

V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 04.05.2021

Abgabe: 11.05.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theoretische Grundlage	3
2.1 Gedämpfte Schwingung	3
2.2 Erzwungene Schwingung	5
3 Durchführung	7
3.1 Aufgabenteil a)	7
3.2 Aufgabenteil b)	7
3.3 Aufgabenteil c)	8
4 Auswertung	9
4.1 gedämpften Schwingung	9
4.2 aperiodische Grenzfall	11
4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	11
5 Diskussion	13
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden gedämpfte und erzwungene Schwingungen untersucht. Dazu wird der Dämpfungswiderstand der gedämpften Schwingung ermittelt, sowie Resonanzphänomene der erzwungenen Schwingung betrachtet.

2 Theoretische Grundlage

2.1 Gedämpfte Schwingung

In einem Stromkreis der aus einer Kapazität C und einer Induktivität L besteht, schwingt die Energie zwischen diesen beiden Speicherelementen ungedämpft hin und her. Wird der Schaltung ein ohmscher Widerstand R hinzugefügt, kommt es zu einer Dämpfung, da die elektrische Energie irreversibel in Joulsche Wärme umgewandelt wird. Der Aufbau dieser Schaltung ist in Abbildung (1) dargestellt.

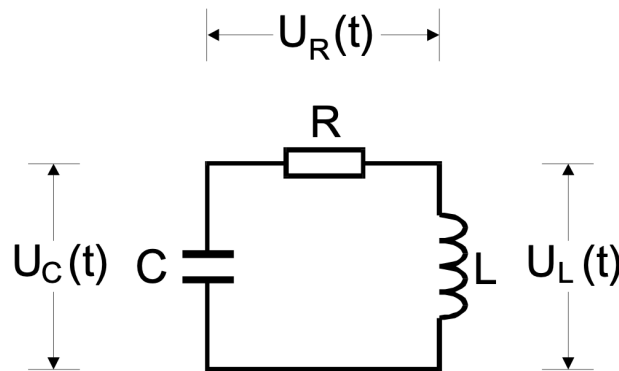


Abbildung 1: Schaltplan zur Erzeugung einer gedämpften Schwingung (Quelle: [6]).

Mithilfe des 2. Kirchhoff'schen Gesetzes und einfachen Umformungen kann eine Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ der gedämpften Schwingung aufgestellt werden. Sie hat die Gestalt:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (1)$$

Mit geeignetem Ansatz lässt sich die Differentialgleichung lösen und für die konstante Frequenz ω ergibt sich:

$$\omega_{1,2} = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2)$$

Abhängig von dem Term unter der Wurzel wird im Folgenden zwischen 2 Fällen unterschieden.

1. Fall: **Schwingfall** $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$

Beim Schwingfall ergibt sich ein reeller Wurzelterm und es entsteht eine harmonische Schwingung, deren Amplitude mit zunehmender Zeit gegen Null geht. Ihr Verlauf ist in Abbildung (2) dargestellt.

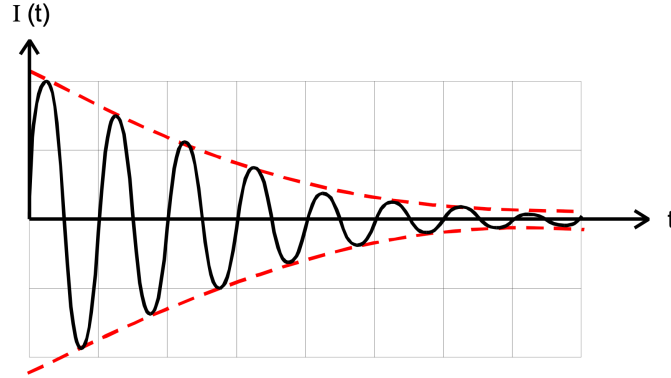


Abbildung 2: Schwingfall eines RCL-Kreises (Quelle: [6]).

Die Einhüllende ist eine e-Funktion der Form

$$\pm U_0 e^{-2\pi\mu t} \quad (3)$$

und die Abklingdauer, die Zeit nach der die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes reduziert wurde, lässt sich schreiben als:

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R}. \quad (4)$$

2. Fall: **Aperiodischer Grenzfall** $\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$

In diesem Fall ist der Wurzelterm eine imaginäre Zahl und die Lösung für $I(t)$ enthält keinen oszillatorischen Anteil mehr. In diesem Versuch soll nur der Spezialfall $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ betrachtet werden, bei der die Stromstärke $I(t)$ ohne Überschwingen am schnellsten gegen Null geht, wie es die gestrichelte Linie in Abbildung (3) darstellt. Der Widerstand, der den aperiodischen Grenzfall hervorruft ist definiert als:

$$R_{ap} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

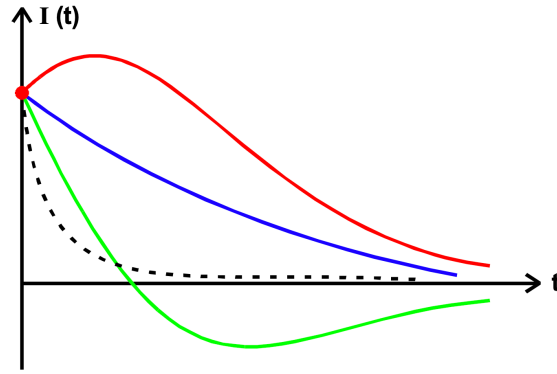


Abbildung 3: Aperiodischer Grenzfall eines RCL-Kreises (Quelle: [6]).

2.2 Erzwungene Schwingung

Um eine erzwungene Schwingung zu erhalten, wird der Schaltung aus Abbildung (1) ein Generator hinzugefügt, der eine Wechselspannung liefert, sodass der Aufbau eine wie in Abbildung (4) dargestellte Form hat.

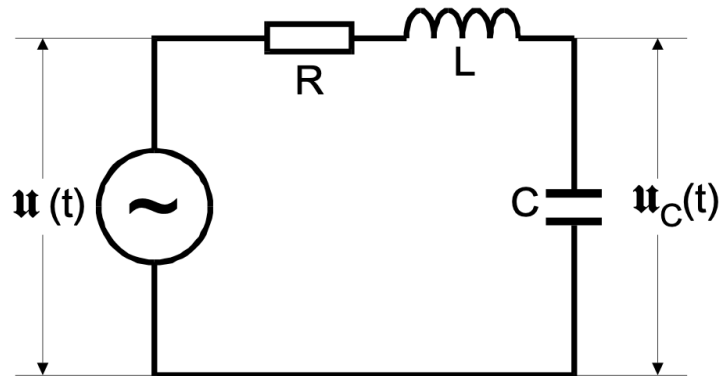


Abbildung 4: Schaltplan zur Erzeugung einer erzwungenen Schwingung (Quelle: [6]).

Mit der nun von außen hinzugefügten Energiequelle ergibt sich nach den Kirchhoff'schen Gesetzen eine Differentialgleichung für U_C :

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{j\omega t}. \quad (6)$$

Mit geeignetem Ansatz kann aus dieser Differentialgleichung eine Funktion für $U_C(\omega)$ ermittelt werden:

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (7)$$

Dabei gibt es eine Resonanzfrequenz ω_{res} , bei der $U_C(\omega)$ einen höheren Wert als U_0 annehmen kann. Sie ist definiert als:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (8)$$

Für eine schwache Dämpfung mit $\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC}$ ergibt sich für die Resonanzfrequenz (8) die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung. In diesem Fall übertrifft U_C die Erregerspannung U_0 um den Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$, der als Resonanzüberhöhung oder Güte q des Schwingkreises bezeichnet wird.

Die Güte q hängt dabei mit der Breite der Resonanzkurve zusammen, die durch die Frequenzen ω_+ und ω_- charakterisiert sind, bei denen U_C auf den Bruchteil $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seines Maximalwertes abgesunken ist. Der Zusammenhang kann geschrieben werden als:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_- - \omega_+} = \frac{1}{\sqrt{LC}(\omega_- - \omega_+)} \quad (9)$$

mit

$$\omega_- - \omega_+ \approx \frac{R}{L}. \quad (10)$$

3 Durchführung

3.1 Aufgabenteil a)

Zur Bestimmung der Dämpfungskonstante einer gedämpften harmonischen Schwingung wird der Versuch nach Abbildung (5) aufgebaut.

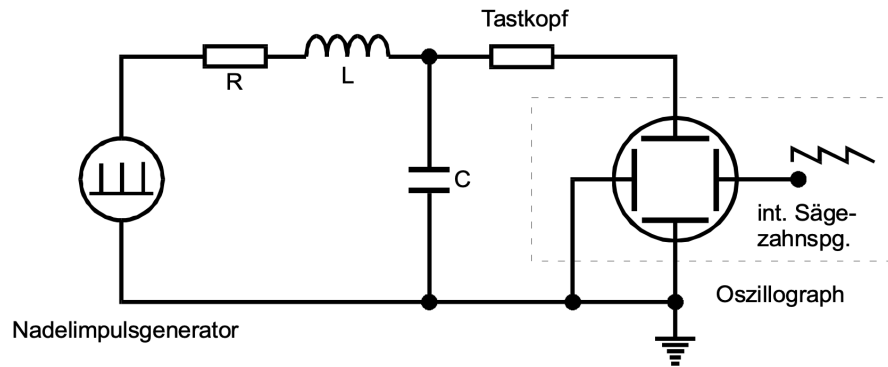


Abbildung 5: Aufbau zur Untersuchung der Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung (Quelle: [6]).

Dann werden möglichst viele Amplituden auf dem Oszillographen vermessen sowie die dazugehörigen Zeiten aufgenommen und notiert. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle (1).

3.2 Aufgabenteil b)

Um den Dämpfungswiderstand R_{ap} zu bestimmen, bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt, wird der Versuch nach Abbildung (6) aufgebaut.

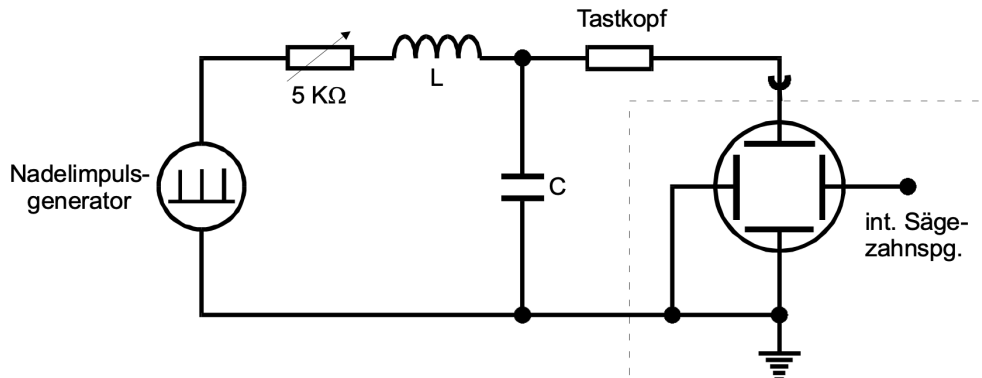


Abbildung 6: Aufbau zur Untersuchung des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall (Quelle: [6]).

Nun wird der regelbare Widerstand so lange variiert, bis die Kondensatorspannung die auf dem Oszillographen beobachtet wird, ohne Überspringen am schnellsten gegen Null

geht (analog zur gestrichelten Linie aus Abbildung (3)). Der Wert des Widerstandes wird von der Skala abgelesen wird notiert.

3.3 Aufgabenteil c)

Um die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung zu untersuchen, wird der Versuch nach Abbildung (7) aufgebaut.

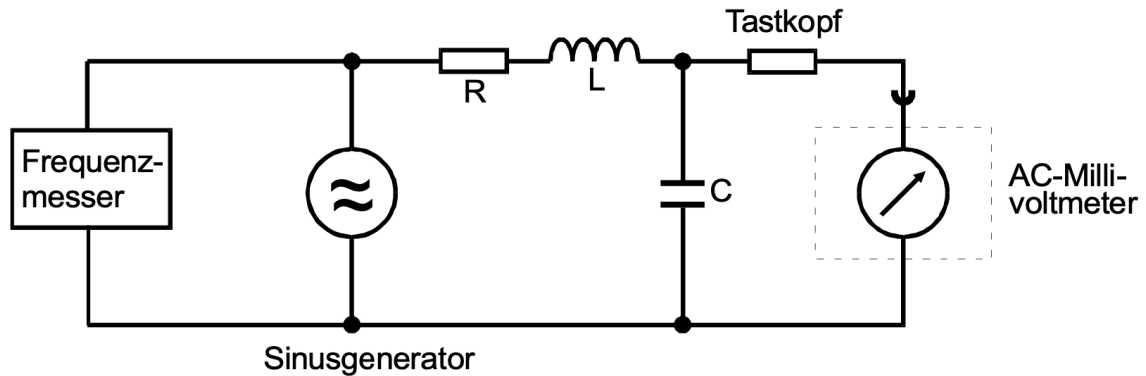


Abbildung 7: Aufbau zur Aufnahme des Frequenzganges eines RLC-Kreises (Quelle: [6]).

Anschließend wird die Frequenz von 5kHz bis 60kHz in regelmäßigen Abständen erhöht, wobei im Bereich um die Resonanzfrequenz mehr Messdaten aufgenommen werden. Zu jeder eingestellten Frequenz wird die Kondensatorspannung U_C sowie die Erregerspannung U mithilfe des Oszillographen vermessen und notiert. Die Messdaten hierzu befinden sich in Tabelle

4 Auswertung

In diesem Abschnitt wird der Versuch ausgewertet.

4.1 gedämpften Schwingung

Zunächst wird bei einer gedämpften Schwingung die Zeitabhängigkeit der Amplitude untersucht, um den effektiven Dämpfungswiderstand bestimmen zu können. Dabei wird zunächst die in der Messung bestimmte Amplitudenspitzen in die Tabelle (1) eingetragen.

Tabelle 1: Gemessene Spannungsamplituden in Abhängigkeit von der Zeit

$t / \mu\text{s}$	U / V
0	-82
12,5	76
25,5	-64
40	56
55	-48
67,5	40
80	-36
93,75	32
107,5	-26
122,5	22
135	-20
148,75	16
162,5	-14
175	11
188,75	-10
202,5	9
216,25	-8

Es reicht jedoch die Einhüllende zu betrachten. Da die Einhüllende unterhalb der X-Achse und Oberhalb sich um ein Vorzeichen unterscheiden, kann zur Modellierung dieser, lediglich der Betrag der gemessenen Spannung betrachtet werden. Daraus folgen die Abbildungen (8), in welcher die Zeit gegen die Spannung und gegen den Spannungsbetrag aufgetragen werden.

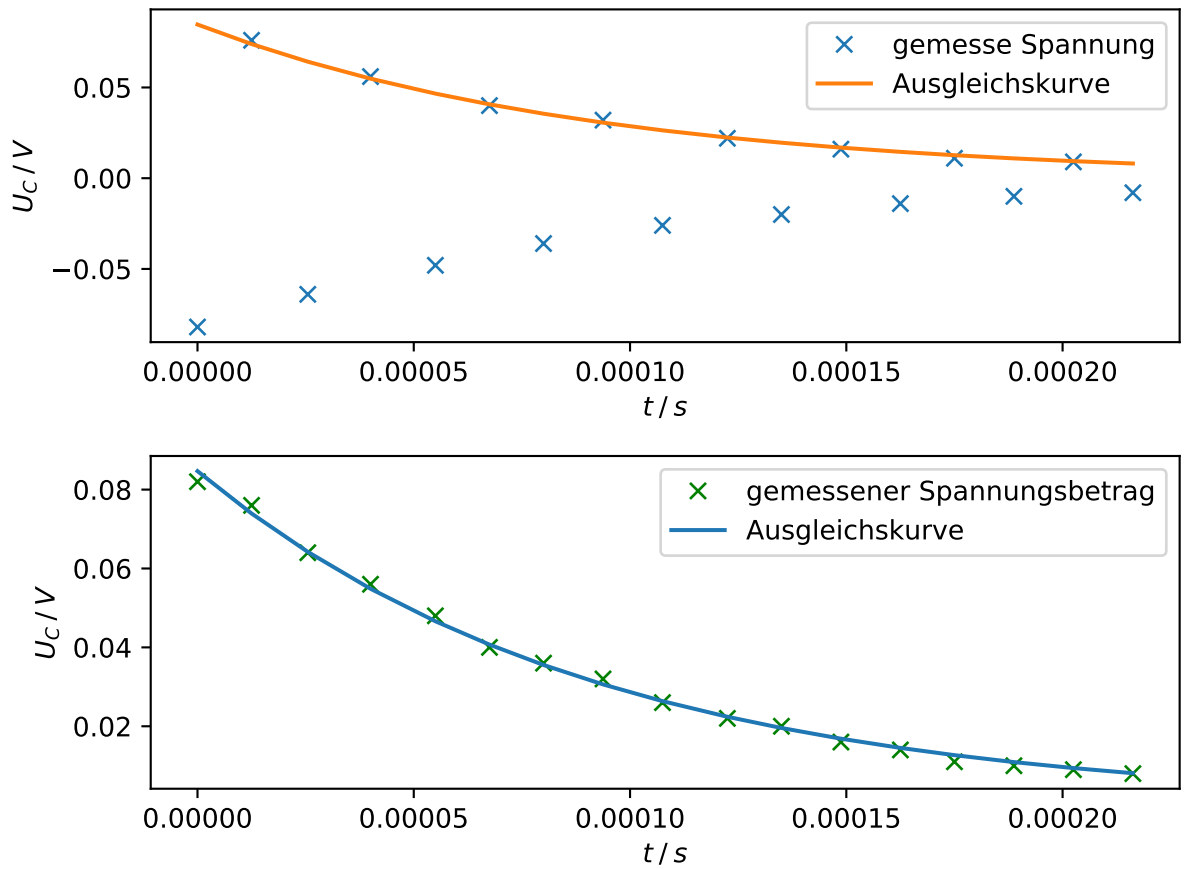


Abbildung 8: Gemessene Spannungsamplituden mit Ausgleichsfunktion

Um die Einhüllende zu modellieren, kann diese in der Form

$$U = ae^{b \cdot t} \quad (11)$$

angenommen werden. Aus der Theorie gilt mit der Gleichung 3 der Zusammenhang $a = U_0$ und $b = -2\pi\mu$. Daraus folgt

$$a = 0.0846 \pm 0.0008 \Leftrightarrow U_0 = 0.0846 \pm 0.0008 \text{ V}$$

$$b = -10852.9624 \pm 174.9926 \Leftrightarrow \mu = 1727.3026 \pm 27.85091 \frac{1}{\text{s}}.$$

Mit der Beziehung

$$R_{\text{eff}} = 4\pi\mu L = -2Lb \quad (12)$$

lässt sich der Dämpfungswiderstand R , mit $L = 3.5 \pm 0.01 \text{ mH}$ zu

$$R_{\text{eff}} = 76 \pm 1, 2 \Omega$$

bestimmen. Damit ist die Abweichung des verbauten Widerstands $R = 30,3 \pm 0,1 \Omega$ $99.749 \pm 00.004\%$.

Die Abklingdauer kann mithilfe der Formel

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} = -\frac{1}{b}$$

berechnet werden zu

$$T_{\text{ex}} = 92,1 \pm 1,5 \mu\text{s}.$$

4.2 aperiodische Grenzfall

Zusätzlich lässt sich der Dämpfungswiderstand R_{ap} experimentell bestimmen zu $R_{\text{ap}} = 12,725 \Omega$. Der theoretische Wert lässt sich mit der Formel (5) mit den gegebenen Werten

$$R = 30,3 \pm 0,1 \Omega$$

$$L = 3,5 \pm 0,01 \text{ mH}$$

$$C = 5 \pm 0 \text{ nF}$$

aus dem Aufbau bestimmen. Daraus folgt das

$$R_{\text{ap}} = 1673.3 \pm 2.4 \Omega$$

und eine Abweichung von 660.46% .

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die gemessene Kondensatorspannung U_C und die dazugehörige Frequenz ω wird in die Tabelle 2 eingetragen und der Quotient $\frac{U_C}{U_{\text{Err}}}$ gegen die Frequenz ω halblogarithmisch in die Abbildung (9) aufgetragen.

Aus der Grafik lässt sich für die Frequenzen, bei denen die Spannung den Wert $\frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{Err}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ erreicht, entnehmen als

$$\omega_+ = 35,1 \pm 0,3 \text{ kHz}$$

$$\omega_- = 38,5 \pm 0,3 \text{ kHz}.$$

Daraus folgt die Breite

$$b = 3,4 \pm 0,3 \text{ kHz}.$$

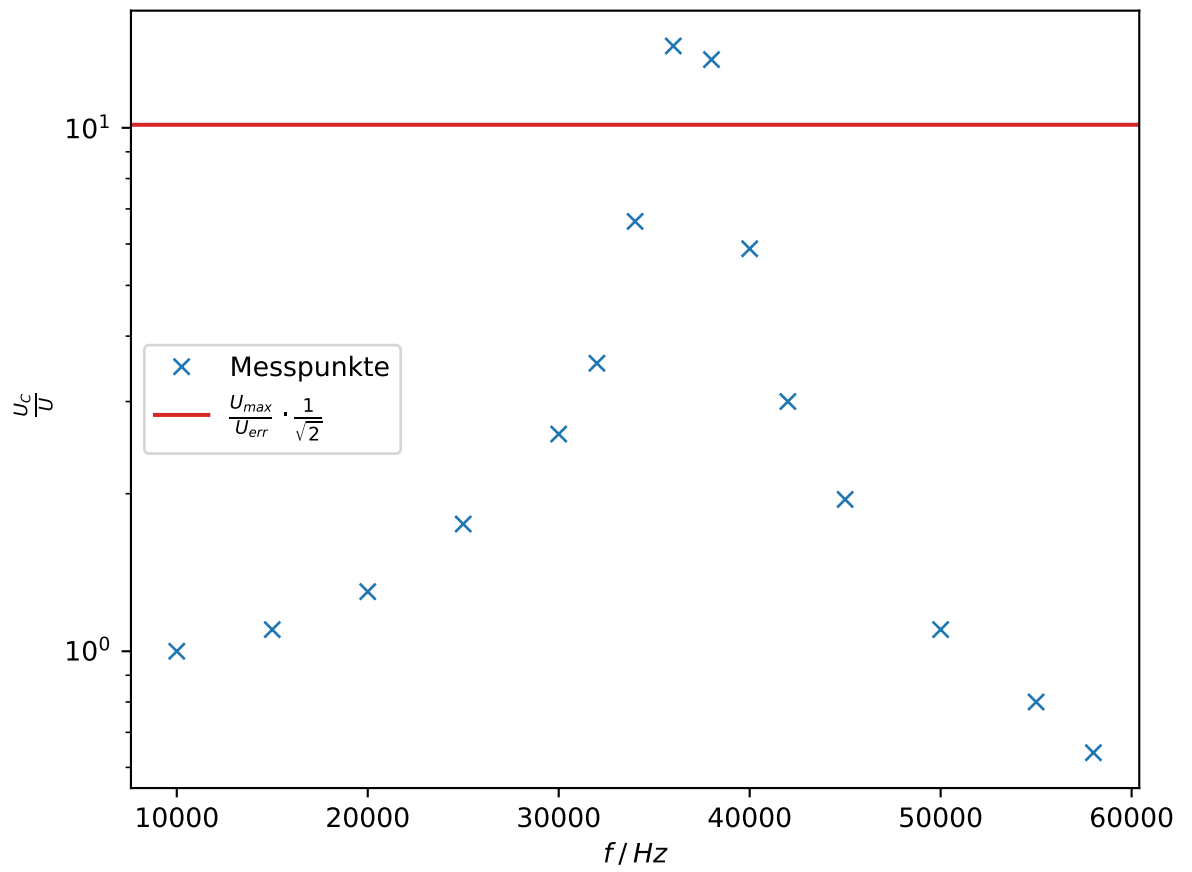


Abbildung 9: Quotient $\frac{U_C}{U_{err}}$ gegen die Frequenz ω halblogarithmisch aufgetragen

Tabelle 2: Messwerte zur Kondensator- und Erregerspannung

ν / kHz	U_C / V	U_{Err} / V
10	50	50
15	55	50
20	65	50
25	87,5	50
30	130	50
32	177,5	50
34	265	40
36	430	30
38	405	30
40	235	40
42	150	50
45	97,5	50
50	55	50
55	40	50
58	32	50

Für die Güte kann mit der Gleichung 9

$$q = 70 \pm 6$$

berechnet werden.

Die theoretische Breite der Resonanzkurve lässt sich der Gleichung 10 nähern. Mithilfe dieser Näherung lässt sich die Breite der Resonanzkurve und die Güte berechnen zu

$$b = 8.657 \pm 0.025 \text{ kHz}$$

$$q = 27.61 \pm 0.04 .$$

Daraus folgt für den Fehler zwischen der theoretischen und gemessenen Güte ein Fehler von $1.55 \pm 0.22\%$.

5 Diskussion

Während der Durchführung des Versuchs sind einige Fehlerquellen aufgefallen, die die Ergebnisse beeinflussen.

Sowohl die Amplituden und Zeiten in Aufgabenteil a) als auch die Kondensator- und Erregerspannung in Aufgabenteil c) wurden direkt am Oszillographen vermessen. Dadurch entsteht eine Ungenauigkeit bei diesen Größen.

Der in Aufgabenteil b) gesuchte Widerstand R_{ap} wird durch eine optische Abschätzung der Kurve ermittelt, sodass nur ein ungefähres Ergebnis erzielt werden kann.

Außerdem besitzt jeder Aufbau einen Gesamtwiderstand, der größer ist als die Summe aller angegebenen Widerstände. Dies kommt daher, dass auch die Kabel einen Widerstand haben und die Geräte selbst noch einen Innenwiderstand besitzen.

Zudem fehlten bei der Auswertung der Güte Messdaten, sodass diese schon bei kleinen Messfehlern extrem stark schwankte.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *Literaturwert für den Brechungsindex von Luft*. 2021. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Brechzahl.html> (besucht am 27.04.2021).
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [6] *Versuchsanleitung zu Versuch V354 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. Fakultät Phyik, TU Dortmund. 2021.