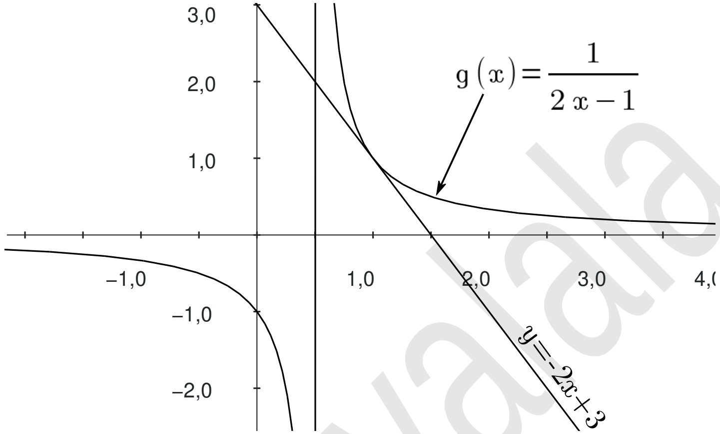
La tangente est $(\mathcal{D})$: $y = g'(1).[x-1] + g(1)$

$g(1)=\dfrac{1}{(2-1)}=1$ et $g'(1)=\dfrac{-2}{(2-1)^2}=-2$

Donc $(\mathcal{D})$: $y = -2.[x-1] + 1 = -2x +2+1$

La tangente en 1 a pour équation $(\mathcal{D})$: $y = -2x +3$



3.4 . Convexité et point d'inflexion

Soit f une fonction supposée deux fois dérivables sur un intervalle I, et sa dérivée seconde est notée $f''(x)$.

- f est convexe sur I si est seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x)$ est positives.(ou $f'(x)$ est croissante).
- f est concave sur I si est seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x)$ est négative.(ou $f'(x)$ est décroissante).
- Un point d'inflexion est un point où $f''(x)$ s'annule et change de signe (la convexité change).

Exemple : Montrons que la fonction $u(x)=x^3$ admet un point d'inflexion.

$u'(x) = 3x^2$ et $u''(x) = 6x$

Puisque $u''(0) = 0$ et $u''(x)$ change de signe en 0, le point M(0,0) est un point d'inflexion.

Mr Randrianarimanana Tahinasoa

LTB II 2022-2023

FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

1 . Limite et continuité

1.1 . Notion de limite en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ (ou x_0 est borne de D_f) et $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite l en x_0 si :

« $f(x)$ se rapproche de l quand x se rapproche de x_0 »

Exemple : Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Cette fonction n'est pas définie en 1 alors voyons le comportement de $f(x)$ quand x se rapproche de 1.

x	$f(x)$
1,50	2,22
1,45	2,20
1,40	2,18
1,35	2,16
1,30	2,14
1,25	2,12
1,20	2,10
1,15	2,07
1,10	2,05
1,05	2,02

x	$f(x)$
0,50	1,71
0,55	1,74
0,60	1,77
0,65	1,81
0,70	1,84
0,75	1,87
0,80	1,89
0,85	1,92
0,90	1,95
0,95	1,97

On voit que quand x se rapproche de 1, $f(x)$ se rapproche de 2.

On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 est 2.

On écrit : $\lim_{x \to 1} f(x)=2$ (voir exemple 2 pour la démonstration)

Remarque :

Quand on parle de limite à l'infini, on choisit x aussi grand que l'on veut. (ou aussi petit que l'on veut si on parle de limite vers $-\infty$.)

Exemple :

Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Voyons le comportement de $g(x)$ quand $x \to +\infty$.

x	$g(x)$
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	0,001

On peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Propriété :

Si f admet une limite en un réel x_0, alors cette limite est unique.

1.2 . Détermination pratique de la limite :

Dans la pratique on admet les opérations suivantes :

- $k \in \mathbb{R}$

$k \times \infty = \infty$	$\infty \pm k = \infty$	$\frac{\infty}{k} = \infty$
$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{k}{0} = \infty$	
$\infty + \infty = \infty$ (infinie de même signe)	$\infty \times \infty = \infty$	
Par conséquent		
$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$	

1.3 . Forme indéterminée

On ne peut pas effectuer directement les calculs suivants :

$$\infty - \infty \quad ; \frac{\infty}{\infty} \quad ; 0 \times \infty \quad \text{et } \frac{0}{0}$$

Ce sont des **formes indéterminées** ; il faut alors lever l'indétermination.

1.4 . Exemples de calcul de limite avec forme indéterminée :

Exemple 1: $\frac{0}{0}$: fraction rationnelle : limite en un point : simplification

Calculons la limite : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$: **F.I**

Pour lever l'indétermination, on peut simplifier d'abord.

Remarque :

Si on peut écrire l'image d'une fonction f sous la forme $f(x) = ax+b+g(x)$ tel que $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exemple :

Soit la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2+3x+4}{x-3}$

On peut effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-3x+4 & x-3 \\ \hline - \quad 3x^2-9x & 3x+6 \\ \hline 6x+4 & \\ - \quad 6x-18 & \\ \hline 22 & \end{array}$$

Donc $3x^2-3x+4 = (x-3)(3x+6)+22$

Et ainsi, $h(x) = 3x+6+\frac{22}{x-3}$

Et puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{22}{x-3} = 0$, on en conclut que la droite d'équation $y = 3x+6$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe représentative de h.

3.3 . Tangente à la courbe

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ et C_f sa courbe représentative.

$(\mathscr{D})$ est la droite tangente à C_f en un point d'abscisse x_0

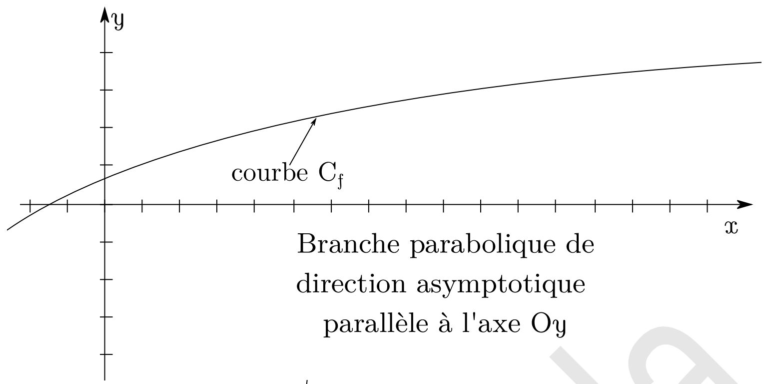
L'équation de $(\mathscr{D})$ est : $\boxed{y = f'(x_0).[x-x_0] + f(x_0)}$ (À démontrer)

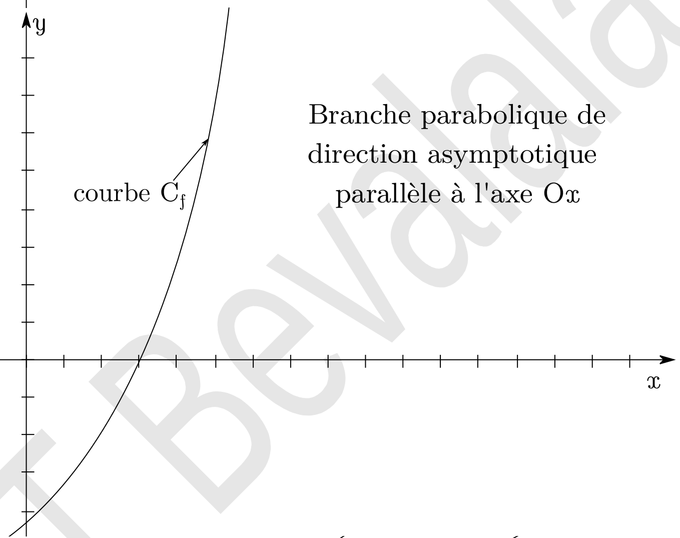
Exemple :

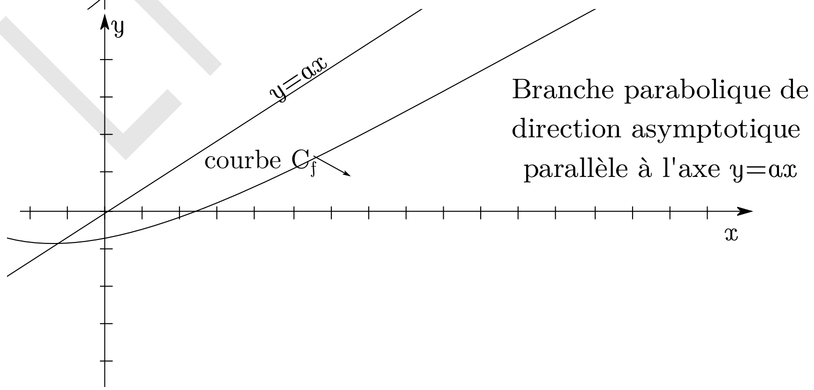
Déterminons l'équation de la tangente en 1 de la fonction $g(x) = \frac{1}{2x-1}$.

On a $g'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$

LT Bevalala







$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=\lim_{x\to-2}x-2=-2-2=-4$$

Exemple 2 : $\frac{0}{0}$: fonction irrationnelle: limite en un point : forme conjuguée.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{0}\quad:\textbf{F.I}$$

Levons l'indétermination ;

Pour $x\neq1$: $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt{x}+1$

Donc $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\sqrt{x}+1=\sqrt{1}+1=2$

Exemple 3 : $\infty-\infty$: polynôme : limite à l'infinie : factorisation « forcée »

$$\lim_{x\to-\infty}3x^2+10x-6=3(-\infty)^2+10(-\infty)-6=+\infty-\infty-6=+\infty-\infty\quad:\textbf{F.I}$$

Pour lever l'indétermination, on peut factoriser par x^2.

$$\lim_{x\to-\infty}3x^2+10x-6=\lim_{x\to-\infty}x^2(3+\frac{10}{x}-\frac{6}{x^2})=(-\infty)^2\left(3+\frac{10}{-\infty}-\frac{6}{(-\infty)^2}\right)=+\infty(3+0-0)$$
$$=+\infty\times3=+\infty$$

À l'infinie, la limite d'un polynôme est la même que la limite du monôme du plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty}3x^2+10x-6=\lim_{x\to-\infty}3x^2$$

Approfondissement : Calcule $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3x-2}{2x^2+4x}$

Exemple 4: $\infty-\infty$: fonction irrationnelle : limite à l'infinie: forme conjuguée.

calculons la limite $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\sqrt{(+\infty)^2+3}-\infty=\sqrt{(+\infty)}-\infty=\infty-\infty\quad\textbf{F.I}$$

Utilisons la forme conjuguée

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{(\sqrt{x^2+3}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+3-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}=\frac{3}{+\infty}=0$$

Application: Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x}+x$

1.5 . Limite à gauche et limite à droite

	Limite à gauche	Limite à droite
Signification	x se rapproche de x_0 mais est <u>*plus petit que*</u> x_0	x se rapproche de x_0 mais est <u>*plus grand que*</u> x_0
Notation :	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

Propriété :

f admet un limite en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

1.6 . Continuité en un point

Définition : une fonction f est continue en un point de son domaine de définition si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(a)$

Définition : une fonction f est continue sur une partie I de son domaine de définition si et seulement si elle est continue en tout point de I

2 . Dérivation

2.1 . Nombre dérivée en réel

Par définition, le nombre dérivé d'une fonction f en a représente la pente de la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse a.
On note la dérivée de f en a : $f'(a)$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si cette limite existe et est finie, alors f est dérivable en a sinon f n'est pas dérivable en a.

Ex : Cherchons la dérivée de $f(x) = 3x$ en 2 :

$$f'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3.x-3\times2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{3\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2}3=3$$

Ex : La dérivée de $f(x)=x^2$ en 3

$$f'(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to3}x+3=6$$

3.2.3 Limite infinie à l'infinie

Pour déterminer l'allure de la courbe représentative de f à l'infinie ($+\infty$ et $-\infty$), on doit calculer plusieurs limite.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

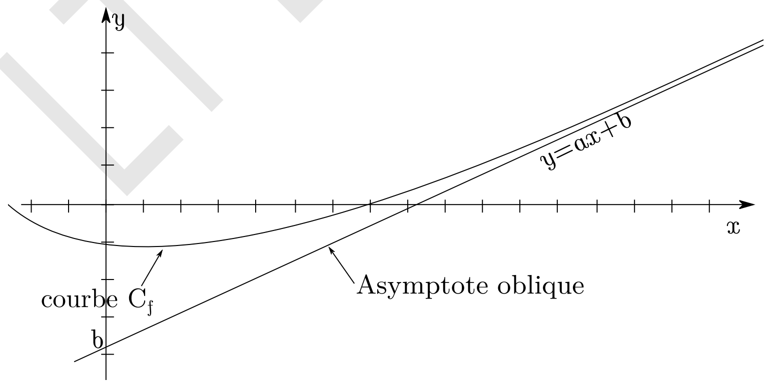
$\lim\limits_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x}=\infty$
Branche parabolique de direction parallèle à l'axe Oy

$\lim\limits_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x}=a\neq0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f\frac{(x)}{x}=0$
Branche parabolique de direction parallèle à l'axe Ox

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=\infty$
Branche parabolique de direction parallèle à $y=ax$

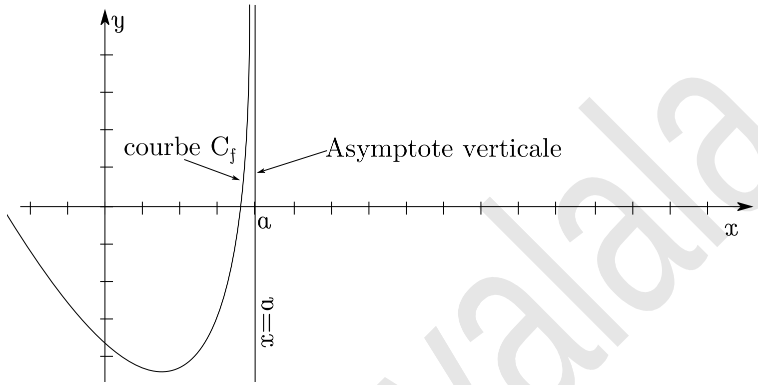
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$
Asymptote oblique d'équation : $y=ax+b$



3.2 . Limite infinie et limite à l'infinie

3.2.1 Limite infinie en a : Asymptote verticale

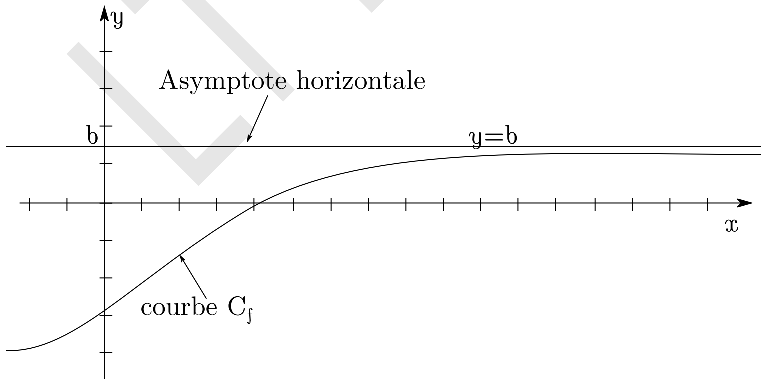
Si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$,alors la courbe représentative de f admet **une asymptote verticale** : la droite d'équation $x=a$



Quand x se rapproche de a, la courbe C_f se rapproche de l'asymptote mais ne la touche jamais.

3.2.2 Limite finie à l'infinie : asymptote horizontale

Si : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (où $b \in \mathbb{R}$) ,alors la courbe représentative de f admet **une asymptote horizontale** : la droite d'équation $y=b$



Remarque :

Les fonctions élémentaires : $C^{te}; x^n (n \in \mathbb{N}); \sqrt{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ ainsi que leurs compositions et leurs sommes sont continues et dérivables sur leurs domaines de définition.

2.2 . Dérivé sur un intervalle et fonction dérivée

Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.
Si f est dérivable sur un intervalle I alors on peut définir une fonction dérivée de f noté f'.

Fonctions		Fonctions dérivées	remarque/exemple
k	$k \in \mathbb{R}$	0	La pente est nulle La dérivée d'une constante est nulle
x		1	
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	$n.x^{n-1}$	$(x^2)' = 2.x^1 = x$
$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{-1}{x^2}$	n'est pas dérivable en 0
$\sqrt{x}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	x doit être strictement positif
Dans le cas général, si u et v sont des fonctions de $\mathbb{R}$, on note u' et v' les dérivées de u et v			
$k.u$	$k \in \mathbb{R}$	$k.u'$	$(2x^3)' = 2.(x^3)' = 2.3.x^2 = 6x^2$
$(u \pm v)$		$u' \pm v'$	La dérivée d'une somme est la somme des dérivées **Ex :** $f(x) = 2x^2 - 3x$ $f'(x) = 2.2x - 3 = 4x - 3$
$(u.v)$		$u'.v + u.v'$	$f(x) = x\sqrt{x}$ Choisissons : $u = x$ et $v = \sqrt{x}$ on a : $u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

		$f'(x)=1.\sqrt{x}+x.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}$ $f'(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$	$f(x)=\frac{x}{1+x}$ Choisissons : $u=x$ et $v=1+x$ $u'=1$ et $v'=1$ $f'(x)=\frac{1.(x+1)-x.1}{(1+x)^2}=\frac{x+1-x}{(1+x)^2}$ $f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$
$u\circ v$ ou $f(u)$	$v'.u'\circ v$ ou $u'.f'(u)$	$f(x)=\sqrt{x^2-1}$ donc $f'(x)=\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$

Remarques :

- Comme pour les limites on définit aussi les dérivées à gauche et dérivées à droite.
- Une fonction est dérivable en un point si les dérivées à gauche et droite sont égales.
- Une fonction dérivable en un point est toujours continue en ce point; mais le réciproque n'est pas forcément vrai.

Exemple : Soit la fonction définie par $g(x)=|x|$

- Est-elle continue en 0 ?

$\lim_{x\to 0^+}|x|=|0^+|=0$ et $\lim_{x\to 0^-}|x|=|0^-|=0$

donc $\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^+}|x|$: g est continue en 0

- Mais est-elle dérivable en 0 ?

On sait que : $g(x)=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

La dérivée à gauche de 0 de g est : $g'(x)=|x|'=(-x)'=-1$

La dérivée à droite de 0 de g est : $g'(x)=|x|'=(x)'=1$

Les deux dérivées ne sont pas égales donc g n'est pas dérivable en 0.

3 . Étude des fonctions

3.1 . Variations et extremums

Pour déterminer les variations d'une fonction on étudie d'abord le signe de sa dérivée.

- Si la dérivée est positive, la fonction est croissante.
- Si la dérivée est négative, la fonction est décroissante.
- Si la dérivée est nulle, la fonction est constante.

Ex : Étudions les variations de la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x+1$.

Ici $f'(x)=3.x^2-3$

Étudions le signe de f'(x).

- On résout d'abord $3.x^2-3=0$ et on trouve deux racines: $x_1=1$ et $x_2=-1$.

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)=3.x^2-3$		+	0	−	0	+	
$f(x)=x^3-3x+1$		↗	3	↘	−1	↗	

$f(-1)=(-1)^3-3.(-1)+1=-1+3+1=3$

$f(1)=1^3-3.(1)+1=-1$

La fonction f admet deux extremums :

- Un maximum local : 3
- Un minimum local : −1

Remarque :

- La fonction dérivée s'annule et change de signe sur les extremums.
- Il est possible d'avoir un minimum local plus grand qu'un maximum local !