

Repetitorium der Gewöhnlichen Differenzialgleichung

April 17, 2014

Definition 1. Als gewöhnliche Differenzialgleichung bezeichnet man eine Gleichung, in der eine (unbekannte) Funktion $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, t \mapsto w(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ und ihre Abbildung bis zu einer gewissen Ordnung $k \in \mathbb{N}$ auftauchen.

$$f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(k)}(t)) = 0$$

mit

$$f : I \times \mathbb{R}^{(k+1)m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gegeben sind.

Bemerkung 2. “Lösung” bedeutet: $u \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$

- für $n > 1$ spricht man von einem System
- Gewöhnliche Differenzialgleichung der Form

$$u^{(k)}(t) = \tilde{f}(t, u(t), \dots, u^{(k-1)}(t))$$

nennt man explizite Differenzialgleichung.

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differenzialgleichung erster Ordnung, d.h.

$$\begin{cases} u(t) = f(t, u(t)), & t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ein Anfangswertproblem zum Anfangswert u_0 .

Eine Allgemeine Differenzialgleichung mit $y(t) \in \mathbb{R}$

$$y^{(k)}(t) = F(t, \overbrace{y(t), \dots, y^{(k-1)}(t)}^{=u(t)})$$

lässt sich immer auf eine Differenzialgleichung erster Ordnung zurückführen, denn für

$$u_1(t) := y(t), u_2(t) := y'(t), \dots, u_{k-1}(t) = y^{(k-1)}(t)$$

folgt

$$u'(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \\ F(t, u(t)) \end{pmatrix} =: f(t, u(t))$$

Beispiel 3.

$$z''(t) + z'(t) + (z(t)t^2)^2 = z'''(t) \quad (1)$$

Definieren $u(t) = (z(t), z'(t), z''(t))$

$$\Rightarrow u'(t) = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z''(t) \\ z'''(t) \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} z'(t) \\ z''(t) \\ z'' + z' + (z + t^2)^2 \end{pmatrix} = f(t, u(t))$$

1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Picard-Lindelöf Betrachten $e'(t) = f(t, u(t))$, $u(0) = u_0$, f stetig und erfülle die globale Lipschitzbedingung

$$\exists L > 0 \forall (t,u), (t,v) : f(t, u) - f(t, v) \leq |u - v|$$

dann gibt es eine Lösung $u \in C^1$.

Picard Iterationsverfahren Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf wird der Banachsche Fixpunktsatz benutzt

$$(Tu)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz ist konstruktiv, d.h. für u_0 beliebig und $u_{l+1} = Tu_l$ konvergiert die Folge $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ gegen die Lösung $u(t)$.

Beispiel 1.

$$\begin{cases} u(t) = t + u(t) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \text{oder } f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

Frage existiert eine eindeutige Lösung? Falls ja, geben Sie die Lösung explizit an.

Es gilt: $f(t, u) - f(t, v) = 1(u - v) \rightarrow$ Voraussetzungen von Picard-Lindelöf erfüllt d.h. es gibt eindeutige Lösung
Betrachte Iterationsfolge

$$u_{l+1} - u_0 + \int_0^t f(s, u_l) ds$$

Wähle $u_0 = 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 0 + \int_0^t s + 0 ds = \frac{t^2}{2} \\ u_2(t) &= 0 + \int_0^t s + \frac{s^2}{2} ds = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \\ &\vdots \\ u_m(t) &= \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

Somit

$$u(t) = e^t - t - 1 \quad e\text{-Reihe!}$$

Probe $u(t_0) = 0 \quad u'(t) = e^t - 1 = e^t - t - 1 + t = t + u(t)$

2 Lineare autonome Systeme von Differenzialgleichungen

Definition 1. Eine autonome (lineare) Differenzialgleichung ist eine explizite Differenzialgleichung, deren rechte Seite nicht explizit von der unabhängigen Variable abhängt.

$$u'(t) = Au(t)$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $u(t) \in \mathbb{R}^m$

Fundamentalmatrix $Y_0(t) = e^{tA}$ gegeben nach Vorlesung.

Beispiel 2.

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_2(t) + u_1(t) & (v_1(0) = 3) \\ u_2'(t) = 3u_2(t) = 4u_1(t) & (v_2(0) = 4) \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, u'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A} u(t) \Rightarrow e^{tA}$$

EW:

$$\begin{aligned} \lambda &= 5, \quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \lambda &= -1 \quad v_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow Y(t) &= \begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{-t} \\ -e^{5t} & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$v_i e^{\lambda_i t}$ bildet ein Fundamentalsystem¹. $Av_i = \lambda v_i$

¹Das Fundamentalsystem ist die Gesamtheit aller Lösungen.

Somit Lösung $a(t)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 u(t) &= Y(t) \begin{pmatrix} c_1 c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, c_1, c_2 = \text{const (über Anfangswerte bestimmt)} \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 e^{5t} - c_2 e^{-t} \\ 2c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} \end{pmatrix} \\
 u(0) &= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow c_1 &= \frac{7}{3}, c_2 = -\frac{2}{3} \\
 \Rightarrow u(t) &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{14}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Probe

$$\begin{aligned}
 u(0) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 u'(t) &= \begin{pmatrix} 3\frac{5}{3}e^{5t} - \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{70}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{28}{3}e^{5t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{7}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \\ \frac{42}{3}e^{5t} - \frac{6}{3}e^{-t} + \frac{28}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2u_2(t) + u_1(t) \\ 3u_2(t) + 4u_1(t) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3 Differenzialgleichung spezieller Form

Eine Differenzialgleichung der Form

$$u'(t) = f(t)g(u(t))$$

nennt man eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Beispiel 1. Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem $f(t) = t, g(u) = 1 + 2u$

$$\begin{cases} u'(t) = t - (1 + (u(t))^2) \\ u(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = -1 \end{cases}$$

Schreibe

$$\begin{aligned}u' &= \frac{du}{dt} = t(1 + u^2) \\&\stackrel{T.d.V^2}{\Rightarrow} \int \frac{1}{1 + u^2} du = \int t dt \\&\Rightarrow \arctan u = \frac{t^2}{2} + c, \quad c \text{ Integrationskonstante} \\&\Rightarrow u(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} + c\right) \\&\Rightarrow u\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = -1, \quad c = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Somit

$$u(t) = \tan\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Probe

$$u'(t) = t\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}\right) = t\left(\frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2}\right) = t\left(\tan^2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1\right) = t(1 + (u(t))^2)$$

4 Exakte Differenzialgleichungen

Definition 1. Man nennt eine Differenzialgleichung der Form

$$g(t, u(t)) + h(t, u(t))u'(t) = 0$$

exakt, falls eine Funktion $F(t, u)$ existiert, sodass $F_t = g, F_u = h$.