Grammaire Algébrique

TD 8 – 10/12/2023

Benatchba -Faisal- Sadeg-Aries-Khelifati-Tolba

Définition

Une grammaire G <X, S, V, P> est dite « Algébrique » ssi toutes ses productions P sont de la forme:

$$A \rightarrow \alpha \qquad A \in V \text{ et } \alpha \in (X \cup V)^*$$

Exemple

G <X, S, V, P> $X=\{a,b\}$

$S \rightarrow a S b \ / \ \varepsilon$

Simplification

Soit G<X, S, V , P :

$S \rightarrow a\,S \,/\, AB \,/\, aD \,/\, abA$

$A \rightarrow a\,A \,/\, a\,B \,/\, \varepsilon$

$B \rightarrow a\,B$

$C \rightarrow a\,C \,/\, c$ >

La variable C n'apparait dans aucune dérivation

G<X, S, V , P :

$S \rightarrow a\,S \,/\, AB \,/\, aD \,/\, abA$

$A \rightarrow a\,A \,/\, a\,B \,/\, \varepsilon$

$B \rightarrow a\,B$ >

La variable D ne génère aucun mot

La variable B ne génère aucun mot

G<X, S, V , P :

$S \rightarrow a\,S \,/\, abA$

$A \rightarrow a\,A \,/\, \varepsilon$ >

Simplification

Variable inaccessible

Une variable de V est dite **inaccessible** si elle n'apparait dans aucune dérivation de G

Soit G<X, S, V , P :

S → a S / B

B → a B / b

A → a A / b S / b >

La variable A est inaccessible

Variable non productive

Une variable A est dite **non productive** si elle ne génère aucun mot de X*

Il n'existe aucune dérivation de la forme S |--- $w_1 A \, w_2$ |--- $w_1 w \, w_2$

$w_1 w \, w_2 \in X^*$

Soit G<X, S, V , P :

S → a S / AB / bA

A → a A / a B / ε

B → a B >

La variable B est non productive

On peut généraliser et parler de symbole inaccessible ou non productif

Simplification

Une Grammaire Réduite (Simplifiée)

Une grammaire G <u>sans variable inaccessible</u> ni <u>variable non productive</u> est dite **grammaire réduite**

Soit $G<X,=\{a,b\}\ S, V, P :$

$S \rightarrow A \,/\, B$

$A \rightarrow a\,B \,/\, bS \,/\, b$

$B \rightarrow AB \,/\, Ba$

$C \rightarrow AS \,/ b>$

La variable C est inaccessible

La variable B est non productive

$G_{\text{Réduite}} <X,=\{b\}\ S, V, P :$

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow bS \,/\, b >$

Soit $G< X,=\{a,b\}\ S, V, P :$

$S \rightarrow AC \,/\, AB \,/\, a \,/\, C$

$A \rightarrow CA \,/\, a$

$C \rightarrow AC \,/\, b$

$D \rightarrow aD \,/ a\ >$

La variable D est inaccessible

La variable B est non productive

$G_{\text{Réduite}} <X,=\{a,b\}\ S, V, P :$

$S \rightarrow A\,C \,/\, a \,/ C$

$A \rightarrow CA \,/\, a$

$C \rightarrow AC \,/\, b >$

Simplification

Soit G<X, S, V , P :

S → a S / AB

A → a A / a B / ε

B → a B >

L(G) = ?

L(G) = ∅

Soit G<X, S, V , P :

S → a S

A → a A / ε

>

Soit G<X, S, V , P :

S → a S

>

Soit G<X, S, V , P :

∅

>

Grammaire ε-Libre

Une grammaire algébrique est **ε-libre** Si

1. P ne contint aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$
2. Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparait dans aucun membre droit de production

Proposition

A toute grammaire algébrique il existe une grammaire algébrique **ε-libre équivalente**

Exemple

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

S → AbB

A → a Ab / ε

B → Ba / ε

>

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

Supprimer A → ε

S → AbB /**bB**

A → a Ab / **ab**

B → Ba / ε

>

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

Supprimer B → ε

S → AbB /bB/Ab/b

A → a Ab / ab

B → Ba / a

>

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

S → AbB /Ab/bB/b

A → a Ab / ab

B → Ba / a

>

Grammaire ε-Libre

Une grammaire algébrique est **ε-libre** Si

1. **P ne contint aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$**
2. **Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparait dans aucun membre droit de production**

Proposition

A toute grammaire algébrique il existe une grammaire algébrique **ε-libre équivalente**

Pseudo-Algo

Si $A \rightarrow \varepsilon \in P$ alors

$P = P - \{A \rightarrow \varepsilon\}$

Pour toute occurrence de A dans une production $B \rightarrow \alpha1\ A\ \alpha2$ / $A \in V$ et $\alpha1, \alpha2 \in (V \cup X)^*$

$P = P \cup \{B \rightarrow \alpha1\ \alpha2\}$

Si $S \rightarrow \varepsilon \in P_{initial}$ et S apparait dans un membre droit de production
Alors on change l'axiome (il devient S') et

$P = P \cup \{S' \rightarrow S / \varepsilon\}$

Grammaire ε-Libre

Une grammaire algébrique est **ε-libre** Si

1. P ne contint aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$
2. Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparait dans aucun membre droit de production

Exemple

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow AbB \ / \ bB \ / \ Ab \ / \ b$

$A \rightarrow a\,Ab \ / \ \cancel{\varepsilon} \ / a\,b$

$B \rightarrow Ba \ / \ \cancel{\varepsilon} \ / \ a$

>

$A \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB$

$A \rightarrow a\,Ab$

$S \rightarrow bB$

$A \rightarrow a\,b$

$B \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB$

$S \rightarrow bB$

$B \rightarrow Ba$

$S \rightarrow Ab$

$S \rightarrow b$

$B \rightarrow a$

Elimination des enchainements de Variables

Elimination des productions de la forme $A \rightarrow B \quad A, B \in V$

Exemple

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ \cancel{A}$ AbB /dSb / b

$A \rightarrow AbB \ / \ \cancel{B}$ /dSb / b

$B \rightarrow dSb \ / \ b$

>

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow dSb \ /b$

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow AbB / \ dSb \ /b$

Grammaire sans cycle

Une grammaire algébrique est dite sans cycle s'il n'existe aucune dérivation dans G de la forme:

$$A \ |\text{--}*\text{--}\ A$$

Exemple

Soit G <X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ b \ / \ \cancel{S}$

$A \rightarrow Ab \ / a$ >

$G_{\text{sans cycle}}$ <X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ b$

$A \rightarrow Ab \ / a$ >

Soit G<X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ b \ / \ A$

$A \rightarrow AbB \ /S \ /a$

$B \rightarrow \mathbf{b}$

>

Elimination enchainement var

$G_{\text{sans cycle}}$ <X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ b \ / \ AbB \ / \ a \ / \cancel{S}$

$A \rightarrow AbB \ /S \ / \ a$

$B \rightarrow \mathbf{b}$ >

Elimination enchainement var

G <X,={a,b} S, V , P :

$S \rightarrow SaA \ / \ b \ / \ AbB \ /a$

$A \rightarrow AbB \ /SaA \ / \ b \ /a$

$B \rightarrow \mathbf{b}$ >

On a $S \rightarrow A \rightarrow S$

Grammaire Propre

Une grammaire algébrique est dite **propre** si elle est **réduite, ε-libre et sans cycle**

Exemple

G < {a,b}, {S,A,B,D},S,P>

P = {S → Ba / A b / ε / aDb

A → AA a / ε / Sa

B → S b / ε

D→ aDb/ AD}

$G_{Réduite}$ < {a,b}, {S,A,B},S,P>

P = {S → Ba / A b / ε

A → AA a / ε / Sa

B → S b / ε }

$G_{e\text{-}libre}$< {a,b}, {S',S,A,B},S',P>

P = { S' → S / ε

S → Ba / A b /a/b

A → AA a / Sa /Aa/a

B → S b /b}

$G_{propre\text{-}sans\ ench.}$< {a,b}, {S',S,A,B},S',P>

P = { S' → Ba / A b /a/b / ε

S → Ba / A b /a/b

A → AA a / Sa /Aa/a

B → S b /b}

Forme Normale de Chomsky

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Chomsky (FNC) si toutes ses production sont de la forme:

1. $A \rightarrow BC \quad A,B,C \in V$
2. $A \rightarrow a \quad A \in V\ , a \in X$

Exemple

Soit G<X={a,b,d,f}, S, V , P :

$S \rightarrow SaA\ /\ A\,bB\ /\ d\,S\,f\ /\ f$

$A \rightarrow AbB\ /\ d\,Sf\ /\ f$

$B \rightarrow d\,Sf\ \ /\ f$ >

Soit G<X, S, V , P :

$S \rightarrow S\overbrace{X_1A}^{Y_1}\ /\ A\,\overbrace{X_2B}^{Y_2}\ /\ X_3\,\overbrace{S\,X_4}^{Y_3}\ /\ f$

$A \rightarrow AX_2B\ /\ X_3SX_4\ /\ f$

$B \rightarrow X_3SX_4\ /\ f$

$X_1 \rightarrow a$

$X_2 \rightarrow b$

$X_3 \rightarrow d$

$X_4 \rightarrow f$>

G<X, S, V , P :

$S \rightarrow SY_1\ /\ A\,Y_2\ /\ X_3Y_3\ /\ f$

$A \rightarrow A\,Y_2\ /\ X_3Y_3\ /\ f$

$B \rightarrow X_3Y_3\ \ /\ f$

$X_1 \rightarrow a$

$X_2 \rightarrow b$

$X_3 \rightarrow d$

$Y_1 \rightarrow X_1A$

$Y_2 \rightarrow X_2B$

$Y_3 \rightarrow SX_4$>

Forme Normale de Greibach

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Greibach (FNG) ssi toutes ses production sont de la forme:

$A \to a\,\alpha \qquad a \in X \qquad \alpha \in V^*$

Exemple

Soit $G<X, S, V, P :$

$S \to a\,A\,b \ /b\,A$

$A \to SbB \,/\, dS\,f \,/\, f$

$B \to AS\ \ f \ \ /\,f \ \ >$

$G<X, S, V, P :$

$S \to a\,A\,B' \ /\ b\,A$

$A \to SB'B \,/\, dS\,F \,/f$

$B \to AS\,F \ /\,f$

$B' \to b$

$F \to f >$

$A \mid\text{--}\ SB'B$

$\mid\text{--}\ aAB'B'B$

$\mid\text{--}\ bA'B'B$

$G<X, S, V, P :$

$S \to a\,A\,B' \ /\ b\,A$

$A \to a\,A\,B'\,B'B \,/\, bAB'B/dS\ \ F \,/\, f$

$B \to AS\,F \ / \ \ f$

$B' \to b$

$F \to f >$

$G<X, S, V, P :$

$S \to a\,A\,B' \ /\ b\,A$

$A \to a\,A\,B'\,B'B \,/\, bAB'B/dS\ \ F \,/\, f$

$B \to a\,A\,B'\,B'B\ SF \,/\, bAB'BSF/$
$dSF\ SF \,/\, f\,SF \,/f$

$B' \to b$

$F \to f >$

Forme Normale de Greibach

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Greibach (FNG) ssi toutes ses production sont de la forme:

$A \rightarrow a\,\alpha \qquad a \in X \qquad \alpha \in V^*$

Exemple

Soit G<X, S, V , P :

$S \rightarrow S\,A\,S \,/\, b\,A$

$A \rightarrow a\,S \,/\, b$ >

?

La récursivité

On dit qu'une grammaire algébrique G<X,V, P,S> est récursive s'il existe dans P une production de type :

$A \rightarrow \alpha\, A\, \beta$ avec $A \in V$, α et $\beta \in (X \cup V)^*$

A est dite Récursive

La récursivité à droite

On dit qu'une grammaire algébrique G<X,V, P,S> est récursive à droite s'il existe dans P une production de type :

$A \rightarrow \alpha\, A$ avec $A \in V$, $\alpha \in (X \cup V)^*$

A est dit Récursive à droite

La récursivité à gauche

On dit qu'une grammaire algébrique G<X,V, P,S> est récursive à gauche s'il existe dans P une production de type :

$A \rightarrow A\, \beta$ avec $A \in V$, $\beta \in (X \cup V)^*$

A est dit Récursive à gauche

Lemme:

A toute grammaire récursive à gauche $G<X,V,P,S>$, il existe une grammaire récursive à droite équivalente $G<X,V',P',S'>$.

Exemple

Soit $G<X, S, V, P :$

$S \rightarrow S\,A\,S \,/\, b\,A$

$A \rightarrow a\,S \,/\, b \quad >$

Soit $G<X, S, V, P :$

$S \rightarrow b\,A\,S' \,/\, b\,A$

$S' \rightarrow A\,S\,S' \,/\, A\,S$

$A \rightarrow a\,S \,/\, b \quad >$

Soit $G<X, S, V, P :$

$S \rightarrow b\,A\,S' \,/\, b\,A$

$S' \rightarrow A\,S\,S' \,/\, A\,S$ $\qquad S'<A$

$A \rightarrow a\,S \,/\, b \quad >$

Soit $G_{FNG}<X, S, V, P :$

$S \rightarrow b\,A\,S' \,/\, b\,A$

$S' \rightarrow a\,S\,S\,S' \,/\, b\,S\,S' \,/\, a\,S\,S \,/\, b\,S$

$A \rightarrow a\,S \,/\, b \quad >$

Récursivité Gauche → **Récursivité Droite**

$A \rightarrow A\,\alpha_1 \,/\, A\,\alpha_2 \,/ \ldots /\, A\,\alpha_n \,/\, \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/ \ldots /\, \beta_m$

$\alpha_i, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A

bA (AS)*

$A \rightarrow \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/ \ldots /\, \beta_m \,/\, \beta_1 A' \,/\, \beta_2 A' \,/ \ldots /\, \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' \,/\, \alpha_2 A' \,/ \ldots /\, \alpha_n A' \,/\, \alpha_1 \,/\, \alpha_2 \,/ \ldots /\, \alpha_n$

Exemple :

$S \rightarrow Sa/b \qquad ba^*$

$S \rightarrow b/bS' \qquad ba^*$

$S' \rightarrow a/aS'$

$A \rightarrow A\,\alpha_1 \,/\, A\,\alpha_2 \,/\ldots/\, A\,\alpha_n \,/\, \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/\ldots/\, \beta_m$

$\alpha_i\,,\beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A

$A \rightarrow \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/\ldots/\, \beta_m \,/\, \beta_1 A' \,/\, \beta_2 A' /\ldots/\, \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' \,/\, \alpha_2 A' /\ldots/\, \alpha_n A' \,/\, \alpha_1 \,/\, \alpha_2 \,/\ldots/\, \alpha_n$

Exemple

Soit $G<X, S, V, P$:

$S \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, \varepsilon$

$A \rightarrow A\,a \,/\, b \quad >$

$G_{\varepsilon\text{-libre}} <X, S', V, P$:

$S' \rightarrow S \,/\, \varepsilon$

$S \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, a$

$A \rightarrow A\,a \,/\, b \quad >$

$G_{\text{propre,sans enchainement}} <X, S', V, P$:

$S' \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, a \,/\, \varepsilon$

$S \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, a$

$A \rightarrow A\,a \,/\, b \quad >$

$G<X, S', V, P$:

$S' \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, a \,/\, \varepsilon$

$S \rightarrow a\,S \,/\, A\,a \,/\, a$

$A \rightarrow b\,A' \,/\, b$

$A' \rightarrow a\,A' \,/\, a \quad >$

$G<X, S', V, P$:

$S' \rightarrow a\,S \,/\, A\,A_1 \,/\, a \,/\, \varepsilon$

$S \rightarrow a\,S \,/\, A\,A_1 \,/\, a$

$A \rightarrow b\,A' \,/\, b$

$A' \rightarrow a\,A' \,/\, a$

$A_1 \rightarrow a >$

$S' < A$

$S < A$

$G_{FNG} <X, S', V, P$:

$S' \rightarrow a\,S \,/\, bA'\,A_1 \,/\, b\,A_1 \,/\, a \,/\, \varepsilon$

$S \rightarrow a\,S \,/\, bA'\,A_1 \,/\, b\,A_1 \,/\, a$

$A \rightarrow b\,A' \,/\, b$

$A' \rightarrow a\,A' \,/\, a$

$A_1 \rightarrow a >$

$A \rightarrow A\,\alpha_1 \,/\, A\,\alpha_2 \,/\ldots/\, A\,\alpha_n \,/\, \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/\ldots/\, \beta_m$

$\alpha_i\,,\, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec , β_j ne commence pas par A

$A \rightarrow \beta_1 \,/\, \beta_2 \,/\ldots/\, \beta_m \,/\, \beta_1 A' \,/\, \beta_2 A' \,/\ldots/\, \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' \,/\, \alpha_2 A' \,/\ldots/\, \alpha_n A' \,/\, \alpha_1 \,/\, \alpha_2 \,/\ldots/\, \alpha_n$

Exemple

Soit G<X, S, V , P :

$S \rightarrow ABC$ S<A

$A \rightarrow BB \,/\, b$ A<B

$B \rightarrow CC \,/\, a$ B<C

$C \rightarrow AA \,/\, b$ > C<A

?

$A \vdash BB \vdash CCB \vdash A\underbrace{ACB}_{\alpha}$

$\underbrace{S < A < B < C < A}$

Récursivité à gauche indirecte

La récursivité gauche indirecte

On dit qu'il y a une récursivité à gauche indirecte dans une grammaire algébrique G<X,V, P,S> s'il existe dans P au moins un $A \in V$:

$A \;\; |\text{--*--} \;\; A\,\alpha$ avec $\alpha \in (X \cup V)^*$

Ordre partiel

On dit que A < B Si $A \rightarrow B\,\alpha \in P$

avec $\alpha \in (X \cup V)^*$

$A \rightarrow A\alpha_1 / A\alpha_2 / \dots / A\alpha_n / \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m$

$\alpha_i , \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A

$A \rightarrow \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m / \beta_1 A' / \beta_2 A' / \dots / \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' / \alpha_2 A' / \dots / \alpha_n A' / \alpha_1 / \alpha_2 / \dots / \alpha_n$

Exemple

S < A < B < C < A

Soit G<X, S, V , P :

S → ABC

A → BB / b

B→ CC/ a

C → AA/ b >

G<X, S, V , P :

S → ABC

A → BB / b

B→ AAC/ b C/ a

C → AA/ b >

G<X, S, V , P :

S → ABC

A → AAC B/ b C B/ a B / b

B→ AAC/ b C/ a

C → AA/ b >

G<X, S, V , P :

S → ABC

A → AAC B/ b C B/ a B / b

B→ AAC/ b C/ a

C → AA/ b >

Soit G<X, S, V , P :

S → ABC — **S<A**

A → b C B/ a B / b / b C B A'/ a B A'/ b A'

A' → ACB A'/ ACB — **A'<A**

B→ AAC/ b C/ a — **B <A**

C → AA/ b > — **C <A**

Soit G<X, S, V , P :

S → b C B BC/ a B BC/ b BC / b C B A' BC/ a B A' BC/ b A' BC

A → b C B/ a B / b / b C B A'/ a B A'/ b A'

A' → b C B CBA'/ a B CBA'/ b CBA' / b C B A' CBA'/ a B A' CBA'/b A' CBA' / b C B CB/ a B CB/ b CB / b C B A' CB/ a B A' CB/ b A' CB

B→ b C B AC/ a B AC/ b AC / b C B A' AC/ a B A' AC/ b A' AC/ b C/ a

C → b C B A/ a B A/ b A / b C B A' A/ a B A' A/ b A' A/ b >

Merci