Repetorium der Gewöhlichen Differenzialgleichung

April 19, 2014

Definition 1. *Als gewöhnliche Differenzialgleichung bezeichent man eine Gleichung, in der eine (unbekannte) Funktion $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, t \mapsto w(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ und ihre Abbildung bis zu einer gewissen Ordnung $k \in \mathbb{N}$ auftauchen.*

$$f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(k)}(t)) = 0$$

mit

$$f : I \times \mathbb{R}^{(k+1)m} \to \mathbb{R}^m$$

gegeben sind.

Bemerkung 2. *"Lösung" bedeutet: $u \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$*

- *für $n > 1$ spricht man von einem System*
- *Gewöhnliche Differenzialgleichung der Form*

$$u^{(k)}(t) = \tilde{f}(t, u(t), \ldots, u^{(k-1)}(t))$$

  nennt man explizite Differenzialgleichung.

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differenzialgleichung erster Ordnung, d.h.

$$\begin{cases} u(t) = f(t, u(t0)), & t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ein Anfangswertproblem zum Anfangswert u_0.

Eine Allgemeine Differenzialgleichung mit $y(t) = \mathbb{R}$

$$y^{(k)}(t) = F(t, \overbrace{y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)}^{=u(t)})$$

lässt sicht immer auf eine Differenzialgleichung erster Ordnung zurückführen, denn für

$$u_1(t) := y(t), u_2(t) := y'(t), \ldots, u_{k-1}(t) = y^{(k-1)}(t)$$

folgt

$$u'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \\ F(t, u(t)) \end{pmatrix} =: f(t, u(t)))$$

Beispiel 3.

$$z''(t) + z'(t) + (z(t)t^2)^2 = z'''(t) \tag{1}$$

Definieren $u(t) = z(t), z'(t), z''(t))$

$$\Rightarrow u'(t) = \begin{pmatrix} z' \\ z'' \\ z''' \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} z'(t) \\ z''(t) \\ z'' + z' + (z + t^2)^2 \end{pmatrix} = f(t, u(t))$$

1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Picard-Lindelöf Betrachten $e'(t) = f(t, u(t)), u(0) = u_0$, f stetig und erfülle die glaobale Lipschizbedingung

$$\exists_{L>0} \forall_{(t,u),(t,v)} : f(t, u) - f(t, v) \leq |u - v|$$

dann gibt es eine Lösung $u \in C^1$.

Picard Interationsverfahren Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf wird der Banachsche Fixpunktsatz benutzt

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) \mathrm{d}s.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz ist Konstuktiv, d.h. für u_0 <u>beliebig</u> und $u_{l+1} = Tu_l$ konvergiert die Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ gegen die Lösung $u(t)$.

Beispiel 1.

$$\begin{cases} u(t) = t + u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \textit{oder } f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

Frage *existiert eine eindeutige Lösung? Falls ja, geben Sie die Lösung explizit an.*

Es gilt: $f(t, u) - f(t, v) = 1(u - v) \rightarrow$ *Vorraussetzunen von Picard-Lindeöf erfüllt d.h. es gibt eindeutige*

Betrachte Iterationsfolge

$$u_{l+1} - u_0 + \int_0^t f(s, u_l) \mathrm{d}s$$

Wähle $u_0 = 0$ *, dann folgt*

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0 + \int_0^t s + 0 \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} \\ u_2(t) &= 0 + \int_0^t s + \frac{s^2}{2} \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \\ &\vdots \\ u_m(t) &= \frac{t^2}{2} + fract^3 3! + \cdots + \frac{t^{m+1}}{(m=1)!} \end{aligned}$$

Somit

$$u(t) = e^t - t - 1 \quad \textit{e-Reihe!}$$

Probe $\quad u(t0) = 0 \; u'(t) = e^t - 1 = e^t - t - 1 + t = t + u(t)$

2 Lineare autonome Systeme von Differenzialgleichungn

Definition 1. *Eine autonome (lineare) Differenzialgleichung ist eine explizite Differenzialgleichung, deren rechte Seite nicht explizit von der unabhänigen Variable abhängt.*

$$u'(t) = Au(t)$$

wobe $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *und* $u(t) \in \mathbb{R}^m$

Fundamentalmatrix $Y_0(t) = e^{tA}$ gegeben nach Vorlesung.

Beispiel 2.

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_2(t) + u_1(t) \\ u_2'(t) = 3u_2(t) = 4u_1(t) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} v_1(0) = 3 \\ v_2(0) = 4 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = Au(t) \Rightarrow e^{tA}$$

EW:

$$\lambda = 5, \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \quad v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$v_i e^{\lambda_i t}$ *bildet ein Fundamentalsystem*[1] *.* $Av_i = \lambda v_i$

[1] Das Fundamentalsystem ist die gesamtheit aller Lösungen.

Somit Lösung a(t) gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t) &= Y(t)\begin{pmatrix} cgc_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad , c_1, c_1 = const \text{ (über Anfangswerte bestimmt)} \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^{5t} - c_2e^{-t} \\ 2c_1e^{5t} + c_2e^{-t} \end{pmatrix} \\ u(0) &= \begin{pmatrix} c-1-c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{7}{3}, c_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{14}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Probe

$$\begin{aligned} u(0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ u'(t) &= \begin{pmatrix} 3\frac{5}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{70}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{28}{3}e^{5t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{7}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{42}{3}e^{5t} - \frac{6}{3}e^{-t} + \frac{28}{3}e^{5t} + \frac{8}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_2(t) + u_1(t) \\ 3u_2(t) + 4u_1(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 Differenzialgleichung spezieller Form

Eie Differenzialgleichung der Folrm

$$u(t) = f(t)g(u(t))$$

nennt man eine Differenzialgleichung mit getrenten Variablen

Beispiel 1. *Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem* $f(t) = t, g(u) = 1 + 2u$

$$\begin{cases} u'(t) = t - (1 + (u(t))^2) \\ u(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = -1 \end{cases}$$

Schreibe

$$\begin{aligned}
&u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = t(1+u^2) \\
&\overset{T.d.V^2}{\Rightarrow} \int \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \int t\mathrm{d}t \\
&\Rightarrow \arctan u = \frac{t^2}{2} + c,\ c\ \textit{Integrationskonstante} \\
&\Rightarrow u(t) = \tan(\frac{t^2}{2} + c) \\
&\Rightarrow u(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = \tan(\frac{\pi}{4} + c) = -1, \quad c = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Somit

$$u(t) = \tan(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2})$$

Probe

$$u'(t) = t(\frac{1}{\cos^2(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2})}) = t(\frac{\sin^2 + \cos^2}{cos^2}) = t(\tan^2(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}) + 1) = t(1 + (u(t)^2))$$

4 Exacte Differenzialgleichungn

Definition 1. *Man nennt eine Differenzialgleichung der Form*

$$g(t, u(t) + h(t, u(t))u(T) = 0$$

exakt, falls eine Funktion $F(t,u)$ *existiert, sodass* $F_t = g, F_u = h$.