

V353

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 10.12.2020

Abgabe: 24.12.2020

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theoretische Grundlagen	3
3 Durchführung	6
3.1 Aufgabe a)	6
3.2 Aufgabe b)	7
3.3 Aufgabe c)	7
3.4 Aufgabe d)	8
4 Auswertung	9
4.1 Entladevorgange des Kondensators	9
4.2 Amplitude und Frequenz	11
4.3 Phasenverschiebung	13
4.4 Integrator-Funktion des RC-Kreises	16
5 Diskussion	16
Literatur	17

1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird das Relaxationsverhalten des RC-Kreises untersucht. Dazu werden Größen wie die Zeitkonstante, Amplituden der Kondensatorspannung und Phasenverschiebungen gemessen.

2 Theoretische Grundlagen

Eine Relaxationserscheinung tritt auf, wenn ein System aus seinem Ausgangszustand entfernt wird und es nicht-oszillatorisch in den Ausgangszustand zurückkehrt. Wird eine Größe A betrachtet, lässt sich ihre Änderungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t darstellen als:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)]. \quad (1)$$

Durch Integration vom Zeitpunkt 0 bis t und umstellen ergibt sich dann

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] e^{ct} \quad (2)$$

mit $c < 0$.

Die Ent- und Aufladevorgänge eines Kondensators über einen Widerstand sind Beispiele für Relaxationsvorgänge, die im Folgenden näher untersucht werden.

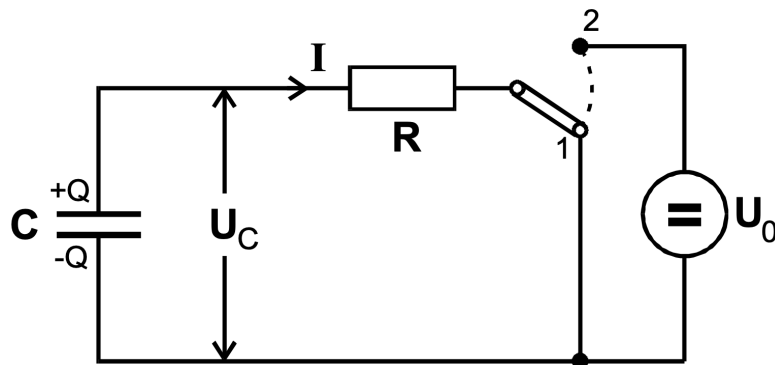


Abbildung 1: Entladung (1) und Aufladung (2) eines Kondensators über einen Widerstand.

1. Entladevorgang

Auf den Platten eines Kondensators mit der Kapazität C und der Ladung Q ist die Spannung zwischen ihnen durch

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (3)$$

gegeben. Mit

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (4)$$

und

$$dQ = -Idt \quad (5)$$

lässt sich nun eine Differentialgleichung für den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Plattenkondensator aufstellen.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (6)$$

Mit der Randbedingung

$$Q(\infty) = 0 \quad (7)$$

lässt sich die DGL (6) lösen zu

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (8)$$

2. Aufladevorgang

Mit den Randbedingungen für den Aufladevorgang

$$Q(\infty) = CU_0 \quad (9)$$

und

$$Q(0) = 0 \quad (10)$$

lässt sich die DGL (6) lösen zu

$$Q(t) = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (11)$$

Dabei ist der Ausdruck RC die Zeitkonstante, die angibt, wie schnell das System seinen Endzustand $Q(\infty)$ anstrebt. Das bedeutet, dass sich pro Zeitraum $\Delta T = RC$ die Ladung auf dem Plattenkondensator um den Faktor

$$\frac{Q(t = RC)}{Q(0)} = \frac{1}{e} \quad (12)$$

ändert.

Relaxationsphänomene, die unter dem Einfluss einer periodischen Auslenkung aus der Gleichgewichtslage auftreten

Nun wird das Relaxationsphänomen auf einen RC-Kreis mit Wechselspannung nach Abbildung (2) betrachtet.

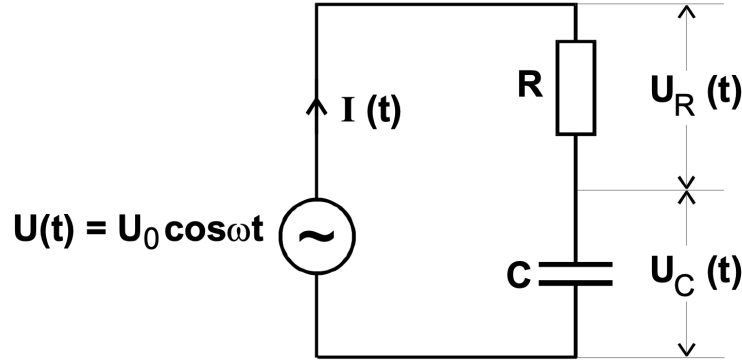


Abbildung 2: RC-Kreis mit Wechselspannung.

Wenn die Kreisfrequenz ω klein genug ist, also $\omega \ll \frac{1}{RC}$ gilt, kann angenommen werden, dass $U(t) = U_C$ gilt. Mit zunehmender Frequenz tritt eine Phasenverschiebung ϕ zwischen den Spannungen $U(t)$ und U_C auf, da die Ent- und aufladung des Kondensators zeitlich hinter der äußeren Spannung zurück bleibt. Mit der Amplitude A ergibt sich der Ansatz:

$$U_C(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

Mithilfe des Maschensatzes lässt sich aus Abbildung (2) folgender Ausdruck formulieren:

$$U_0 \cos(\omega t) = I(t)R + A(\omega) \cos(\omega t + \phi). \quad (14)$$

Mit Gleichung (3) und (5) kann $I(t)$ umgeschrieben werden zu

$$I(t) = C \frac{dU_C}{dt} \quad (15)$$

und kann in (14) eingesetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$U_0 \cos(\omega t) = -A\omega RC \sin(\omega t + \phi) + A(\omega) \cos(\omega t + \phi). \quad (16)$$

Wird nun $\omega t = \frac{\pi}{2}$ gewählt und ausgenutzt, dass $\sin(\frac{\pi}{2} + \phi) = \cos(\phi)$ und $\cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -\sin(\phi)$ gilt, folgt aus Gleichung (16)

$$0 = -A\omega RC \cos(\phi) - A(\omega) \sin(\phi) \iff \phi = \arctan(-\omega RC) \quad (17)$$

Weiter folgt aus (16) für $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$

$$U_0 \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = -A\omega RC \iff A(\omega) = -\frac{\sin \phi}{\omega RC} U_0 \quad (18)$$

Wird nun Gleichung (17) weiter umgeformt zu

$$\sin \phi = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (19)$$

kann dieser Ausdruck in Gleichung (18) eingesetzt werden. Daraus ergibt sich

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (20)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich, eine zeitlich veränderte Spannung in einem wie in Abbildung (2) gezeigten System zu integrieren. Zunächst wird die Maschenregel auf die in Abbildung (2) gezeigte Schaltung angewendet. Daraus folgt:

$$U(t) = I(t)R + U_C. \quad (21)$$

Nun wird für $I(t)$ der Ausdruck aus Gleichung (15) eingesetzt.

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C. \quad (22)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt, ist $|U_C| \ll |U_R|$ und $|U_C| \ll |U|$. Näherungsweise kann die Gleichung (22) nun vereinfacht werden zu

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt}. \quad (23)$$

Umgestellt nach U_C ergibt dies

$$U_C = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (24)$$

Gleichung (24) ist zu entnehmen, dass U_C proportional zu $\int U(t)$ ist, wenn $\omega \gg \frac{1}{RC}$ gilt.

3 Durchführung

Es wurden ein Oszilloskop und eine Spannungsquelle zur Verfügung gestellt.

3.1 Aufgabe a)

Um die Zeitkonstante zu bestimmen, wird das Experiment nach Abbildung (3) aufgebaut. Mithilfe des Oszilloskops wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit graphisch dargestellt und ein geeigneter Ausschnitt der Entladekurve betrachtet. Mit dem Cursor werden nun verschiedene Punkte auf der Kurve eingelesen. Diese wurden vermessen, notiert und in Tabelle (1) aufgeführt.

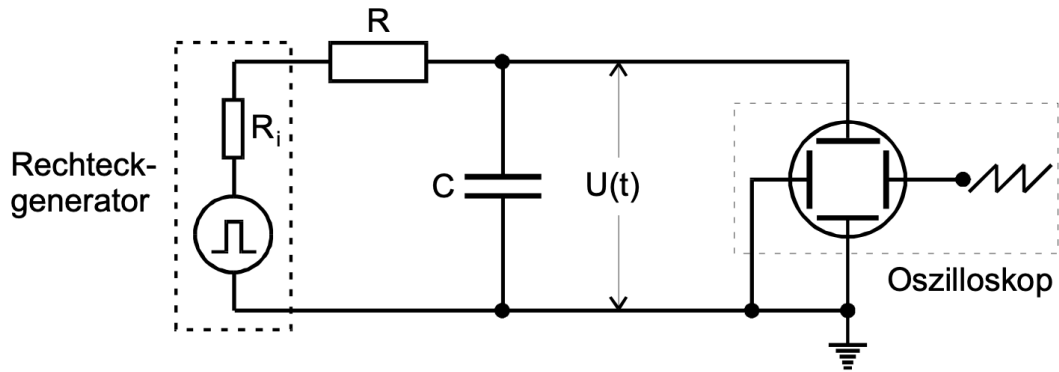


Abbildung 3: Aufbau zur Bestimmung der Zeitkonstante.

3.2 Aufgabe b)

Die Abhängigkeit der Kondensatorsspannungsamplitude von der Frequenz kann mit dem in Abbildung (4) dargestellten Aufbau untersucht werden.

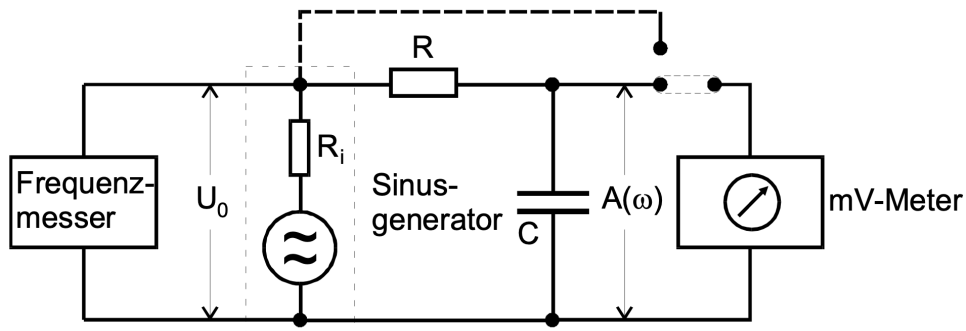


Abbildung 4: Aufbau zur Untersuchung der Abhängigkeit der Kondensatorspannungsamplitude von der Frequenz.

Dazu wird der Spannungsverlauf auf dem Oszilloskop betrachtet und mit dem Cursor vermessen, wobei die Frequenz verändert wird. Die Kondensatorspannungsamplituden werden in Abhängigkeit von verschiedenen Frequenzen $10\text{Hz} < f < 5\text{kHz}$ vermessen, notiert und in Tabelle (2) aufgeführt.

3.3 Aufgabe c)

Um die Phasenverschiebung ϕ zwischen der Generatorspannung und der Kondensatorspannung zu messen, kann der Versuch nach Abbildung (5) aufgebaut werden.

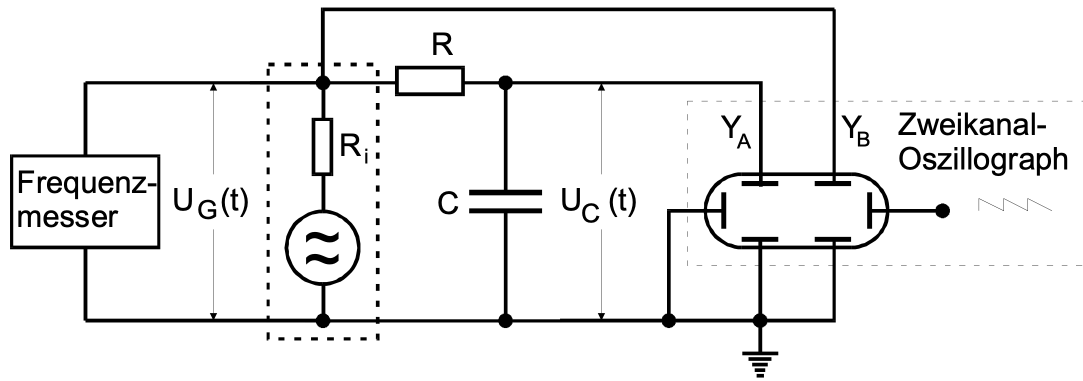


Abbildung 5: Aufbau zur Bestimmung der Phasenverschiebung.

Nun können am Oszilloskop beide Spannungsverläufe gleichzeitig beobachtet werden. Diese werden ähnlich zur Abbildung (6) auf dem Oszilloskop dargestellt:

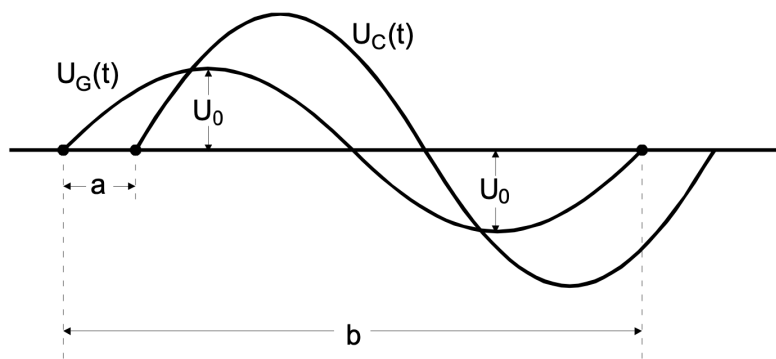


Abbildung 6: Form der beiden Spannungsverläufe am Oszilloskop.

Die Wellenlänge a sowie die Schwingungsdauer b werden für verschiedene Frequenzen mit dem Cursor vermessen, notiert und in Tabelle (3) aufgeführt.

3.4 Aufgabe d)

Um zu zeigen dass ein RC-Kreis auch als Integrator arbeiten kann, wird die Schaltung in Abbildung (5) verwendet. Nun wird nacheinander eine Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannung auf das RC-Glied gegeben von dessen Verlauf auf dem Oszilloskop jeweils ein Foto gemacht wird.

4 Auswertung

4.1 Entladevorgange des Kondensators

Durch die Beobachtung des Entladevorganges des Kondensators kann die Zeitkonstante des RC-Glieds bestimmt werden. Durch Messungen am Oszilloskop folgen folgende Werte:

Spannung U in V	Zeit t in μ s
-2.30	30
-3.14	0
-2.64	-220
-2.00	-440
-1.20	-720
-0.40	-900
0	-1000
0.400	-1075
0.880	-1160
1.25	-1215
1.92	-1330
2.56	-1410
3.36	-1510
3.94	-1570
4.48	-1630
4.6	-1650
4.32	-1790
4.48	-1730

Tabelle 1: Messdaten zur Entladung

Diese Daten werden nun geplottet und eine Ausgleichsfunktion wird durchgelegt. Die Ausgleichsfunktion ergibt sich aus der Gleichung (2) und der Formel $Q = CU$ zu

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (25)$$

Um die Grafik optisch schöner zu skalieren wird der Zeitpunkt $t = 0$ auf den höchst gemessenen Spannungspunkt gelegt. Zudem wird der Graph halblogarithmisch abgebildet. Daraus folgt dann folgende Grafik.

Aus der Ausgleichsgerade folgt $U_0 = 8.8156 \pm 0.1659V$ und $RC = 0.0010262 \pm 0.0000517s$.

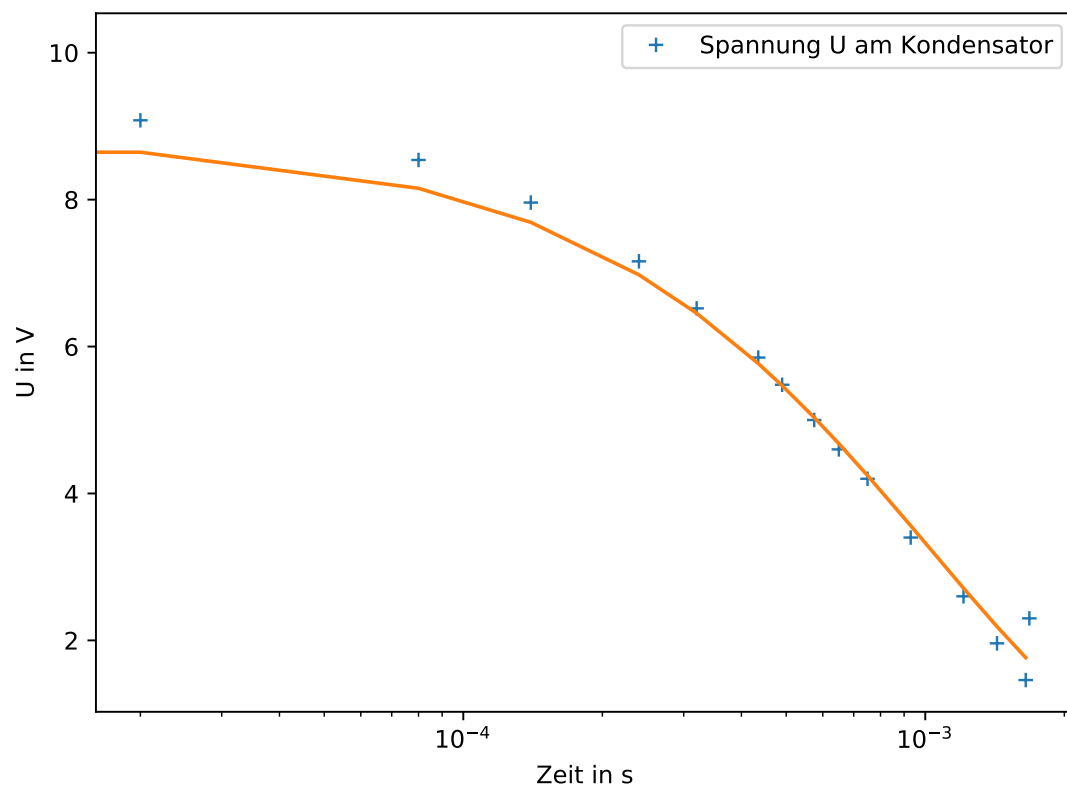


Abbildung 7: U_C/V gegen die Zeit t aufgetragen.

4.2 Amplitude und Frequenz

Als nächstes wird die doppelte Amplitude U_C in der Abhängigkeit der Frequenz betrachtet. Diese gemessen ergeben dann folgende Messwerte:

Frequenz f in Hz	doppelte Spannung U_C in V
10	12.16
20	11.92
30	11.52
40	11.36
50	11.20
100	9.52
200	6.88
300	5.12
400	4.12
500	3.36
1000	1.82
2000	0.952
3000	0.628
4000	0.488
5000	0.380

Tabelle 2: Messdaten zur Entladung

Zusätzlich wird $U_0 = 6.88V$ gemessen. Die gemessenen Werte werden als ebenfalls in ein halblogarithmisches Diagramm, sowie in (4.1), aufgetragen und eine Ausgleichsfunktion nach Gleichung (20) der Form

$$\frac{A(\omega)}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f)^2 R^2 C^2}} \quad (26)$$

wird durchgelegt.

Die Ausgleichfunktion liefert für $RC = 0.00153 \pm 0.00015s$.

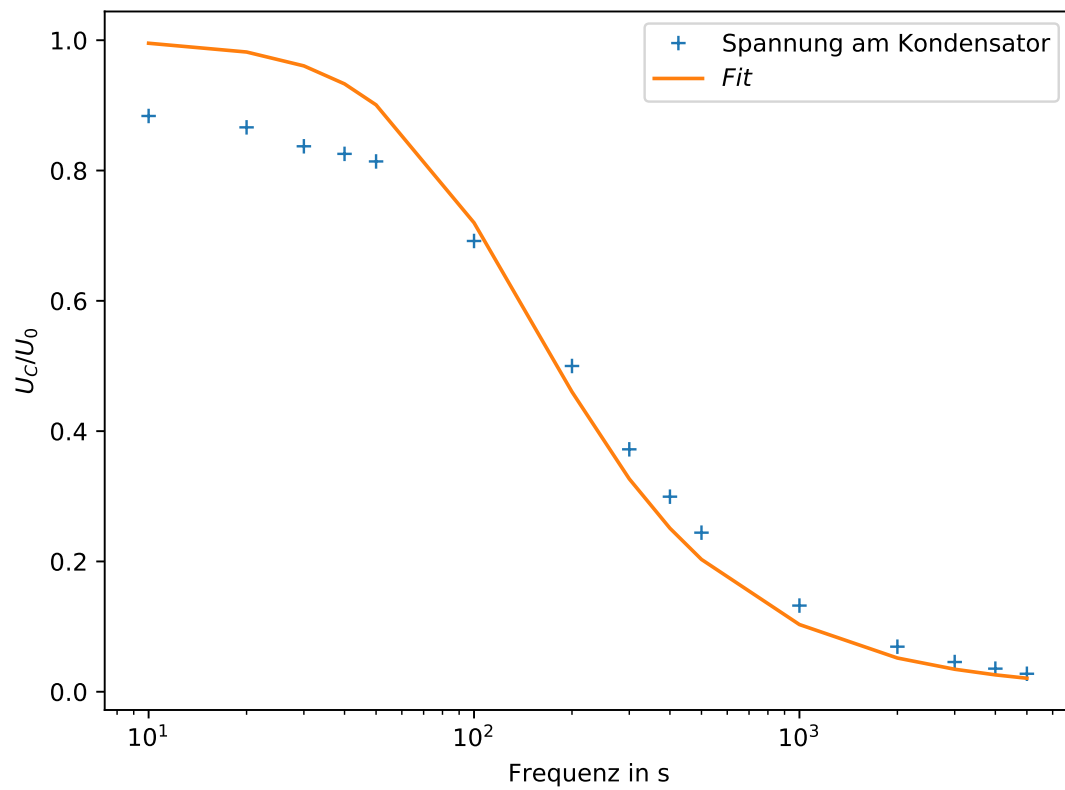


Abbildung 8: $\frac{A(\omega)}{U_0}$ gegen die Frequenz f aufgetragen.

4.3 Phasenverschiebung

Die Phasenverschiebung wird nach Abbildung (6) ermittelt. Als Tabelle aufgetragen folgen folgende Messwerte:

Frequenz f in Hz	a in μs	b in μs
10	5600	100000
20	1200	50000
30	1200	33000
40	800	25000
50	1000	20200
100	1000	10000
200	720	5000
300	600	3400
400	440	2480
500	360	2000
1000	220	1000
2000	112	500
3000	76	336
4000	60	250
5000	50	198

Tabelle 3: Messdaten zur Phasenverschiebung

Nun werden die Daten in ein Diagramm aufgetragen und φ nach

$$\varphi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (27)$$

berechnet. Die ermittelten Werte werden nun in ein f- φ -Diagramm geplottet und wie im Kapitel davor ausgewertet.

Aus der Ausgleichfunktion ist gegeben durch (17). Aus dieser folgt für $RC = 0.0009829 \pm 0.00095\text{s}$.

Zusätzlich kann mit den Werten aus der Tabelle (2) und dem zuvor ermittelten Wert für RC das ganze in einem polar Plot dargestellt werden. Dieser sieht wie folgt aus:

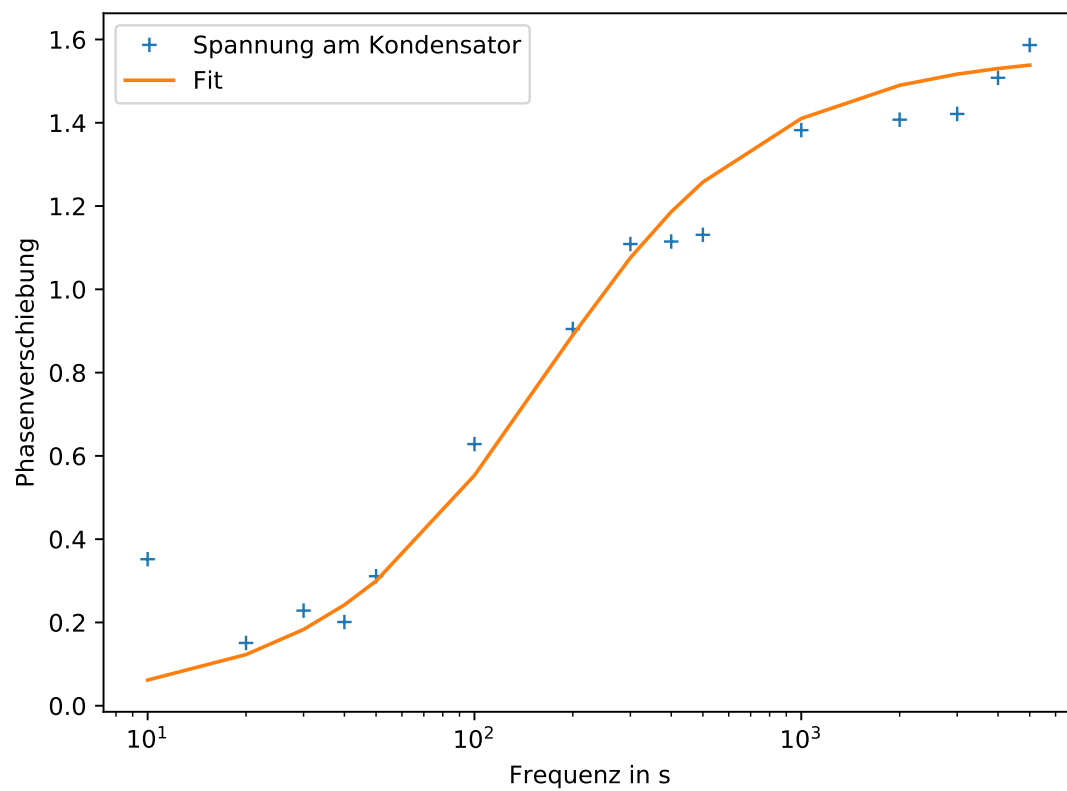


Abbildung 9: f / Hz gegen die Phasenverschiebung φ aufgetragen.

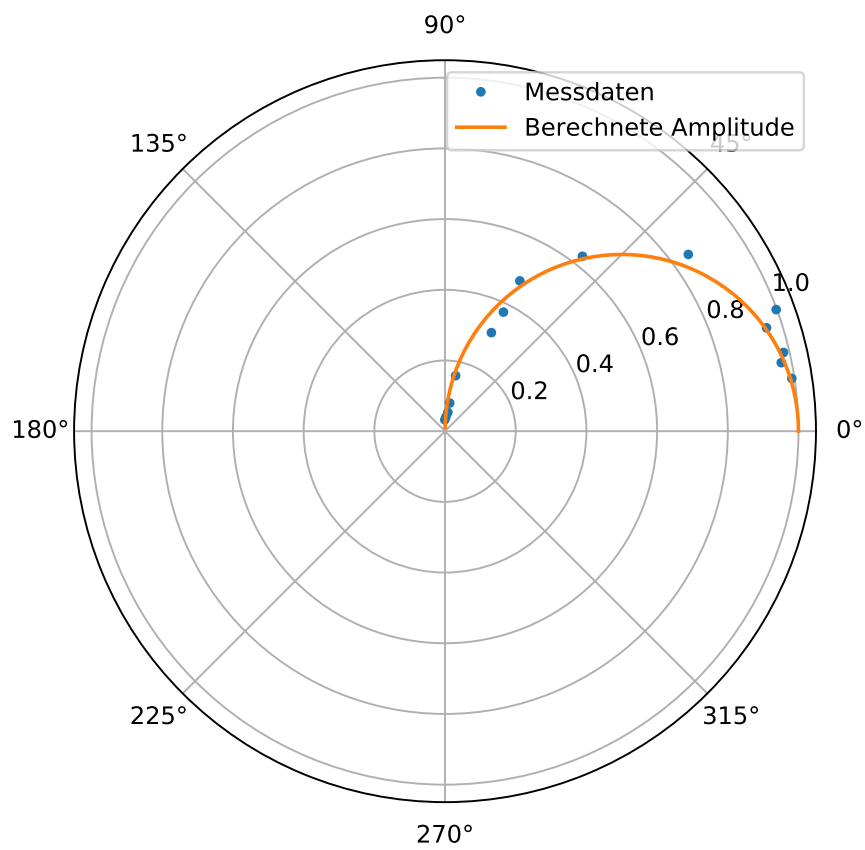
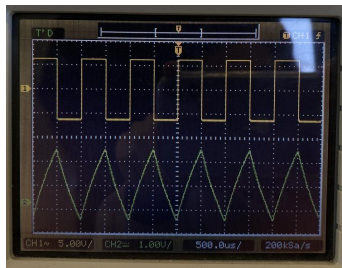


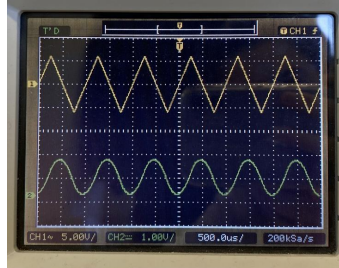
Abbildung 10: Radial wird das Amplitudenverhältnis, im Polarwinkel die Phasenverschiebung dargestellt.

4.4 Integrator-Funktion des RC-Kreises

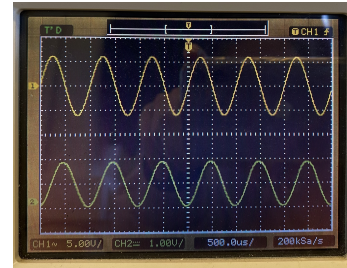
Der RC Kreis kann unter bestimmten Voraussetzungen als Integrator arbeiten. Die Integrationsfunktion ist dann gegeben durch die Formel (24). In den folgenden Bildern vom Bildschirm des Oszilators ist oben die angelegte Spannung und unten die Kondensatorspannung dargestellt.



(a) Rechtecksspannung



(b) Dreiecksspannung



(c) Sinusspannung

Abbildung 11: Fotos vom Oszilloskop

Exzeplarisches erklärt sieht man in der letzten Abbildung (11c) die anliegende Sinusspannung. Dazu unten die Kondensatorspannung die als phasenverschobene Sinusspannung gegeben ist. Da das Integral von Sinus der Cosinus ist und der Cosinus lediglich ein phasenverschobener Sinus ist, ist zu sehen, dass der RC Kreis unter bestimmten Voraussetzungen als Integrator arbeiten kann.

5 Diskussion

Die durch unterschiedliche Verfahren ermittelten Werte für den gleichen RC-Kreis liegen sehr dicht bei einander. Da leider die Werte aus dem RC-Kreis uns nicht bekannt sind, können wir leider nicht auf die Genauigkeit und das beste Verfahren zur Ermittlung des RC Wertes eines RC-Kreises rückschließen. Da jedoch alle Werte relativ dicht bei einander liegen, kann angenommen werden, dass alle Verfahren ungefähr gleich gut sind.

Die Abweichungen der Werte können untereinander können auf Messungenauigkeiten zurückgeführt werden, da zum Beispiel die Amplituden an einem digitalen Oszilloskop lediglich mit dem einem Cursor bestimmt wurden, welcher nicht unendlich genau eingestellt werden konnte. Zudem wurde nur mit Werten bis zu 2. Stelle nach dem Komma gerechnet, sodass auch dadurch Ungenauigkeiten nicht auszuschließen sind. Zudem kann ein schwanken in der Spannungsquelle, sowie ein Wackelkontakt im System für einen Fehler sorgen.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für spezifische Wärmekapazität von Wasser*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html (besucht am 01.11.2020).
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Versuchsanleitung zu Versuch D206 Die Wärmepumpe*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2020.