

V606

## **Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe**

Tahir Kamcili  
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß  
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 18.05.2021

Abgabe: 25.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>7</b>
3.1 Messung der Filterkurve . . . . .	7
3.2 Messung der Suszeptibilität ausgewählter Stoffe . . . . .	7
<b>4 Auswertung</b>	<b>8</b>
<b>5 Diskussion</b>	<b>13</b>
<b>Literatur</b>	<b>13</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden die Suszeptibilitäten von seltenen Erden untersucht, sowie die Filterkurve des Selektivverstärkers, welcher im Versuch benutzt wird.

## 2 Theoretische Grundlagen

Allgemein kann die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  mit der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  und der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  angegeben werden als

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}, \quad (1)$$

wobei die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  ebenfalls von der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  abhängt, sodass

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} \quad (2)$$

gilt. Dabei ist die magnetische Suszeptibilität  $\chi$  eine dimensionslose Größe, die angibt, wie gut ein Material im externen Magnetfeld magnetisierbar ist. Im Allgemeinen wird zwischen zwei Arten von Magnetisierungen unterschieden. Zum einen in Stoffen welche diamagnetisch sind, also Stoffe bei der  $\chi < 0$  ist und somit bei einem Feld, welches von außen anliegt, dem entgegengesetzt zur Feldrichtung magnetisiert werden.

Zum anderen in Stoffe, welche die Eigenschaft der Suszeptibilität besitzen, also bei denen  $\chi > 0$  ist. Diese Eigenschaft wird nur bei Stoffen beobachtet, welche einen nicht verschwindenden Drehimpuls haben. Bei diesen Materialien gilt ein antiporportionales Verhältnis der Suszeptibilität zur Temperatur.

$$\chi \propto \frac{1}{T} \quad (3)$$

Dies wird auch das Curiesche Gesetz genannt.

Bei Seltenen-Erd-Verbindungen kommt der Gesamtdrehimpuls durch die Anordnung der 4f-Elektronen Zustände. Für diese Elektronen und den Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  gelten die Hundschen Regeln:

- Die einzelnen Spins  $\vec{s}_i$  summieren sich nach dem Pauli-Prinzip zum maximalen Gesamtspin  $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$  auf.
- Die einzelnen Bahndrehimpulse  $\vec{l}_i$  summieren sich nach dem Pauli-Prinzip zum Maximaldrehimpuls  $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$  auf.
- Der Gesamtdrehimpuls beträgt  $\vec{J} = \vec{L} - \vec{S}$ , wenn die Elektronenschale weniger und  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ , wenn die Schale mehr als halbvoll besetzt ist.

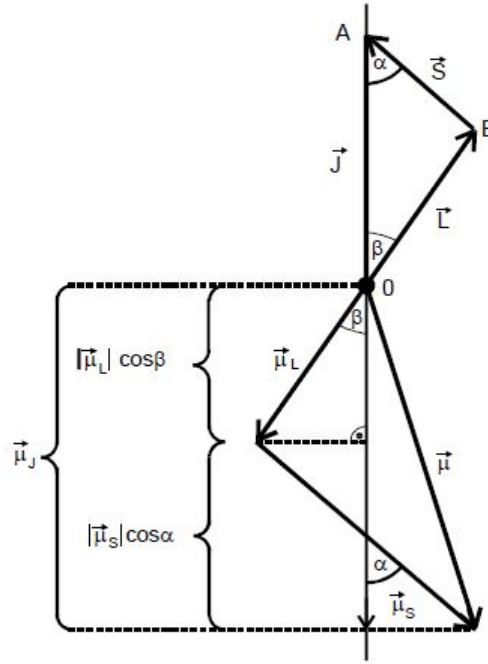
Allgemein ist der quantenmechanische Zusammenhang zwischen Drehimpuls und dem magnetischen Moment gegeben durch:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{L}, \quad (4)$$

$$\vec{\mu}_S = -g_S \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S}, \quad (5)$$

wobei  $\mu_B = \frac{\hbar e_0}{2m_0}$  das Bohrsche Magneton und  $g_S$  das gyromagnetische Verhältnis beschreibt.

Dabei setzt sich der Drehimpuls  $\vec{J}$  aus dem Bahndrehimpuls der Elektronenhülle  $\vec{L}$  und dem Gesamtspin  $\vec{S}$  zusammen. Eigentlich müsste der Kerndrehimpuls mitbetrachtet werden, jedoch kann er an dieser Stelle vernachlässigt werden.



**Abbildung 1:** Vektordiagramm aus den Drehimpulsvektoren einer Elektronenhülle. [6]

Damit ergibt sich mit den Quantenzahlen der Drehimpulse  $\vec{J}$  und  $\vec{L}$  und des Spins  $\vec{S}$  die Beträge

$$|\vec{\mu}_J| = |\vec{\mu}_S| \cdot \cos(\alpha) + |\vec{\mu}_L| \cdot \cos(\beta) .$$

Zusätzlich lässt sich daraus und der Abbildung 1 der Lande-Faktor bestimmen zu

$$g_J = \frac{3J(J+1) + [S(S+1) - L(L+1)]}{2J(J+1)} .$$

Daraus folgt für  $|\vec{\mu}_J|$ :

$$|\vec{\mu}_J| = \mu_B g_J \sqrt{J(J+1)}. \quad (6)$$

Aus der Quantenmechanik geht zusätzlich noch eine Richtungsquantelung vor. Das bedeutet, dass der Winkel zwischen dem äußeren Magnetfeld und dem  $\vec{\mu}_J$  nicht kontinuierlich ist, sondern nur diskrete Werte annehmen kann. Und zwar nur die Werte (am Beispiel der Z-Komponente), bei denen

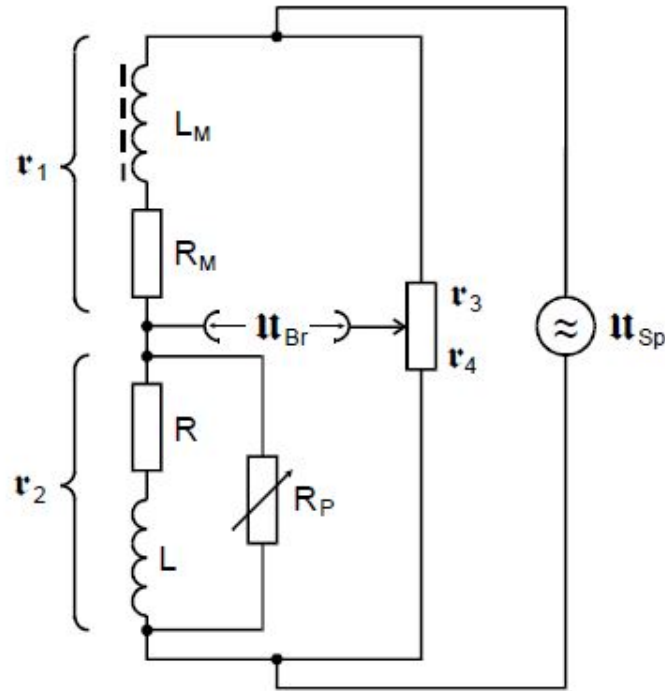
$$\mu_{J_z} = -\mu_B \cdot g_J \cdot m \quad (7)$$

gilt, wobei  $m$  die ganzzahlige Orientierungsquantenzahl ist und durch die es  $2J + 1$  Einstellungsmöglichkeiten bezüglich des äußeren Magnetfeldes gibt. Daraus kann allgemein der Zusammenhang

$$\chi = \frac{\mu_0 \cdot \mu_B^2 \cdot g_J^2 \cdot N J(J+1)}{3kT} \quad (8)$$

geschlussfolgert werden.

Wird in eine Spule ein Stoff mit paramagnetische Suszeptibilität eingeführt und dann mit einer Spule verglichen, in welcher kein Stoff ist, so fällt ein Induktivitätsdifferenz  $\Delta L$  zwischen den Spulen auf. Dieser Unterschied wird genutzt um Stoffe mit paramagnetischer Suszeptibilität mit einer Brückenschaltung zu untersuchen. Dabei wird diese aufgebaut wie in Abbildung 2 dargestellt.



**Abbildung 2:** Brückenschaltung zur Suszeptibilitätsmessung [6].

Für hohe Spannungsfrequenzen kann aus der Abbildung geschlossen werden, dass für  $\omega^2 L^2 \gg R^2$  die Beziehung

$$\chi(\omega \rightarrow \infty) = \frac{4FU_{\text{Br}}}{QU_{\text{Sp}}} \quad (9)$$

gilt. Dabei ist  $F$  der Spulenquerschnitt,  $Q$  der Probenquerschnitt und  $U_{\text{Sp}}$  die Speisespannung.

Zusätzlich kann die Methode mit erneutem Abgleich der Brückenspannung die Beziehung

$$\chi = \frac{2 \cdot \Delta R \cdot F}{R_3 \cdot Q} \quad (10)$$

benutzt werden, wobei  $\Delta R$  für die Differenz der Potentiometereinstellungen steht.

Bei der Messung mit der Brückenspannung treten jedoch Störspannungen auf, welche mit einem Selektivverstärker deutlich verringert werden können.

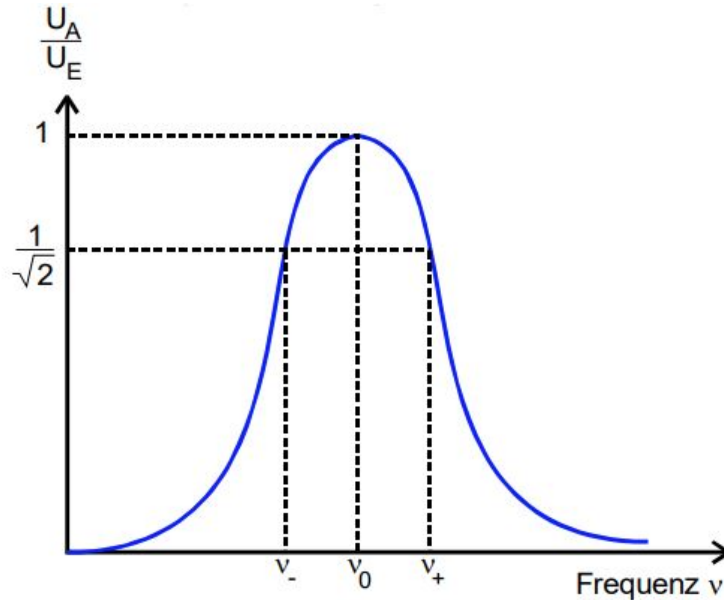


Abb.3: Filterkurve eines Selektivverstärkers

Abbildung 3: Filterkurve [6].

Dabei gibt die Güte  $Q$  die Qualität des Filters an. Je spitzer die Kurve ist, je höher ist die Güte und die Qualität des Filters. Diese kann berechnet werden mit

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_+ - \nu_-}, \quad (11)$$

wobei  $\nu_0$  die Durchlassfrequenz des Selektivverstärkers ist und  $\nu_+$  und  $\nu_-$  die Frequenzen, bei denen  $\frac{U_A}{U_E}$  den Wert  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  erreicht.

### 3 Durchführung

#### 3.1 Messung der Filterkurve

Zunächst wird die Güte des Selektivverstärkers untersucht. Dafür wird der Selektivverstärker mit einem Synthesizer und Oszilloskop bei Frequenzen  $\nu = 20 \text{ kHz}$  und  $40 \text{ kHz}$  durchgemessen. Die Werte der Messung sind in Tabelle 1 gelistet.

#### 3.2 Messung der Suszeptibilität ausgewählter Stoffe

Für den Aufbau der Messbrücke wird der Aufbau nach Abbildung 2 aufgebaut. Zusätzlich wird der Frequenzfilter nach Abbildung 4 verschaltet.

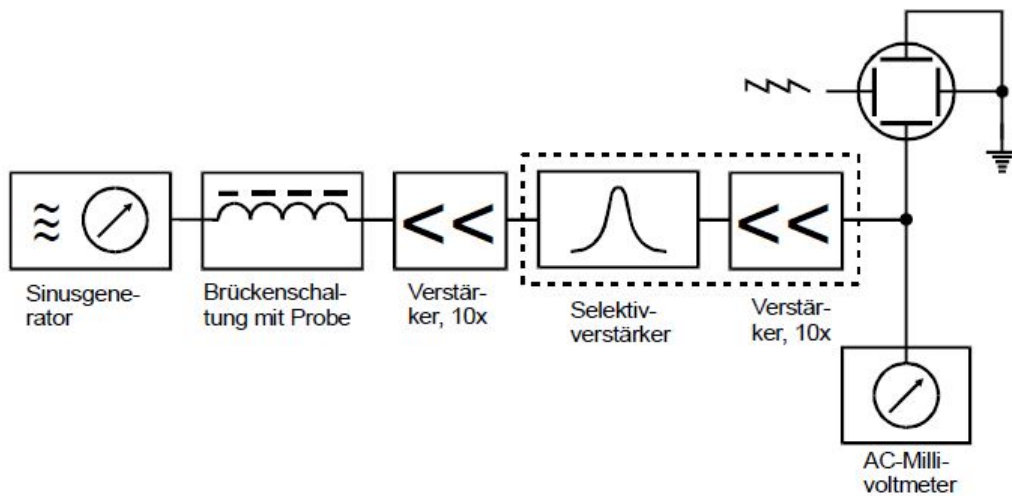
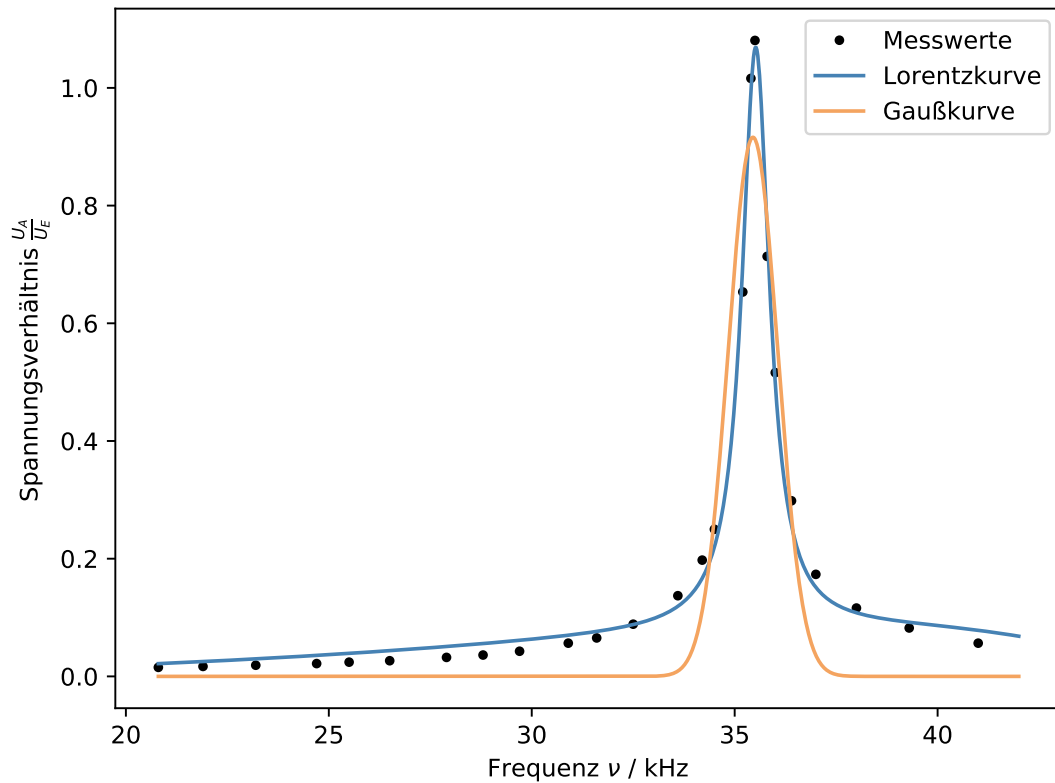


Abbildung 4: Blockschaltbild. [6]

Untersucht werden die Elemente  $\text{Dy}_2\text{O}_3$  und  $\text{Gd}_2\text{O}_3$ . Zuerst wird die Brücke zuerst ohne Probe abgeglichen und dann wird die Probe eingeführt und die Spannung notiert und die Brücke wird erneut abgeglichen. Dies wird für jede Probe 3mal wiederholt. Bei jedem Abgleich wird der Widerstand und die Spannung notiert.

## 4 Auswertung

Die aufgenommenen Messdaten zur Untersuchung des Selektivverstärkers sind in Tabelle (1) aufgeführt. Dabei wurde die Ausgangsspannung  $U_A$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\nu$  bei konstanter Eingangsspannung  $U_E = 495 \text{ mV}$  und der Güte  $Q = 100$  gemessen. Die dazugehörige Filterkurve ist in Abbildung (5) dargestellt, wo bei einer Frequenz von 35.5 kHz ein Maximum von  $U_A = 5.36 \text{ V}$  zu beobachten ist.



**Abbildung 5:** Filterkurve des Selektivverstärkers.

Mittels Python wird eine Ausgleichskurve ermittelt. Dabei ergibt sich ein besseres Ergebnis mit einer Lorentzkurve, da für die Gaußkurve keine gute Näherung bestimmt werden kann. Die Funktionsvorschrift der gefitteten Kurve lautet

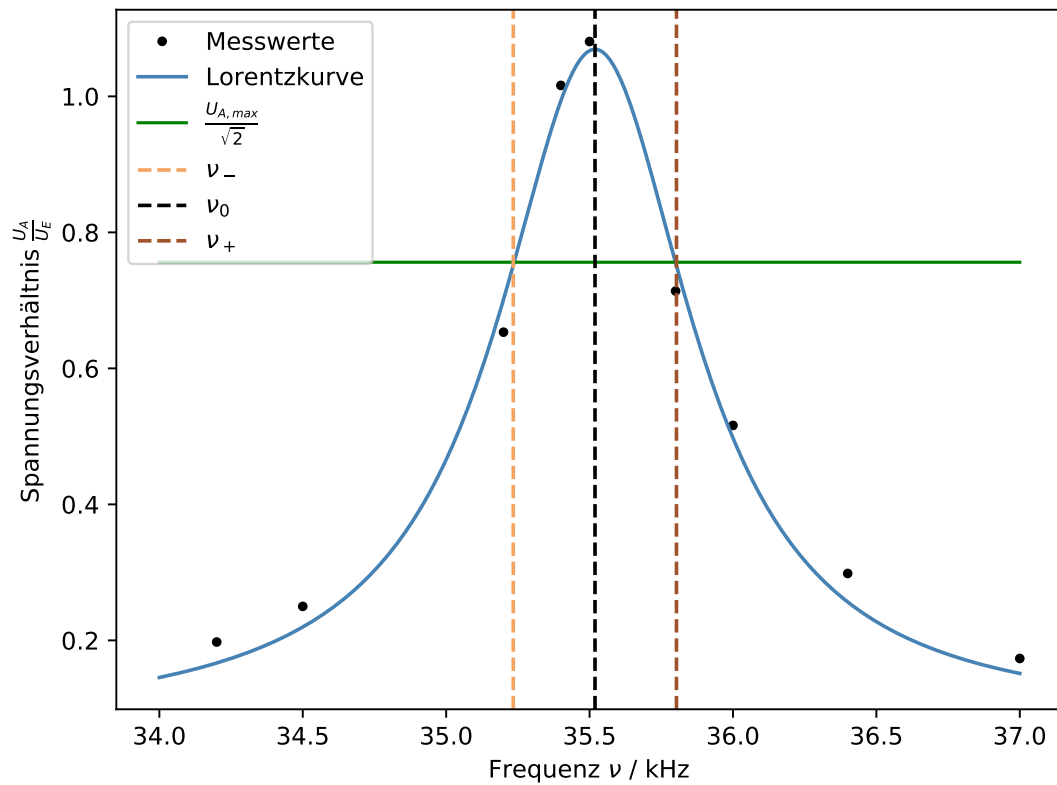
$$f(\nu) = k\nu^3 + i\nu^9 + \frac{\alpha}{(\nu^2 - \nu_0^2)^2 + \gamma^2\nu_0^2},$$

wobei die ersten beiden Terme die Lorentzkurve an den Rändern nach oben verschieben und keinen Einfluss auf die Breite der Glocke haben. Die Parameter sind:



$$\begin{aligned}
 k &= (2.29 \pm 0.35) \cdot 10^{-6} \\
 i &= (-2.6 \pm 1.1) \cdot 10^{-16} \\
 \nu_0 &= 35.519 \pm 0.010 \\
 \alpha &= (8.5 \pm 0.7) \cdot 10^2 \\
 \gamma &= 0.83 \pm 0.04
 \end{aligned}$$

In Abbildung (6) ist die Lorentzkurve auf einem passenden Intervall zur Bestimmung der Güte Q dargestellt.



**Abbildung 6:** Filterkurve des Selektivverstärkers.

Die Folgenden Werte lassen sich aus der Kurve mittels Python bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \nu_- &= 35.234 \pm 0.010 \\
 \nu_+ &= 35.803 \pm 0.010
 \end{aligned}$$

Mit Formel (11) kann daraus die Güte des Selektivverstärkers zu

$$Q = 62.376 \pm 0.018$$

berechnet werden.

**Tabelle 1:** Messdaten zur Untersuchung der Filterkurve.

$\nu / \text{kHz}$	$U_A / \text{mV}$
20.8	76
21.9	84
23.2	94
24.7	108
25.5	120
26.5	132
27.9	160
28.8	180
29.7	212
30.9	280
31.6	324
32.5	440
33.6	680
34.2	980
34.5	1240
35.2	3240
35.4	5040
35.5	5360
35.8	3540
36	2560
36.4	1480
37	860
38	576
39.3	408
41	280

Für die experimentelle Bestimmung der Suszeptibilitäten werden zunächst die Daten der beiden Proben aufgenommen. In Tabelle (2) sind die Masse  $m$ , die Dichte  $\rho$  und die Länge  $l$ , die sich aus der tatsächlich eingeführten Länge ohne Löcher zusammensetzt, aufgeführt. Außerdem befindet sich dort der reale Querschnitt  $Q_{real}$  der aus den aufgeführten Daten nach

$$Q_{real} = \frac{m}{l\rho} \quad (12)$$

berechnet wird.

**Tabelle 2:** Daten der Proben.

Stoff	$m / \text{g}$	$\rho / \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	$l / \text{cm}$	$Q_{real} / \text{cm}^2$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	15.1	7.8	14.8	0.131
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	14.08	7.4	15.5	0.123

In Tabelle (3) und (4) befinden sich die gemessenen die Brückenspannungen  $U_o$  ohne Probe nach Abgleich und  $U_m$  mit Probe sowie die dazugehörigen Widerstände  $R_o$  ohne Probe und  $R_m$  mit Probe und Differenzen.

**Tabelle 3:** Messdaten und Differenzen von Dy<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

$U_o / \text{mV}$	$U_m / \text{mV}$	$R_o / \Omega$	$R_m / \Omega$	$\Delta U / \text{mV}$	$\Delta R / \Omega$
0.05	0.38	3.215	1.645	0.33	1.57
0.055	0.38	3.210	1.65	0.32	1.56
0.052	0.37	3.175	1.597	0.32	1.579

**Tabelle 4:** Messdaten und Differenzen von Gd<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

$U_o / \text{mV}$	$U_m / \text{mV}$	$R_o / \Omega$	$R_m / \Omega$	$\Delta U / \text{mV}$	$\Delta R / \Omega$
0.051	0.12	3.223	2.437	0.14	0.786
0.05	0.18	3.144	2.422	0.13	0.722
0.05	0.2	3.222	2.422	0.15	0.8

Die Spule in die die Proben eingeführt werden hat einen Querschnitt von  $F = 0.866\text{cm}^2$  und  $N = 250$  Wicklungen. Damit lassen sich die Suszeptibilitäten  $\chi_U$  nach Formel (9) und  $\chi_R$  nach Formel (10) bestimmen. Die experimentell bestimmten Suszeptibilitäten befinden sich in Tabelle (5).

**Tabelle 5:** Mittelwert und Standardabweichung der experimentell bestimmten Suszeptibilitäten.

Stoff	$\chi_U$	$\chi_R$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.0173 $\pm$ 0.0003	0.0208 $\pm$ 0.0001
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.0079 $\pm$ 0.0004	0.0109 $\pm$ 0.0005

Nun werden die theoretischen Suszeptibilitäten bestimmt. Dazu werden einige atomare Daten der Stoffe wie die Quantenzahlen und die molare Masse  $M$  in Tabelle (6) gesammelt, aus denen sich der Landé-Faktor  $g_J$  nach Formel (2) berechnen lässt. Mit den gesammelten Daten lassen sich die theoretischen Suszeptibilitäten  $\chi_T$  nach Formel (8) mit  $T=293.15$  K und  $N$  nach

$$N = \frac{2\rho N_A}{M} \quad (13)$$

bestimmen. Dabei ist  $N_A$  die Avogadrokonstante.

**Tabelle 6:** Atomare Daten der Stoffe und theoretische Suszeptibilitäten.

Stoff	L	S	J	$M / \frac{\text{g}}{\text{mol}}$	$g_J$	$N \cdot 10^{28} / \frac{1}{\text{m}^3}$	$\chi_T$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5	2.5	7.5	372.998	1.33	2.519	0.0254
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0	3.5	3.5	362.49	2	2.649	0.0149

## 5 Diskussion

Zunächst wird die Güte des Selektivverstärkers diskutiert. Der Kurve aus Abbildung (6) ist eine Güte von  $Q = 62.376 \pm 0.018$  zu entnehmen. Damit beträgt die relative Abweichung  $\Delta_{rel}Q = 38\%$  von der gegebenen Güte  $Q = 100$ . Bei der Untersuchung des Selektivverstärkers ist aufgefallen, dass die Frequenz nicht eindeutig ablesbar ist, da sie von allein anstieg. Die Messung wurde des Weiteren durch die Skalierung bis 200 kHz erschwert, da die Frequenz nur sehr unpräzise eingestellt werden konnte. Außerdem ist anzumerken, dass auf dem Selektivverstärker "defekt" bei der Güte 100 stand, wodurch eine geringere Güte zu erwarten war.

Nun sollen die Suszeptibilitäten betrachtet werden. Um die Werte zu vergleichen, werden die Suszeptibilitäten und relativen Abweichungen vom theoretischen Wert in Tabelle (7) notiert.

**Tabelle 7:** Suszeptibilitäten und relative Abweichungen.

Stoff	$\chi_U$	$\chi_R$	$\chi_T$	$\Delta_{rel}\chi_U$	$\Delta_{rel}\chi_R$
Dy <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$0.0173 \pm 0.0003$	$0.0208 \pm 0.0001$	0.0254	32%	40%
Gd <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	$0.0079 \pm 0.0004$	$0.0109 \pm 0.0005$	0.0149	69%	27%

Beide Arten der experimentellen Bestimmung der Suszeptibilität weisen hohe Abweichungen zum theoretischen Wert auf. Bei  $\chi_U$  kann ein Grund sein, dass die Formel (9) nach Bedingung nur für hinreichend große Messfrequenzen gilt und das hier nicht erfüllt ist. Außerdem ist auch die Abweichung von  $\chi_R$  bei beiden Stoffen hoch. Ein Grund dafür ist die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität. Wenn eine Probe zu lang in der Hand gehalten wird, kann dies die Messergebnisse beeinflussen.

Eine weitere Fehlerquelle stellt die Vermessung der Proben dar, denn die Länge  $l$  aus Tabelle (2) kann nur hinreichend genau bestimmt werden, da die staubförmigen Proben Löcher aufweisen, deren Länge nur grob bestimmt werden kann.

Weiterhin sind auch Ablesefehler der Spannungen aus Tabelle (3) und (4) zu berücksichtigen, da das Millivoltmeter sehr empfindlich ist und leicht ausschlägt.

Insgesamt ist die Messung sehr fehleranfällig und die Ergebnisse wenig aussagekräftig.

## Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.

- [4] *Literaturwert für spezifische Wärmekapazität von Wasser*. 2020. URL: [https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische\\_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html](https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html) (besucht am 01.11.2020).
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Versuchsanleitung zu Versuch V606 Suszeptibilität paramagnetischer Stoffe*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2021.