

V14

Tomographie mit γ -Strahlung

Tahir Kamcili
tahir.kamcili@udo.edu

Marina Andreß
marina.andress@udo.edu

Durchführung: 11.04.2022

Abgabe: 15.04.2022

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Tomographie	3
2.2	Wechselwirkung von Materie mit Gamma-Strahlung	3
2.3	Radioaktiverzerfall	4
2.4	Abschwächung	4
3	Aufbau und Durchführung	5
3.1	Aufbau	5
3.2	Szintillationsdetektor	6
3.3	Durchführung	7
4	Auswertung	8
4.1	Untersuchung des Spektrums	8
4.2	Bestimmung der Absorptionskoeffizienten	9
4.2.1	Würfel 2	9
4.2.2	Würfel 3	10
4.2.3	Würfel 4	10
5	Diskussion	12
	Literatur	12

1 Ziel

Ziel des Versuches war es die Zusammensetzung eines 3x3x3-Würfels in einer seiner Ebene zu bestimmen, wobei die einzelnen Teilwürfel aus unterschiedlichen Metallen besteht.

2 Theorie

2.1 Tomographie

Die Tomographie ist ein Bild-gebendes Verfahren, welches viel Anwendung in der heutigen Medizin findet. Besonders die so genannte Computertomographie, kurz CT, ist weit verbreitet. Durch dieses Verfahren werden Querschnitte erzeugt und durch die Untersuchung mehrerer Schichten kann so ein 3 Dimesnionales Bild generiert werden.

Im Allgemeinen wird für die Tomographie γ -Strahlung benutzt. Durch die unterschiedlichen Absorptionskoeffizienten und durch die Bestrahlung des Targets aus verschiedenen Winkeln kann ein Bild erzeugt werden.

2.2 Wechselwirkung von Materie mit Gamma-Strahlung

Die Quelle der γ -Strahlung ist im Versuch der Zerfall eines radioaktiven Isotops. In diesem zerfällt der Kern unter Aussendung eines γ -Quants in ein energetisch günstigeren Zustand. Dadurch ist das Spektrum der γ -Strahlung diskret.

γ -Strahlung wechselt wirkt hauptsächlich in 3 Art und Weisen mit Materie. Diese sind der Photoeffekt, die Compton-Streuung, sowie die Paarerzeugung.

1. **Photo-Effekt:** Beim Photoeffekt wird ein Photon vollständig von einem gebundenen Elektron absorbiert so, dass dieses aus seiner Bindung herausgelöst wird. Dafür muss die Energie des γ -Quants ($E_\gamma = hf$) mindestens die Bindungsenergie E_B des Elektrons an den Kern betragen. Die kinetische Energie des Elektrons lässt sich somit bestimmen zu

$$E_e = E_\gamma - E_B \quad (1)$$

Der Wirkungsquerschnitt σ ist $\propto Z^5 E_\gamma^{-3,5}$, daher dominiert im Allgemeinen der Photoeffekt bei Energien $< 100\text{keV}$ und bei Kernen mit einer hohen Ladungszahl Z .

2. **Comptonstreuung:** Bei der Comptonstreuung, auch inelastische Streuung genannt, trifft ein Photon auf ein quasi-freies Elektron. Das Photon gibt dabei einen Teil seiner Energie δE ab, sodass die Wellenlänge um $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$ verändert wird. Wichtig für den Energieübertrag ist dabei der Winkel in dem das Photon auf das Elektron trifft. Der Energieübertrag wird maximal für 180° . Zudem werden beide Teilchen von ihrer ursprünglichen Bahn abgelenkt, sodass eine Streuung statt findet.

Die Comptonstreuung dominiert für Energien im Bereich von $100\text{keV} - 1\text{MeV}$.

3. **Paarerzeugung:** Bei der Paarerzeugung zerfällt ein Photon in einem Coulombfeld eines Teilchens in ein Teilchen-Antiteilchen Paar. Die benötigte Mindestenergie für ein γ -Quant ist gesetzt durch die doppelte Masse des Elektrons (da diese identisch mit der Masse des Positrons ist), da dieses Pärchen das leichteste ist, in welches es Zerfall kann. Somit ist die Mindestenergie gegeben durch

$$E_{\gamma} = 2m_e c^2. \quad (2)$$

Da in diesem Versuch lediglich Energien bis $E_{\gamma} = 662 \text{ keV}$ erreicht werden, spielt der Effekt der Paarerzeugung keine wichtige Rolle.

2.3 Radioaktiverzerfall

Wie bereits oben beschrieben wird als γ -Strahlungsquelle ein radioaktiver Zerfall benutzt. Es kann entweder ein ^{60}Co oder ^{137}Cs -Strahler genutzt werden. Da im Versuch eine ^{137}Cs Quelle verwendet wurde wird exemplarisch nur auf diesen Zerfall eingegangen. Im dominierenden Zerfallskanal, mit einer Zerfallswahrscheinlichkeit von 94,4%, zerfällt ^{137}Cs in einen angeregten Zustand vom Barium ^{137m}Ba . Welches dann unter Emission eines Photons in den Grundzustand vom Barium ^{137}Ba übergeht. Bei diesem Zerfall entsteht eine mittlere Photonenenergie von $E_{\gamma} = 661,7 \text{ keV}$ [1]. Der Zerfall ist ebenfalls in Abbildung (1) dargestellt.

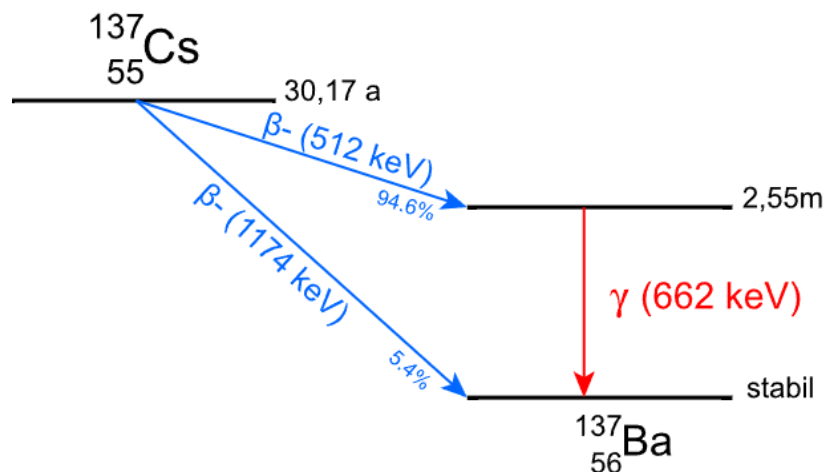


Abbildung 1: Zerfall eines ^{137}Cs Atoms [1]

2.4 Abschwächung

Wenn Strahlung Materie durchdringt wechselwirkt sie mit dieser. Dadurch verliert sie Energie und es wird von einer Abschwächung gesprochen. Im Allgemeinen kann die Intensitätsveränderung beschrieben werden durch

$$N = I_0 \exp \left(- \sum_i \mu_i d_i \right) . \quad (3)$$

Dabei sind μ_i die Absorptionskoeffizienten, I_0 die Eingangsintensität und d_i die Länge der Strecke, in welcher die Strahlung wechselwirkt. Dies lässt sich nun umstellen zu

$$\sum_i \mu_i d_i = \log \left(\frac{I_0}{N_j} \right) = I_i . \quad (4)$$

Hierbei steht N_j für die jeweils gemessenen Ausgangsintensitäten. Aus diesem Zusammenhang kann ein LGS (kurz für Lineares Gleichungssystem) aufgestellt werden.

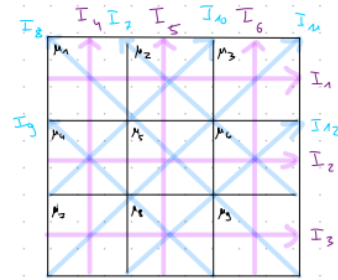
Da im Versuch ein 3x3-Würfel tomographisch untersucht wurde, kann eine Matrix A in dem Zusammenhang

$$\underline{\underline{A}} \vec{\mu} = \vec{I} \quad (5)$$

aufgestellt werden. Das LGS wird bewusst überbestimmt aufgestellt um eine hohe (Mess-)Fehleranfälligkeit zu senken, sodass die Matix (passend zu den Strahlengängen in der Abbildung 2b) aussieht wie in Abbildung 2a dargestellt ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Matrix A



(b) Schematische Darstellung der Strahlengänge durch den Würfel

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Aufbau des Versuches ist relativ simpel. Auf der einen Seite befindet sich die Strahlungsquelle, in unserem Fall Cs-137, welches von großes Bleiböcken abgeschirmt, sodass ein schmaler Strahlengang entsteht. Gegenüber von der Quelle sitzt ein NaJ-Detektor. Mit diesem wird die γ -Strahlung detektiert.

Unterhalb des Strahlengangs befindet sich eine Platte, auf welche sich Proben montieren lassen. Diese lässt sich verschieben und drehen. Im Versuch wurden auf dieser mehrere Würfel platziert. Einer war leer und wurde genutzt um eine Untergrundmessung durchzuführen und I_0 zu messen, 2 waren vollständig homogen mit einem unbekannten Metall

gefüllt und 1 Würfel bestand aus kleineren Würfeln aus unterschiedlichen Stoffen, welche den großen Würfel im Format 3x3x3 füllten.

Da die Platte nicht in der Höhe verstellbar war wurde lediglich die 2. Schicht des Würfels gemessen, sodass nur eine Bestimmung von 9 kleineren Würfeln möglich war. Der Aufbau ist in der Abbildung 3 dargestellt.

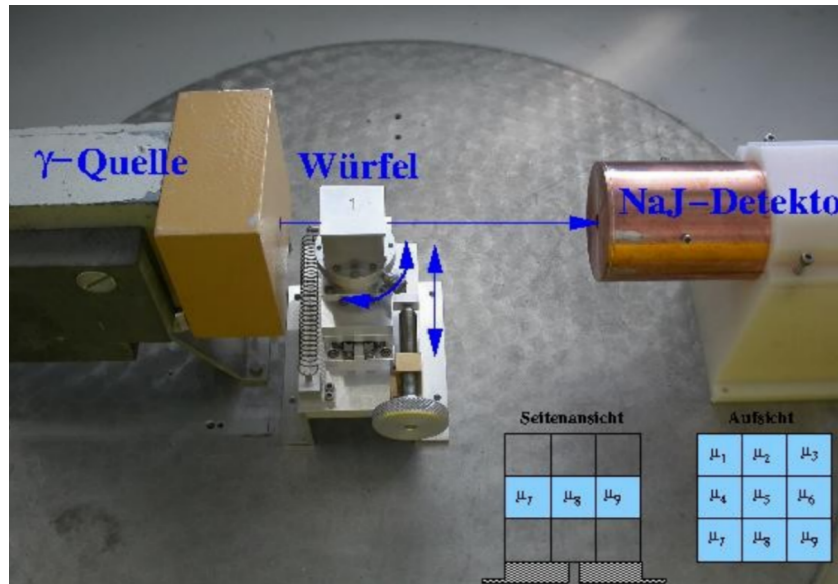


Abbildung 3: Versuchsaufbau [7]

Als mögliche Stoffe kommen nur Aluminium, Blei, Eisen, Messing ($Cu_{0.63}Zn_{0.37}$) und Delrim (POM) infrage [7].

Als zusätzliche Aufbauten, neben der γ -Quelle und dem Würfel, wird ein NaI-Detektor genutzt um die Ausgangsstrahlung zu messen, wie ein Multichannelanalyzer. Ein Multichannelanalyzer (kurz MCA) kann genutzt werden um elektrische Impulse mit unterschiedlichen Amplituden ihrer Häufigkeit nach zu sortieren.

3.2 Szintillationsdetektor

Mithilfe eines Szintillationsdetektors kann die Energie und Intensität von ionisierender Strahlung bestimmt werden. Dieser kann aus organischen, aber auch aus anorganischen Stoffen bestehen. Der im Versuchsaufbau verwendete Szintillationsdetektor nutzt einen anorganischen Natriumiodidkristall, welcher, wenn eine Energie größer als die Anregungsenergie dessen in ihn eindringt, sogenannte "Lichtblitze" erzeugt, die durch einen Bandwechsel von angeregten Elektronen entstehen. Die freigesetzten Photonen werden mithilfe eines Photomultipliers detektiert. Der Strom der in dem Photomultiplier entsteht ist proportional zu der Energie des γ -Quants, welches für die Erzeugung des detektierten Photons durch den Photomultiplier verantwortlich ist.

3.3 Durchführung

Zur Hilfe mit der Messung wird das Programm MAESTRO genutzt. Zuerst wird ein Spektrum der verwendeten Quelle genutzt. Gemessen wird solange bis mindestens am Piek 1112 Impulse gemessen wurden. Diese Zahl kommt zustande da ein Fehler $< 0,03$ gewünscht ist und mithilfe des Zusammenhangs

$$\frac{\sqrt{N}}{N} = 0,03 \leftrightarrow N = \frac{1}{0,03^2} \approx 1112 \quad (6)$$

kommt dieser zustande. Das Programm zeigt dies an, sodass einfach die Messung auf ein USB Stick exportiert werden können.

Bei dem leeren Würfel, dem 2 Würfel und dem 3x3x3 Würfel wurden alle Strahlengänge nach der Abbildung 2b gemessen. Beim 3. Würfel wurden lediglich die Strahlengänge 1,2,3,10,11,12 gemessen.

Da das Programm automatisch nach 300s aufhört musste bei dem 3. Würfel der Strahlengang 11 und beim 3x3 Würfel der Strahlengang 8 und 11 2 mal gemessen und später in der Auswertung addiert werden, um die Messunsicherheiten gering zu halten.

4 Auswertung

Alle Berechnungen werden mit Python mithilfe des Pakets NumPy [6] durchgeführt und alle Plots mit matplotlib [2] erstellt. Die Fehlerrechnung erfolgt mit dem Paket uncertainties [4].

4.1 Untersuchung des Spektrums

Das Spektrum der Caesium-Quelle mit Würfel 1 im Durchgang ist in Abbildung 4 dargestellt. Zu erkennen ist die Anzahl der gemessenen Ereignisse in dem jeweiligen Channel, in dem sich die Ereignisse befinden.

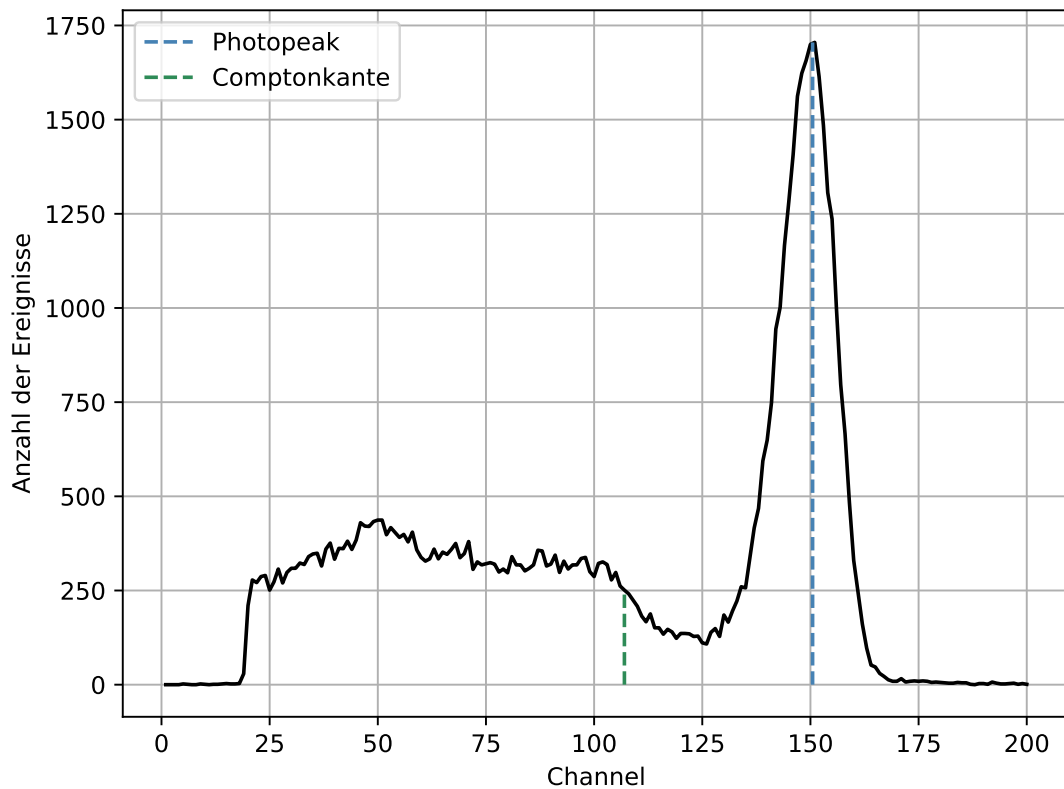


Abbildung 4: Spektrum der Caesium-Quelle.

In dem Plot sind außerdem der Photopeak und die Comptonkante markiert. Bei Caesium liegen die Energien dieser Größen bei $E_P = 662 \text{ keV}$ und $E_C = 478 \text{ keV}$.

4.2 Bestimmung der Absorptionskoeffizienten

Im folgenden wird die Nullmessung ausgewertet, wobei sich bei der Messung nur die Aluminiumhülle (Würfel 1) im Strahlengang befindet, die Teil jedes Würfels ist. Die aufgenommenen Werte befinden sich in Tabelle ?? . Die Intensitäten I werden durch

$$I = \frac{N}{t} \quad (7)$$

bestimmt.

Projektion	Counts	$\Delta t / s$	$I_0 / \frac{1}{s}$
1	1705	150	11.367 ± 0.275
2	1440	135	10.667 ± 0.281
3	1571	142	11.063 ± 0.279
4	2111	166	12.717 ± 0.277
5	1424	102	13.717 ± 0.369
6	2444	180	13.578 ± 0.275
7	1633	165	9.897 ± 0.245
8	1554	115	13.513 ± 0.343
9	1126	107	10.523 ± 0.314
10	1434	110	13.036 ± 0.344
11	1432	102	14.039 ± 0.371
12	1036	76	13.632 ± 0.424

Tabelle 1: Messwerte der I_0 Messung mit Würfel 1.

4.2.1 Würfel 2

Aus den Messdaten werden die Absorptionskoeffizienten μ_i nach

$$\mu_i = \frac{\ln(\frac{I_0}{I_i})}{d_i} \quad (8)$$

bestimmt. Dabei ist d_i die Strahlenlänge durch den Würfel je nach Projektion. Es gilt:

$$\begin{aligned} d_{1,2,3,4,5,6} &= 3 \text{ cm} && \text{Senkrechte} \\ d_{7,9,10,12} &= 2\sqrt{2} \text{ cm} && \text{Nebendiagonale} \\ d_{8,11} &= 3\sqrt{2} \text{ cm} && \text{Hauptdiagonale} \end{aligned}$$

Im folgenden werden die negativen Absorptionskoeffizienten nicht betrachtet, da diese nicht physikalisch sind. Für Würfel 2 ergibt sich dann der gemittelte Absorptionskoeffizient $\mu_2 = 0.1029 \frac{1}{\text{cm}}$.

Projektion	Counts	$\Delta t / s$	$I_2 / \frac{1}{s}$	$\mu / \frac{1}{cm}$
1	1770	180	9.833 ± 0.234	0.048
2	1569	147	10.673 ± 0.269	-0.0002
3	1185	99	11.969 ± 0.348	-0.026
4	1731	150	11.54 ± 0.277	0.032
5	1477	141	10.475 ± 0.273	0.095
6	1417	123	11.52 ± 0.306	0.055
7	1094	170	6.435 ± 0.195	0.152
8	1580	150	10.533 ± 0.265	0.059
9	1126	94	11.979 ± 0.357	-0.045
10	1337	160	8.356 ± 0.229	0.157
11	1805	199	9.07 ± 0.213	0.103
12	1063	147	7.231 ± 0.222	0.224

Tabelle 2: Messwerte von Würfel 2.

4.2.2 Würfel 3

Analog zu Würfel 2 werden auch hier die Absorptionskoeffizienten bestimmt.

Projektion	Counts	$\Delta t / s$	$I_0 / \frac{1}{s}$	$\mu / \frac{1}{cm}$
1	199	300	0.663 ± 0.047	0.947
2	152	300	0.506 ± 0.041	1.016
3	165	300	0.55 ± 0.042	1.000
10	156	300	0.52 ± 0.042	1.130
11	95	300	0.316 ± 0.032	0.892
12	310	300	1.033 ± 0.059	0.911

Tabelle 3: Messwerte von Würfel 3.

Gemittelt ergibt sich für Würfel 3 $\mu_3 = 0.9827 \frac{1}{cm}$.

4.2.3 Würfel 4

Da Würfel 4 aus verschiedenen kleinen Würfeln besteht, werden die Absorptionskoeffizienten mit

$$\vec{\mu} = (A^\top W A)^{-1} (A^\top W \vec{I}) \quad (9)$$

bestimmt. Die Elemente der diagonalen Gewichtsmatrix W werden mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung nach

$$\sigma_j = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_{I_0}}{I_0} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{I_j}}{I_j} \right)^2} \right)$$

$$W_{jj} = \sigma_j^{-1}$$

berechnet.

Projektion	Counts	$\Delta t / s$	$I_0 / \frac{1}{s}$	W_{jj}
1	987	300	3.29 ± 0.105	25.002
2	1048	300	3.493 ± 0.108	24.628
3	1132	300	3.773 ± 0.112	25.65
4	1607	141	11.397 ± 0.284	30.206
5	212	300	0.707 ± 0.049	13.584
6	1917	169	11.343 ± 0.259	32.776
7	1558	300	5.193 ± 0.132	28.237
8	669	300	2.23 ± 0.086	21.625
9	1248	300	4.16 ± 0.118	24.329
10	2018	268	7.529 ± 0.168	28.953
11	373	300	1.243 ± 0.064	17.202
12	1111	300	3.703 ± 0.111	23.153

Tabelle 4: Messwerte von Würfel 4.

Daraus ergeben sich nach Gleichung 9 folgende Absorptionskoeffizienten für Würfel 4.

j	$\mu_j / \frac{1}{cm}$
1	2.011
2	0.562
3	2.284
4	4.701
5	-3.650
6	3.661
7	2.779
8	-1.119
9	3.641

Tabelle 5: Absorptionskoeffizienten von Würfel 4.

5 Diskussion

Nun werden die experimentell bestimmten Absorptionskoeffizienten mit den Literaturwerten aus Tabelle 7 verglichen.

Eisen	Aluminium	Blei	Messing	Delrin
0.578	0.202	1.245	0.62	0.118

Tabelle 6: Literaturwerte der Absorptionskoeffizienten.

Dem homogenen Würfel 2 mit dem bestimmten Absorptionskoeffizient $\mu_2 = 0.1029 \frac{1}{cm}$ ist mit einer relativen Abweichung von 12.79% das Material Delrin zuzuordnen.

Würfel 3 kann mit dem bestimmten Wert $\mu_3 = 0.9827 \frac{1}{cm}$ mit einer Abweichung von 21.07% das Material Blei zugeordnet werden.

Die bestimmten Absorptionskoeffizienten von Würfel 4 befinden sich in Tabelle ?? . Im folgenden werden erneut die negativen Werte nicht berücksichtigt, da sie physikalisch nicht sinnvoll sind. In Tabelle ?? befinden sich die zugeordneten Materialien und relative Abweichungen der einzelnen Würfel.

Einzelwürfel	Material	rel. Abw. / %
1	Blei	61.53
2	Eisen	2.75
3	Blei	83.48
4	Blei	277.57
5		
6	Blei	194.08
7	Blei	123.21
8		
9	Blei	192.46

Tabelle 7: Materialien der Elementarwürfel in Würfel 4.

Aufgrund der hohen Abweichungen und der fast ausschließlichen Zuordnung von Blei wird die Messung von Würfel 4 als nicht erfolgreich angesehen.

Mögliche Fehler

Literatur

- [1] *Abbildung für den Zerfall von Cs-137*. 2022. URL: <https://www.leifiphysik.de/kern-teilchenphysik/radioaktivitaet-fortfuehrung/versuche/gammaspektrum-von-cs-137>.

- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] *Literaturwert für spezifische Wärmekapazität von Wasser*. 2020. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Spezifische_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4t.html (besucht am 01.11.2020).
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [7] *Versuchsanleitung zu Versuch V14*. Fakultät Physik, TU Dortmund. 2022.