Mr Randrianarimanana Tahinasoa

LTB II 2022-2023

ÉTUDE DE FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Étudions la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + 3$.

(1) Domaine de définition

Tout polynôme est définie sur $\mathbb{R}$; Donc $D_f =]-\infty ; +\infty[$

(2) Calculons les limites aux bornes de D_f

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} -\frac{2}{3}x^2 = -\infty$$

(3) Étudions l'allure de la courbe représentative de f aux voisinages de $\pm\infty$

Puisque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, on calcule $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Après calcul, on obtient $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ (Mba mitady ianareo)

On en déduit que la courbe représentative de f présente deux branches paraboliques de direction asymptotique parallèle à l'axe (y'Oy).

(4) Étudions les variations de f

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors on a $f'(x) = -\frac{4}{3}x + 1$

Étudions le signe de $f'(x)$.

$-\frac{4}{3}x + 1 = 0$ donc $x = \frac{3}{4}$

x		$\frac{3}{4}$	
$f'(x) = -\frac{4}{3}x + 1$	$+$	0	$-$
$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + 3$	$-\infty$ ↗	$\frac{27}{8}$	↘ $-\infty$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{27}{8}$: est le maximum de la fonction.

(5) Quelques points particuliers

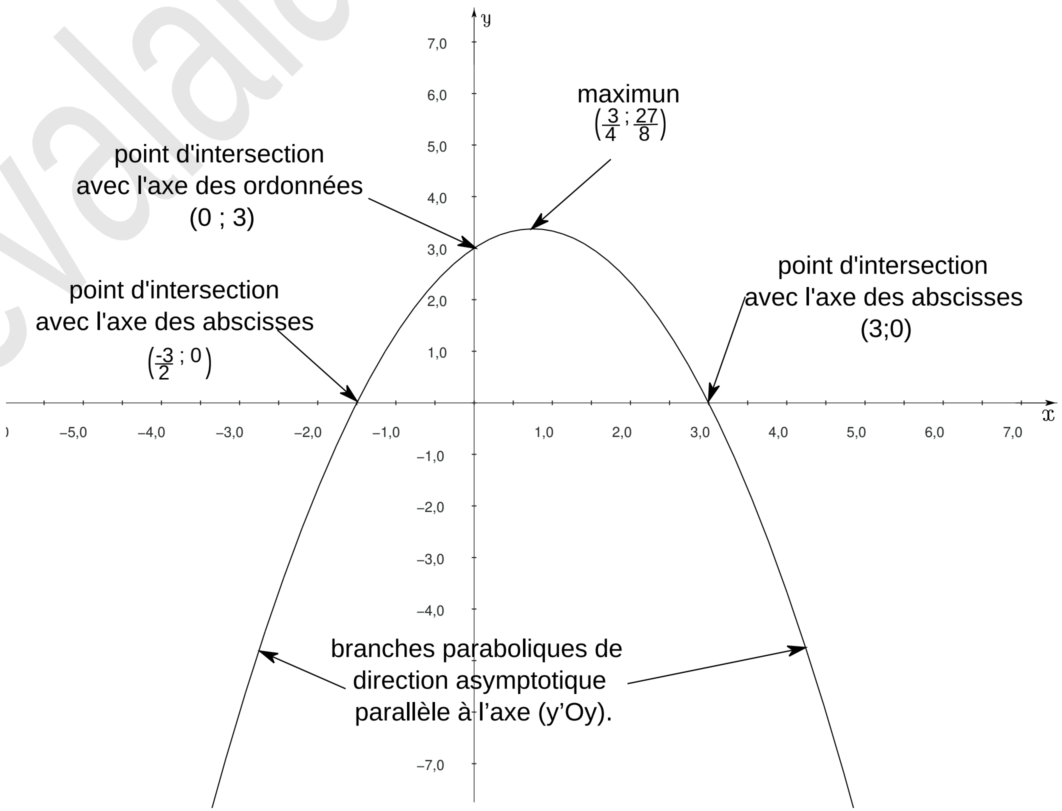
Point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $x=0$ donc $y = f(0) = 3$.

Point d'intersection avec l'axe des abscisses $y=f(x)=0$.

On doit résoudre $f(x)=0$

après calculs on obtient $x_1 = \frac{-3}{2}$ et $x_2 = 3$ (Mba mitady ianareo).

On peut maintenant construire la courbe représentative de f.



Étudions la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$

(1) Domaine de définition

f est définie si $x+2\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq -2$.
Donc $D_g=]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$

(2) Déterminons les limites aux bornes de Dg ainsi que les asymptotes.

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-2x+1}{x+2}=\frac{(-2^-)^2-2(-2^-)+1}{(-2^-)+2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2-2x+1}{x+2}=\frac{(-2^+)^2-2(-2^+)+1}{(-2^+)+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

donc la courbe représentative de f présente une asymptote verticale d'équation x=2

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (Avy taiza indray zao ireo?)

Montrons que la courbe représentative de f admet deux asymptotes obliques

En effectuant une division euclidienne, on obtient $f(x)=x-4+\dfrac{9}{x+2}$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x+2}=0$ on peut dire que la droite d'équation $y=x-4$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f aux voisinages de $+\infty$
Le même raisonnement s'applique en $-\infty$.

(3) Déterminons les variations de f.

g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ où $u=x^2-2x+1$ et $v=x+2$ donc $u'=2x-2$ et $v'=1$

On a $g'(x)=\dfrac{u'.v-v'u}{v^2}=\dfrac{(2x-2)(x+2)-1(x^2-2x+1)}{(x+2)^2}$

Finalement $g'(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

Étudions le signe de $f'(x)$

racines du numérateur :

$\Delta=4^2-4\times1\times(-5)=16+20=36=6^2$

$x_1=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ et $x_1=\dfrac{-4+6}{2}=1$

racine du dénominateur : $(x+2)^2=0$ donc $x_0=-2$

x		-5		-2		1	
x^2+4x-5	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$
$g'(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
$g(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+2}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	|	$\nearrow$