

D206

Wärmepumpe

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
authorB@udo.edu

Durchführung: DATUM

Abgabe: 03.11.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen durch verschiedene Brückenschaltungen unbekannte Widerstände gemessen, sowie eine Klirrfaktorbestimmung durchgeführt werden.

2 Theoretische Grundlage

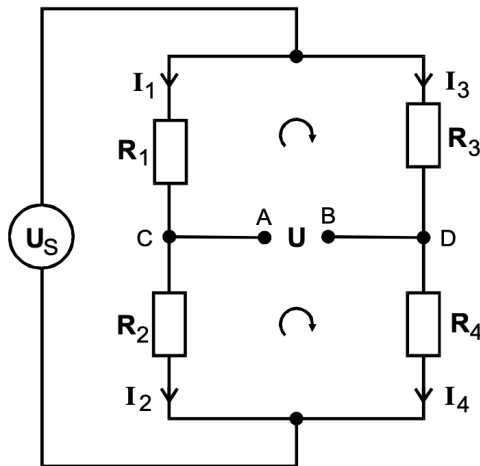


Abbildung 1: Prinzipielle Brückenschaltung.

In der Abbildung (??) ist der Aufbau einer prinzipiellen Brückenschaltung dargestellt. Hier wird die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A und B, die Brückenspannung genannt wird, in Abhängigkeit ihrer Widerstandsverhältnissen untersucht. Um die Brückenspannung zu berechnen wird sich auf die Kirchhoff'schen Gesetze berufen. Diese lauten wie folgt:

1. Knotenpunktsatz

In jedem Verzweigungspunkt (Knotenpunkt) eines Stromkreises ist die Summe der zufließenden Ströme ($I > 0$) gleich der Summe der abfließenden Ströme ($I < 0$).

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1)$$

2. Maschensatz

In einem unverzweigten Stromkreis bzw. in jeder Masche ist die Summe aller Spannungsabfälle U_k gleich der Summe der Produkte aus den Stromstärken I_k und den Widerständen R_k .

$$\sum_k U_k = \sum_k I_k R_k \quad (2)$$

Mithilfe des 1. Kirchhoff'schen Gesetzes (??) ergibt sich für Abbildung (??), dass über die Brücke A - B kein Strom fließt:

$$I_1 = I_2 \quad (3)$$

und

$$I_3 = I_4 \quad (4)$$

Das 2. Kirchhoff'sche Gesetz (??) liefert für die beiden Maschen in Abbildung (??)

$$U = -R_1 I_1 + R_3 I_3 \quad (5)$$

und

$$-U = -R_2 I_2 + R_4 I_4. \quad (6)$$

Wird für (??) genutzt, dass Gleichung (??) und (??) gilt, ergibt sich

$$-U = -R_2 I_1 + R_4 I_3. \quad (7)$$

Aus Gleichung (??) und (??) folgt nun

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_3 + R_4} I_1 \quad (8)$$

Außerdem lässt sich die Speisespannung U_S nach (??) ausdrücken

$$U_S = I_1 (R_1 + R_2) \quad (9)$$

und kann nach I_1 umgestellt in (??) eingesetzt werden. Dann gilt:

$$U = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} U_S \quad (10)$$

Dies ist ein Ausdruck für die Brückenspannung. Diese verschwindet, wenn

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \quad (11)$$

ist, was auch als abgegliche Brücke bezeichnet wird. Aus der Abgleichbedingung kann nun ein unbekannter Widerstand durch Variierung der bekannten drei anderen Widerständen gemessen werden, indem versucht wird, die Brückenspannung verschwinden zu lassen.

2.1 Brückenschaltungen mit komplexen Widerständen

Sobald sich in einer Schaltung Kapazitäten und Induktivitäten befinden, ist es nötig, mit komplexen Widerständen zu rechnen. Ein komplexer Widerstand lässt sich allgemein in folgender Form darstellen:

$$\mathfrak{R} = X + jY. \quad (12)$$

Dabei ist X der Wirkwiderstand, Y der Blindwiderstand und j die imaginäre Einheit. Die Widerstände einer Induktivität L , einer Kapazität C und eines ohmschen Widerstandes R lassen sich auch in dieser Weise mit ω als Kreisfrequenz darstellen.

$$\mathfrak{R}_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (13)$$

$$\mathfrak{R}_L = j\omega L \quad (14)$$

$$\mathfrak{R}_R = R \quad (15)$$

Nach Gleichung (??) ist die Abgleichbedingung für eine Brücke mit komplexen Widerständen

$$\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4. \quad (16)$$

Damit die komplexe Abgleichbedingung (??) erfüllt ist, müssen Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten gleich sein. Daraus ergeben sich zwei Bedingungen, die bei einer abgeglichenen Wechselstrombrücke gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$X_1X_4 - Y_1Y_4 = X_2X_3 - Y_2Y_3 \quad (17)$$

und

$$X_1Y_4 + X_4Y_1 = X_2Y_3 + X_3Y_2. \quad (18)$$

2.2 Beschreibung spezieller Brückenschaltungen

2.2.1 Wheatstonesche Brückenschaltung

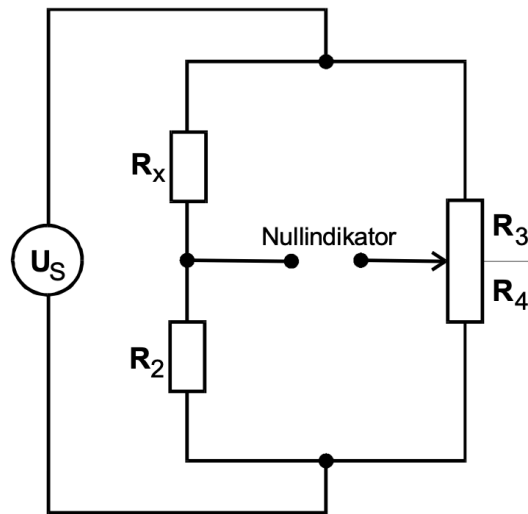


Abbildung 2: Wheatstonesche Brückenschaltung.

Da die Wheatstonesche Brückenschaltung nur ohmsche Widerstände enthält, kann sie sowohl mit Gleichstrom, als auch mit Wechselstrom betrieben werden. Sie ist wie in Abbildung (??) dargestellt aufgebaut und kann zur Bestimmung eines unbekannten Widerstandes R_X verwendet werden. Nach der Abgleichbedingung (??) kann man R_X durch

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (19)$$

bestimmen, wobei das Verhältnis von R_3 zu R_4 durch ein Potentiometer realisiert wird.

2.2.2 Kapazitätsmessbrücke

Da bei einem realen Kondensator dielektrische Verluste auftreten, wird im Ersatzschaltbild ein ohmscher Widerstand in Reihe geschaltet, sodass gilt:

$$\Re_{\text{Creal}} = R - \frac{j}{\omega C} \quad (20)$$

Eine Kapazitätsmessbrücke, mit der man eine unbekannte Kapazität C_X messen kann, ist in Abbildung (??) dargestellt.

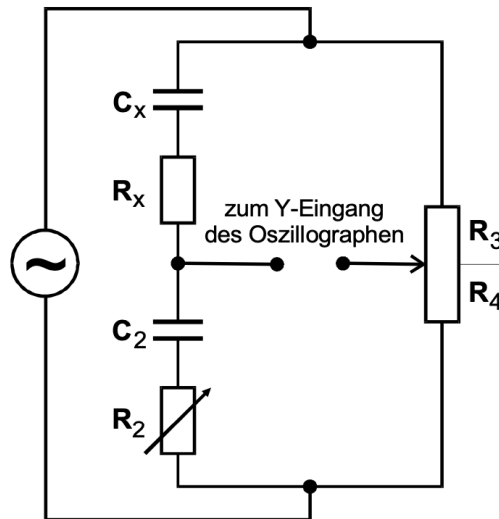


Abbildung 3: Kapazitätsmessbrücke für realen Kondensator.

Um C_X und R_X zu bestimmen müssen die Abgleichbedingungen (??) und (??) mit

$$Y_1 = -\frac{1}{\omega C_X}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{\omega C_2}$$

$$Y_3 = Y_4 = 0$$

berücksichtigt werden. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (21)$$

und

$$C_X = C_2 \frac{C_3}{C_4}. \quad (22)$$

2.2.3 Induktivitätsmessbrücke

Die Induktivitätsmessbrücke ist analog zur Kapazitätsmessbrücke aufgebaut. Auch hier wird zu jeder Induktivität ein ohmscher Widerstand aufgrund von Wärmeverlusten in Reihe geschaltet, mit

$$\mathfrak{R}_{L_{\text{real}}} = R + j\omega L \quad (23)$$

$$Y_1 = \omega L_X$$

$$Y_2 = \omega L_2$$

und

$$Y_3 = Y_4 = 0.$$

Der Aufbau hat die in Abbildung (??) gezeigte Gestalt.

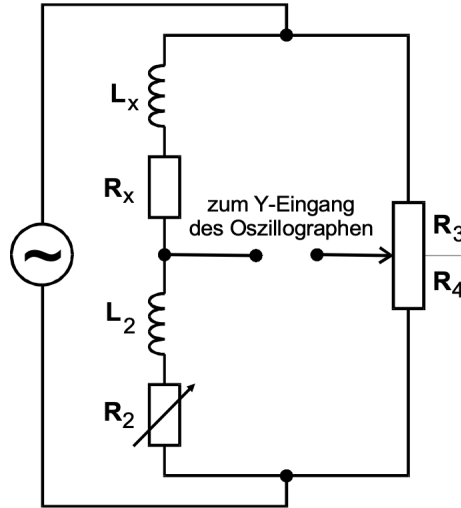


Abbildung 4: Induktivitätsmessbrücke für reale Spule.

Die Abgleichbedingung lauten nach (??) und (??)

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (24)$$

und

$$L_X = L_2 \frac{L_3}{L_4}. \quad (25)$$

Dabei sollte der Wirkanteil in dem Brückenweig mit L_2 allein durch den Regelwiderstand R_2 realisiert werden. Da dies insbesondere für kleine Frequenzen schwer umzusetzen ist, wird weiter noch die Maxwell-Brücke betrachtet, bei der anstelle von L_2 eine Normalkapazität verwendet wird.

2.2.4 Induktivitätsmessung durch Maxwell-Brücke

Bei einer Maxwell-Brücke sind die Abgleichelemente die Regelwiderstände R_3 und R_4 . R_2 ist ein bekannter Widerstand mit einer möglichst engen Toleranz und C_4 eine möglichst verlustarme Kapazität.

Mithilfe von Abbildung (??) lassen sich die Widerstandsoperatoren bestimmen:

$$\Re_1 = R_X + j\omega L_X \quad (26)$$

und

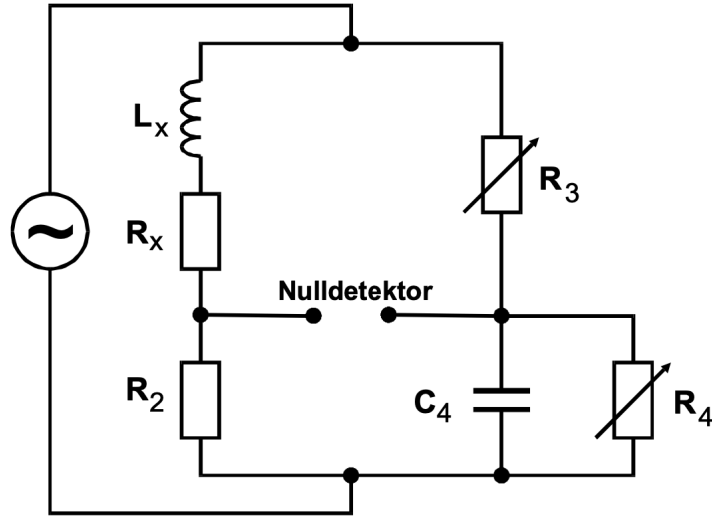


Abbildung 5: Maxwell-Brücke für realen Kondensator mit RC Netzwerk.

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_4} = \frac{1}{R_4} + j\omega C_4 \quad (27)$$

bzw.

$$\mathfrak{R}_4 = \frac{R_4 - j\omega C_4 R_4^2}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2} \quad (28)$$

Damit lassen sich wieder die Abgleichbedingungen nach (??) und (??) bestimmen.

$$R_X R_4 + \omega^2 C_4 R_4^2 L_X = R_2 R_3 (1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2) \quad (29)$$

$$-\omega R_X R_4^2 C_4 + \omega R_4 L_X = 0 \quad (30)$$

Wird (??) nach L_X umgestellt und in (??) eingesetzt, ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (31)$$

und mit (??)

$$L_X = R_2 R_3 C_4. \quad (32)$$

Es fällt auf, dass keine bisher aufgeführte Brücke in den Abgleichbedingungen von ω abhängt. In der Praxis gibt es aber tatsächlich einen bestimmten Frequenzbereich, in dem der Abgleich mit optimalen Vorraussetzungen durchführbar ist. So gibt es Brückenschaltungen, die den Abgleich nur bei einer Frequenz zulassen, wie zum Beispiel die Wien-Robinson-Brücke.

2.2.5 Wien-Robinson-Brücke

Die Besonderheit der Wien-Robinson-Brücke im Vergleich zu den davor aufgeführten Brücken ist, dass sie keine Abgleichelemente enthält. Die Schaltung einer solchen Brücke ist in Abbildung (??) dargestellt.

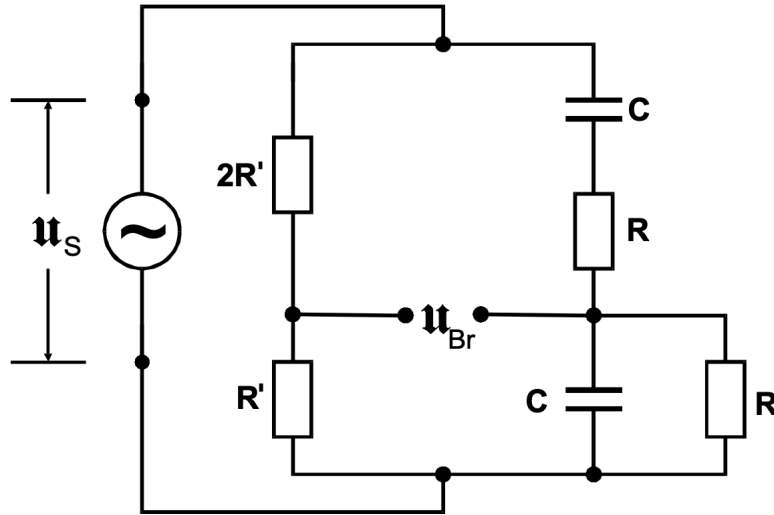


Abbildung 6: Schaltung einer Wien-Robinson-Brücke.

Das Ziel ist es zunächst, einen Ausdruck für die Brückenspannung u_{Br} in Abhängigkeit von der Frequenz zu finden. Dazu werden die Widerstandsoperatoren aufgeführt.

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= 2R' \\ \mathfrak{R}_2 &= R' \\ \mathfrak{R}_3 &= R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega CR + 1}{j\omega C} \\ \mathfrak{R}_4 &= \frac{R}{j\omega CR + 1}\end{aligned}$$

Diese Ausdrücke können in (??) eingesetzt werden und weiter ergibt sich

$$u_{Br} = \frac{\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}_3 - \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_4}{(\mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_4)(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2)} u_S. \quad (33)$$

Durch einsetzen und weiteren Umformungen folgt dann

$$u_{Br} = \frac{\omega^2 R^2 C^2 - 1}{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC} u_S \quad (34)$$

bzw.

$$\frac{\mathfrak{U}_S}{\mathfrak{U}_{Br}} = \frac{3(1 - \omega^2 R^2 C^2) + 9j\omega RC}{\omega^2 R^2 C^2 - 1}. \quad (35)$$

Weitere umformungen liefern

$$\left| \frac{\mathfrak{U}_{Br}}{\mathfrak{U}_S} \right|^2 = \frac{(\omega^2 R^2 C^2 - 1)^2}{9\{(1 - \omega^2 R^2 C^2)^2 + 9\omega^2 R^2 C^2\}} \quad (36)$$

woraus abzulesen ist, dass die Brückenspannung genau dann verschwindet, wenn gilt:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad (37)$$

Nun wird das Frequenzverhältnis

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (38)$$

in (??) eingesetzt. Daraus ergibt sich

$$\left| \frac{\mathfrak{U}_{Br}}{\mathfrak{U}_S} \right|^2 = \frac{1}{9} \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 9\Omega^2}. \quad (39)$$

Aus der Gleichung (??) kann nun abgelesen werden, dass für $\omega = \omega_0$ die Brückenspannung verschwindet und schwächt Schwingungen in der Nähe ab. Daran ist zu erkennen, dass die Wien-Robinson-Brücke Eigenschaften eines Filters hat.

Mithilfe der Wien-Robinson-Brücke kann zudem eine Klirrfaktor-Messung durchgeführt werden, mit der eine Aussage über die Qualität eines Sinusgenerators getroffen werden kann. Dabei gibt der Klirrfaktor (der im idealfall möglichst klein sein sollte) den Oberwellengehalt im Vergleich zur Grundwelle an.

Es gilt

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1}. \quad (40)$$

Hier ist U_1 die Amplitude der Grundwelle mit der Frequenz ω_0 und U_n die Amplitude der n-ten Oberwelle mit der Frequenz $n\omega_0$. Zur Vereinfachung kann angenommen werden, dass die Summe der Oberwellen nur aus der zweiten Oberwelle besteht, für die

$$U_2 = \frac{U_{Br}}{f(\Omega)} \quad (41)$$

gilt.

3 Durchführung

Es wurden ein Oszilloskop und eine Spannungsquelle sowie verschiedene Kondensatoren, Spulen, und Widerstände zur Verfügung gestellt. Da Aufgabenteile b) c) und d) aufgrund technischer Fehler nicht selbst durchgeführt werden konnten, wurden die Daten aus (??), (??), (??), (??), (??) und (??) zur Verfügung gestellt.

3.1 Aufgabe a)

Um die unbekannten Widerstände zu messen, wird die Wheatstone'sche Brückenschaltung nach Abbildung (??) aufgebaut. Die Frequenz bleibt dabei die ganze Zeit bei 1500 Hz

1. Wert 13

Zur Bestimmung vom unbekannten Widerstand Wert 13 wird $R_2 = 664\Omega$ gewählt. Nun wird am Potentiometer so lange gedreht, bis die Spannung minimal wird. Dies war bei $R_3 = 317,5\Omega$ und $R_4 = 682,5\Omega$ der Fall.

Das Vorgehen wird mit einem anderen Widerstand $R_2 = 1k\Omega$ wiederholt.

Dann ergibt sich $R_3 = 241\Omega$ und $R_4 = 759\Omega$.

2. Wert 14

Dies wurde analog für einen zweiten unbekannten Widerstand Wert 14 durchgeführt.

Für $R_2 = 664\Omega$ ergibt sich $R_3 = 573,5\Omega$ und für $R_4 = 426,5\Omega$.

Für $R_2 = 1k\Omega$ ergibt sich $R_3 = 471\Omega$ und für $R_4 = 529\Omega$.

3.2 Aufgabe b)

Durch eine Kapazitätsmessbrücke nach () werden zwei unbekannte Kapazitäten gemessen.

1. Wert 8

Messung	C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	450	371	606	394
2	399	418	578	422
3	597	278	673	327

Tabelle 1: Daten für Wert 8.

2. Wert 9

Messung	C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	450	466	511	489
2	399	524	481	519
3	597	352	581	419

Tabelle 2: Daten für Wert 9.

3.3 Aufgabe c)

Hier sollen mit einer Induktivitätsbrücke nach () zwei unbekannte Induktivitäten gemessen werden.

1. Wert 10

Messung	L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	14,6	45	907	83
2	20,1	57	875	125
3	27,5	85	837	163

Tabelle 3: Daten für Wert 10.

2. Wert 18

Messung	L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	14,6	108	775	225
2	20,1	143	715	285
3	27,5	197	648	352

Tabelle 4: Daten für Wert 18.

3.4 Aufgabe d)

Nun soll die Vermessung der unbekannten Induktivitäten nochmal auf eine andere Art gemessen werden. Diesmal durch die Maxwell Brücke nach ().

1. Wert 10

Messung	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	100	347	829
2	664	523	829
3	332	1036	829

Tabelle 5: Daten für Wert 10.

2. Wert 18

Messung	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω
1	100	128	347
2	664	193	349
3	332	382	348

Tabelle 6: Daten für Wert 18.

3.5 Aufgabe e)

Danach sollte die Frequenzabhängigkeit der Brückenspannung einer Wien-Robinson-Brücke untersucht und mit der Theorie verglichen werden. H

4 Messwerte

Die folgenden Messwerte wurden uns zur Verfügung gestellt:

t / min	$T_1 / ^\circ\text{C}$	p_1 / bar	$T_2 / ^\circ\text{C}$	p_2 / bar	N / W
0	21,7	4,0	21,7	4,1	120
1	23,0	5,0	21,7	3,2	120
2	24,3	5,5	21,6	3,4	120
3	25,3	6,0	21,5	3,5	120
4	26,4	6,0	20,8	3,5	120
5	27,5	6,0	20,1	3,4	120
6	28,8	6,5	19,2	3,3	120
7	29,7	6,5	18,5	3,2	120
8	30,9	7,0	17,7	3,2	120
9	31,9	7,0	16,9	3,0	120
10	32,9	7,0	16,2	3,0	120
11	33,9	7,5	15,5	2,9	120
12	34,8	7,5	14,9	2,8	120
13	35,7	8,0	14,2	2,8	120
14	36,7	8,0	13,6	2,7	120
15	37,6	8,0	13,0	2,6	120
16	38,4	8,5	12,4	2,6	120
17	39,2	8,5	11,7	2,6	120
18	40,0	9,0	11,3	2,5	120
19	40,7	9,0	10,9	2,5	120
20	41,4	9,0	10,4	2,4	120
21	42,2	9,0	9,9	2,4	120
22	42,9	9,5	9,5	2,4	120
23	43,6	9,5	9,1	2,4	120
24	44,3	10,0	8,7	2,4	120
25	44,9	10,0	8,3	2,4	120
26	45,5	10,0	8,0	2,3	120
27	46,1	10,0	7,7	2,2	122
28	46,7	10,5	7,4	2,2	122
29	47,3	10,5	7,1	2,2	122
30	47,8	10,75	6,8	2,2	122
31	48,4	11,0	5,6	2,2	122
32	48,9	11,0	4,3	2,2	122
33	49,4	11,0	3,4	2,2	122
34	49,9	11,0	3,0	2,2	122
35	50,3	11,0	2,9	2,2	122

Tabelle 7: Messdaten

5 Auswertung

5.1 Aufgabenteil a)



Abbildung 7: Auswertung mit ausgleichsgeraden

5.2 Aufgabenteil b)

5.3 Aufgabenteil c)

5.4 Aufgabenteil d)

5.5 Aufgabenteil e)

5.6 Aufgabenteil f)

5.7 Aufgabenteil g)

6 Diskussion