

Grammaire Algébrique

TD 8 – 10/12/2023

Définition

Une grammaire $G \langle X, S, V, P \rangle$ est dite « Algébrique » ssi toutes ses productions P sont de la forme:

$$A \rightarrow \alpha \quad A \in V \text{ et } \alpha \in (X \cup V)^*$$

Exemple

$$G \langle X, S, V, P \rangle \quad X = \{a, b\}$$

$$S \rightarrow a S b \mid \varepsilon$$

Simplification

Soit $G < X, S, V, P :$

$S \rightarrow a S / AB / aD / abA$

$A \rightarrow a A / a B / \epsilon$

$B \rightarrow a B$

$C \rightarrow a C / c >$



$G < X, S, V, P :$

$S \rightarrow a S / AB / aD / abA$

$A \rightarrow a A / a B / \epsilon$

$B \rightarrow a B >$



$G < X, S, V, P :$

$S \rightarrow a S / abA$

$A \rightarrow a A / \epsilon >$

La variable C n'apparaît dans aucune dérivation

La variable D ne génère aucun mot

La variable B ne génère aucun mot

Simplification

Variable inaccessible

Une variable de V est dite **inaccessible** si elle n'apparaît dans aucune dérivation de G

Soit $G = \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a S / B$

$B \rightarrow a B / b$

$A \rightarrow a A / b S / b >$

La variable A est inaccessible

Variable non productive

Une variable A est dite **non productive** si elle ne génère aucun mot de X^*

Il n'existe aucune dérivation de la forme $S \vdash^* w_1 A w_2 \vdash^* w_1 w w_2$

$w_1 w w_2 \in X^*$

Soit $G = \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a S / AB / bA$

$A \rightarrow a A / a B / \varepsilon$

$B \rightarrow a B >$

La variable B est non productive

On peut généraliser et parler de symbole inaccessible ou non productif

Simplification

Une Grammaire Réduite (Simplifiée)

Une grammaire G sans variable inaccessible ni variable non productive est dite **grammaire réduite**

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow A / B$

$A \rightarrow a B / b S / b$

$B \rightarrow AB / Ba$

$C \rightarrow AS / b >$

La variable C est inaccessible

La variable B est non productive

$G_{\text{Réduite}} < X, = \{b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow b S / b >$

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow AC / AB / a / C$

$A \rightarrow CA / a$

$C \rightarrow AC / b$

$D \rightarrow a D / a >$

La variable D est inaccessible

La variable B est non productive

$G_{\text{Réduite}} < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow A C / a / C$

$A \rightarrow CA / a$

$C \rightarrow AC / b >$

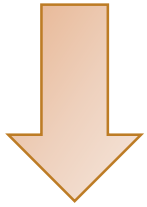
Simplification

Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a S / AB$

$A \rightarrow a A / a B / \varepsilon$

$B \rightarrow a B$ >

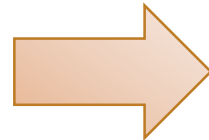


Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a S$

$A \rightarrow a A / \varepsilon$

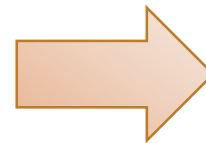
>



Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a S$

>



Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

\emptyset

>

$L(G) = ?$

$L(G) = \emptyset$

Grammaire ε -Libre

Une grammaire algébrique est ε -libre Si

1. P ne contient aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$
2. Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparaît dans aucun membre droit de production

Proposition

A toute grammaire algébrique il existe une grammaire algébrique ε -libre équivalente

Exemple

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow AbB$

$A \rightarrow aAb / \varepsilon$

$B \rightarrow Ba / \varepsilon$

>

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

Supprimer $A \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB / \mathbf{bB}$

$A \rightarrow aAb / \mathbf{ab}$

$B \rightarrow Ba / \varepsilon$

>

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

Supprimer $B \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB / bB / \mathbf{Ab/b}$

$A \rightarrow aAb / ab$

$B \rightarrow Ba / \mathbf{a}$

>

Soit $G < X, = \{a, b\} \ S, V, P :$

$S \rightarrow AbB / \mathbf{Ab/bB/b}$

$A \rightarrow aAb / \mathbf{ab}$

$B \rightarrow Ba / \mathbf{a}$

>

Grammaire ε -Libre

Une grammaire algébrique est ε -libre Si

1. P ne contient aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$
2. Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparaît dans aucun membre droit de production

Proposition

A toute grammaire algébrique il existe une grammaire algébrique ε -libre équivalente

Pseudo-Algo

Si $A \rightarrow \varepsilon \in P$ alors

$P = P - \{A \rightarrow \varepsilon\}$

Pour toute occurrence de A dans une production $B \rightarrow \alpha_1 A \alpha_2 \quad / A \in V$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup X)^*$

$P = P \cup \{B \rightarrow \alpha_1 \alpha_2\}$

Si $S \rightarrow \varepsilon \in P_{\text{initial}}$ et S apparaît dans un membre droit de production
Alors on change l'axiome (il devient S') et

$P = P \cup \{S' \rightarrow S / \varepsilon\}$

Grammaire ε -Libre

Une grammaire algébrique est ε -libre Si

1. P ne contient aucune production de type $A \rightarrow \varepsilon \quad \forall A \in V - \{S\}$
2. Si $S \rightarrow \varepsilon \in P$, S n'apparaît dans aucun membre droit de production

Exemple

Soit $G \langle X, = \{a, b\} \ S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow AbB \ / \ bB \ / \ Ab \ / \ b$

$A \rightarrow aAb \ / \ ~~\varepsilon~~ \ / \ ab$

$B \rightarrow Ba \ / \ ~~\varepsilon~~ \ / \ a$

>

$A \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB$

$A \rightarrow aAb$

$S \rightarrow bB$

$A \rightarrow ab$

$B \rightarrow \varepsilon$

$S \rightarrow AbB$

$S \rightarrow bB$

$B \rightarrow Ba$

$S \rightarrow Ab$

$S \rightarrow b$

$B \rightarrow a$

Elimination des enchainements de Variables

Elimination des productions de la forme $A \rightarrow B$ $A, B \in V$

Exemple

Soit $G < X, = \{a, b\} S, V, P :$

$S \rightarrow SaA$ / ~~A~~ AbB / dSb / b

$A \rightarrow AbB$ / ~~A~~ / dSb / b

$B \rightarrow dSb$ / b

>

$A \rightarrow B$

$B \rightarrow dSb$ / b

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow AbB$ / dSb / b

Grammaire sans cycle

Une grammaire algébrique est dite sans cycle s'il n'existe aucune dérivation dans G de la forme:

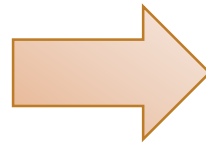
$$A \xrightarrow{*} A$$

Exemple

Soit $G \langle X, \{a, b\} \rangle S, V, P :$

$S \rightarrow SaA / b / \textcolor{red}{X}$

$A \rightarrow Ab / a \rangle$



$G_{\text{sans cycle}} \langle X, \{a, b\} \rangle S, V, P :$

$S \rightarrow SaA / b$

$A \rightarrow Ab / a \rangle$

Soit $G \langle X, \{a, b\} \rangle S, V, P :$

$S \rightarrow SaA / b / A$

$A \rightarrow AbB / S / a$

$B \rightarrow b$

\rangle



$G_{\text{sans cycle}} \langle X, \{a, b\} \rangle S, V, P :$

$S \rightarrow SaA / b / \textcolor{red}{AbB} / \textcolor{red}{a} / \textcolor{red}{X}$

$A \rightarrow AbB / S / a$

$B \rightarrow b \rangle$



$G \langle X, \{a, b\} \rangle S, V, P :$

$S \rightarrow SaA / b / AbB / a$

$A \rightarrow AbB / \textcolor{red}{SaA} / \textcolor{red}{b} / \textcolor{red}{a}$

$B \rightarrow b \rangle$

On a $S \rightarrow A \rightarrow S$

Grammaire Propre

Une grammaire algébrique est dite **propre** si elle est **réduite**, **ϵ -libre** et **sans cycle**

Exemple

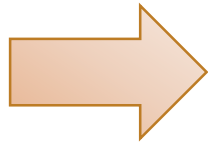
$G < \{a,b\}, \{S,A,B,D\}, S, P >$

$P = \{S \rightarrow Ba / A b / \epsilon / aDb$

$A \rightarrow AA a / \epsilon / Sa$

$B \rightarrow S b / \epsilon$

$D \rightarrow aDb / AD\}$

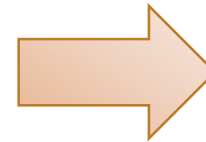


$G_{\text{Réduite}} < \{a,b\}, \{S,A,B\}, S, P >$

$P = \{S \rightarrow Ba / A b / \epsilon$

$A \rightarrow AA a / \epsilon / Sa$

$B \rightarrow S b / \epsilon\}$



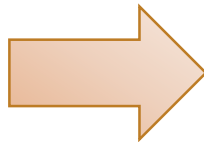
$G_{\epsilon\text{-libre}} < \{a,b\}, \{S',S,A,B\}, S', P >$

$P = \{S' \rightarrow S / \epsilon$

$S \rightarrow Ba / A b / a/b$

$A \rightarrow AA a / Sa / Aa/a$

$B \rightarrow S b / b\}$



$G_{\text{propre-sans ench.}} < \{a,b\}, \{S',S,A,B\}, S', P >$

$P = \{S' \rightarrow Ba / A b / a/b / \epsilon$

$S \rightarrow Ba / A b / a/b$

$A \rightarrow AA a / Sa / Aa/a$

$B \rightarrow S b / b\}$

Forme Normale de Chomsky

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Chomsky (FNC) si toutes ses productions sont de la forme:

1. $A \rightarrow BC \quad A, B, C \in V$
2. $A \rightarrow a \quad A \in V, a \in X$

Exemple

Soit $G \langle X = \{a, b, d, f\}, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow SaA / AbB / dSf / f$

$A \rightarrow AbB / dSf / f$

$B \rightarrow dSf / f$

Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow S \overbrace{X_1 A}^{Y_1} / A \overbrace{X_2 B}^{Y_2} / \overbrace{X_3 S X_4}^{Y_3} / f$

$A \rightarrow A X_2 B / X_3 S X_4 / f$

$B \rightarrow X_3 S X_4 / f$

$X_1 \rightarrow a$

$X_2 \rightarrow b$

$X_3 \rightarrow d$

$X_4 \rightarrow f$

$G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow S Y_1 / A Y_2 / X_3 Y_3 / f$

$A \rightarrow A Y_2 / X_3 Y_3 / f$

$B \rightarrow X_3 Y_3 / f$

$X_1 \rightarrow a$

$X_2 \rightarrow b$

$X_3 \rightarrow d$

$Y_1 \rightarrow X_1 A$

$Y_2 \rightarrow X_2 B$

$Y_3 \rightarrow X_3 X_4$

Forme Normale de Greibach

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Greibach (FNG) ssi toutes ses productions sont de la forme:

$$A \rightarrow a \alpha \quad a \in X \quad \alpha \in V^*$$

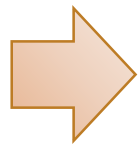
Exemple

Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a A b \ / \ b A$

$A \rightarrow S b B \ / \ d S f \ / \ f$

$B \rightarrow A S f \ / \ f >$



$G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a A B' \ / \ b A$

$A \rightarrow S B' B \ / \ d S F \ / \ f$

$B \rightarrow A S F \ / \ f$

$B' \rightarrow b$

$F \rightarrow f >$



$G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a A B' \ / \ b A$

$A \rightarrow a A B' B' B \ / \ b A B' B \ / \ d S F \ / \ f$

$B \rightarrow A S F \ / \ f$

$B' \rightarrow b$

$F \rightarrow f >$



$G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow a A B' \ / \ b A$

$A \rightarrow a A B' B' B \ / \ b A B' B \ / \ d S F \ / \ f$

$B \rightarrow a A B' B' B S F \ / \ b A B' B S F \ / \ d S F S F \ / \ f S F \ / \ f$

$B' \rightarrow b$

$F \rightarrow f >$

$A \vdash\!\!\vdash S B' B$

$\vdash\!\!\vdash a A B' B' B$

$\vdash\!\!\vdash b A' B' B$

Forme Normale de Greibach

Une grammaire algébrique est sous forme normale de Greibach (FNG) ssi toutes ses productions sont de la forme:

$$A \rightarrow a \alpha \quad a \in X \quad \alpha \in V^*$$

Exemple

Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$$S \rightarrow S A S / b A$$

$$A \rightarrow a S / b >$$



La récursivité

On dit qu'une grammaire algébrique $G \langle X, V, P, S \rangle$ est récursive s'il existe dans P une production de type :

$$A \rightarrow \alpha A \beta \quad \text{avec } A \in V, \alpha \text{ et } \beta \in (X \cup V)^*$$

A est dite Récursive

La récursivité à droite

On dit qu'une grammaire algébrique $G \langle X, V, P, S \rangle$ est récursive à droite s'il existe dans P une production de type :

$$A \rightarrow \alpha A \quad \text{avec } A \in V, \alpha \in (X \cup V)^*$$

A est dit Récursive à droite

La récursivité à gauche

On dit qu'une grammaire algébrique $G \langle X, V, P, S \rangle$ est récursive à gauche s'il existe dans P une production de type :

$$A \rightarrow A \beta \quad \text{avec } A \in V, \beta \in (X \cup V)^*$$

A est dit Récursive à gauche

Lemme:

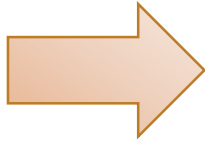
A toute grammaire récursive à gauche $G\langle X, V, P, S \rangle$, il existe une grammaire récursive à droite équivalente $G\langle X, V', P', S' \rangle$.

Exemple

Soit $G\langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow SAS / bA$

$A \rightarrow aS / b$

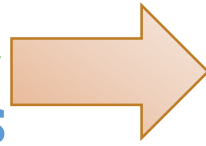


Soit $G\langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow bAS' / bA$

$S' \rightarrow ASS' / AS$

$A \rightarrow aS / b$

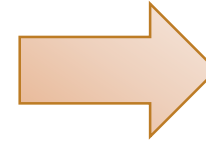


Soit $G\langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow bAS' / bA$

$S' \rightarrow ASS' / AS$ $S' \prec A$

$A \rightarrow aS / b$



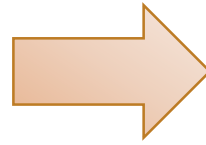
Soit $G_{FNG}\langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow bAS' / bA$

$S' \rightarrow aSSS' / bSSS' / aSS / bS$

$A \rightarrow aS / b$

Récursivité Gauche



Récursivité Droite

$A \rightarrow A\alpha_1 / A\alpha_2 / \dots / A\alpha_n / \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m$

$\alpha_i, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A

$bA(AS)^*$

$A \rightarrow \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m / \beta_1 A' / \beta_2 A' / \dots / \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' / \alpha_2 A' / \dots / \alpha_n A' / \alpha_1 / \alpha_2 / \dots / \alpha_n$

Exemple :

$S \rightarrow Sa / b$ ba^*

$S \rightarrow b / bS'$

ba^*

$S' \rightarrow a / aS'$

$$A \rightarrow A \alpha_1 / A \alpha_2 / \dots / A \alpha_n / \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m \quad \longrightarrow \quad A \rightarrow \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m / \beta_1 A' / \beta_2 A' / \dots / \beta_m A'$$

$\alpha_i, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A

$$A' \rightarrow \alpha_1 A' / \alpha_2 A' / \dots / \alpha_n A' / \alpha_1 / \alpha_2 / \dots / \alpha_n$$

Exemple

Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$$S \rightarrow a S / A a / \varepsilon$$

$$A \rightarrow A a / b >$$

$G_{\varepsilon\text{-libre}} \langle X, S', V, P \rangle$:

$$S' \rightarrow S / \varepsilon$$

$$S \rightarrow a S / A a / a$$

$$A \rightarrow A a / b >$$

$G_{\text{propre, sans enchainement}} \langle X, S', V, P \rangle$:

$$S' \rightarrow a S / A a / a / \varepsilon$$

$$S \rightarrow a S / A a / a$$

$$A \rightarrow A a / b >$$

$G \langle X, S', V, P \rangle$:

$$S' \rightarrow a S / A a / a / \varepsilon$$

$$S \rightarrow a S / A a / a$$

$$A \rightarrow b A' / b$$

$$A' \rightarrow a A' / a >$$

$G \langle X, S', V, P \rangle$:

$$S' \rightarrow a S / A A_1 / a / \varepsilon$$

$$S \rightarrow a S / A A_1 / a$$

$$A \rightarrow b A' / b$$

$$A' \rightarrow a A' / a$$

$$A_1 \rightarrow a >$$

$S' < A$

$S < A$

$G_{\text{FNG}} \langle X, S', V, P \rangle$:

$$S' \rightarrow a S / b A' A_1 / b A_1 / a / \varepsilon$$

$$S \rightarrow a S / b A' A_1 / b A_1 / a$$

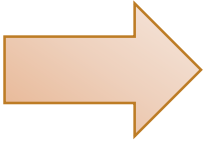
$$A \rightarrow b A' / b$$

$$A' \rightarrow a A' / a$$

$$A_1 \rightarrow a >$$

$$A \rightarrow A \alpha_1 / A \alpha_2 / \dots / A \alpha_n / \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m$$

$\alpha_i, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A



$$A \rightarrow \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m / \beta_1 A' / \beta_2 A' / \dots / \beta_m A'$$

$$A' \rightarrow \alpha_1 A' / \alpha_2 A' / \dots / \alpha_n A' / \alpha_1 / \alpha_2 / \dots / \alpha_n$$

Exemple

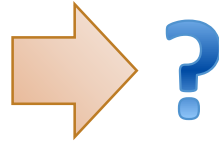
Soit $G \langle X, S, V, P \rangle$:

$S \rightarrow ABC$ $S < A$

$A \rightarrow BB / b$ $A < B$

$B \rightarrow CC / a$ $B < C$

$C \rightarrow AA / b >$ $C < A$



$A \mid \text{--} BB \mid \text{--} CCB \mid \text{--} A \underbrace{ACB}_{\alpha}$

α

$S < A < B < C < A$

Réversivité à gauche indirecte

La réversivité gauche indirecte

On dit qu'il y a une réversivité à gauche indirecte dans une grammaire algébrique $G \langle X, V, P, S \rangle$ s'il existe dans P au moins un $A \in V$:

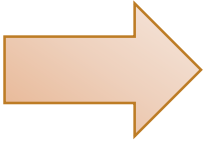
$A \mid \text{--}^* \text{--} A \alpha$ avec $\alpha \in (X \cup V)^*$

Ordre partiel

On dit que $A < B$ si $A \rightarrow B \alpha \in P$
avec $\alpha \in (X \cup V)^*$

$$A \rightarrow A \alpha_1 / A \alpha_2 / \dots / A \alpha_n / \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m$$

$\alpha_i, \beta_j \in (X \cup V)^*$ avec β_j ne commence pas par A



$$A \rightarrow \beta_1 / \beta_2 / \dots / \beta_m / \beta_1 A' / \beta_2 A' / \dots / \beta_m A'$$

$$A' \rightarrow \alpha_1 A' / \alpha_2 A' / \dots / \alpha_n A' / \alpha_1 / \alpha_2 / \dots / \alpha_n$$

Exemple

$S < A < B < C < A$

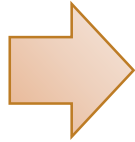
Soit $G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow BB / b$

$B \rightarrow CC / a$

$C \rightarrow AA / b >$



$G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow BB / b$

$B \rightarrow AAC / b C / a$

$C \rightarrow AA / b >$



$G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow AACB / b CB / a B / b$

$B \rightarrow AAC / b C / a$

$C \rightarrow AA / b >$

$G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow AACB / b CB / a B / b$

$B \rightarrow AAC / b C / a$

$C \rightarrow AA / b >$

Soit $G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow ABC$

$S < A$

$A \rightarrow bCB / aB / b / bCB A' / aB A' / b A'$

$A' \rightarrow ACB A' / ACB$

$A' < A$

$B \rightarrow AAC / b C / a$

$B < A$

$C \rightarrow AA / b >$

$C < A$



Soit $G < X, S, V, P$:

$S \rightarrow bCBBC / aBBC / bBC / bCB A' BC / aB A' BC / b A' BC$

$A \rightarrow bCB / aB / b / bCB A' / aB A' / b A'$

$A' \rightarrow bCB CBA' / aB CBA' / b CBA' / bCB A' CBA' / aB A' CBA' / b A' CBA' / bCB CB / aB CB / b CB / bCB A' CB / aB A' CB / b A' CB$

$B \rightarrow bCBAC / aBAC / bAC / bCB A' AC / aB A' AC / b A' AC / bC / a$

$C \rightarrow bCBA / aBA / bA / bCB A' A / aB A' A / b A' A / b >$

Merci