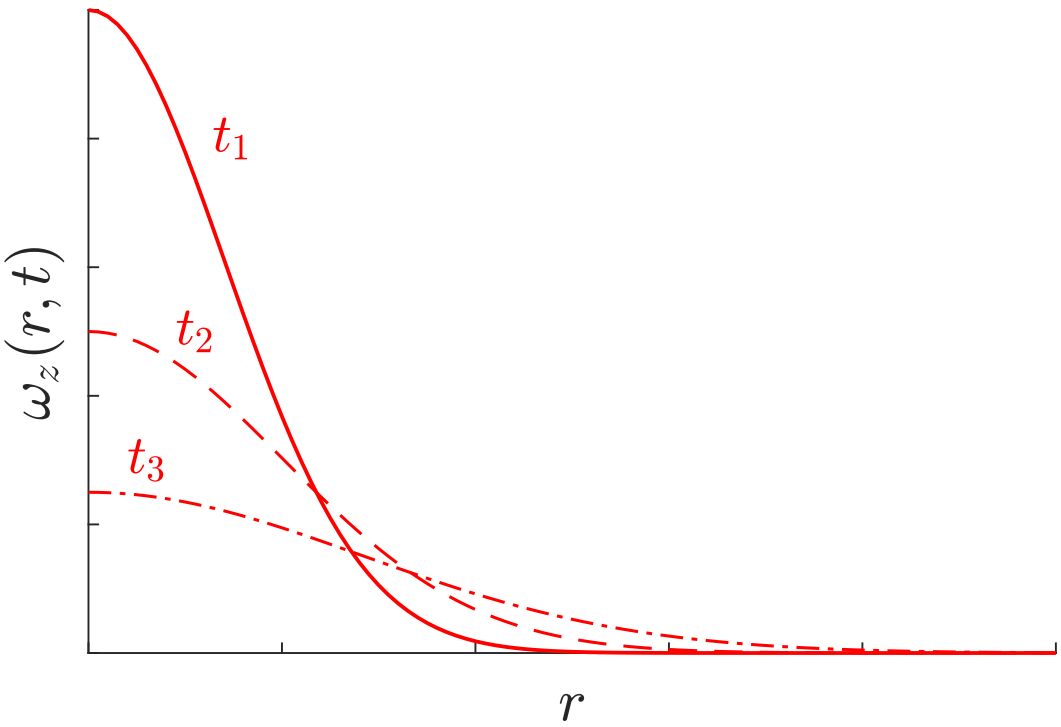
$r^\star = r/r_c$

$\omega_z^\star = (\pi r_c^2/\Gamma)\omega_z \quad u^\star = (2\pi r_c/\Gamma)u$

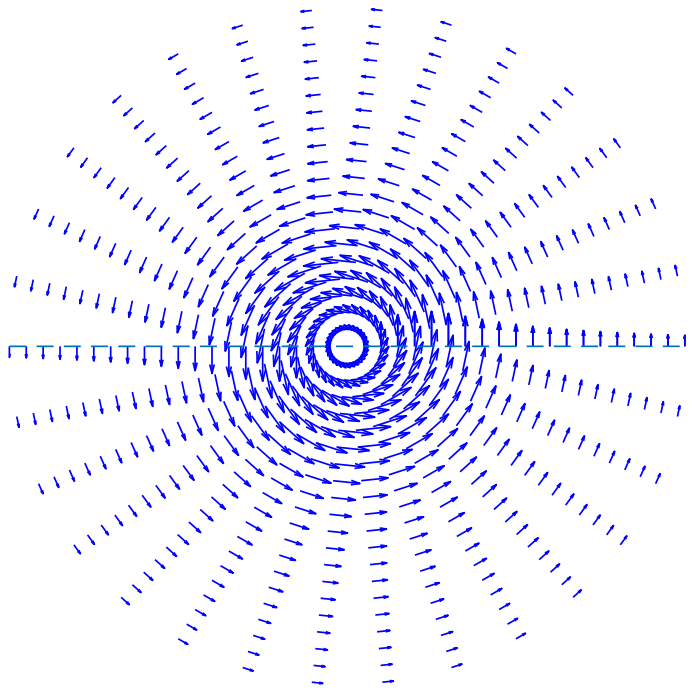
$u^\star = 1/r^\star$ (ligne en tirets)

Diffusion visqueuse en 2-D (suite)

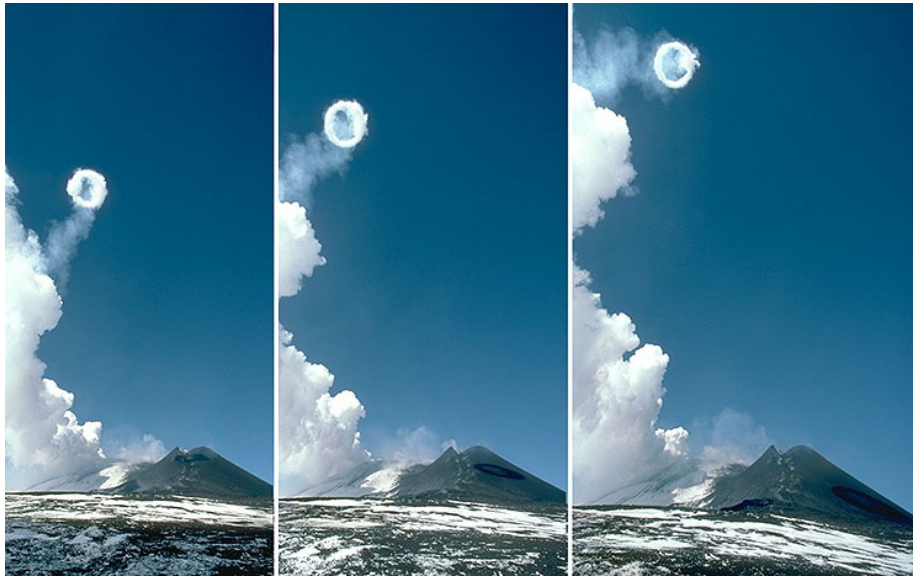
La vorticité totale (et donc la circulation) est conservée, mais on observe un étalement depuis le point de concentration initial où $\omega_3 = \Gamma\delta(x_1)\delta(x_2)$, due à la diffusion visqueuse



Champ de vitesse du vortex de Lamb-Oseen pour $0 \leq r^\star \leq 5$



- **Tourbillon annulaire de vapeur éjecté par l'Etna**
  (L'Etna est le volcan le plus haut et le plus actif d'Europe)



Expérience japonaise sur des anneaux tourbillonnaires de fumée avec une boîte géante de 30 m ! (tourbillon de démarrage)

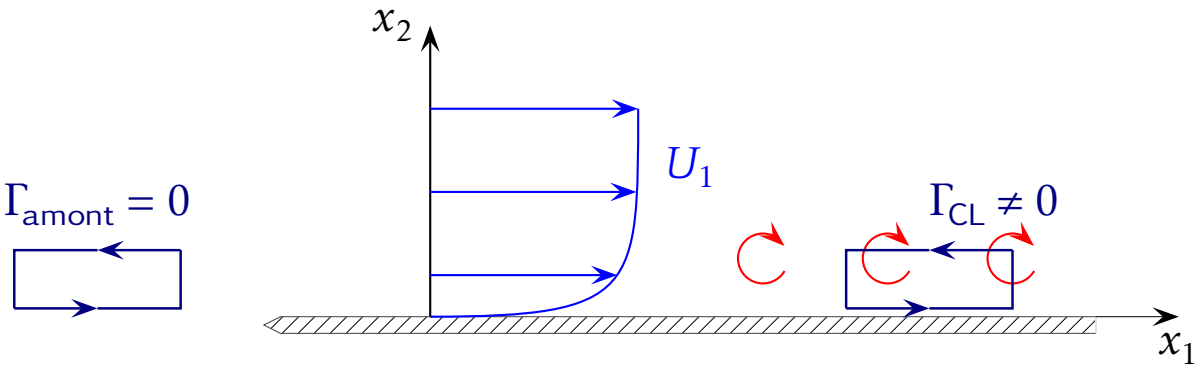
Entraînement d'une méduse !

L'anneau tourbillonnaire se déplace (pourquoi ?) sans élément de référence pour estimer sa taille. Les volcanologues estiment que ces anneaux mesurent environ 200 m de diamètre se déplacent jusqu'à 1000 m au-dessus du sol

Photos prises par Dr Jurg Alean & Dr Marco Fulle, Stromboli online

Vorticité produite par les parois

Trois mécanismes ont été identifiés dans l'éq. de transport de la vorticité (20), mais aucun ne permet d'expliquer sa production. L'origine de la vorticité réside dans les frontières de l'écoulement. Pour mettre en lumière la production de vorticité à la paroi, qui est ensuite diffusée et convectée par l'écoulement de la couche limite (CL), on peut utiliser la circulation :



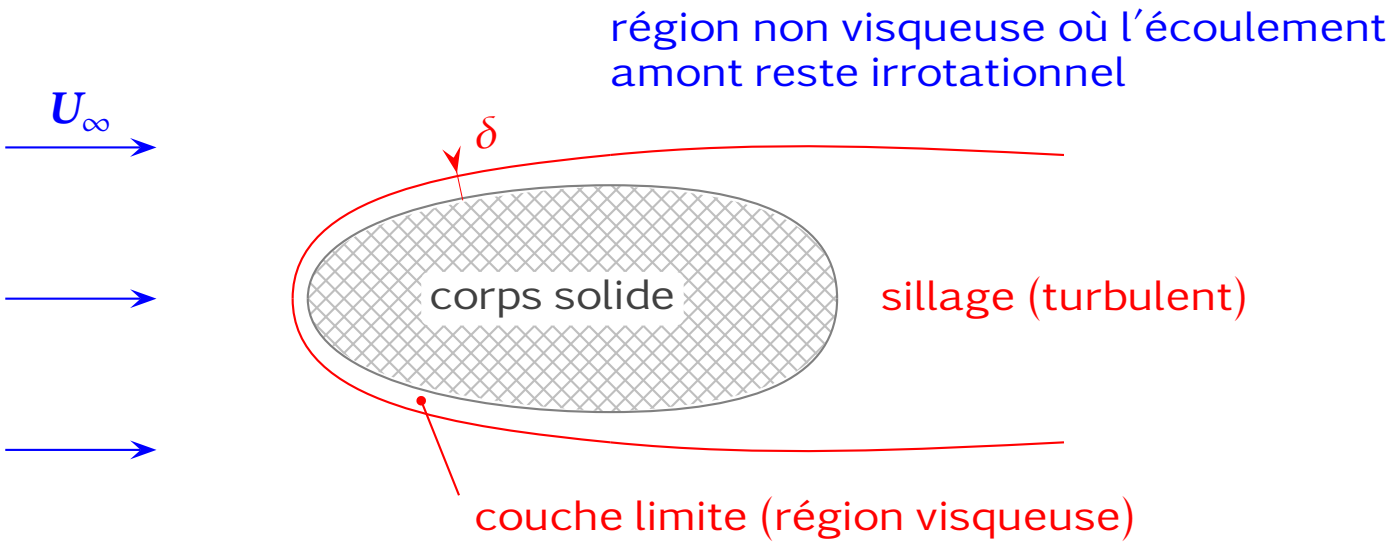
$$\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = \frac{\mu}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

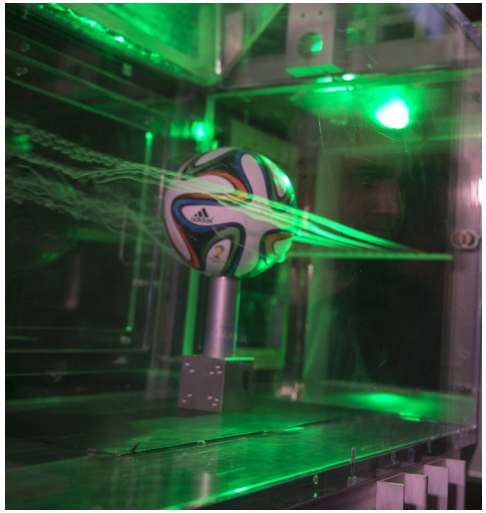
$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \\ &= -\frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad \text{à la paroi} \end{aligned}$$

La force visqueuse $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}\ ds$ s'exerçant sur le fluide à la paroi

$$\boldsymbol{T} = -\mu\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_1 = \mu\omega_3\boldsymbol{e}_1 \qquad (\boldsymbol{T} = \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}\cdot\boldsymbol{n} = \mu\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} \text{ avec ici } \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_2)$$

Cas d'un corps non profilé

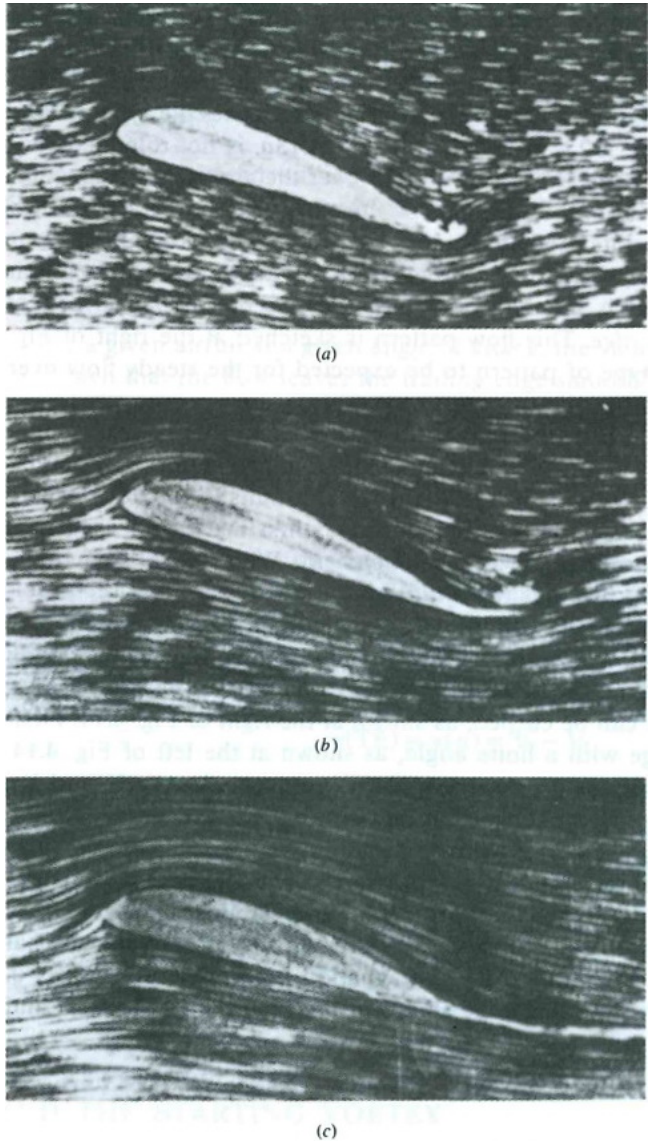




Vue rapprochée du Brazuca (Adidas), ballon officiel de la coupe du monde 2014, dans une soufflerie de section carrée de 2 ft. Des filets de fumée éclairés un laser permettent de visualiser l'écoulement autour du ballon (NASA's Ames Research Center, R. Mehta, 2014)

$U_\infty \simeq 48$ km.h^{-1}, bien en dessous de la vitesse de frappe typique d'un joueur professionnel, qui correspond à peu près au Reynolds critique de la sphère)

Écoulement autour d'un corps profilé



Visualisation de l'établissement de l'écoulement (période transitoire) autour d'une aile portante :

(a) juste après le démarrage de la soufflerie

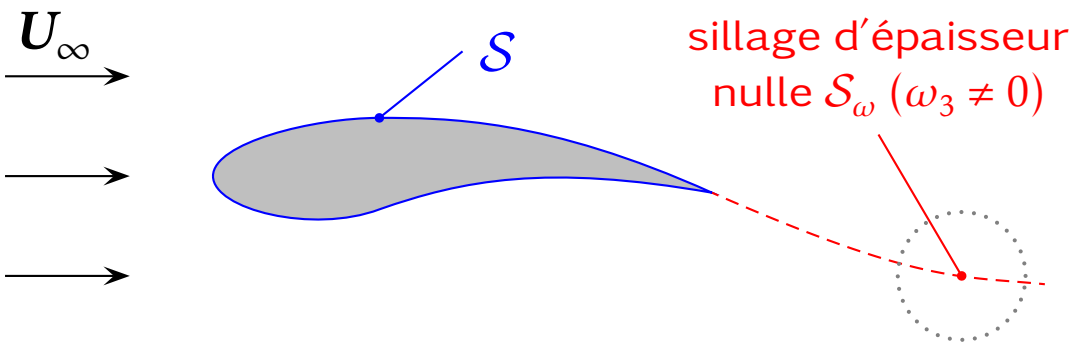
(b) à un moment intermédiaire

(c) à l'état final, pour lequel un écoulement stationnaire s'est établi autour du profil

Tiré de Prandtl & Tietjens, *Fundamentals of Hydro Aeromechanics* (1934) et cité dans J.D. Anderson, Jr (1991, p. 261)

Modélisation pour un corps profilé

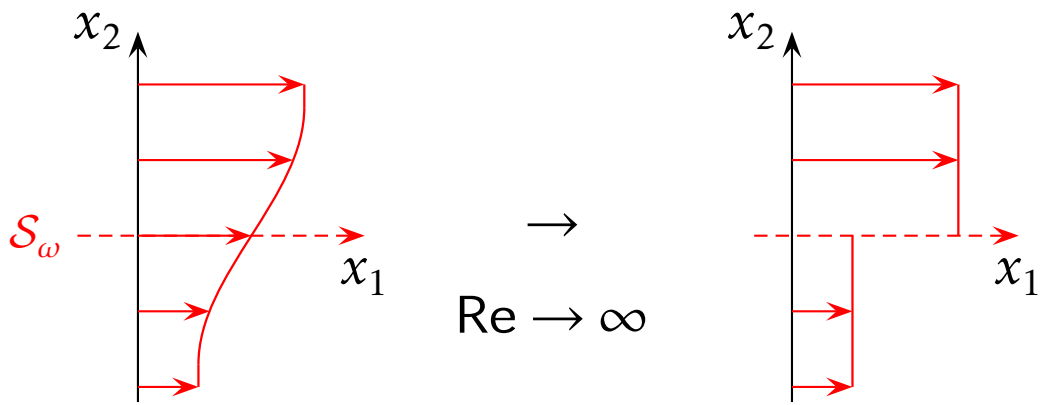
On s'intéresse au cas limite d'un écoulement autour d'un corps profilé lorsque $\mathrm{Re} \to \infty$. L'écoulement n'est jamais détaché du profil, avec une couche limite et un sillage infiniment fins



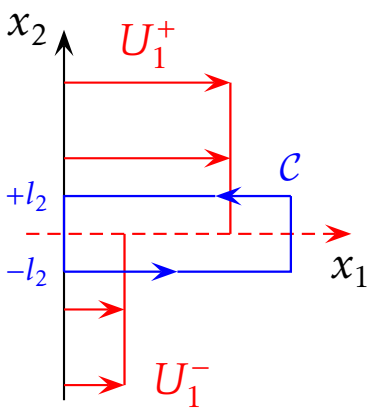
$\mathcal{S}_\omega$ est une nappe de vorticité. Toute la vorticité est concentrée dans cette nappe, et l'écoulement est irrotationnel ailleurs

Couche de mélange entre deux écoulements $\boldsymbol{U} = (U(x_2), 0, 0)$

$$\omega_3 = -\frac{dU}{dx_2}$$



Modélisation pour un corps profilé (suite)



Une nappe de vorticité n'a de sens que pour un écoulement non visqueux : la viscosité détruirait la discontinuité et imposerait une épaisseur non nulle

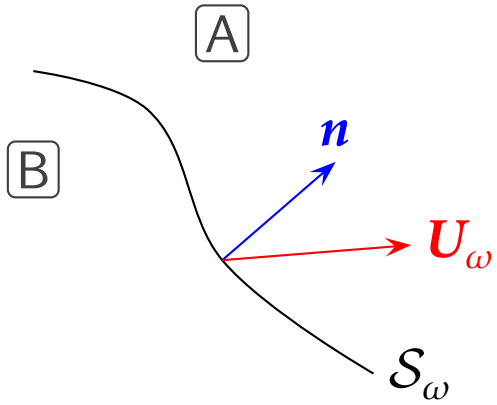
Le saut de vitesse tangentielle au travers de la nappe en $x_2 = 0$ est $\gamma_s = U_1^- - U_1^+$, et la vorticité s'écrit comme $\omega = \gamma_s \delta(x_2)$ en s^{-1}, en notant que la fonction de Dirac $\delta(x_2)$ est en m^{-1}

On peut vérifier que la circulation est bien retrouvée sur le domaine $[0, l_1] \times [-l_2, +l_2]$, en prenant le contour $\mathcal{C}$ ou le flux de vorticité au travers de la surface fermée par $\mathcal{C}$

$$\Gamma = \left(U_1^- - U_1^+\right) l_1 = \int_{-l_2}^{+l_2} \gamma_s \delta(x_2)\, l_1 \, dx_2$$

Modélisation pour un corps profilé (suite)

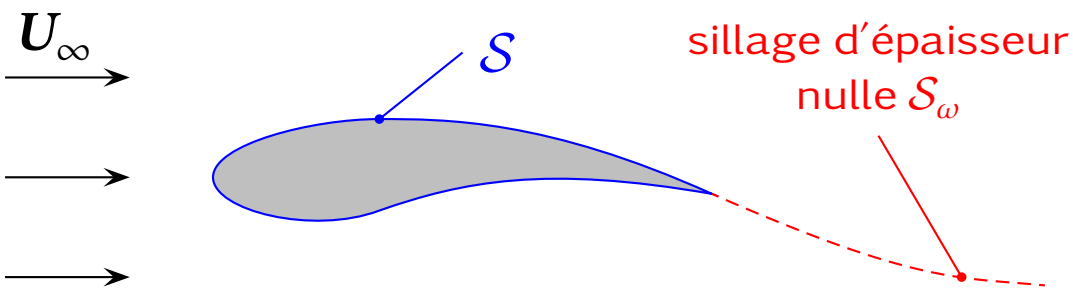
Plus généralement, la discontinuité de vitesse est donnée par le vecteur $\boldsymbol{\gamma}_s = \boldsymbol{U}_B - \boldsymbol{U}_A$. La nappe de vorticité se déplace à la vitesse locale $\boldsymbol{U}_\omega$



On rappelle que les conditions aux limites à imposer à l'interface sur $\mathcal{S}_\omega$ pour un écoulement non visqueux sont la continuité de la pression $p_A = p_B$ et de la composante normale de la vitesse $\boldsymbol{U}_A \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_B \cdot \boldsymbol{n}$

La vitesse de l'interface vérifie donc $\boldsymbol{U}_\omega \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}$

Modélisation pour un corps profilé (suite)



Équations à résoudre pour déterminer l'écoulement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$

On doit également vérifier les conditions aux limites suivantes :

- $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur la surface $\mathcal{S}$ du profil et $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}_\infty$ à l'amont
- la continuité de p et $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}$ au travers de la nappe de vorticité $\mathcal{S}_\omega$ (avec éventuellement le mouvement de la nappe elle-même)

Ce problème est généralement difficile à résoudre, mais il existe un cas très instructif à étudier en aérodynamique lorsque l'on recherche une solution 2-D stationnaire

Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile

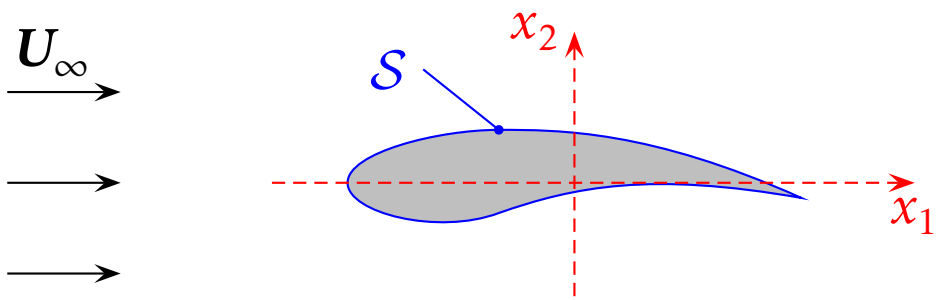
On considère un écoulement 2-D stationnaire autour d'un profil d'aile à grand nombre de Reynolds avec $\boldsymbol{U} = (U_1(x_1, x_2), U_2(x_1, x_2))$

En utilisant la version forte de l'éq. de Bernoulli (voir page 178), on a

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{cst} \qquad \text{(pas de force de gravité ici)}$$

Pour la nappe de vorticité, la continuité de la pression impose que la norme de la vitesse U soit constante au travers de $\mathcal{S}_\omega$, et comme de plus $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}$ doit aussi être continue, le vecteur vitesse $\boldsymbol{U}$ est aussi continu au travers de la nappe $\mathcal{S}_\omega$

La nappe de vorticité peut donc être retirée du problème à résoudre et l'écoulement à déterminer est maintenant irrotationnel dans tout le domaine



Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile (suite)

Pour des écoulements bidimensionnels incompressibles, il est souvent commode d'introduire la fonction de courant ψ

$$U_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \qquad U_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

La condition $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$ est alors toujours vérifiée par construction.
On a par ailleurs les propriétés suivantes pour ψ

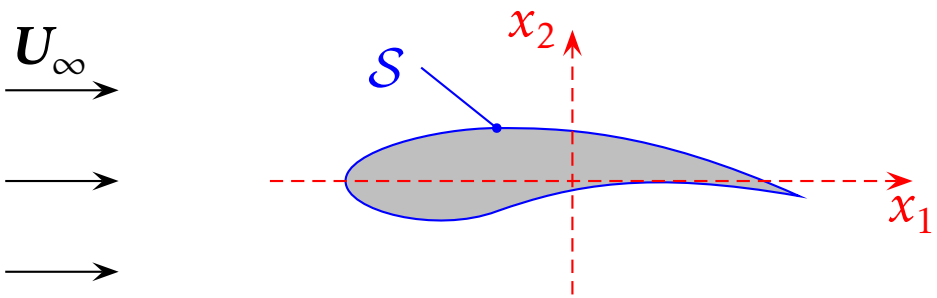
- $\nabla^2 \psi = -\omega_3$
- $\boldsymbol{U} \cdot \nabla \psi = 0$ par construction, $\psi =$ cst le long d'une ligne de courant

Dans notre cas, l'écoulement recherché est irrotationnel,
et par conséquent $\nabla^2 \psi = 0$

Sur la surface $\mathcal{S}$ du profil, on a $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. La surface est donc une ligne de courant avec $\psi =$ cst. On choisit souvent de prendre $\psi = 0$ sur $\mathcal{S}$ par convention

Enfin, loin du profil, on doit satisfaire $\psi \to \psi_\infty = U_\infty x_2$, pour avoir $\boldsymbol{U}_\infty = U_\infty \boldsymbol{e}_1$

Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile (suite)



$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0$$

$\psi = 0$ sur $\mathcal{S}$

$\psi \sim U_\infty x_2$ loin du profil

Le problème n'est pas difficile à résoudre numériquement : on a une équation de Laplace associée à des conditions aux limites mixtes

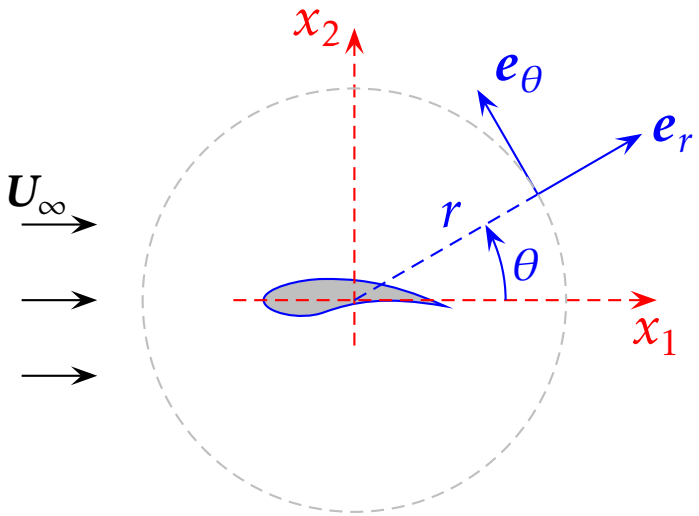
Lorsque la fonction ψ est déterminée, le champ de vitesse est directement obtenu par dérivation de ψ et la pression est déterminée avec l'équation de Bernoulli $p + \rho U^2/2 = \text{cst}$

Il est cependant possible de montrer au premier ordre (c'est-à-dire sans se préoccuper de la géométrie précise du profil) que la solution est toujours de la même forme : c'est le théorème de Kutta-Joukowski

Théorème de Kutta-Joukowski

On introduit les coordonnées polaires pour exprimer $\nabla^2\psi = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0$$



et on observe que la solution est 2π-périodique en θ et peut être recherchée comme une série de Fourier

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(r)e^{in\theta}$$

Les fonctions $C_n(r)$ doivent vérifier l'équation suivante,

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dC_n}{dr}\right) - n^2 C_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_0 = A_0 \ln r + B_0 & n = 0 \\ C_n = A_n r^{|n|} + B_n r^{-|n|} & n \neq 0 \end{cases}$$

Les termes en rouge contribuent seulement au champ proche (lié à la géométrie particulière du profil) et sont négligés pour la solution loin du profil

Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

La fonction de courant ψ doit aussi se raccorder à ψ_∞ lorsque $r \to \infty$

$$\psi_\infty = U_\infty x_2 = U_\infty r \sin\theta = \frac{U_\infty r}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \quad \Longrightarrow \quad A_1 = A_{-1} = \frac{U_\infty}{2i}$$

et $A_n = A_{-n} = 0$ for $n > 1$ (en notant que C_0 ne contribue pas au champ de vitesse $\boldsymbol{U}$ lorsque $r \to \infty$). On retient pour ψ

$$\psi = U_\infty r \sin\theta + A_0 \ln(r) + B_0 + \mathcal{O}(r^{-1})$$

On revient alors au champ de vitesse en coordonnées cylindriques

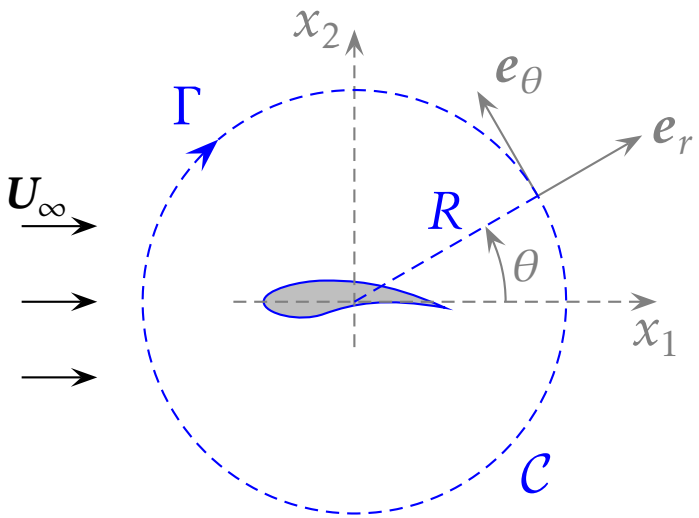
$$U_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad U_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\boldsymbol{U} = U_\infty \cos\theta \boldsymbol{e}_r + \left(-U_\infty \sin\theta - \frac{A_0}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \mathcal{O}(r^{-2}) = \boldsymbol{U}_\infty - \frac{A_0}{r}\boldsymbol{e}_\theta + \mathcal{O}(r^{-2})$$

On note que le terme en rouge correspond au champ de vitesse d'un tourbillon circulaire, voir page 177

Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Comme l'écoulement est irrotationel, la circulation Γ est une propriété du profil seulement. En considérant un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R entourant le profil, que l'on parcourt dans le sens horaire,



$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{x} = -\int_0^{2\pi} \left(-\frac{A_0}{R}\boldsymbol{e}_\theta\right) \cdot R d\theta \boldsymbol{e}_\theta = 2\pi A_0$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta + \mathcal{O}(r^{-2})$$

Sans connaître le détail de la géométrie, on observe que le profil se comporte comme un vortex ponctuel en champ lointain

La pression est obtenue avec l'équation de Bernoulli

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(U_\infty^2 - U^2) = p_\infty + \frac{\rho\Gamma}{2\pi r}\boldsymbol{U}_\infty \cdot \boldsymbol{e}_\theta + \mathcal{O}(r^{-2})$$

Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Quelle est la force qui s'exerce sur le profil d'aile ?

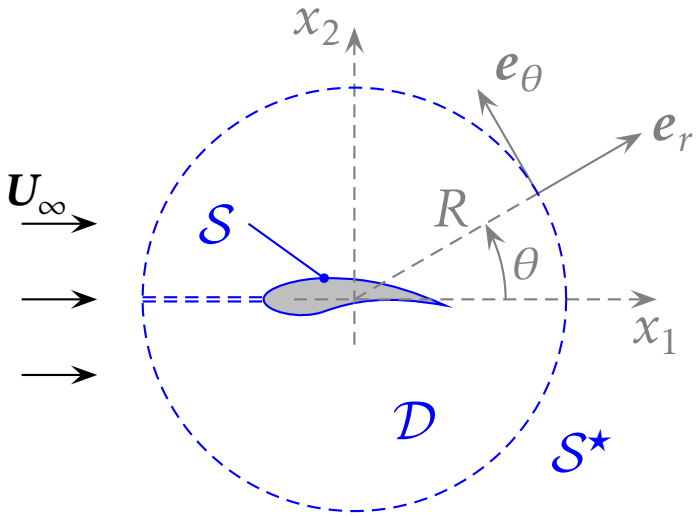
En considérant le domaine fixe $\mathcal{D}$ fermé par $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^\star$ pour un écoulement stationnaire non visqueux, le théorème de Reynolds pour la conservation de la quantité de mouvement impose que

$$\int_{\mathcal{S}\cup\mathcal{S}^*} \underbrace{p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n})}_{\bullet}\, d\mathcal{S} = 0 \tag{22}$$

La force $\boldsymbol{F}$ s'exerçant sur le profil (avec $\boldsymbol{n}$ pointant dans le domaine fluide), calculée par unité de longueur dans la direction de l'envergure, est donnée par

$$\boldsymbol{F} = -\int_{\mathcal{S}} \bullet\, d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}^\star} \bullet\, d\mathcal{S} \quad \text{pour vérifier (22)}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \left[p\boldsymbol{e}_r + \rho\boldsymbol{U}(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{e}_r)\right]_{r=R} R d\theta \quad (\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_r)$$



Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Nous avons montré dans ce qui précède que pour R suffisamment grand,

$$\boldsymbol{U} \sim \boldsymbol{U}_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\theta \qquad p \sim p_\infty + \frac{\rho\Gamma}{2\pi R}\boldsymbol{U}_\infty \cdot \boldsymbol{e}_\theta$$

La force $\boldsymbol{F}$ par unité de longueur dans l'envergure est donc donnée par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &\sim -\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho\Gamma}{2\pi R}(-U_\infty \sin\theta)\boldsymbol{e}_r + \rho U_\infty \cos\theta\left(-\frac{\Gamma}{2\pi R}\right)\boldsymbol{e}_\theta\right]R d\theta \\
&\sim \frac{\rho\Gamma U_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right]d\theta \\
&\sim \frac{\rho\Gamma U_\infty}{2\pi}\,2\pi\boldsymbol{e}_2 \qquad \boldsymbol{F} \sim (0, \rho\Gamma U_\infty) \quad \text{Kutta-Joukowski theorem}
\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de force de traînée (paradoxe de d'Alembert), mais une force de portance directement proportionnelle à la circulation autour du profil

Théorème de Kutta-Joukowski (suite)

Sillage derrière un avion Cessna
(photographié par Paul Bowen)

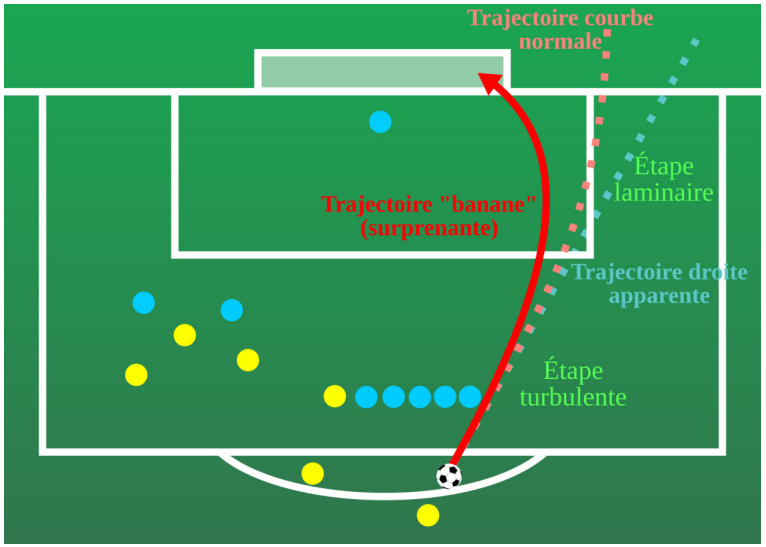
Effet Magnus

Le résultat précédent est aussi connu sous le nom de force de Magnus (1852), qui s'exerce sur un objet en rotation (vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$)

$$\boldsymbol{F}_M \propto \rho L^3 \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{U} \qquad S \propto L^2 \qquad \Gamma = \Omega S$$

Pour déterminer la trajectoire $\boldsymbol{x}$ d'une balle en rotation sur elle même de masse m et de rayon a, on doit résoudre ($\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{U}$)

$$\rho \ddot{\boldsymbol{x}} = m\boldsymbol{g} \underbrace{-C_D \frac{1}{2}\rho U^2 S \frac{\dot{\boldsymbol{x}}}{|\dot{\boldsymbol{x}}|}}_{= -C_D \frac{1}{2}\rho |\dot{\boldsymbol{x}}| \dot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{C_M \rho \pi a^3 \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{x}}}_{C_M = C_M\left(\mathrm{Re}, \frac{\Omega a}{U}\right)}$$



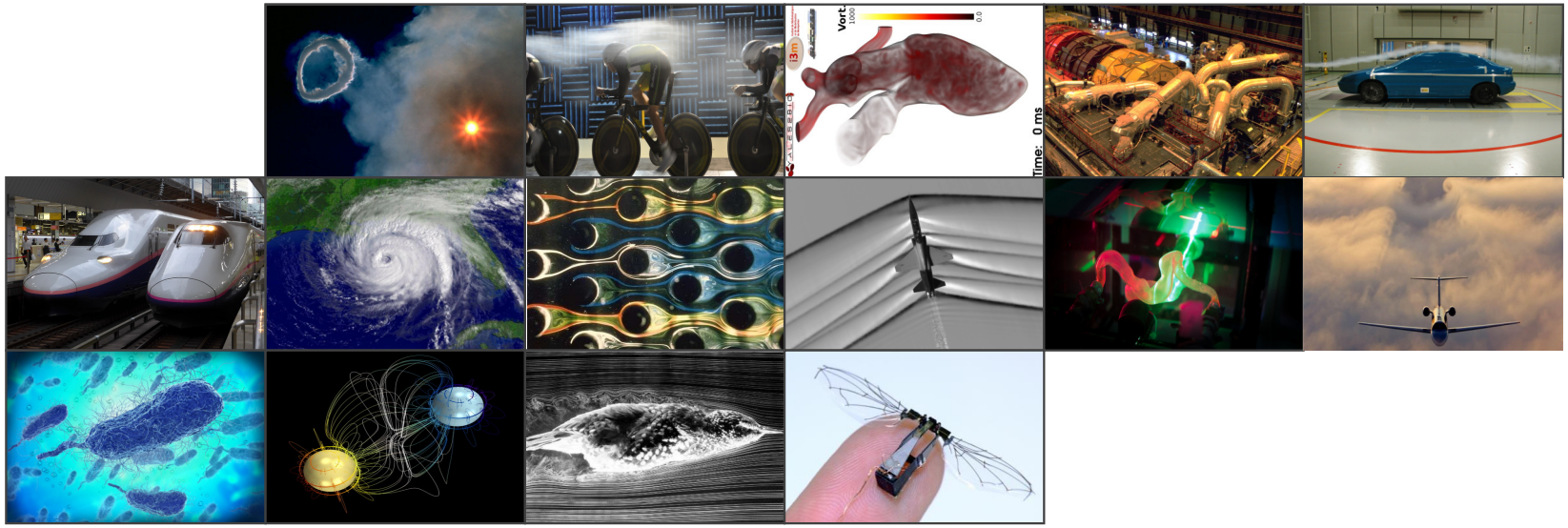
France / Brésil à Gerland en 1997 : coup franc de Roberto Carlos (position des joueurs et trajectoires, les français sont figurés en bleu et les brésiliens en jaune)

- Concepts de vorticité, d'écoulement irrotationnel avec la version force de l'équation de Bernoulli, de relation non locale entre la vitesse et la vorticité, de la circulation, d'un tourbillon circulaire et d'un tourbillon ponctuel
- Équation de transport sur la vorticité
- Origine pariétale de la vorticité
- Écoulement potentiel autour d'un profil d'aile
- Théorème de Kutta-Joukowski

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

6 - Turbulent flow



6 - Turbulent flow

A short description of turbulent flow

Statistical description

- Reynolds decomposition
- Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

Turbulence modeling

- Turbulent kinetic energy and dissipation
- Concept of turbulent viscosity
- Turbulent kinetic energy budget

Energy Cascade

- Scales
- Phenomenological description

Key results

Turbulent flow

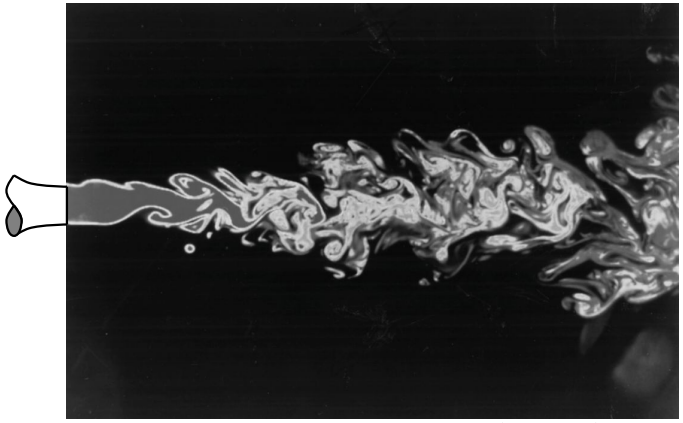
- unsteady aperiodic motion
- unpredictable behaviour over a long time horizon
- presence of a wide range of time and three-dimensional space scales

Turbulence appears when the source of the kinetic energy which drives the fluid motion is able to overcome viscosity effects. Reynolds number must be large enough to observe the turbulent state, refer to Reynolds' experiment

- astrophysics, geophysical flows including ocean circulation, climate, weather forecast, hydrology, dispersion of aerosols
- external aerodynamics for aeronautics & ground transportation, internal flows in mechanical engineering, biomechanics, biological flows
- noise of turbulent flows (aeroacoustics), sound propagation (atmosphere, ocean), fluid-solid coupling and vibroacoustics

Turbulent subsonic (round) jet

$\mathrm{Re}_D = u_j D/\nu$

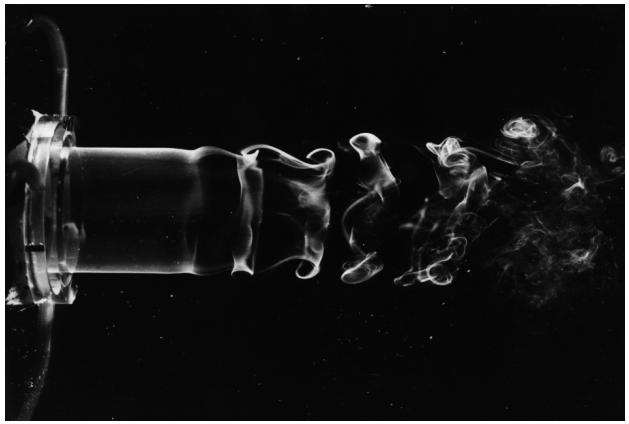


Prasad & Sreenivasan (1989)

$Re_D \simeq 4000$

Dimotakis *et al.* (1983)

$Re_D \simeq 10^4$

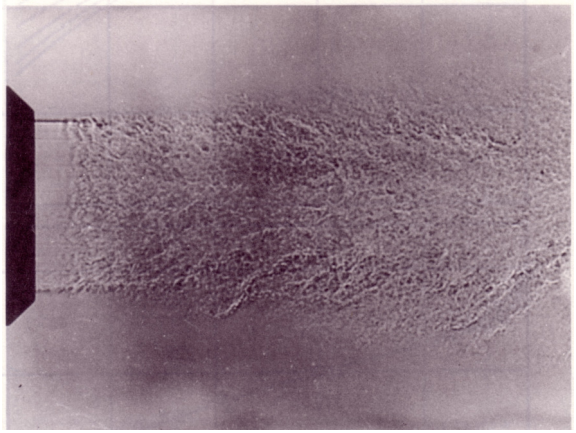


Kurima, Kasagi & Hirata (1983)

$Re_D \simeq 5.6 \times 10^3$

Ayrault, Balint & Schon (1981)

$Re_D \simeq 1.1 \times 10^4$

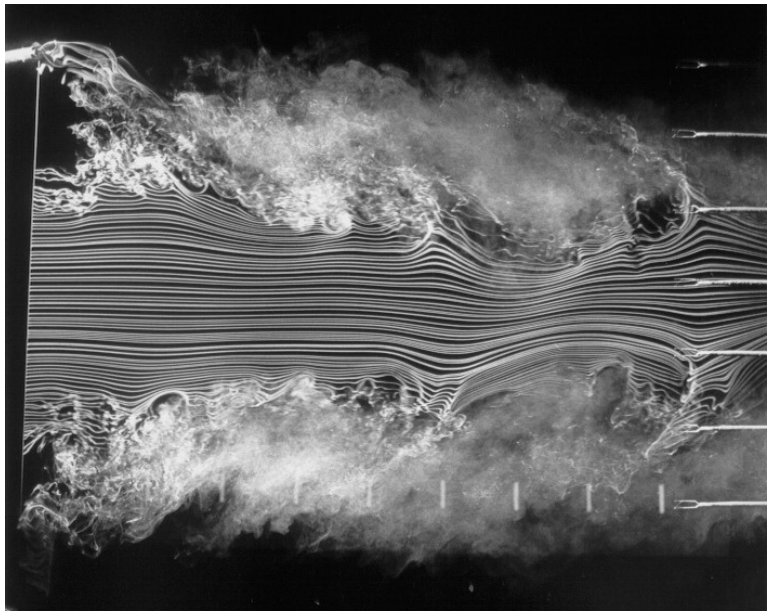


Mollo-Christensen (1963)

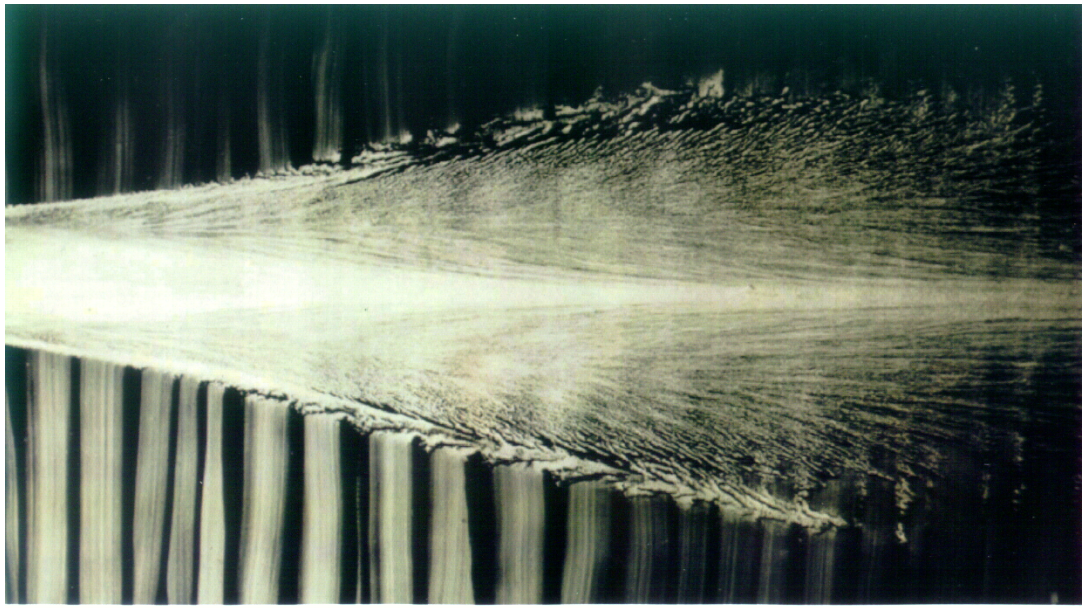
$Re_D = 4.6 \times 10^5$

Importance of entrainment for free shear flows

The flow divergence is induced by the entrainment of the surrounding fluid into the jet (turbulent mixing)



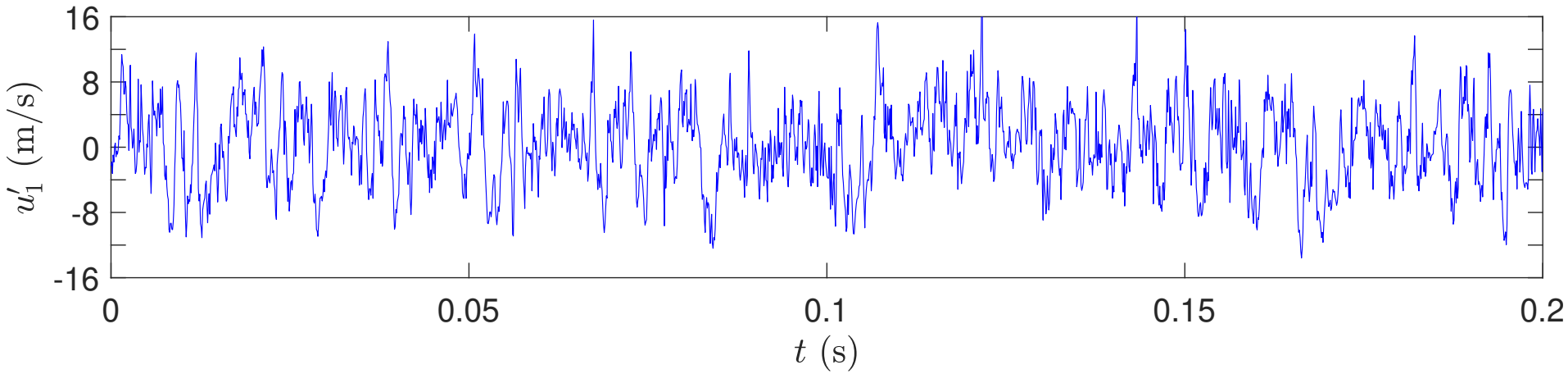
Visualization with smoke wires
$\mathrm{Re}_D \simeq 5.4 \times 10^4$
Courtesy of H. Fiedler (1987)



Entrainment by a turbulent round jet from a wall
$\mathrm{Re}_D = 10^6$
Florent, *J. Méc.* (1965)

- **Fluctuating velocity signal in the shear layer of a subsonic round jet**
  (measured by crossed-wire probes at $x_1 = 2D$, $x_2 = D/2$, $x_3 = 0$)
  Nozzle diameter $D = 50$ mm, exit velocity $U_j = 30$ m.s^{-1}
  $\rightsquigarrow$ Reynolds number $\mathrm{Re}_D = 10^5$

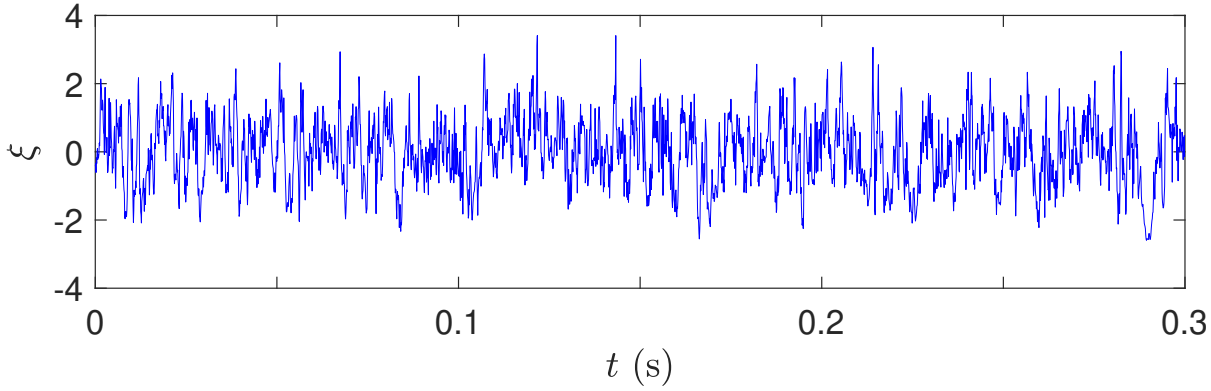
$u_1'(t)$

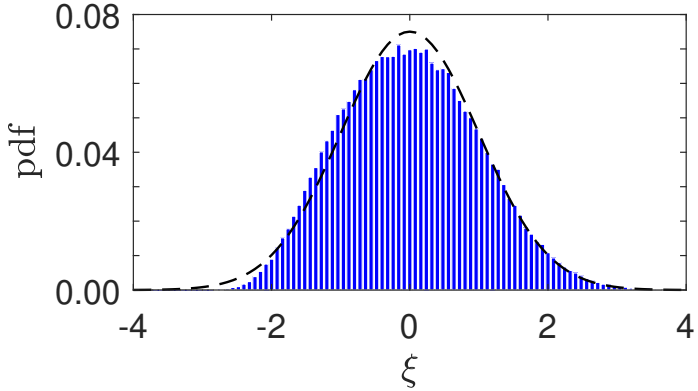


- **Fluctuating velocity signal in the shear layer of a jet (cont.)**

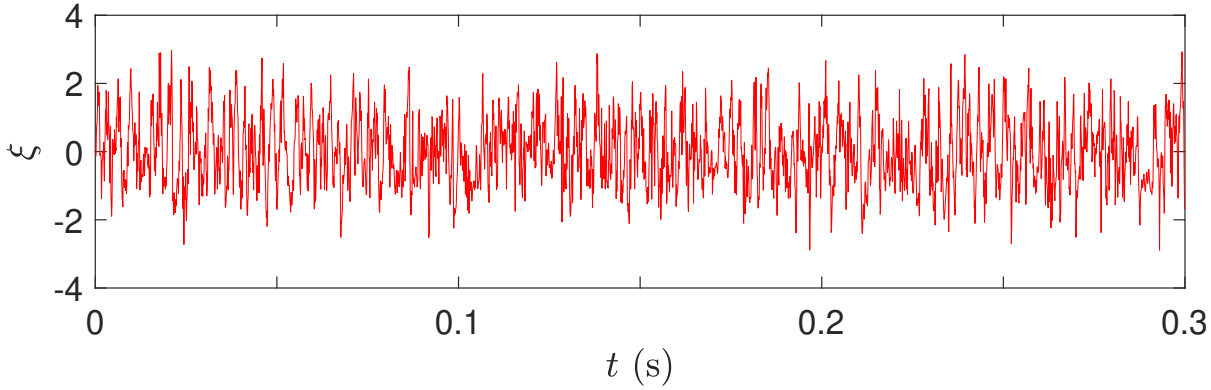
$u_1'(t)$ and $u_2'(t)$ with $\xi = u_\alpha'(t)/u_{\alpha\mathrm{rms}}$

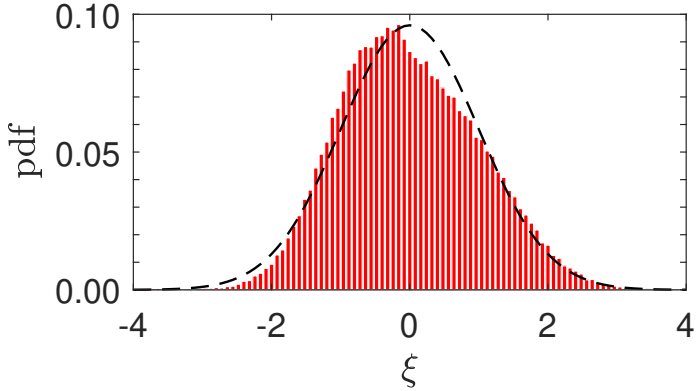
$S_{u_1'} \simeq 0.21 \qquad T_{u_1'} \simeq 2.74$





$S_{u_2'} \simeq 0.24 \qquad T_{u_2'} \simeq 2.76$





What is the reason for this asymmetry of transverse velocity fluctuations ?

Fluctuating velocity signal in the shear layer of a jet (cont.)

For a centered variable $x_i' \equiv x_i - \bar{X}_i$ of root-mean-square deviation $x'_{i,\text{rms}} \equiv \left(\overline{x_i'^2}\right)^{(1/2)} = \sigma_{x_i}$, the skewness S and the flatness or kurtosis T factors are defined by

$$S_{x_i} \equiv \frac{\overline{x_i'^3}}{x'^3_{i,\text{rms}}} \qquad T_{x_i} \equiv \frac{\overline{x_i'^4}}{x'^4_{i,\text{rms}}}$$

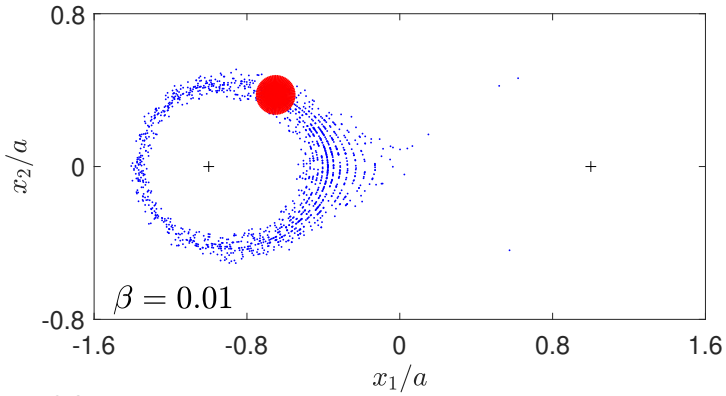
Skewness is a measure of the asymmetry of the probability density function (pdf) about its mean, and flatness is a measure of the tailedness of the pdf.

The Gaussian (normal) distribution is a usual reference pdf,

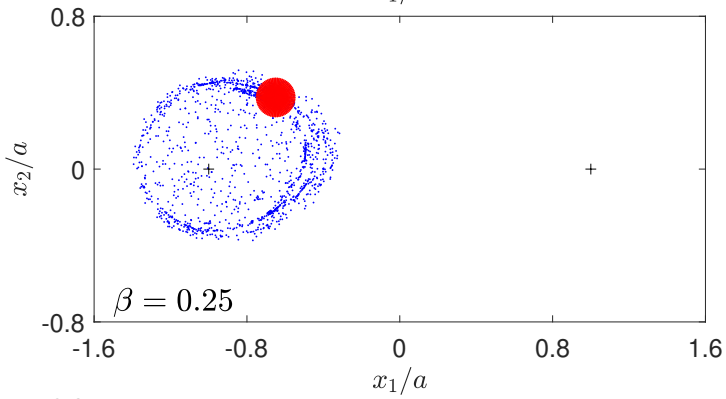
$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right) \qquad x'_{i,\text{rms}} = \sigma_{x_i} \qquad S_{x_i} = 0 \qquad T_{x_i} = 3$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi \qquad \overline{x_i'^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n p(\xi) d\xi$$

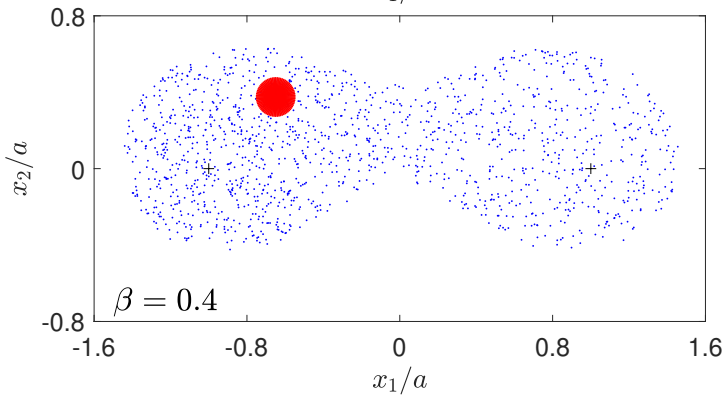
Chaotic mixing : blinking vortex flow of Aref (1984)



$\beta = 0.01$

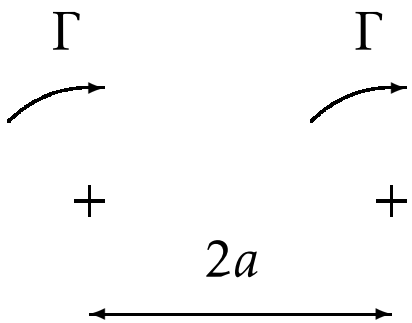


$\beta = 0.25$



$\beta = 0.40$

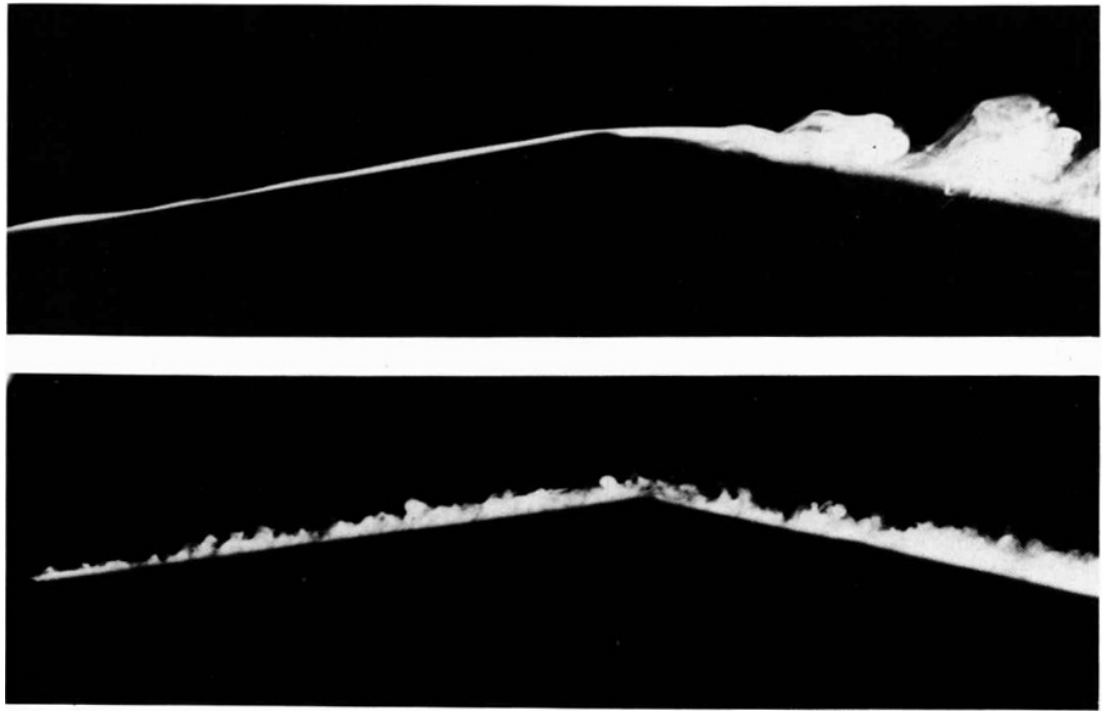
$$\begin{cases} \text{for } 0 \le t \le T, \text{ vortex } (-a, 0) \text{ on} \\ \text{for } T \le t \le 2T, \text{ vortex } (a, 0) \text{ on} \end{cases}$$



control parameter : $\beta = \dfrac{\Gamma T}{2\pi a^2}$

We observe the sensitivity of initial conditions, the transport efficiency and the velocity field induced by vorticity, see Chapter 5

- **Transport efficiency**
  Turbulence $\rightsquigarrow$ increase of diffusion, reduction of flow separation regions, decrease of pressure drag (versus increase in wall friction), increase in thermal exchanges



The laminar boundary layer in the upper photograph separates from the sharp corner whereas the turbulent boundary layer in the second photograph remains attached (from Van Dyke, fig. 156)

Refer also to illustrations in Chapters 3 & 4!

Mean and fluctuating quantities

The statistical mean $\bar{F}(\boldsymbol{x},t)$ of a variable $f(\boldsymbol{x},t)$ is defined as

$$\bar{F}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f^{(i)}(\boldsymbol{x},t)$$

where $f^{(i)}$ is the i-th realization : convenient when manipulating equations but difficult to implement in practice, or even impossible for geophysical flows!

We approximate the ensemble mean $\bar{F}$ of $f = \bar{F} + f'$ by a sufficiently long time average of one realization only :

$$\bar{F}(\boldsymbol{x}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(\boldsymbol{x},t')dt'$$

Time average makes sense only if turbulence is stationary, that is statistics are independent of time (refer to the concept of ergodicity in signal processing)

Reynolds decomposition

For a given variable f, Reynolds decomposition $f = \bar{F} + f'$ into mean and fluctuating (deviation) components is introduced.

- Centered fluctuating field
  $f \equiv \bar{F} + f'$ with $\overline{f'} = 0$ $\quad (f' = f - \bar{F}$ and $\overline{f'} = \bar{F} - \bar{F} = 0)$

- Rule for the product of two any variables (f and g here),
  $f\,g \equiv (\bar{F} + f')(\bar{G} + g') = \bar{F}\bar{G} + \bar{F}g' + f'\bar{G} + f'g'$
  and thus, $\overline{f\,g} = \bar{F}\,\bar{G} + \bar{F}\,\overline{g'} + \overline{f'}\,\bar{G} + \overline{f'g'} = \bar{F}\,\bar{G} + \overline{f'g'}$

$$\boxed{\overline{f\,g} = \bar{F}\,\bar{G} + \overline{f'g'}} \tag{23}$$

Reynolds decomposition for velocity : $U_i \equiv \bar{U}_i + u_i'$ with $\overline{u_i'} = 0$

$\bar{U}_i$ part which can be reasonably calculated

u_i' part which must be modelled (turbulent fluctuations)

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

Assumptions (to simplify) : incompressible flow $\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$
and homogeneous fluid, constant density ρ

How to determine the transport equation of the mean quantities ?
First, substitute Reynolds decomposition and then, average the equation !

$$\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i')}{\partial x_i} = 0 \qquad \overline{\frac{\partial(\bar{U}_i + u_i')}{\partial x_i}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{24}$$

By substracting both equations,

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$$

The mean flow field $\bar{\boldsymbol{U}}$ is incompressible, and so is the fluctuating field $\boldsymbol{u}'$

- **Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations**

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho U_i U_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad \tau_{ij} = 2\mu D_{ij}$$

By introducing Reynolds decomposition, and taking the average
$U_i \equiv \bar{U}_i + u_i' \qquad p \equiv \bar{P} + p' \qquad \tau_{ij} \equiv \bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}'$

$$\frac{\partial(\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_i\, \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\tau}_{ij} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right) \tag{25}$$

The term $-\rho\overline{u_i' u_j'}$ is Reynolds stress tensor, unknown, thus leading to a closure problem for Eqs. (24) and (25). Generally this term is larger than the mean viscous stress tensor except for wall bounded flows, where the viscosity effects become preponderant close to the wall (no-slip boundary condition)

Turbulent kinetic energy k_t and dissipation ϵ

The turbulent kinetic energy and the turbulent dissipation are two key quantities to examine turbulent flows. By introducing Reynolds decomposition, using the rule (23), we obtain

for the kinetic energy,

$$\frac{\overline{U_i U_i}}{2} = \frac{\bar{U}_i \bar{U}_i}{2} + \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} \qquad k_t \equiv \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$$

k_t is the turbulent kinetic energy

for the dissipation,

$$2\nu \overline{D_{ij} D_{ij}} = 2\nu \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij} + 2\nu \overline{d_{ij}' d_{ij}'} \qquad \epsilon \equiv 2\nu \overline{d_{ij}' d_{ij}'}$$

ϵ ($m^2.s^{-3}$) is the dissipation rate of k_t ($m^2.s^{-2}$) induced by the molecular viscosity

- **Concept of turbulent viscosity for turbulence models**
  introduced by Boussinesq (1877)

  Modeling of Reynolds stress tensor $-\rho\overline{u_i'u_j'}$. By analogy with the viscous stress tensor $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$, one defines

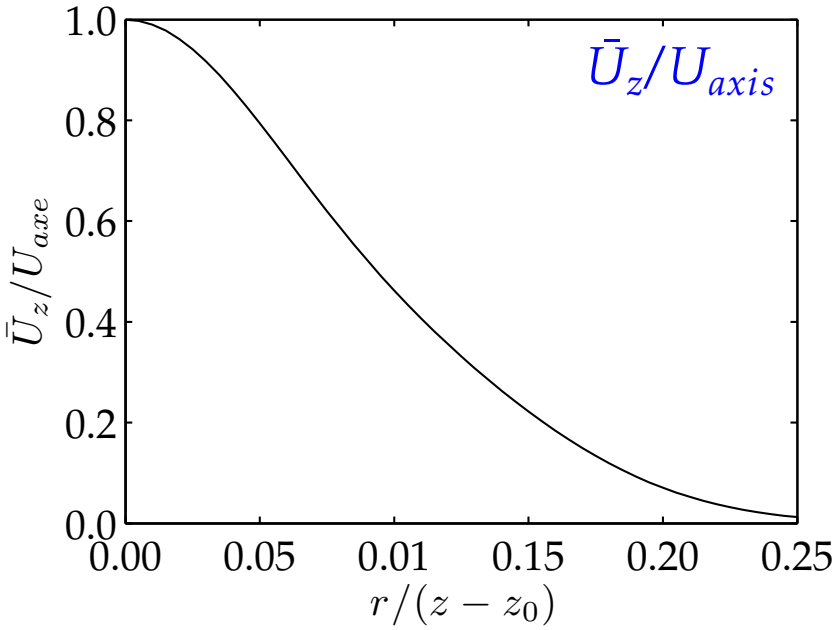
$$\boxed{-\rho\overline{u_i'u_j'} = 2\mu_t\bar{D}_{ij} - \frac{2}{3}\rho k_t\delta_{ij} = \mu_t\left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k_t\delta_{ij}}$$

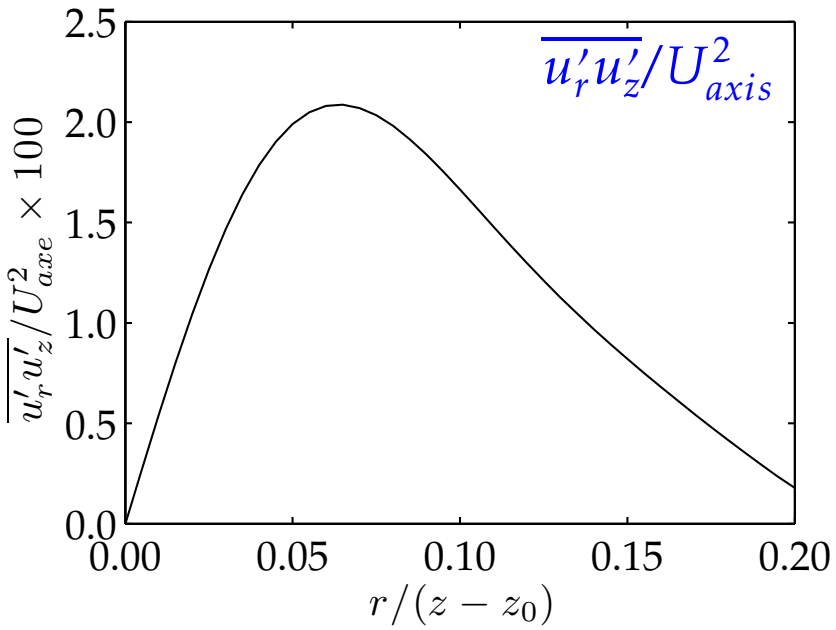
  where $\mu_t = \mu_t(\boldsymbol{x}, t)$ is the turbulent viscosity, a property of the flow field (and not of the fluid as for the molecular viscosity μ)

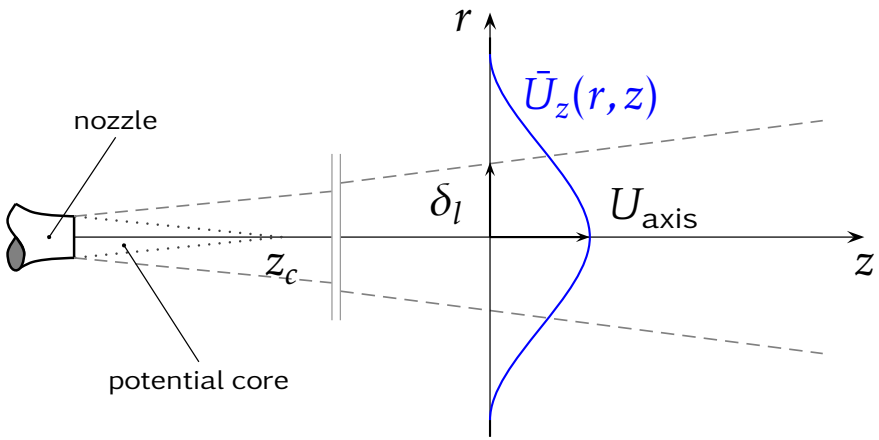
  The introduction of a turbulent viscosity for closing Reynolds stress tensor is an assumption, so not always verified by turbulent flows. In addition, it is also assumed that the turbulent viscosity remains positive (thus inducing specific behaviours in terms of energy transfer)

Illustration for a free subsonic round jet

M = 0.16 and $\mathrm{Re}_D = 9.5 \times 10^4$ (from Hussein, Capp & George, 1994)







$$\rho\overline{u'_r u'_z} \simeq -\mu_t \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial r}$$

Concept of turbulent viscosity for turbulence models (cont.)

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_i \bar{U}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\bar{P} + \frac{2}{3}\rho k_t)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(2(\mu + \mu_t)\bar{D}_{ij}\Big)$$

How to compute the turbulent viscosity $\mu_t(\boldsymbol{x}, t) = \rho \nu_t$?

From dimensional arguments, the product of a velocity scale by a length scale, for example $\nu_t \sim k_t^{1/2} \times k_t^{3/2}/\epsilon \sim k_t^2/\epsilon$, and then write a transport equation for k_t and ϵ to obtain the famous $k_t - \epsilon$ model.

There are about 200 turbulent viscosity models published in the literature! (see textbooks by Wilcox and Durbin among others)

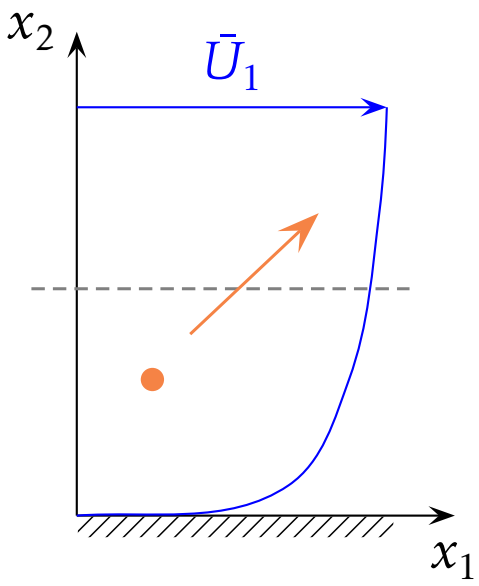
Turbulent kinetic energy budget

The transport equation for k_t is a key result, providing an overview for energy transfers between the mean and the turbulent flows (the demonstration can be found in textbooks). At first glance, production of k_t requires the presence of a mean velocity shear,

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho k_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k_t \bar{U}_j)}{\partial x_j}}_{\text{advection by the mean flow}} = \underbrace{-\rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{production } \mathcal{P}} \underbrace{-\rho\epsilon}_{\text{dissipation}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\frac{1}{2}\rho \overline{u_i' u_i' u_k'} - \overline{p' u_k'} + \overline{u_i' \tau_{ik}'}\right)}_{\text{transport terms}}$$

Heuristic interpretation of the production term $\mathcal{P}$



$$\begin{cases} u_2' > 0 \\ u_1' < 0 \end{cases} \qquad \overline{u_1' u_2'} < 0$$

$$\begin{cases} u_2' < 0 \\ u_1' > 0 \end{cases} \qquad \overline{u_1' u_2'} < 0$$

$\mathcal{P} \simeq -\rho \overline{u_1' u_2'} \dfrac{d\bar{U}_1}{dx_2} > 0$ is thus expected!

The production term $\mathcal{P}$ is – in general – a transfer from the shear mean flow $\bar{\boldsymbol{U}}$ to the turbulent field $\boldsymbol{u}'$ (but becomes always a positive transfer term using a turbulent viscosity model, a drawback of turbulence models)

Scales

Large scales in $\mathcal{O}(L, u')$ – associated with the geometry (cavity, cylinder, jet, wake, car, airfoil, pipe, ...) and thus directly linked to the size of the flow itself

$\rightsquigarrow$ energy transfer between (basically from) large scale structures to small scale structures, but this transfer is stopped by the molecular viscosity for the smallest scales

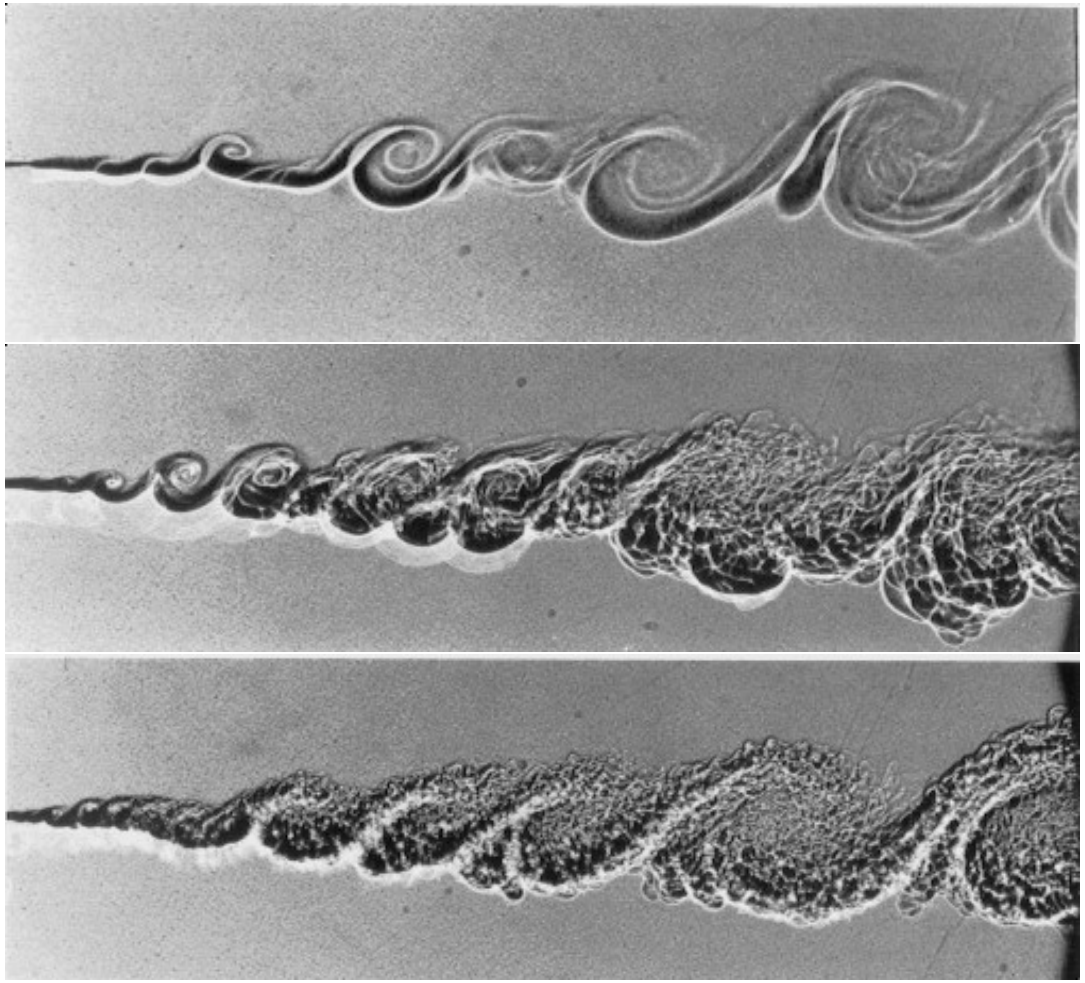
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} \simeq \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}'$$

Smallest scales in $\mathcal{O}(l_\eta, u_\eta)$ – known as the Kolmogorov scales ($\mathrm{Re} = u_\eta l_\eta / \nu = 1$). The Kolmogorov length scale l_η plays a fundamental role in experiments (sampling frequency) as well as in numerical simulations (grid size).

The ratio L/l_η is a function of Reynolds number $\mathrm{Re}_L = u'L/\nu$,
where $u'^2 \simeq 2k_t/3$

$$\frac{L}{l_\eta} \sim \mathrm{Re}_L^{3/4}$$

Turbulent mixing layer (Brown & Roshko, 1974)

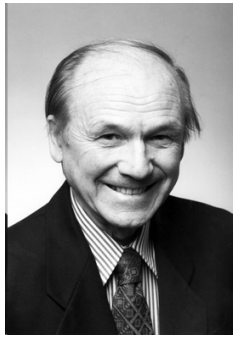


(Shadowgraphs with a spark source)

Energy cascade in a mixing layer by increasing Reynolds number (through pressure and velocity, $\times 2$ for each view)

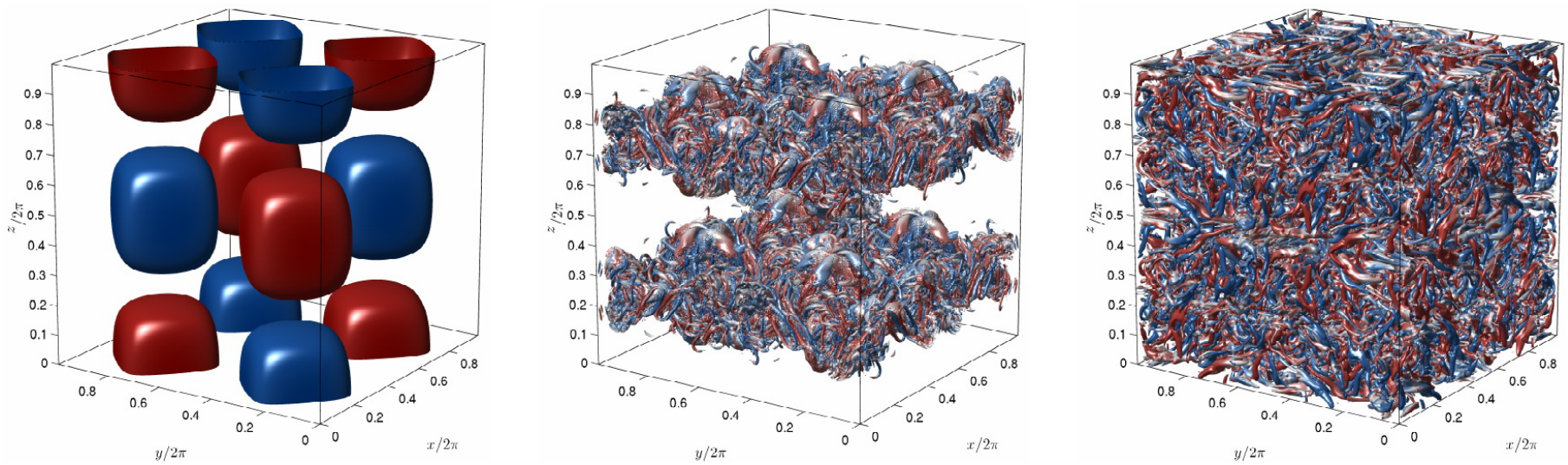
More small-scale structures are produced without basically altering the large-scale ones (linked to the transition process, as shown by Winant & Browand, 1974)

Anatol Roshko (1923-2017)

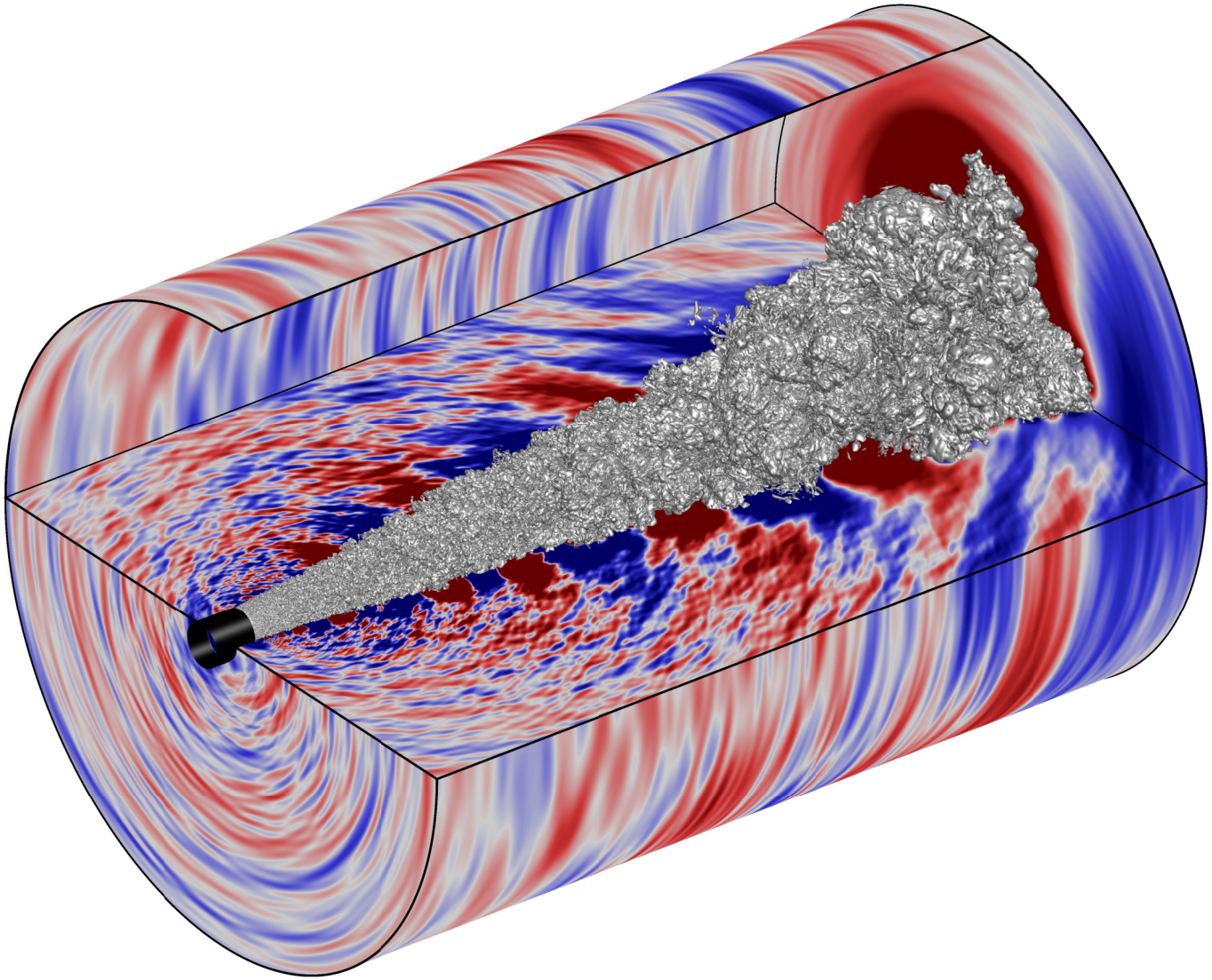


- **Taylor-Green vortex flow**
  Re = 3000 on a 384^3 grid at times $t = 0$, $t = 9$ and $t = 18$ (dimensionless variables)
  From Fauconnier *et al.* (2013)

Vortex structures colored by z-vorticity, $\omega = \nabla \times \boldsymbol{u}$



- **High-fidelity simulation of turbulent flow and its noise in a physically and numerically controlled environment**



Isothermal turbulent jet at $M = 0.9$ and $Re_D = 10^5$, 1.1×10^9 points, $0 \leq r \leq 7.5D$ and $-D \leq z \leq 20D$

Pressure fluctuations (± 55 Pa) and normalized vorticity ($|\omega| \times \delta_\theta / U_c$)

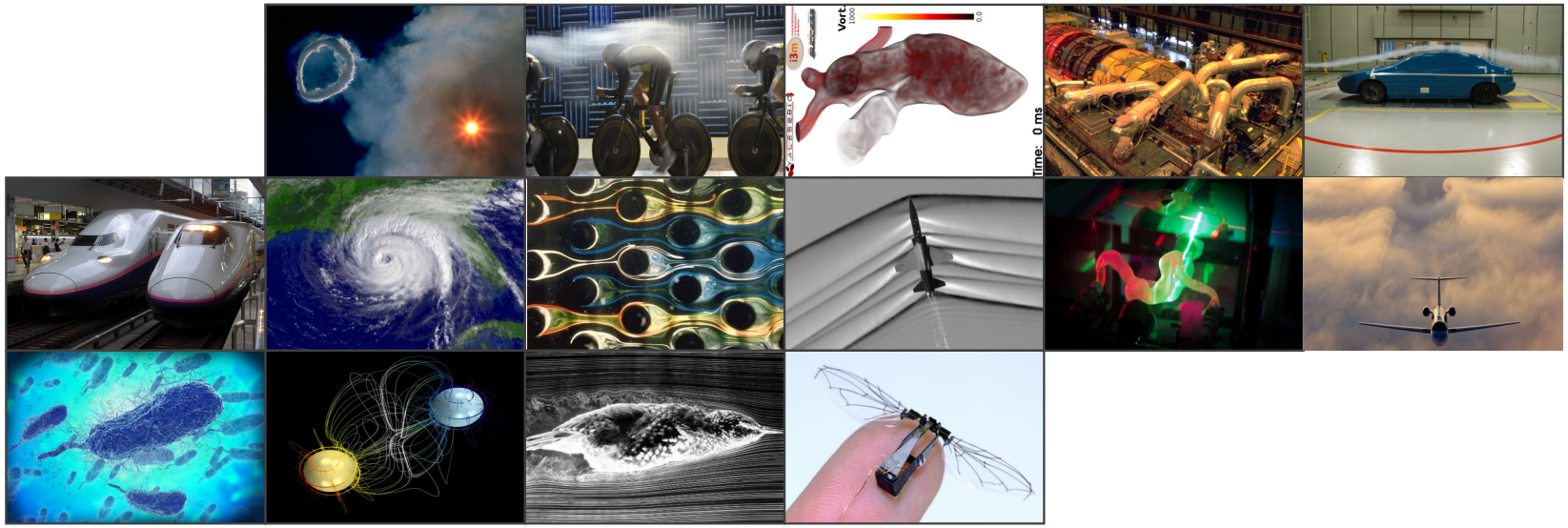
(Bogey, 2017)

- Features of turbulence
- Reynolds decomposition, RANS Eqs. (25)
  and the closure of Reynolds stress tensor $-\rho\overline{u_i' u_j'}$
- Concept of turbulent viscosity
- Key scales and energy cascade

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

7 - Energy, thermodynamics and compressible flow



7 - Energy, thermodynamics and compressible flow

Conservation of total energy

- Compressible viscous stress tensor
- Internal energy
- First law of thermodynamics
- Heat input
- Local formulation of the energy conservation

Thermodynamics of equilibrium

- Thermodynamic variables
- First law of thermodynamics
- Gibbs identity
- Specific heats
- Perfect gas

Thermodynamics of motion

- Thermodynamic variables
- Constitutive laws
- Governing equations
- Boundary conditions

Entropy and the second law of thermodynamics

- Entropy's equation
- Conservation of internal energy
- Equation for temperature

Compressibility effects

- Mach number
- Selected historical milestones
- Supersonic flow

- **Flow is henceforth compressible :** $\nabla \cdot \boldsymbol{U} \neq 0$

  - As a result, the interactions between heat and dynamics must be now considered, with the introduction of thermodynamic relations

  - Newtonian law for the viscous stress tensor

    $\boldsymbol{\sigma} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ with $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{U})\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

    where λ is the second viscosity

    It is straightforward to show that (left as an exercise) that the viscous dissipation reads

    $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{U})^2 \geq 0$

  - Mean normal shear stress : $\sigma_{ii}/3 = -p + \left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)\nabla \cdot \boldsymbol{U}$

    $\rightsquigarrow$ the thermodynamic pressure now differs from the mean normal shear stress

- **Internal energy**

$$E_t = \int_{\mathcal{D}} \rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, d\mathcal{V}$$

The new variable $e = e(\boldsymbol{x}, t)$ is associated with the internal state description of the fluid (internal motion of molecules or thermal agitation)

e is the specific internal energy in J.kg^{-1}
(specific quantity = value per unit of mass of the fluid)

e_t is the specific total energy
E_t is the total energy contained in the fluid domain $\mathcal{D}$

- **First law of thermodynamics (conservation of energy)**

$$\boxed{\frac{dE_t}{dt} = P_{\text{ext}} + Q}$$

$P_{\text{ext}} \equiv$ rate of work by body and surface (external) forces
$Q \equiv$ amount of heat provided to the fluid domain $\mathcal{D}$
(Remark : time rate of energy change - strictly speaking - power terms, in W)

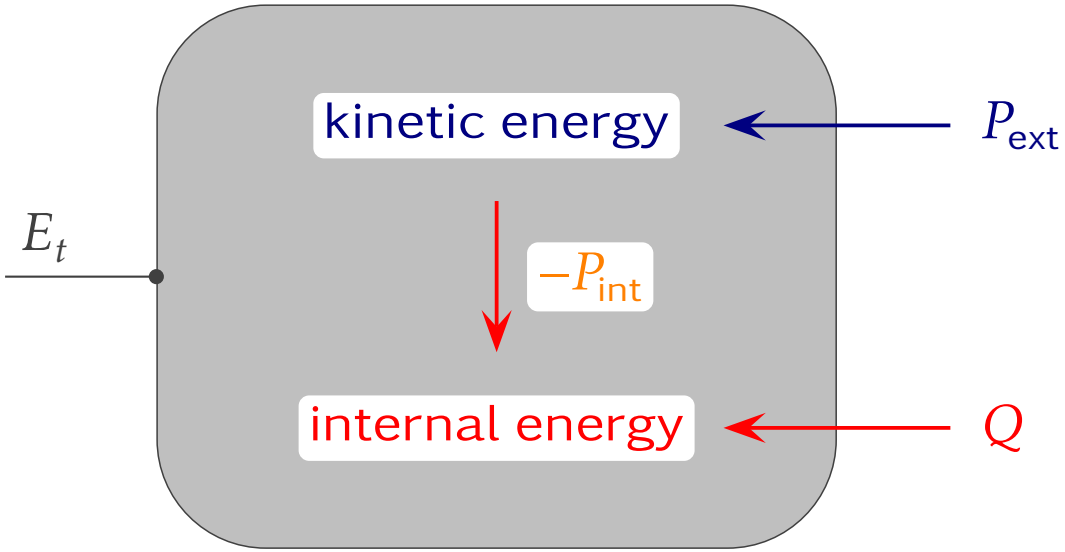
From the conservation of the kinetic energy, refer to Eq. (13) in slide 89, written here for a material domain $\mathcal{D}$, one has

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \frac{U^2}{2}\, dv = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

from which it can be deduced that
(= heat addition + viscous effects/friction)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho e\, dv = Q - P_{\text{int}}$$

- **First law of thermodynamics (cont.)**



$$\frac{dE_t}{dt} = P_{\text{ext}} + Q$$

- **First law of thermodynamics (cont.)**

Reminder of the expressions of P_{ext} and P_{int}, refer to Eq. (14) in slide 89,

$$P_{\text{ext}} \equiv \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{U} \cdot (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n})\, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g}\, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}} \left[\nabla \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) + \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g} \right] d\mathcal{V}$$

$$-P_{\text{int}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\, d\mathcal{V} = \underbrace{-\int_{\mathcal{D}} p \nabla \cdot \boldsymbol{U}\, d\mathcal{V}}_{\text{compression / dilatation}} \underbrace{+\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}}\, d\mathcal{V}}_{\text{viscous dissipation} > 0} \tag{26}$$

The first term is associated with the work of pressure on fluid particles : this term is positive or negative (acts like a ressort), and is null for an incompressible flow

The second term represents the work of viscous forces acting on fluid particles

Heat input

$$Q \equiv Q_s + Q_v$$

Surface heat input

$$Q_s = -\int_{\mathcal{S}} q \, d\mathcal{S}$$

Input heat flux accross the surface $\mathcal{S}$: thermal conduction, tranfer of energy through the motion / collisions of molecules and electrons (no mass transfer)

q in W.m^{-2}

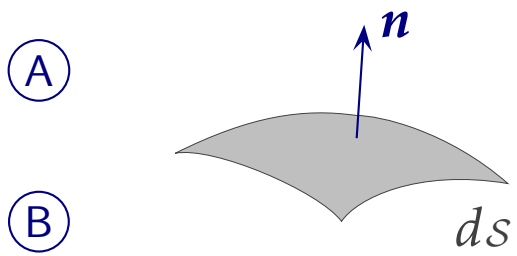
Volumetric heat input

$$Q_v = \int_{\mathcal{D}} \rho q_\star \, d\mathcal{V}$$

Radiative heat transfer : direct input inside the domain $\mathcal{D}$, for instance by radiation absorption or emission (electromagnetic waves)

$q_\star$ in W.kg^{-1} (amount of heat addition per unit mass)

Heat flux vector



$q(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{n})\, ds$ heat flux

heat flux vector $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t)$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) = \begin{bmatrix} q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_1) \\ q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2) \\ q(\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix}$$

Cauchy's relation : $q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}$, linear relation in $\boldsymbol{n}$ (refer to a similar discussion in Chapter 1 for the stress tensor $\boldsymbol{T} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \boldsymbol{n}$)

$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$ is the heat flux from B to A accross the elementary surface ds

$$Q_s = -\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = -\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}\, dv$$

- **Local formulation for the conservation of energy**
  Can be written in many different forms, all of which are useful!

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{total energy} & \rho\dfrac{De_t}{Dt} & = & \nabla\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) + \rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho q_\star \\
\text{kinetic energy} & \rho\dfrac{D}{Dt}\left(\dfrac{1}{2}U^2\right) & = & \nabla\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) + \rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g} + p\nabla\cdot\boldsymbol{U} - \overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}} \\
\text{internal energy} & \rho\dfrac{De}{Dt} & = & \underbrace{-p\nabla\cdot\boldsymbol{U}}_{\text{compression}} + \underbrace{\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}}}_{\text{dissipation}} \underbrace{-\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho q_\star}_{\text{heat input}}
\end{array}
\tag{27}
$$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) + \rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{g}$ local rate of external work (P_{ext})

$-\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho q_\star$ local heat addition (Q)

$p\nabla\cdot\boldsymbol{U} - \overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{D}}$ local rate of internal work (P_{int})

Integral formulations can also be established by using the Reynolds theorem (5) introduced in Chapter 2, see slide 36

Thermodynamic variables

Fluid in equilibrium

$$\begin{cases} \text{steady state, no flow (no motion)}, \boldsymbol{U} = 0 \\ \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} \text{ (only pressure)} \Longrightarrow \text{pressure is then defined} \\ \text{fluid properties such as } \rho, p \text{ and } e \text{ are independent of } \boldsymbol{x} \text{ and } t \end{cases}$$

Thermodynamics introduces new state variables : the absolute temperature T, the specific entropy s and the specific enthalpy $h \equiv e + p/\rho$

Among all these thermodynamic variables, that is ρ, e, p, T, s, and h, only ρ and e are defined independently of any thermodynamic equilibrium (*i.e.* defined independently of any thermodynamic analysis)

For a simple thermodynamic system, any variable can be calculated from two other independent variables. A local thermodynamic state in fluid mechanics, that is with the presence of flow, can be generalized by first considering $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ and $e(\boldsymbol{x}, t)$, to thus determine other variables, $s = s(\rho, p)$ or $p = (\rho, s)$ for instance

Link with the first law of thermodynamics for a closed system

Both heat and work are forms of energy, and energy is conserved

James Prescott Joule (1818-1889)

For a closed system,

$$\delta q = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{28}$$

δq heat supplied to the system (positive toward the system)

$-pd\nu_s$ work done on the system by the surroundings, positive toward the system, $\nu_s = 1/\rho$ is the specific volume

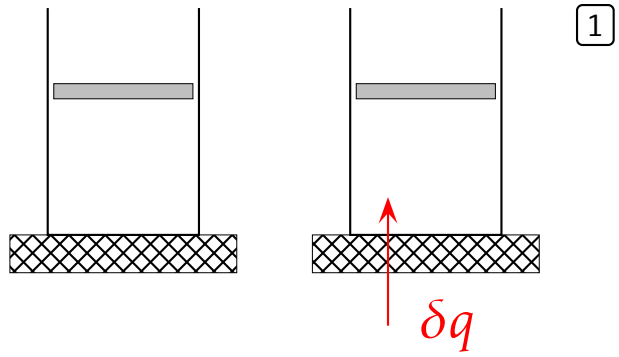
$d \equiv$ depends only upon the change of state (applied to a state variable)
$\delta \equiv$ depends upon the process used to change the state

When δq is obtained by a reversible process, that is a succession of equilibrium states in (28), the internal energy conservation (27) for an ideal fluid is retrieved,

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho}\nabla\cdot\boldsymbol{u} + q_\star = \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} + q_\star = -p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + q_\star$$

Specific heats

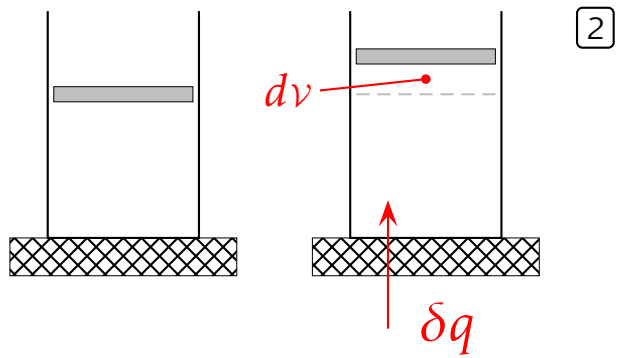
$v = \text{cst}$



Heat δq is supplied to the system at constant volume, the internal energy increases by $\delta q = de = c_v dT$

$$c_v = \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_\rho \quad \text{specific heat at constant volume}$$

$p = \text{cst}$



At constant pressure $\delta q = dh = c_p dT$

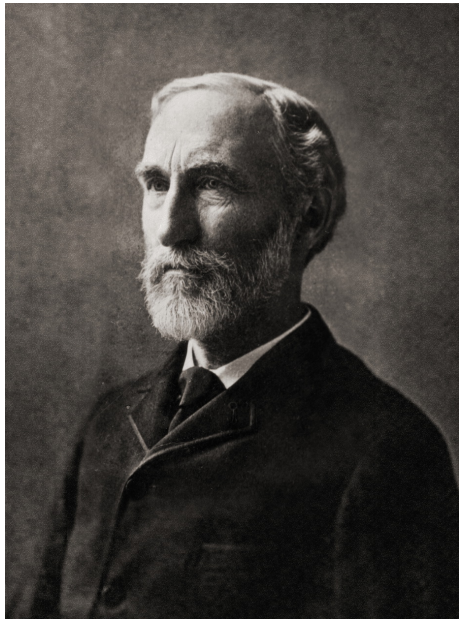
$$c_p = \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p \quad \text{specific heat at constant pressure}$$

With respect to the previous configuration at constant volume, the volume must now expand which requires work, $\delta q = de + p\, dv$

Ideal (perfect) gas $c_p = c_v + r$

Liquid (incompressible) : $c = c_p = c_v$

Second law of thermodynamics and Gibbs relation



Josiah Willard Gibbs
(1839 - 1903)

For a reversible process, $\delta q \equiv T ds$ where the entropy s is a new state variable (Rudolf Clausius, 1822-1888)

and combining with the first law of thermodynamics (28), the following fundamental identity is derived

$$T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad \text{Gibbs relation}$$

where for an arbitrary process,

$$ds = \left(\frac{\delta q}{T}\right)_{\text{rev}} + ds_{\text{irr}} \qquad ds_{\text{irr}} > 0$$

ds_{irr} is induced by thermal conduction, viscosity, species diffusion or shocks in supersonic flow

Adiabatic transformation $\delta q = 0$ and $ds \geq 0$
Adiabatic and reversible transformation $\delta q = 0$ and $ds = 0$: isentropic process

About thermodynamics!

"Thermodynamics is a funny subject. The first time you go through it, you don't understand it at all. The second time you go through it, you think you understand it, except for one or two points. The third time you go through it, you know you don't understand it, but by that time you are so used to the subject, it doesn't bother you anymore"

attributed to Arnold Sommerfeld around 1940
(1868-1951, German theoretical physicist)

Perfect (ideal) gas

Equation of State : $p = \rho r T$,
simple thermodynamic system $p = p(\rho, T)$

$$r = \frac{R}{M} \quad \text{with} \quad \begin{cases} R \simeq 8.314472 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1} & \text{ideal (universal) gas constant} \\ M \text{ molecular weight of the gas} \end{cases}$$

$c_p - c_v = r$ (Mayer's relation)

$$de = c_v dT \qquad dh = c_p dT \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1 \qquad s = c_v \ln(p/\rho^\gamma) + \text{cst}$$

Air $r = 287.06$ J.kg^{-1}.K^{-1}
$\gamma = 1.4$ $c_p = 1000$ J.kg^{-1}.K^{-1} $c_v = 720$ J.kg^{-1}.K^{-1}
(standard conditions)

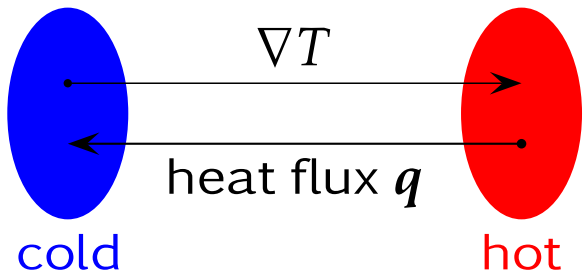
Constitutive laws

Newtonian law for the viscous stress tensor (see slide 232)

$\boldsymbol{\sigma} = -p\overline{\overline{\boldsymbol{I}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$ with $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{U})\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}$

Fourier's law $\boldsymbol{q} = -k\nabla T$
where k is the thermal conductivity

(the minus sign expresses that heat flows from hot to cold region)



The coefficients λ, μ and k are also functions of the local thermodynamic state, for instance with the thermal conductivity $k = k(\rho, e)$

Governing equations for a compressible flow

$\dfrac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0$	mass
$\rho\dfrac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = -\nabla p + \nabla\cdot\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} + \rho\boldsymbol{g}$	momentum
$\rho\dfrac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{U} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho q_\star$	internal energy

with constitutive laws

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} &= 2\mu\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{U})\overline{\overline{\boldsymbol{I}}}\\ \boldsymbol{q} &= -k\nabla T\end{aligned}}$$

and equations of state (by choosing ρ and T here to express the other thermodynamic variables)

$$p = p(\rho, T) \quad e = e(\rho, T) \qquad \mu = \mu(\rho, T) \quad \lambda = \lambda(\rho, T) \quad k = k(\rho, T)$$

Boundary conditions at a solid wall

For the velocity,
viscous fluid, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{\text{wall}}$
inviscid fluid, $\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_{\text{wall}} \cdot \boldsymbol{n}$

For the temperature, $T = T_{\text{wall}}$ for a wall.

The fluid problem should be coupled with the thermal conduction inside the solid, by imposing the continuity of the temperature T and of the heat flux $q = -k\boldsymbol{n} \cdot \nabla T$ between the solid and the fluid.

As for an inviscid flow (no viscosity), the case $k = 0$ (thermal conductivity neglected) must be interpreted with some caution, see slide 282 about the thermal boundary layer

An ideal flow is a flow model for which $\nu = 0$ and $k = 0$
(no viscosity, no thermal conductivity)

Entropy's equation

By applying the Gibbs relation (see slide 243) to a fluid particle, in order to introduce entropy

$$T\,ds = de + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \Longrightarrow \quad T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

the last term can be recast by using the conservation of mass

$$-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{U} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + p\nabla\cdot\boldsymbol{U}}$$

Then, the conservation of the internal energy can be recast as

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\nabla\cdot\boldsymbol{U} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho q_\star \quad \Longrightarrow \quad \rho\frac{Ds}{Dt} = \frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}{T} - \frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{T} + \frac{\rho q_\star}{T}$$

and finally, with the help of the following vectorial identity

$$\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{q}}{T} = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla T}{T^2} + \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)$$

Entropy's equation (cont.)

... the following transport equation for entropy is obtained,

$$\rho\frac{Ds}{Dt} = \underbrace{\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}{T} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla T}{T^2}}_{\text{production of entropy}} + \underbrace{\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{q}}{T}\right)}_{\text{entropy's flux}} + \underbrace{\frac{\rho q_\star}{T}}_{\text{volumetric heat input}}$$

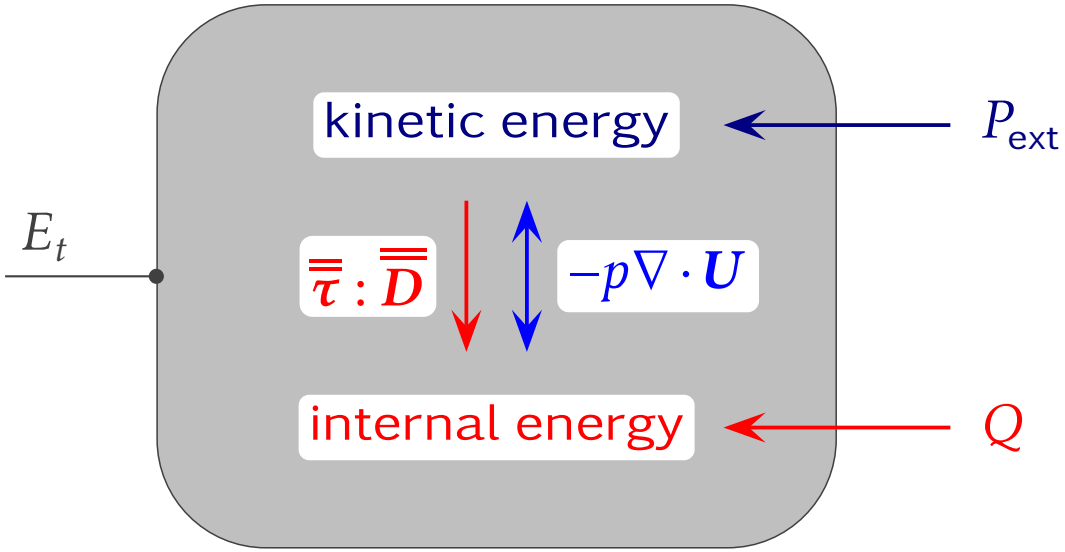
The production of entropy in a control domain $\mathcal{D}$ is thus given by (refer to the definition of dissipation for the first term)

$$\mathcal{P}_s \equiv \int_{\mathcal{D}}\left(\frac{\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}:\overline{\overline{\boldsymbol{D}}}}{T} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla T}{T^2}\right)dv = \text{mechanical dissipation induced by friction} + \text{thermal "dissipation" induced by conduction}$$

According to the second law of thermodynamics, entropy never decreases in an isolated system ($\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ on $\mathcal{S}$, $q_\star = 0$), and increases in presence of an irreversible process. It can be mathematically demonstrated that

$$\mathcal{P}_s \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mu \geq 0 \\ \lambda \geq -2\mu/3 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

Conservation of the internal energy



$$-P_{\text{int}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} \, d\mathcal{V} = \underbrace{-\int_{\mathcal{D}} p\nabla \cdot \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V}}_{\text{reversible process}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} \, d\mathcal{V}}_{\text{irreversible process}}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} < 0 & \text{compression} & \text{kinetic energy} \rightarrow \text{internal energy} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{U} > 0 & \text{expansion} & \text{internal energy} \rightarrow \text{kinetic energy} \end{cases}$$

Transport equation for temperature

From $s = s(p, T)$, it can be written that

$$\frac{Ds}{Dt} = \left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T \frac{Dp}{Dt} + \left.\frac{\partial s}{\partial T}\right|_p \frac{DT}{Dt} = -\frac{\beta}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{c_p}{T}\frac{DT}{Dt} \qquad \text{(using Maxwell relations)}$$

and by using the entropy conservation equation

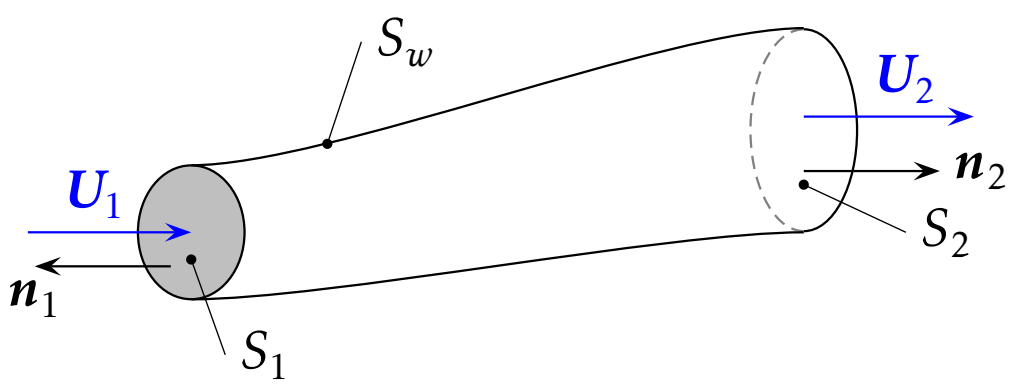
$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_\star$$

the transport equation for the temperature can be finally derived (general formulation for gas and liquid)

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} : \overline{\overline{\boldsymbol{D}}} + \beta T \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{q} + \rho q_\star \tag{29}$$

$$\beta \equiv -\rho \left.\frac{\partial s}{\partial p}\right|_T = -\frac{1}{\rho}\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_p = \frac{1}{T} \text{ for a perfect gas} \qquad (\beta \text{ thermal expansion coefficient})$$

1-D compressible ideal flow model



steady inviscid flow

no gravity

1-D duct model (flow uniform in a cross section)

Application of the Reynolds theorem (5) for a fixed domain $\mathcal{D}$, using Eq. (27) for the total energy e_t

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho \, d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho \boldsymbol{U} \, d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{D}} \nabla p \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \rho \boldsymbol{U}\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = -\int_{\mathcal{S}} [p\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{U}(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n})] \, d\mathcal{S} \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, d\mathcal{V} = -\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot (p\boldsymbol{U}) \, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{S}} \rho e_t \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = -\int_{\mathcal{S}} (p + \rho e_t)\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} \end{cases}$$

1-D compressible inviscid flow model (cont.)

Introducing the total enthalpy $h_t = h + U^2/2$, with $h = e + p/\rho$ and consequently $\rho e_t + p = \rho h_t$, the last previous Eq. reads as

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho e_t \, dv = -\int_{\mathcal{S}} \rho h_t \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n} \, ds$$

The conservation of mass, momentum and total energy then provides

$$\begin{cases} [\rho U S]_1^2 = 0 \\ \left[(\rho U^2 + p)S\right]_1^2 = 0 \\ [\rho h_t U S]_1^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \rho_1 U_1 S_1 = \rho_2 U_2 S_2 = \dot{Q}_m \quad \text{mass flow rate} \\ (\rho_1 U_1^2 + p_1)S_1 = (\rho_2 U_2^2 + p_2)S_2 \\ h_{t1} = h_{t2} \end{cases}$$

- **The Pitot tube revisited, see slide 59**

The total (or stagnation) enthapy h_t is thus preserved. Using the same notations as for the incompressible case,

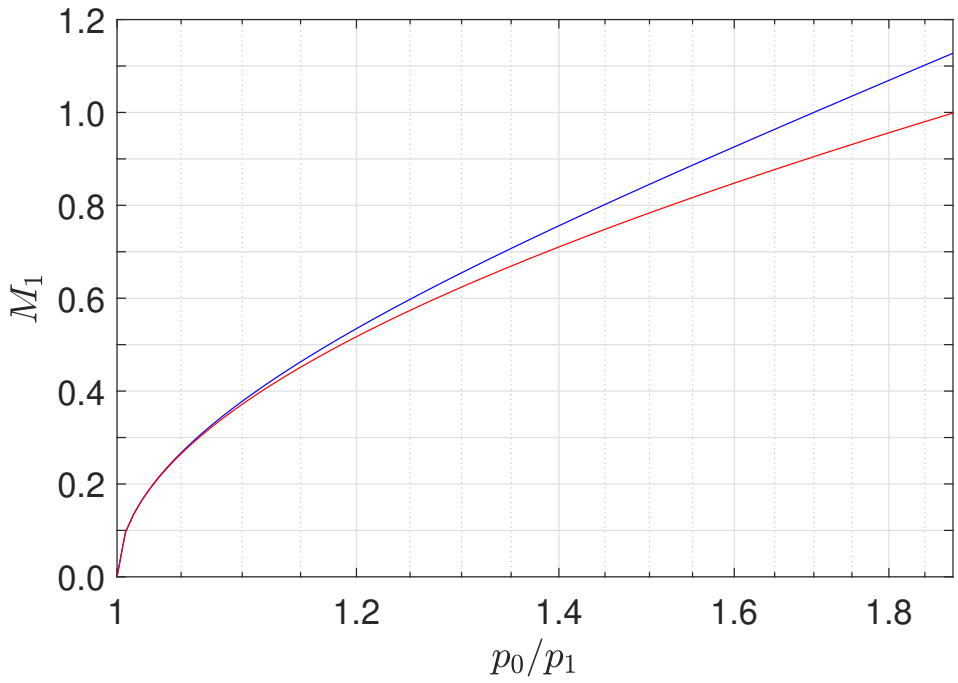
$$h_{t1} = h_{t0} \qquad c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p T_0 \qquad c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1} \qquad \text{(perfect gas)}$$

$$T_0 = T_1 + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{1}{\gamma r}U_1^2 \quad \Longrightarrow \quad T_0 = T_1\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right) \qquad M_1 = \frac{U_1}{c_1} \qquad (c_1^2 = \gamma r T_1)$$

From the equation of state for ideal gas $p = \rho r T$ and the isentropic relation $p/\rho^\gamma =$ cst, refer to slide 245, it is then straightforward to obtain a similar relation for pressure

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

The Pitot tube revisited (cont.)



Compressible flow model

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

Incompressible flow model

$$M_1^2 = \frac{2}{\gamma}\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right)$$

$M_1 \to M_1$ as $\Delta p = p_0 - p_1 \to 0$

Deviation by 5% of the incompressible model from the compressible one for $M_1 \simeq 0.3$, which provides the classical condition for applying incompressible flow model

- **Some historical milestones**

Ernst Mach (1838-1916, Austrian physicist)
(The origins of the Mach number 1887)

Karl Gustaf Patrik de Laval (1845-1913, Sweden)
Supersonic convergent-divergent nozzle (1893)

Some historical milestones

14 oct. 1947 - First supersonic aircraft
Bell X-1 flying at $M \simeq 1.06$
Major Chuck Yeager (USAF, 1923-2020)

(US Air Force, 1947)

14 oct. 2012 - First person to break the sound barrier $M \simeq 1.25$ (freefall)
Felix Baumgartner
(Austrian, living in Germany)

(Red Bull Stratos project)

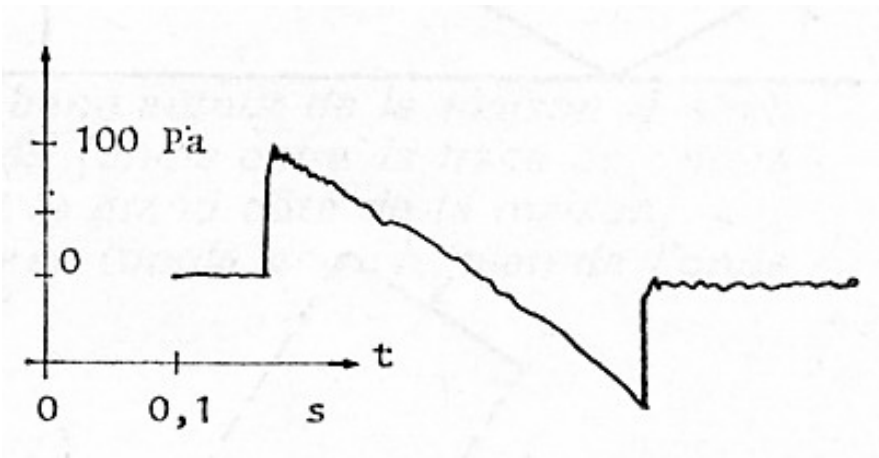
Sonic boom

F/A-18 Hornet breaks the sound barrier
Off the coast of Pusan, South Korea, July 7, 1999
(U.S. Navy/Ensign John Gay)

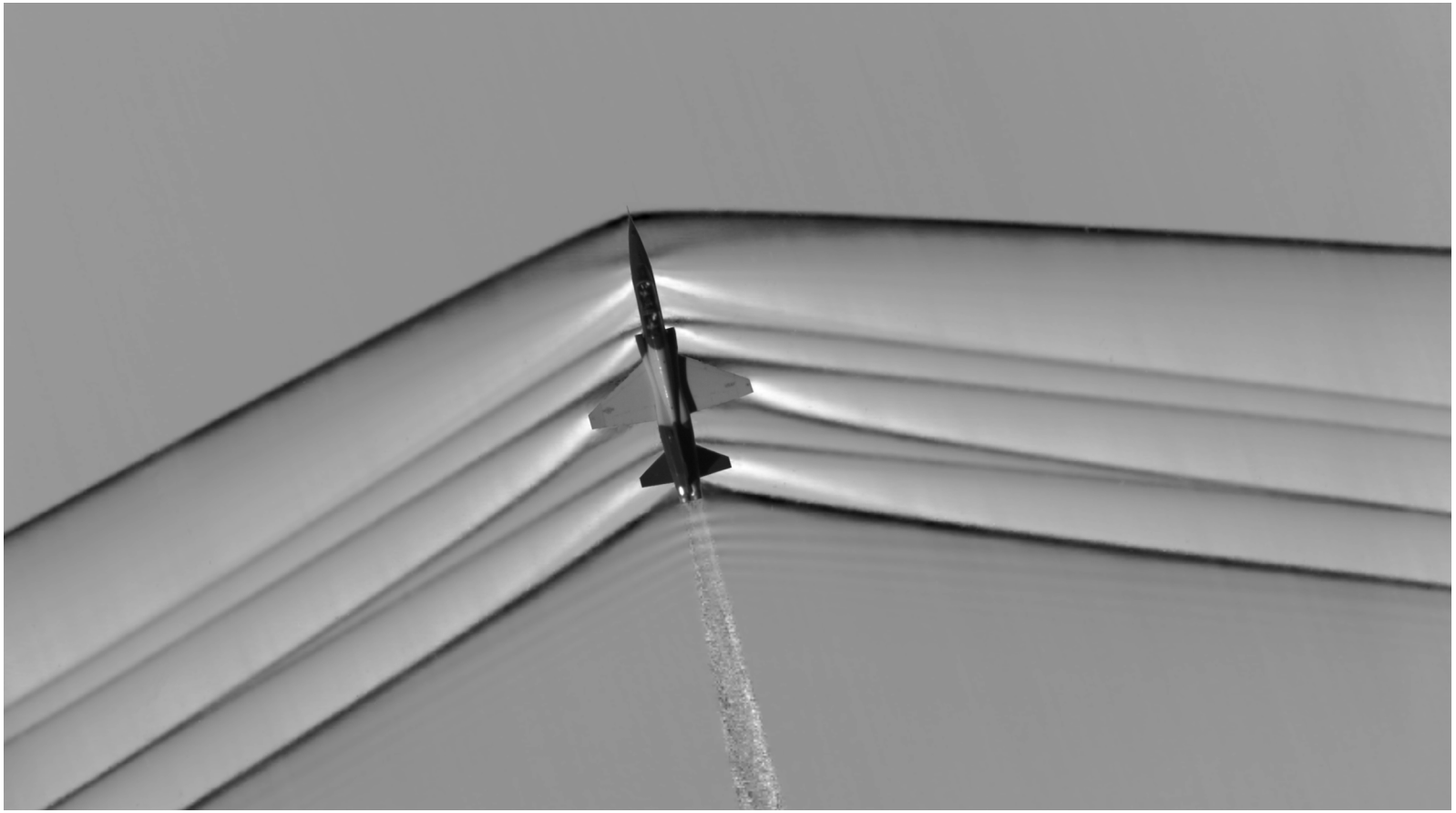
The cloud forms as a result of the decrease in pressure and temperature behind the shock

Concorde - Shock waves at Mach 2.2
in wind tunnel (ONERA)

N-wave pattern measured close to the ground from Concorde



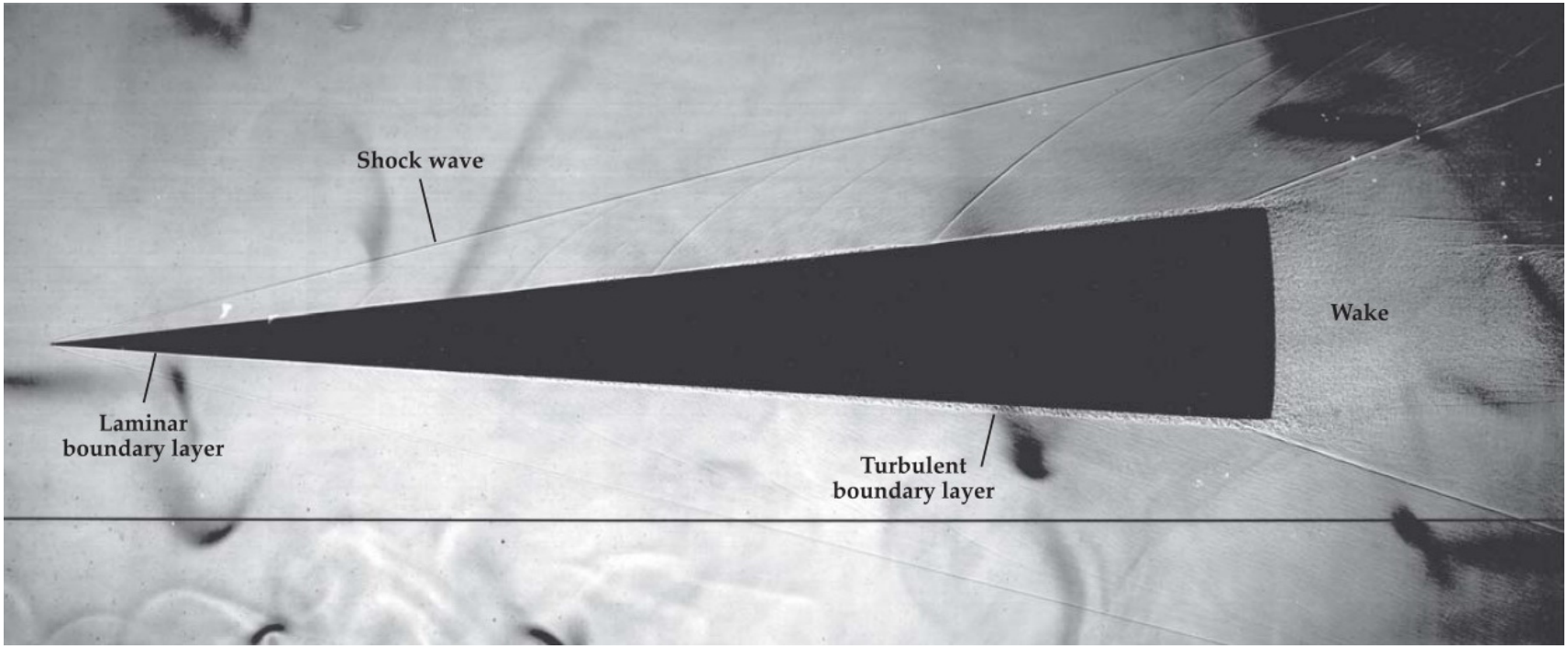
- Shock waves of a supersonic jet flying above the Mojave desert (NASA, 2015)



Shadowgraph of transition on a sharp cone at Mach 4.31

(Schneider, *Prog. Aero. Sci.*, 2004, from Naval Ordnance Lab ballistics range)

A shock wave emanating from the nose of a cone travelling at Mach 4 in a ballistic range shows up as a thin dark line in this Schlieren image ; the sharp jump in density across the shock produces a steep refractive-index gradient, which in turn deflects transmitted light, thereby producing the contrast that we observe in the figure. Also visible are laminar and turbulent boundary layers and the wake. Re $\simeq 6.2 \times 10^5$

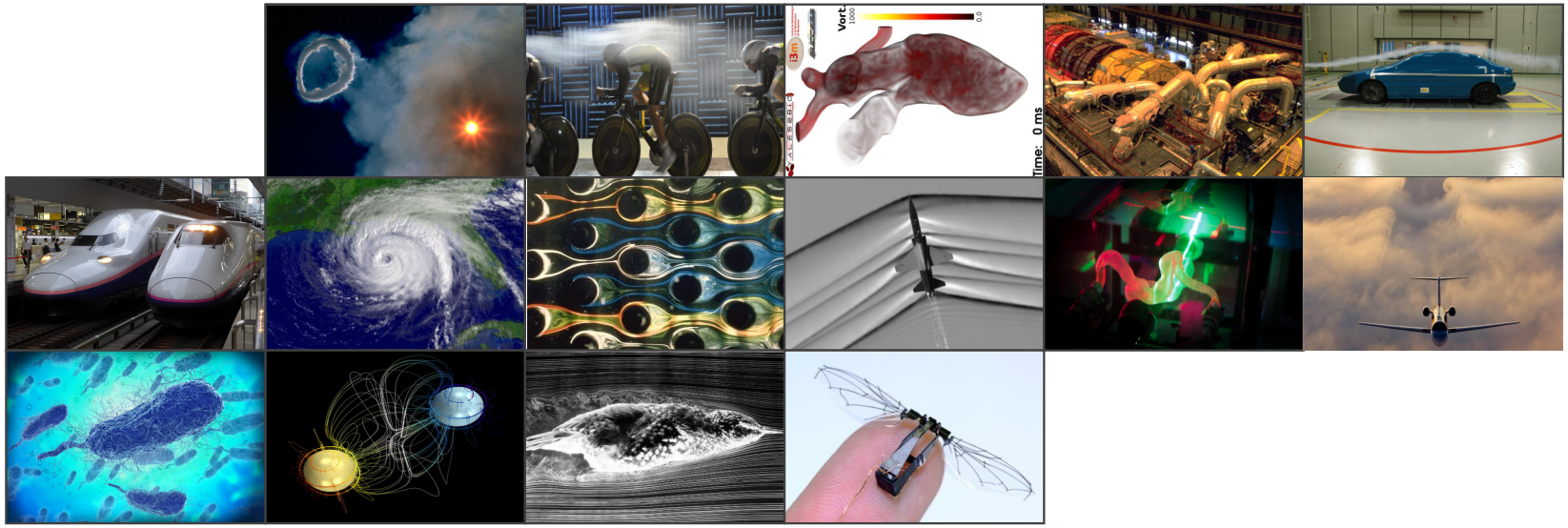


- Compressible flow
- Conservation of energy, Eqs. (27)
- Governing equations for a compressible flow
- 1-D compressible inviscid flow model
- General transport equation for temperature, see Eq. (29) in slide 252

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

8 - Heat transfer



8 - Heat transfer

Heat transfer

- Assumptions and Boussinesq's approximation
- Transport Eq. for temperature
- Prandtl number

Heat conduction

- Some classical solutions

Advection - diffusion

- Péclet number
- High Péclet number flow
- Thermal boundary layer

Convection heat transfer

- Transfert coefficient and Nusselt number
- Biot number
- Solid-fluid heat transfer model
- Heat transfer to flow in pipe

Natural convection

- Forced and natural convection
- Grashof number

Key results

If you can't take the heat, don't tickle the dragon!

Assumptions

The assumption of low Mach number flow is relevant in many heat transfer problems, and is useful as it makes the problem much simpler to solve. It will be hold throughout this chapter.

Transport equation for temperature, see Eq. (29) in slide 252

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} \; + \; \underbrace{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}} + \beta T \frac{Dp}{Dt}}_{\text{neglected source terms}} \; + \; \underbrace{\rho q_\star}_{\text{not considered here}}$$

$-\nabla \cdot \boldsymbol{q}$	heat flux by thermal conduction $\boldsymbol{q} = -k\nabla T$ Fourier's law, k (constant) thermal conductivity
$\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{D}}$	heat generated through deformation by viscous stresses ($\sim \mathrm{M}_a^2$) (frictional dissipation)
$\beta T \frac{Dp}{Dt}$	influence of pressure ($\sim \mathrm{M}_a^2$ for a gas), β thermal expansion coefficient $\beta \equiv -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\Big\vert_p = \frac{1}{T}$ for perfect gas (and $\beta \simeq 0$ for a liquid)
$\rho q_\star$	heat input (*e.g.* radiation), not considered here

Boussinesq's approximation

For the equation of state, in accordance with the assumption of low Mach number flow (incompressible), density is assumed to be a function of the temperature only, that is $\rho = \rho(T, P) \simeq \rho(T)$.

Density is assumed to be a linear function of the temperature for small temperature variations

$$\rho/\rho_0 \simeq 1 - \beta(T - T_0)$$

where $\rho_0 = \rho_0(T_0)$ stands for the fluid at rest. Finally, one usually may neglect density variations, $\beta(T - T_0)$ is a small term, except in the buoyancy force for natural convection. This leads to the Boussinesq approximation for the momentum conservation equation,

$$\rho_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{U} + \rho \boldsymbol{g} \tag{30}$$

Transport equation for temperature

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T} \qquad \text{where} \qquad a \equiv \frac{k}{\rho c_p} \tag{31}$$

a is the thermal diffusivity, has units $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$, and measures the ability of the molecular transport to remove temperature gradient (similar to the dynamic viscosity ν for velocity gradient)

This transport Eq. must be completed by appropriate boundary conditions.

The velocity is assumed to be known here, in order to determine $T(\boldsymbol{x}, t)$
(this point will be discussed in the last section)

Joseph Fourier

Baron Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Joseph Fourier lived a remarkable double life. He served as a high government official in Napoleonic France and he was also an applied mathematician of great importance. He was with Napoleon in Egypt between 1798 and 1801, and he was subsequently prefect of the administrative area ("Département") of Isère in France until Napoleon's first fall in 1814. During the later period he worked on the theory of heat flow and in 1807 submitted a 234-page monograph on the subject. It was given to such luminaries as Lagrange and Laplace for review. They found fault with his adaptation of a series expansion suggested by Daniel Bernoulli in the eighteenth century. Fourier's theory of heat flow, his governing differential equation, and the now-famous "Fourier series" solution of that equation did not emerge in print from the ensuing controversy until 1822.

(from Lienhard IV & Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 2017)

Prandtl number

$$\boxed{\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k}} = \frac{\text{viscous diffusion rate}}{\text{thermal diffusion rate}} = \frac{L^2/a = \tau_{\text{thermal}}}{L^2/\nu = \tau_{\text{viscous}}}$$

Prandtl number of various fluids at 20° C (White, *Viscous Fluids*, 1991)

thermal diffusivity dominates

momentum diffusivity dominates

liquid metals

gas

oil

Mercury 0.024	Air 0.72	Water 7	Castor oil 10000
Sodium 0.004	Helium 0.70	Freon-12 3.7	Glycerin 12000

- **Heat transfer by conduction, *i.e.* without motion of the medium**

The heat diffusion equation reads

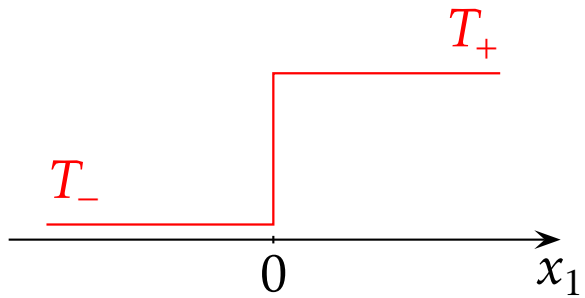
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T$$

1-D elementary solution : initial temperature jump

$T = T_-$ for $x_1 < 0$ and $T = T_+$ for $x_1 > 0$ at $t = 0$

The temperature evolution is governed by

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \qquad t > 0$$



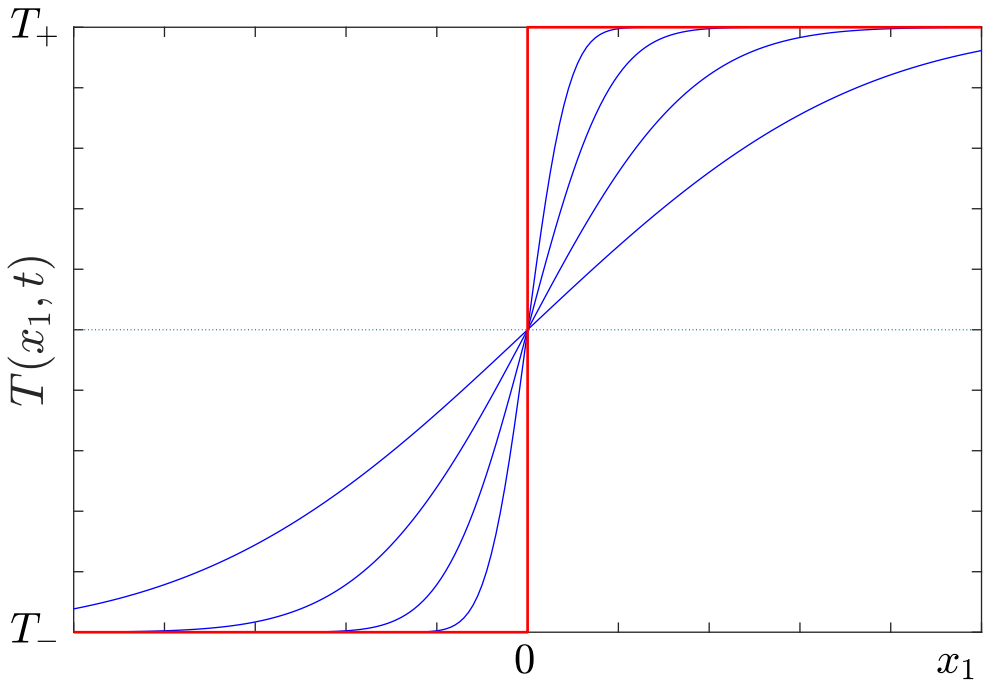
and the solution is given by

$$T(x_1, t) = \frac{T_- + T_+}{2} + \frac{T_+ - T_-}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{at}}\right) \qquad \mathrm{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\xi^2}\,d\xi$$

where erf is the error function.

1-D elementary solution : initial temperature jump (cont.)

Solution $T(x_1)$ plotted for different times t



— initial condition

The initial temperature jump is eliminated by thermal diffusion, propagating at the characteristic length scale $\sqrt{at}$

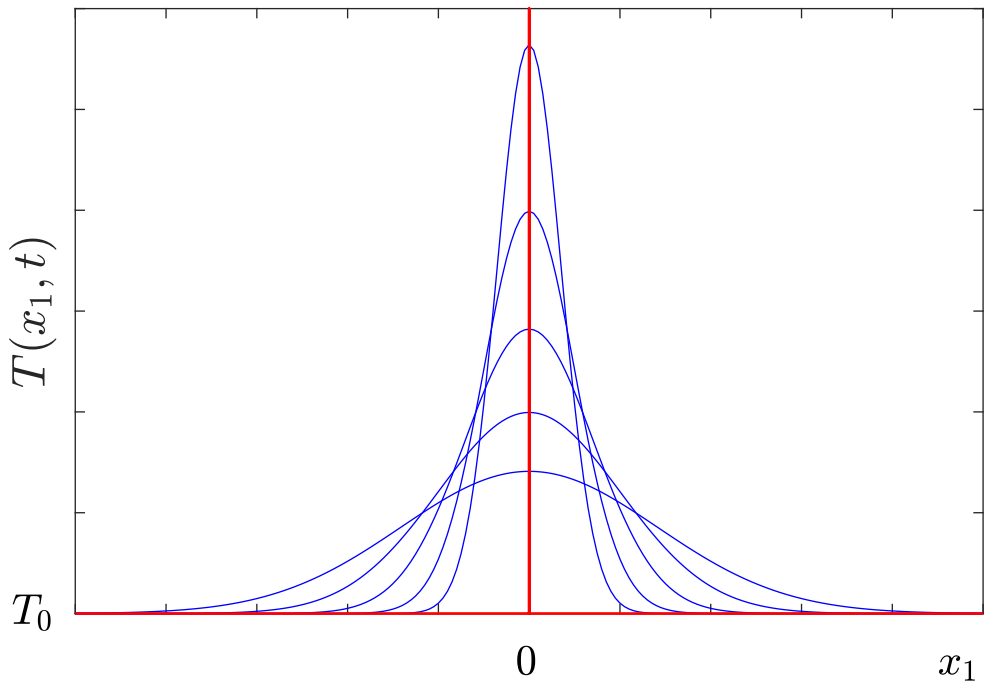
The solution is self-similar, by considering the variable η

$$\eta = \frac{x_1}{2\sqrt{at}}$$

General solution to the heat diffusion equation

Diffusion of a point heat source

$$T(x_1,t) = T_0 + \frac{C}{\sqrt{4\pi a t}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4at}\right)$$



Gaussian shape,
width $\propto \sqrt{at}$ and peak $\propto \sqrt{t}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (T - T_0)\, dx_1 = C$$

$T \to T_0 + C\delta(x_1)$ as $t \to 0$

initial condition

Thermal shock in a semi-infinite medium

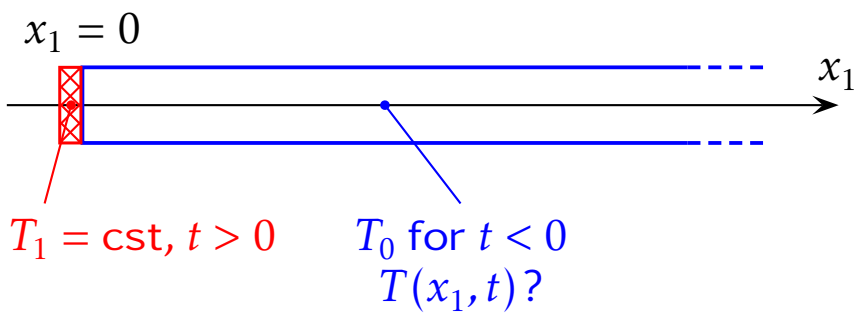
Initial condition
$T(x_1, 0) = T_0$ for $x_1 > 0$,

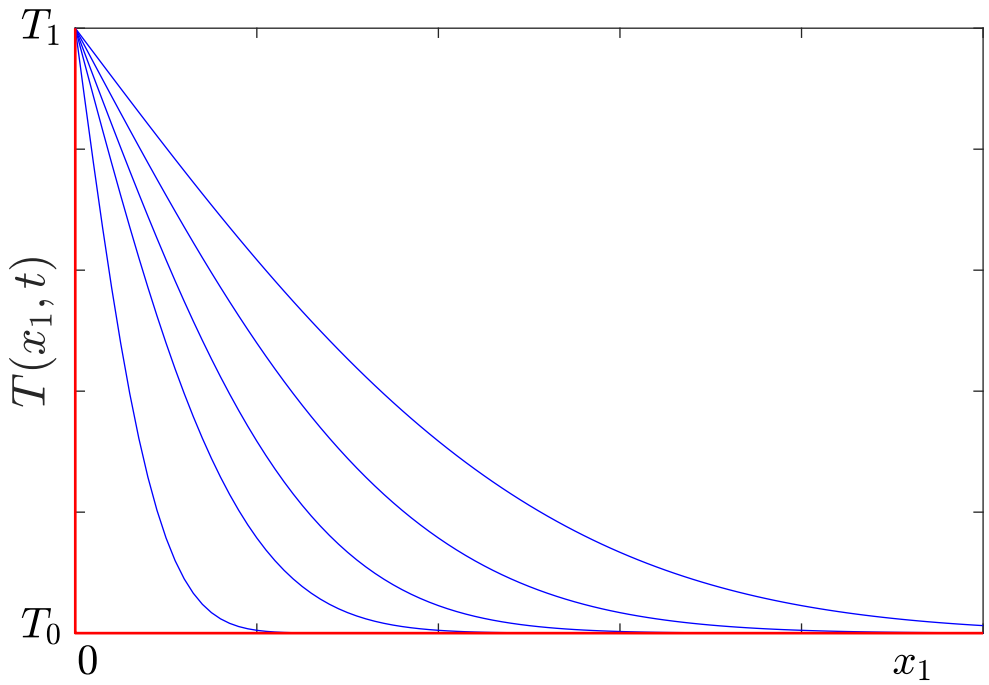
with a sudden change in temperature (thermal shock) applied at $x_1 = 0$ for $t > 0$, $T(0, t) = T_1$, associated with $T(x_1, t) \to T_0$ as $x_1 \to \infty$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} \qquad t > 0$$

$$T(x_1, t) = T_1 + (T_0 - T_1)\mathrm{erf}\left(\frac{x_1}{2\sqrt{at}}\right)$$

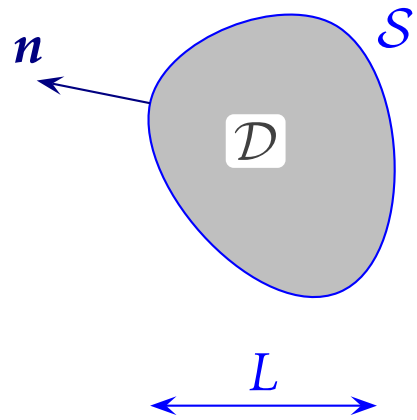
Penetration depth $\propto \sqrt{at}$





Heat diffusion in an isolated finite body

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$$



$T(\boldsymbol{x}, 0) = T_0(\boldsymbol{x})$ initial-value problem (non uniform)
$\boldsymbol{n} \cdot \nabla T = 0$ adiabatic boundary condition (isolated)

Estimation of the time scale for heat diffusion
$L \sim \sqrt{at} \quad \Longrightarrow \quad t \sim L^2/a$

For $t \ll L^2/a$, one has $T \sim T_0(\boldsymbol{x})$

For $t \sim L^2/a$, diffusive evolution by heat conduction

For $t \gg L^2/a$, the whole temperature field takes a constant value inside the body

For the case of a thermal shock, with $T = T_1(\boldsymbol{x}, t)$ prescribed on the surface $\mathcal{S}$, the temperature field becomes uniform for a time $t \sim L^2/a$. The time evolution of the penetrate depth is given by $\sqrt{at}$.

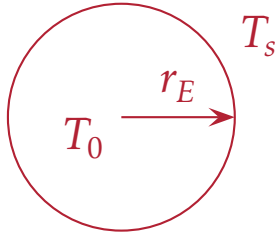
The age-of-the-Earth debate

- about 4000 years old from the Bible
  J. Keplers (1571-1630)
  I. Newton (1643-1727)
  J. Ussher (1581-1656)
  (also from Chinese imperial dynasty)

- Controversies (among others) with the geologists!
  Charles Darwin (1809-1882)
  John Perry (1850-1920)
  $t_E \geq 2$ Ga

Ma = million years ago, Ga = giga-annum

- J. Fourier (1827)



Solidification from molten rocks

$$T - T_s \simeq (T_0 - T_s)\mathrm{erf}[x_1/(2\sqrt{aT})] \qquad \text{(1-D)}$$

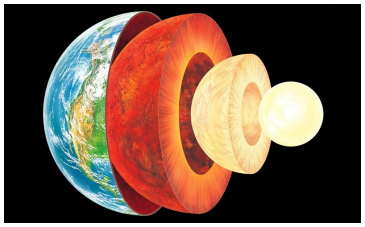
$$G_s = \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = (T_0 - T_s)/\sqrt{\pi a t}$$

Lord Kelvin (1844, 1846) : $T_0 \simeq 2900°\mathrm{C}$, $T_S \simeq 20°\mathrm{C}$
$a = 1.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$, $G_s \simeq 36°\mathrm{C/km}$
$\Longrightarrow \quad 20\ \mathrm{Ma} < t_E < 400\ \mathrm{Ma}$

- E. Rutherford (1871-1937)
  radioactive heat (small)

Claire Patterson (1922-1995)
radioactive dating (1956)
$t_E \simeq 4550$ Ma ± 70 Ma

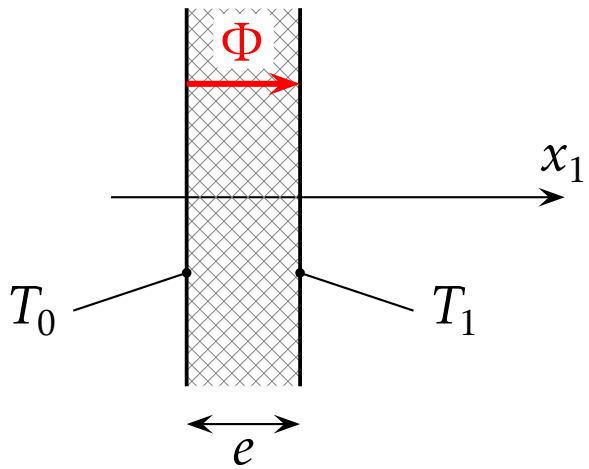
A. Wegener (1880-1930)
Earth not a solid rock!



Steady conduction

The steady solution verifies Laplace's equation $\nabla^2 T = 0$, associated with appropriate boundary conditions :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = 0 \qquad T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{e} x_1$$



Fourier's law $\boldsymbol{q} = \dfrac{k(T_0 - T_1)}{e} \boldsymbol{e}_1$

Heat flux (in W) accross a surface $\mathcal{S}$,

$$\Phi = \frac{k\mathcal{S}}{e}(T_0 - T_1)$$

Concept of thermal resistance $R \equiv (T_0 - T_1)/\Phi$, has units K W^{-1}, $R = e/(k\mathcal{S})$ for a layer of thickness e.

There is an electrical analogy, (temperature, heat flux) $\leftrightarrow$ (tension, intensity), sometimes used in engineering.

Advection-diffusion in a flow : Péclet number

The Péclet number is the analogue of the Reynolds number for heat transfer problems

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\boldsymbol{U} \cdot \nabla T}_{\text{advection}} = \underbrace{a \nabla^2 T}_{\text{thermal diffusion}} \qquad \text{Pe} \equiv \frac{UL}{a} \sim \frac{\text{advection term}}{\text{diffusion term}} \sim \frac{L^2/a}{L/U}$$

The value of the Péclet number indicates the relative importance (efficiency) of advection with respect to thermal diffusion. Two asymptotic regimes,

Pe $\ll 1$ corresponding to a pure heat conduction problem.

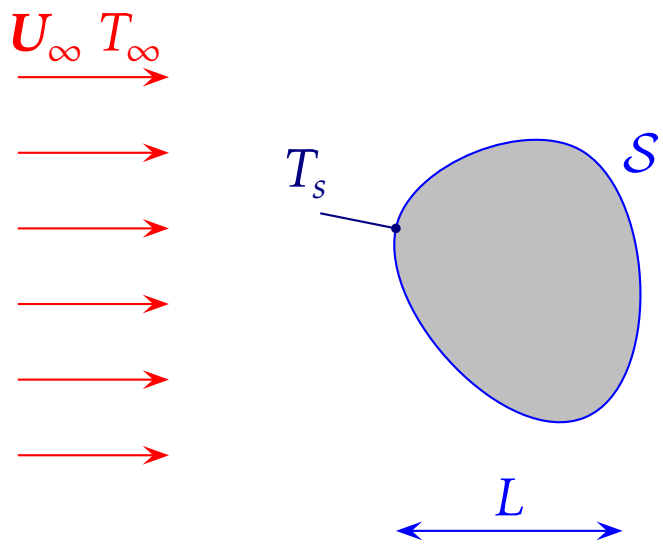
Pe $\gg 1$, where advection dominates and heat conduction is negligible, except near walls with the presence of thermal boundary layers.

Advection-diffusion around an isothermal body

Transport Eq. for temperature,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T$$

$$\begin{cases} T = T_s = \text{cst on } \mathcal{S} \\ T \to T_\infty \text{ upstream far from the body} \end{cases}$$



By introducing the following dimensionless variables

$$\boldsymbol{x}^\star = \frac{\boldsymbol{x}}{L} \quad t^\star = \frac{U_\infty t}{L} \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_s - T_\infty} \quad \boldsymbol{U}^\star = \frac{\boldsymbol{U}}{U_\infty}$$

The transport Eq. for temperature reads

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^\star} + \boldsymbol{U}^\star \cdot \nabla^\star \theta = \frac{1}{\mathrm{Pe}} \nabla^{\star 2} \theta \qquad \begin{cases} \theta = 1 \text{ on } \mathcal{S} \\ \theta \to 0 \text{ upstream at infinity} \end{cases}$$

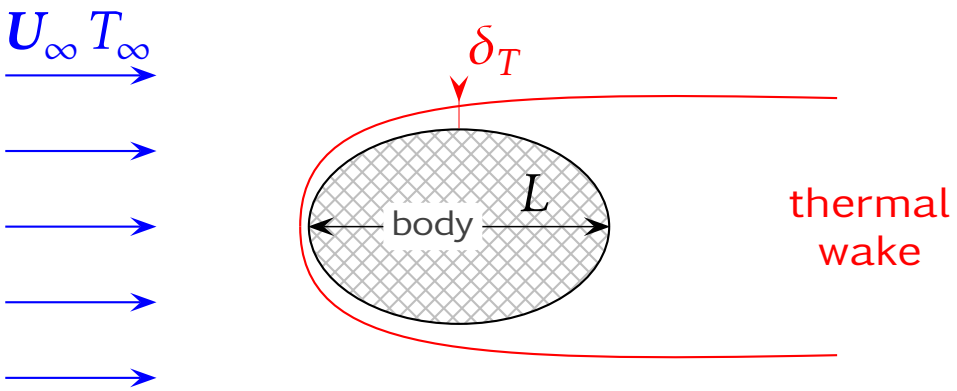
High Péclet number flow

Heat conduction (temperature diffusion) can be neglected, and temperature is simply advected by the flow,

$$\frac{DT}{Dt} = 0$$

In other words, temperature of fluid particles remains constant. Inlet boundary conditions (but not only) must be prescribed, *e.g.* $T = T_\infty$ here.

There is, however, a discontinuity of temperature on the body surface $T_\infty \neq T_s$, but this singularity is an artefact of the model (Pe $\to \infty$). Physically, a thin thermal boundary layer of thickness δ_T develops around the body

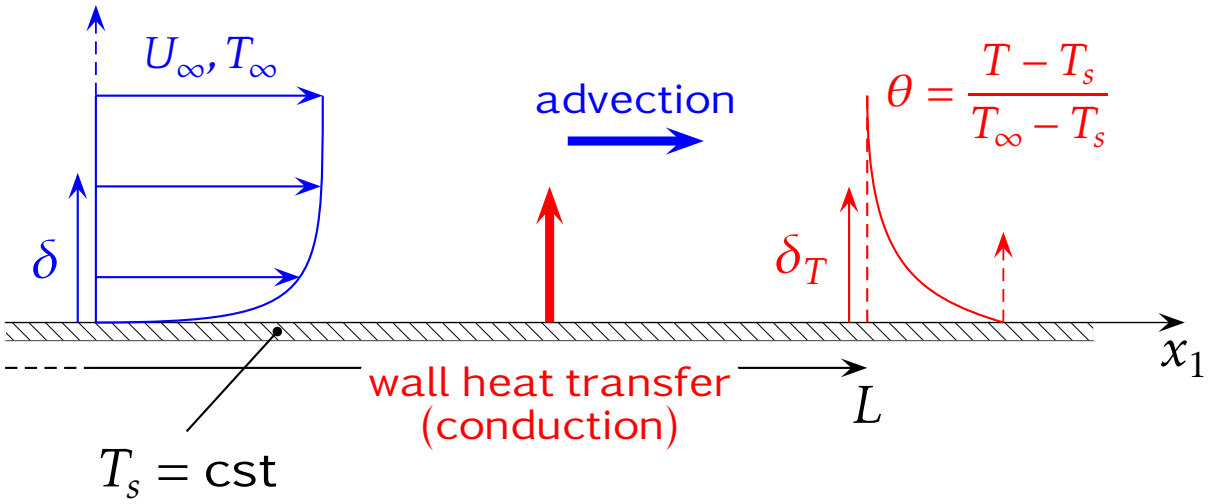


heat conduction negligible

The thermal wake is formed by fluid particles from the thermal boundary layer

High Péclet number flow (cont.)

The thermal boundary layer and wake are induced by conduction heat transfer between the solid body and the fluid. This thermal boundary layer is thin, a consequence of the high Péclet number flow assumption.



There is an analogy between the velocity and the thermal boundary layers, but the momentum and heat diffusivity coefficients are not the same : ν for δ, and a for δ_T

Prandtl number	$\mathrm{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k}$

- **Thermal boundary layer equation**

For a steady laminar flow with a high Péclet number value, and thus $\delta_T/L \ll 1$ the transport Eq. (31) for temperature reads

$$U_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right)$$

Approximation of the boundary layer, with $\nabla^2 \simeq \partial^2/\partial x_2^2$ (parabolization of the differential equation)

$$\boxed{U_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}}$$

Advection and diffusion terms are of the same order of magnitude, that is with $\mathcal{T}$ the temperature scale and $\mathcal{U}$ the velocity scale

$$\mathcal{U}\frac{\mathcal{T}}{L} \sim a\frac{\mathcal{T}}{\delta_T^2} \quad \Longrightarrow \quad \delta_T \sim \left(\frac{aL}{\mathcal{U}}\right)^{1/2}$$

During the advection time $t = L/U_1$ (in general $U_1 \neq U_\infty$), the penetration depth of the conduction heat flux inside the flow is $\delta_T \sim (at)^{1/2} \sim (aL/U_1)^{1/2}$

Thermal boundary layer equation (cont.)

Estimation of the thickness δ_T of the thermal boundary layer

$\boxed{\mathrm{Pr} \gg 1}$

The viscous diffusion is faster than the thermal diffusion, $\delta_T \ll \delta$

At the edge δ_T of the thermal boundary layer, $U_1 \sim U_\infty \delta_T/\delta$, and from the previous slide, $\delta_T \sim [aL\,\delta/(U_\infty \delta_T)]^{1/2}$

$\delta_T/L \sim \mathrm{Pe}_L^{-1/3}\,\mathrm{Re}_L^{-1/6}$

$\boxed{\mathrm{Pr} \ll 1}$

The thermal diffusion is faster than the viscous diffusion, $\delta_T \gg \delta$

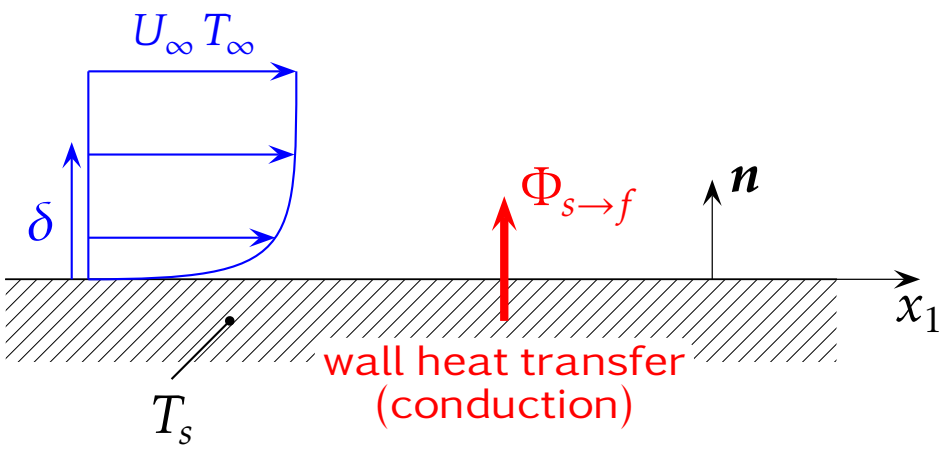
At the edge δ_T of the thermal boundary layer, $U_1 \sim U_\infty$, and $\delta_T \sim (aL/U_\infty)^{1/2}$

$\delta_T/L \sim \mathrm{Pe}_L^{-1/2}$

Both expressions can be applied for gas flow. One indeed has, $\mathrm{Pr} = \mathcal{O}(1)$, $\mathrm{Re}_L \sim \mathrm{Pe}_L$ since $\mathrm{Pr} = \mathrm{Pe}_L/\mathrm{Re}_L$, and thus $\delta \sim \delta_T$

Solid-fluid heat transfer by convection

Conduction and convection are involved in flow heat transfer



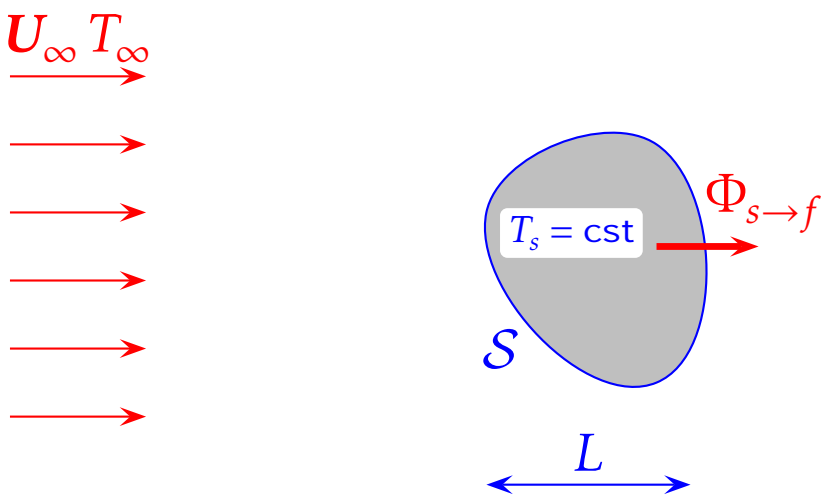
Wall heat flux

$$\Phi_{s\to f} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, d\mathcal{S} = -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\nabla T\, d\mathcal{S}$$

(subscripts s and f stand for solid and fluid)

For the convective cooling of an isothermal heated body at T_s = cst, the total heat flux $\Phi_{s\to f}$ is given by

$$\begin{aligned}\Phi &= -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\nabla T\, d\mathcal{S}\\ &= -k_f (T_s - T_\infty) \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n}\cdot\nabla\theta\, d\mathcal{S} \propto T_s - T_\infty\end{aligned}$$



Convective heat transfer coefficient

The heat flux is usually modeled by introducing a (global) heat transfer coefficient $\bar{h}$ as

$$\Phi_{s\to f} = \bar{h}\mathcal{S}\left(T_s - T_f\right) \tag{32}$$

where $\bar{h}$ is an average value over the surface of the body, and has units W.m^{-2}.K^{-1} (see tables where $\bar{h}$ is provided for a sphere and rods for instance)

The dimensionless heat transfer coefficient is written as a Nusselt number Nu, defined by

$$\mathrm{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f}$$

where k_f is the thermal conductivity of the fluid

Ernst Kraft Wilhelm Nusselt (1882-1957), an avid mountain climber!

(taken from Lienhard IV & Lienhard, 2017, *A heat transfer textbook*)

Interpretation of the Nusselt number

If the flow motion could be stopped (fictitiously!), with $U_\infty = 0$ to remove convection, the heat flux would then be given by

$$\Phi_{s\to f} = -k_f \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{n} \cdot \nabla T|_f \, d\mathcal{S} \sim k_f \frac{T_s - T_f}{L} \mathcal{S}$$

Nussel number can thus be recast as,

$$\mathrm{Nu} = \frac{\bar{h}(T_s - T_f)\mathcal{S}}{k_f(T_s - T_f)\mathcal{S}/L} \sim \frac{\Phi_{\text{convection}}}{\Phi_{\text{(fictitious) conduction}}}$$

Nusselt number indicates the ability of the flow to increase heat transfer through convection. For a small Péclet number flow, convection is negligible and $\mathrm{Nu} = \mathcal{O}(1)$. On the contrary for $\mathrm{Pe} \gg 1$, the wall temperature gradient takes higher values than for the case of a pure conduction heat transfer. The convective heat transfer is more efficient, $\mathrm{Nu} \gg 1$; hence the interest of using flow motion (pump, fan, suction device) to increase heat transfers : forced convection

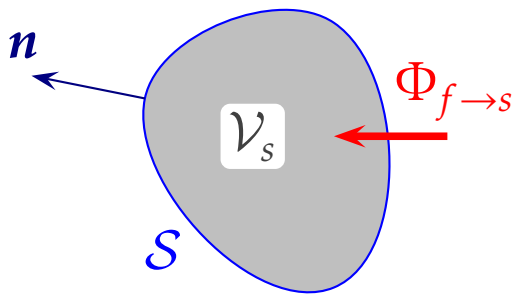
Conduction in the solid body

The temperature $T(\boldsymbol{x}, t)$ is determined through the resolution of an advection-diffusion equation in the fluid, and a conduction equation in the solid. The coupling conditions at the interface are obtained by imposing the continuity of temperature and heat flux, as usual

Inside the solid,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_s \nabla^2 T \qquad a_s = \frac{k_s}{\rho_s c_{ps}}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_s} \rho_s c_{ps} T \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, d\mathcal{S} = \Phi_{f \to s}$$



Biot number

Biot number measures the relative importance - in the solid - of convection heat transfer with the fluid and conduction heat inside the solid,

$$\mathrm{Bi} = \frac{\bar{h}L}{k_s} \qquad \neq \qquad \mathrm{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f}$$

$\boxed{\mathrm{Bi} \ll 1}$

Heat conduction dominates. During a first transitional step of duration $t \sim \mathcal{O}(L^2/a_s)$, the solid appears to be isolated, its temperature T_s becomes uniform by thermal conduction, and thus $T_s(\boldsymbol{x}, t) \simeq T_s(t)$. A slow evolution is then observed thanks to heat exchange by convection with the flow

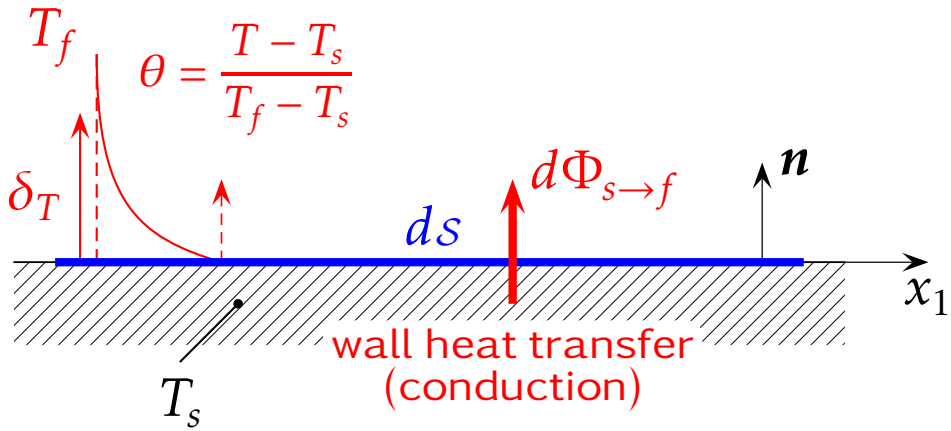
$$\underbrace{\rho_s c_{ps} \mathcal{V}_s}_{\substack{= C_s \text{ solid} \\ \text{heat capacity}}} \frac{dT_s}{dt} = \bar{h}\mathcal{S}(T_f - T_s) \qquad \xrightarrow{T_f = \text{cst}} \qquad T_s = T_f + T_0 \exp\left(-\frac{\bar{h}\mathcal{S}}{C_s} t\right)$$

The solid temperature exponentially tends to the (constant) fluid temperature T_f

Local solid-fluid heat transfer model

In practice, a simplified solid-fluid heat transfer model is often used, by introducing a local heat transfer coefficient h

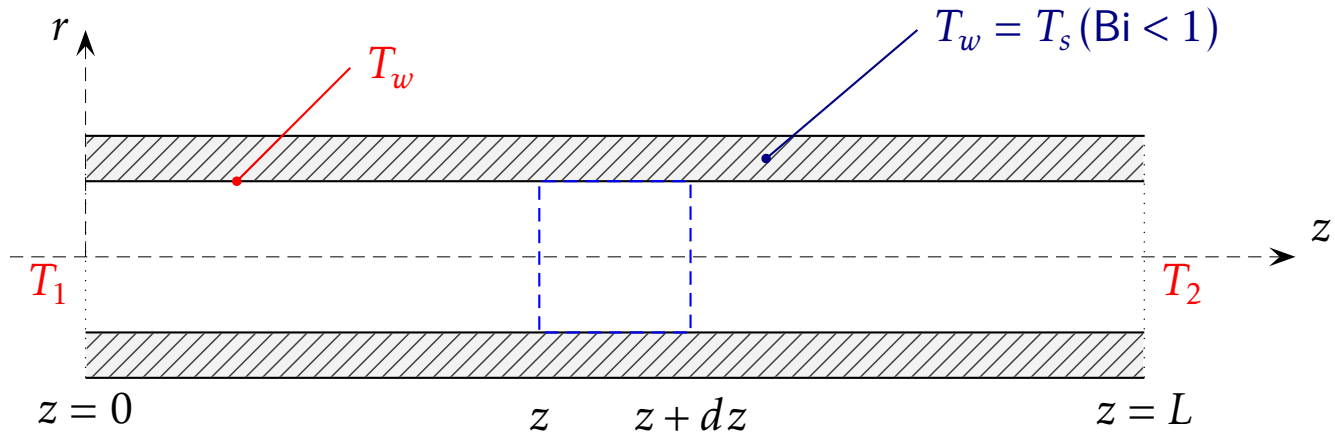
$$
\begin{aligned}
d\Phi_{s\to f} &= h(T_s - T_f)\, ds \\
-k_s\, \boldsymbol{n}\cdot\nabla T|_s\, ds &= h(T_s - T_f)\, ds
\end{aligned}
$$



where T_s and T_f are the local temperature of the solid and of the fluid outside of the boundary layer, meaning that Pe $\gg 1$.

In this local formulation, h, T_s and T_f can change along the interface solid-fluid. That should not be confused with Eq. (32) involving $\bar{h}$ applied to a whole body immersed in a flow motion

- As an illustration, heat transfer to flow in pipe



T_2 ?

heat flux ?

$T_w = 150°\text{C}$

water at $T_1 = 25°\text{C}$, $Q_v = 100$ l/mn, $L = 4.5$ m, $D = 2.5$ cm
$\mu = 10^{-3}$ Pa.s, $c_p = 4.18$ kJ/(kg.K), $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}, $k = 0.64$ W/(m.K)

Forced convection in *turbulent* pipe flow,
$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}) \simeq 0.027\,\text{Re}^{4/5}\,\text{Pr}^{1/3}$ (Sieder & Tate)

Heat transfer to flow in pipe (cont.)

$S = \pi D^2/4 \quad U_d = Q_v/S \simeq 3.4\ \text{m.s}^{-1} \quad \text{Re}_D \simeq 8.5 \times 10^4$ (turbulent flow)

$a = \dfrac{k}{\rho c_p} \quad \text{Pe} = \dfrac{U_d D}{a} \simeq 5.5 \times 10^5 \quad \text{Pr} = \dfrac{\mu}{k/c_p} \simeq 6.5 \quad Q_m \equiv \rho U_d S \simeq 1.7\ \text{kg.s}^{-1}$

$\text{Nu} = \dfrac{Dh}{k} \simeq 443 \gg 1$ (forced convection) $\quad h \simeq 1.13 \times 10^4\ \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Energy equation written for the temperature (steady incompressible flow)

$\rho c_p \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \boldsymbol{q}$

and integrated over the elementary volume control $\mathcal{S}$ between z and $z + dz$, with the aim of formulating a 1-D model

$$\underbrace{\int_{\mathcal{S}} \rho c_p T \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S}}_{\text{(a)}} = \underbrace{\int_{\mathcal{S}} -\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\, d\mathcal{S}}_{\text{(b)}}$$

$\text{(a)} = \rho c_p U_d S T(z + dz) - \rho c_p U_d S T(z) = Q_m c_p dT$

Heat transfer to flow in pipe (cont.)

For the term (b), by neglecting the heat flux along the z direction (Pe $\gg 1$)

$$(\mathrm{b}) = \underbrace{\pi D dz\, k \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_w}_{\substack{\text{conduction}\\ \text{into the fluid}\\ \text{(no-slip BC at the wall)}}} = \underbrace{\pi D dz\, h(T_w - T)}_{\substack{\text{local heat transfert}\\ \text{coefficient } h\\ \text{(forced convection)}}}$$

The energy budget takes the form $Q_m c_p dT = \pi D dz\, h(T_w - T)$, which leads to

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T_w - T} = \int_0^L \frac{\pi D h}{Q_m c_p} dz \qquad \Longrightarrow \qquad \log\left(\frac{T_w - T_1}{T_w - T_2}\right) = \frac{\pi D L h}{Q_m c_p}$$

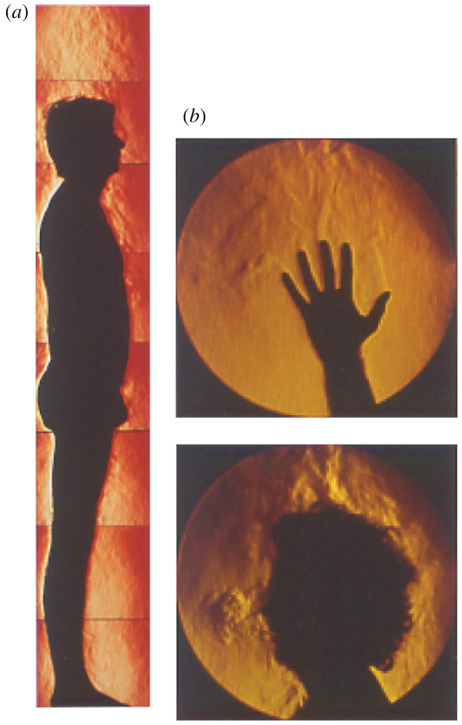
and finally $T_2 = T_w - (T_w - T_1) e^{-\frac{\pi D L h}{Q_m c_p}}$

$T_2 \simeq 80°\mathrm{C}$, and the removed heat by the flow is given by
$\Phi = Q_m c_p (T_2 - T_1) \simeq 381$ kW

Forced and natural convection

In natural or free convection, the fluid motion is only produced by density differences in the fluid occurring due to temperature gradients, and not by any external source (pump, fan, ...) as in forced convection.

Fluid receives heat and by thermal expansion becomes less dense and rises. The driving force for natural convection is buoyancy, a result of differences in fluid density.



Schlieren visualization of a Kettle (*Spectabit Optics LLC*) and a human body to study airborne transmission of infection (Clark & de Calcina-Goff, *J. R. Soc. Interface*, 2009)

Boussinesq's approximation

In the framework of Boussinesq's approximation, the hydrostatic balance $\nabla p_0 = \rho_0 \boldsymbol{g}$ is then subtracted from Navier-Stokes Eq. (30), leading to the governing equations for natural convection,

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla (p - p_0) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{U} - \beta (T - T_0) \boldsymbol{g}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla T = a \nabla^2 T$$

A strong coupling now occurs between the velocity and temperature fields, even if the flow is incompressible.

The balance between $\boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U}$ on the left hand side and the buoyancy force on the right hand side, leads to the following estimate of the velocity scale U_n of natural convection $U_n = (\beta g L \Delta T)^{1/2}$ where $\Delta T \propto T - T_0$ is the scale of temperature variations

Grashof number

The Reynolds number based on U_n, that is $\mathrm{Re} = U_n L/\nu$, is usually replaced by the Grashof number in natural convection

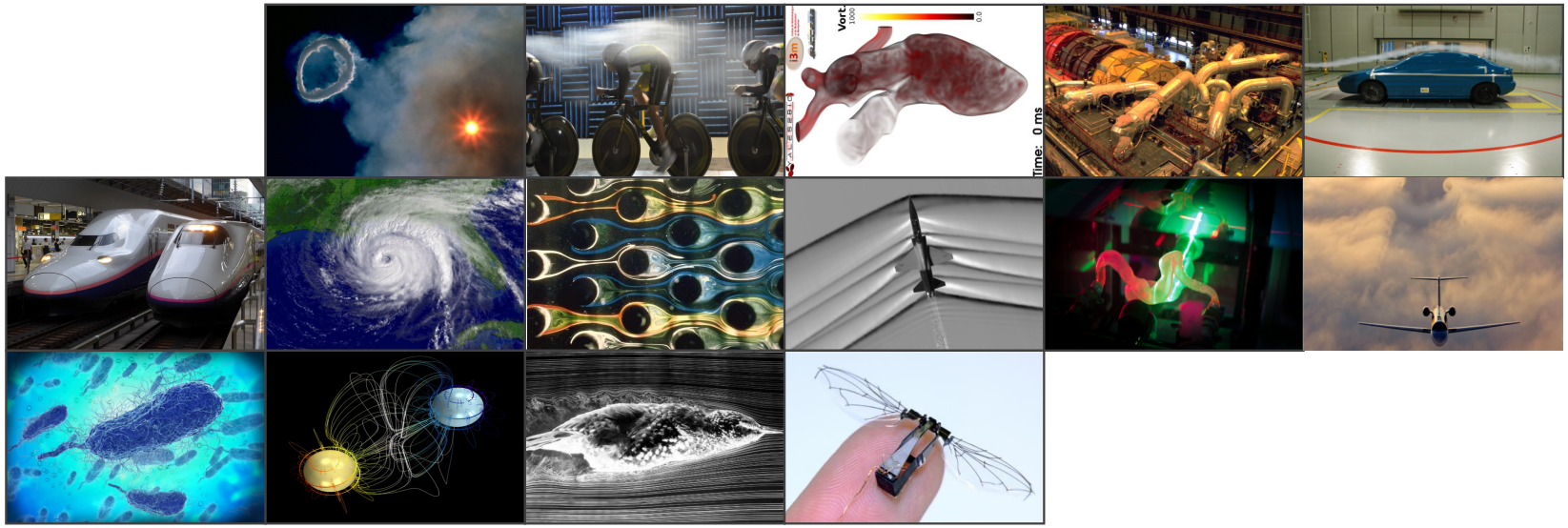
$$\boxed{\mathrm{Gr} = \mathrm{Re}^2 = \frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}}$$

Like the Reynolds number, the Grashof number indicates a laminar or a turbulent regime for natural convection, that is

$$\mathrm{Gr} = \frac{(L^2/\nu)^2}{(L/U_n)^2} \sim \frac{\tau_{\text{viscous}}^2}{\tau_{\text{convection}}^2}$$

- Temperature Eq. for low Mach number flows, thermal diffusivity
- Fundamental solutions for pure conduction problems
- Thermal boundary layer, Péclet and Prandtl numbers
- Forced convection, Nusselt number and local heat transfer coefficient
- Natural convection, velocity scale and Grashof number

Plan général

Introduction liminaire 2
1 - Cinématique, lois fondamentales et modèle non visqueux 17
2 - Fluide visqueux newtonien 65
3 - Analyse dimensionnelle - nombre de Reynolds 103
4 - Régimes d'écoulement en fonction du nombre de Reynolds 134
5 - Vorticité 170
6 - Turbulent flow 204
7 - Energy, thermodynamics and compressible flow 230
8 - Heat transfer 264
Conclusion 298
Annexes (online)

Concluding remarks