Tứ giác nội tiếp 2

Môn: Toán chuyên 9 – 9H2

Ngày giao BTVN: 30/11/2025

Năm học: 2025-2026

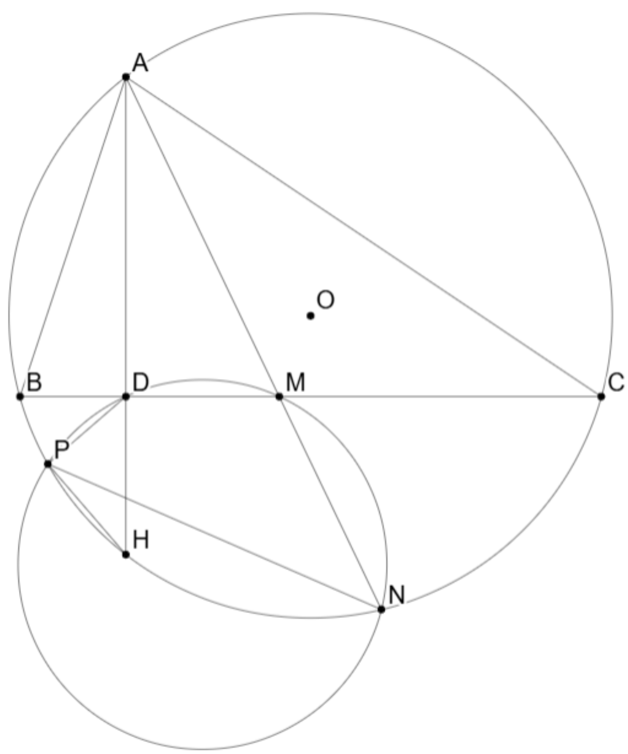
Thời gian buổi học: 180 phút

Bài 7: Cho tam giác ABC nội tiếp $(O), AB < AC$, có đường cao AD. Điểm M thay đổi trên cạnh BC. Gọi AM cắt (O) tại N.

a) Chứng minh: (DMN) luôn đi qua một điểm cố định khác D.

b) Chứng minh tâm của (DMN) thuộc một đường cố định.

Lời giải:



a) Gọi H là giao điểm của AD với (O).

Gọi P là giao điểm của (O) với (DMN).

Do $PDMN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{DPN} = 180^o - \widehat{DMN} = \widehat{DMA}$.

Do $HPAN$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HPN} = \widehat{HAN}$.

Khi đó:

$$\widehat{HPD} = \widehat{HPN} + \widehat{DPN} = \widehat{DMA} + \widehat{HAN} = 90^o.$$

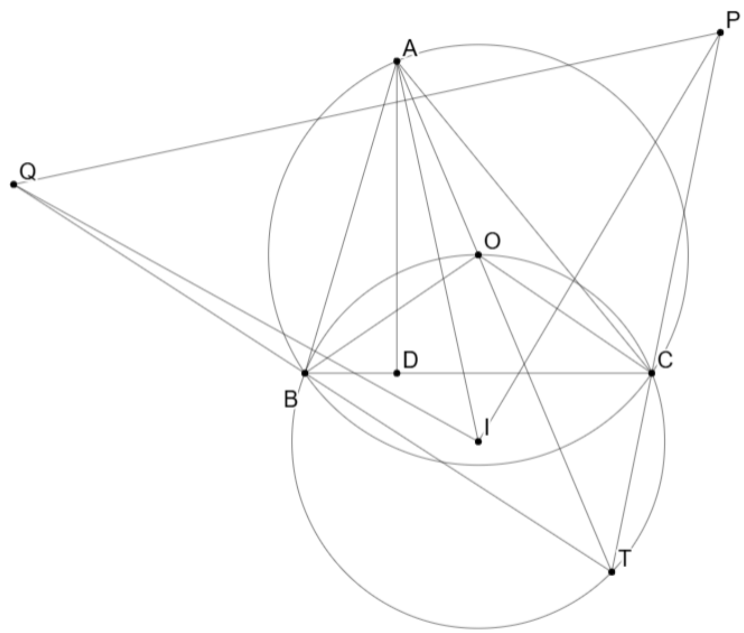
Suy ra: $P \in (DH)$. Do đó: $P = (DH) \cap (O)$.

Có A, B, C, O cố định nên $(DH); (O)$ cố định.

b) Có tâm (DMN) thuộc trung trực của PD cố định.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp (O), $AB < AC$. Gọi P đối xứng với B qua AC . Gọi Q đối xứng với C qua AB . Gọi I là tâm của (BOC). Chứng minh: $AI \perp PQ$.

Lời giải:



Gọi T là giao điểm của QP và PC. Gọi D là chân đường vuông góc của A trên BC.
Do C và Q là hai điểm đối xứng với AB nên BA là tia phân giác của $\widehat{CBQ}$.
Do B và P là hai điểm đối xứng với AC nên CA là tia phân giác của $\widehat{PCB}$.
Khi đó: A là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của ΔTBC.
Ta có:

$$\widehat{BAC} = 180^o - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = 180^o - \left(90^o - \frac{\widehat{TBC}}{2}\right) - \left(90^o - \frac{\widehat{TCB}}{2}\right)$$
$$= 90^o - \frac{\widehat{BTC}}{2}.$$

Suy ra: $\widehat{BAC} + \frac{\widehat{BTC}}{2} = 90^o$ suy ra $\widehat{BOC} + \widehat{BTC} = 180^o$ dẫn đến $TBOC$ là tứ giác nội tiếp.
Lại có:

$$BD = \frac{CB + CT - BT}{2}; CD = \frac{BC + BT - CT}{2}$$

Nên: $DC - DB = TB - TC$.
Gọi R là bán kính của (I).
Khi đó:

$$QI^2 - PI^2 = (OI^2 - R^2) - (PI^2 - R^2) = QB.QT - PC.PT = BC(TQ - TP)$$
$$= BC(TB - TC)$$

Và

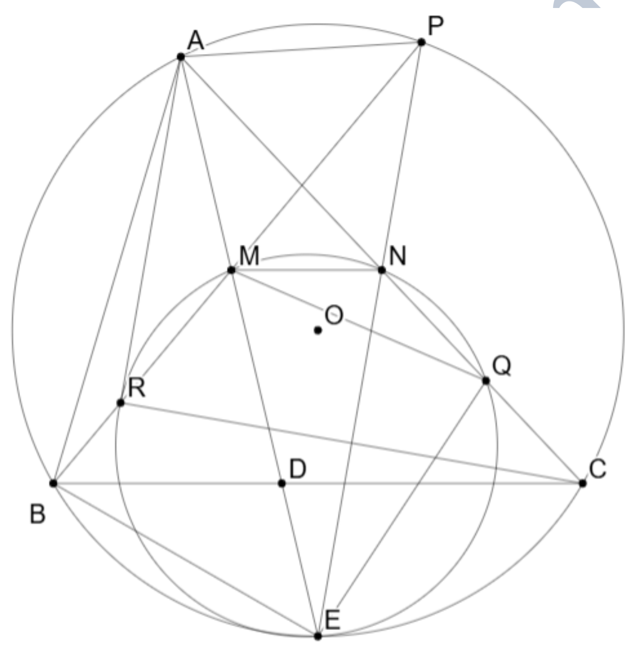
$$QA^2 - PA^2 = CA^2 - BA^2 = CD^2 - BD^2 = BC(DC - DB) = QI^2 - PI^2.$$

Theo định lí 4 điểm, suuy ra: $AI \perp PQ$.

Bài 9: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), $AB < AC$. Phân giác AD cắt (O) tại E. Gọi M là trung điểm AD . Gọi BM cắt (O) tại P . Gọi EP cắt AC tại N .

a) Chứng minh: APNM nội tiếp và N là trung điểm AC .
b) Đường tròn (K) ngoại tiếp ΔEMN, cắt AC tại Q . Chứng minh B xứng đối Q qua AE .
c) Gọi (K) cắt BM tại R . Chứng minh: RA ⊥ RC.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{MAN} = \widehat{BAE} = \widehat{BPE} = \widehat{MPN} \Rightarrow APNM$ là tứ giác nội tiếp.
Suy ra: $\widehat{ANM} = \widehat{APM} = \widehat{ACB} \Rightarrow MN||DC \Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔACD.
Suy ra: N là trung điểm AC.

b) Do $MNQE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{NQM} = \widehat{NEM} = \widehat{ABM} \Rightarrow \Delta AMB = \Delta AMQ(g.c.g)$

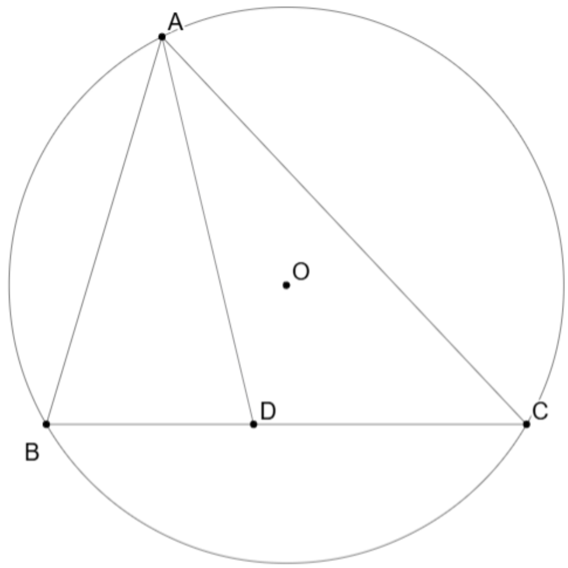
$$\Rightarrow MB = MQ \text{ và } ME \text{ là tia phân giác của } \widehat{BMQ}.$$

Khi đó: B đối xứng với Q qua AE.

c) Tương tự ý b, ta chứng minh được: C đối xứng với R qua PE.
Khi đó: $NR = NC = NA \Rightarrow RA \perp RC$.

Bài 10: Cho (O), dây BC cố định. Điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Phân giác góc BAC cắt BC tại D . Chứng minh tổng hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và ACD không đổi.

Lời giải:



Ta có công thức: $BC = 2R.\sin A$ (đã chứng minh ở phiếu 1).

Gọi $r_1; r_2$ là bán kính $(ABD); (ACD)$.

Khi đó:

$$BD = 2r_1.\sin\widehat{BAD}\ ; CD = 2r_2.\sin\widehat{CAD}$$

Suy ra:

$$r_1 + r_2 = \frac{BD}{2\sin\widehat{BAD}} + \frac{CD}{2\sin\widehat{CAD}}$$

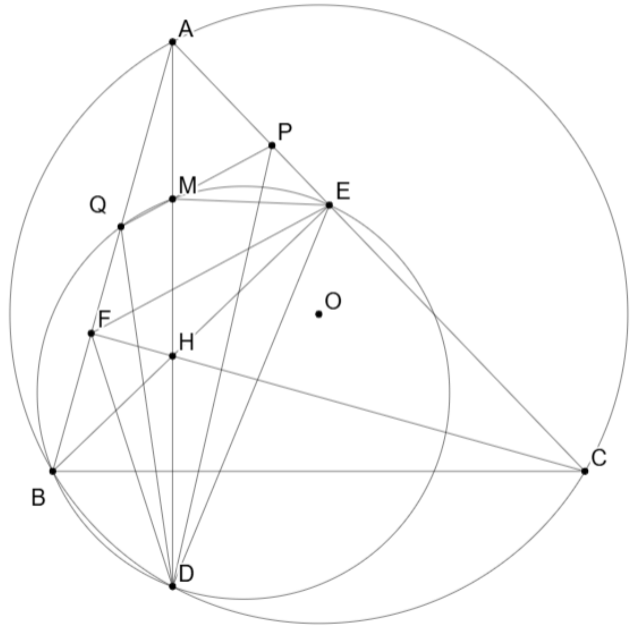
Có $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ cố định nên:

$$r_1 + r_2 = \frac{BD + CD}{2\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}} = \frac{BC}{2\sin\frac{\widehat{BAC}}{2}} \text{ cố định.}$$

Bài 11: Cho $\triangle$ ABC nhọn, nội tiếp (O). Đường cao BE, CF trực tâm H . Gọi AH cắt (O) tại D . Gọi M là trung điểm AH . Qua M kẻ song song với EF , cắt AC, AB tại P, Q.

a) Chứng minh: D, E, M, Q, B đồng viên.
b) Chứng minh: $\angle FDQ = \angle EDP$.
c) Chứng minh: $\angle PDQ + \angle EDF + \angle BOC = 180°$.

Lời giải:



a) Dễ thấy: $ME = MA = MH$.

Ta có: $\widehat{MEH} = \widehat{MHE} = \widehat{BHD} = \widehat{BDH} \Rightarrow MEDB$ là tứ giác nội tiếp.

Lại có: $\widehat{MEH} = \widehat{MHE} = \widehat{AFE} = \widehat{AQP} = 180^o - \widehat{MQB} \Rightarrow MEBQ$ là tứ giác nội tiếp.

Khi đó: D, E, M, Q, B đồng viên.

b) CMTT: D, F, M, P, C đồng viên.

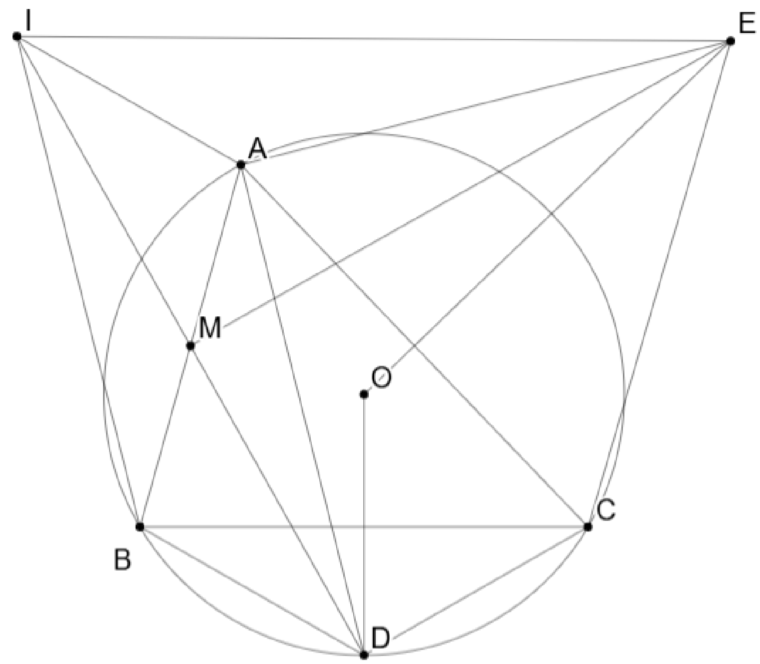
Khi đó: $\widehat{EDQ} = \widehat{EBQ} = \widehat{FCP} = \widehat{FDP} \Rightarrow \widehat{FDQ} = \widehat{EDP}$.

c) Ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{PDQ} + \widehat{EDF} + \widehat{BOC} &= \widehat{EDQ} + \widehat{FDP} + 2.\widehat{BAC} = 2.\widehat{EDQ} + 2.\widehat{BAC}\\ &= 2.\widehat{EBQ} + 2.\widehat{BAC} = 2.90^o = 180^o.\end{aligned}$$

Bài 12: Cho △ ABC nội tiếp (O). Phân giác góc A cắt (O) tại D . Gọi M là trung điểm AB . Đường trung trực của AC cắt phân giác ngoài góc A tại E . Chứng minh MADE nội tiếp.

Lời giải:



Gọi I là điểm đối xứng với D qua M. Khi đó: $AIBD$ là hình bình hành.
Khi đó: $AI = DB = CD$.
Ta có: $\widehat{DCE} = \widehat{DCB} + \widehat{BCA} + \widehat{ACE} = \widehat{DAC} + \widehat{BDA} + \widehat{CAE} = 90^o + \widehat{AIB}$
Có $AE \perp AD$ mà $AD||BI$ nên $AE \perp BI$ suy ra: $\widehat{IAE} = 90^o + \widehat{AIB} = \widehat{DCE}$.
Kết hợp với $EA = EC$ suy ra: $\Delta DCE = \Delta IAE(c.g.c) \Rightarrow EI = ED \Rightarrow EM \perp ID$
hay $\widehat{EMD} = 90^o = \widehat{EAD}$. Suy ra: $MAED$ là tứ giác nội tiếp.