

# 数 学 习 题 集

THE COLLECTION OF MATHEMATICS PROBLEMS

李太吉 编

2019 年 8 月 9 日



Copyright © 2019 - 2020 Li Taiji. All Rights Reserved.

# 目录

<b>1</b>	<b>数学分析</b>	<b>3</b>
1.1	数列与极限 . . . . .	3
1.2	不等式 . . . . .	29
1.3	连续函数 . . . . .	34
1.4	一元函数微分学 . . . . .	50
1.5	数项级数 . . . . .	58
1.6	黎曼积分 . . . . .	68
<b>2</b>	<b>线性代数</b>	<b>92</b>
2.1	矩阵的初等变换 . . . . .	92
<b>3</b>	<b>概率论与数理统计</b>	<b>93</b>
3.1	随机事件与概率 . . . . .	93
3.1.1	概率的性质 . . . . .	93
3.2	随机变量及其分布 . . . . .	94
3.2.1	随机变量的方差与标准差 . . . . .	94
3.3	常用离散分布 . . . . .	95
<b>4</b>	<b>离散数学</b>	<b>97</b>
4.1	数理逻辑 . . . . .	97
4.2	集合论 . . . . .	97
4.3	代数结构 . . . . .	97
4.3.1	代数系统 . . . . .	97
4.3.2	群与环 . . . . .	98
<b>5</b>	<b>复分析</b>	<b>100</b>
5.1	复数 . . . . .	100
5.2	复积分 . . . . .	101

---

5.3	复级数 . . . . .	104
5.4	解析函数 . . . . .	112
5.5	共形映射 . . . . .	117
<b>6</b>	<b>信号与系统</b>	<b>124</b>
6.1	信号与系统 . . . . .	124
6.2	线性时不变系统 . . . . .	124
6.3	连续时间傅里叶变换 . . . . .	125
6.4	离散时间傅里叶变换 . . . . .	126
6.5	采样 . . . . .	128
6.6	拉普拉斯变换 . . . . .	129
6.7	$z$ 变换 . . . . .	130

# 第一章

## 数学分析

### §1 数列与极限

**命题 1.1.1 (Cauchy 命题)** 设  $\{x_n\}$  收敛于  $l$ , 则它的前  $n$  项的算术平均数也收敛于  $l$ , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l$$

**证明:**  $\{x_n\}$  收敛于  $l$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时

$$|x_n - l| < \varepsilon$$

则

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - l \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n x_i - l}{n} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - l|}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - l|}{n} + \frac{\sum_{i=N+1}^n |x_i - l|}{n} \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{(n - N)\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

其中  $M = \sum_{i=1}^N |x_i - l|$ ,  $M$  为有限值。  $N_1 = \max \left\{ \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil, N \right\}$ ,  
即有  $n > N_1$  时成立不等式

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - l \right| < \varepsilon$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l$$

**推论 1.1.1 (Cauchy 命题推论)** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$$

**证明:** 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$ , 所以数列  $\{a_n - a_{n-1}\}$  收敛于  $d$ .  
由 Cauchy 命题知,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{a_{n+1}}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{n} = d \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$$

**推论 1.1.2 (Cauchy 命题推论)** 设  $\{a_n\}$  是正数列, 且收敛于  $A$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$$

**证明:** 显然有

$$\ln \left( (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}$$

由 Cauchy 命题知, 因为  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 即数列  $\{\ln a_n\}$  收敛于  $\ln A$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln A$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$$

**推论 1.1.3 (Cauchy 命题推论)** 设  $\{a_n\}$  是正数列, 且存在极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

**证明:** 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ , 所以数列  $\left\{ \ln \frac{a_n}{a_{n-1}} \right\}$  收敛于  $\ln l$

由 Cauchy 命题知,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{a_2}{a_1} + \ln \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{a_{n+1}}{a_1}}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{\ln a_{n+1}}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1}{n} = \ln l
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \ln l$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

**命题 1.1.2 (Cauchy 命题  $\infty$  时的特例)**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$$

**证明:**  $\forall A > 0$ , 由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 故  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$  时,  $a_n > 2A + 2$ , 又

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - N_1}{n} = 1 > \frac{1}{2} \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0 > -1
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \cdots + x_n}{n} \\
&> -1 + \frac{n - N_1}{n}(2A + 2) \\
&> -1 + \frac{1}{2}(2A + 2) \\
&= A
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$$

**命题 1.1.3 ( $\frac{0}{0}$  型的 stolz 公式)** 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是收敛于 0 的数列, 其中  $\{a_n\}$  是严格单调递减数列, 且存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$$

其中  $l$  为有限值或无穷。

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

**证明:**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon$$

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1})$$

任取  $m > n$ , 将上式中  $n$  替换为  $n+1, n+2, n+3, \dots, m-1$ , 有

$$(l - \varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2}) < b_{n+1} - b_{n+2} < (l + \varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2})$$

$$(l - \varepsilon)(a_{n+2} - a_{n+3}) < b_{n+2} - b_{n+3} < (l + \varepsilon)(a_{n+2} - a_{n+3})$$

$\vdots$

$$(l - \varepsilon)(a_{m-1} - a_m) < b_{m-1} - b_m < (l + \varepsilon)(a_{m-1} - a_m)$$

将上式相加得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m)$$

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon$$

对于  $m$ , 令  $m \rightarrow +\infty$ , 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$$

又

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| = \left| \frac{b_n}{a_n} - l \right|$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

**命题 1.1.4** ( $\frac{*}{\infty}$  型的 stolz 公式) 设有数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ , 其中  $\{a_n\}$  是严格单调增加的发散数列, 且存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$$

其中  $l$  为有限值或无穷。

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

**证明:** (1)  $l$  为有限值

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon$$

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1})$$

取定  $n$ , 将上式中  $n$  替换为  $N, N+1, N+2, \dots, n-1$ , 有

$$(l - \varepsilon)(a_N - a_{N+1}) < b_N - b_{N+1} < (l + \varepsilon)(a_N - a_{N+1})$$

$$(l - \varepsilon)(a_{N+1} - a_{N+2}) < b_{N+1} - b_{N+2} < (l + \varepsilon)(a_{N+1} - a_{N+2})$$

$\vdots$

$$(l - \varepsilon)(a_{n-1} - a_n) < b_n - b_n < (l + \varepsilon)(a_{n-1} - a_n)$$

将上式相加得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_N) < b_n - b_N < (l + \varepsilon)(a_n - a_N)$$

$$\left| \frac{b_n - b_N}{a_n - a_N} - l \right| < \varepsilon$$

$$\frac{b_n}{a_n} - l = \left(1 - \frac{a_N}{a_n}\right) \left(\frac{b_n - b_N}{a_n - a_N} - l\right) + \frac{b_N - la_N}{a_N}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使  $n > N_1$  成立

$$0 < 1 - \frac{a_N}{a_n} < 2$$

$$\left| \frac{b_N - la_N}{a_n} \right| < \varepsilon$$

则当  $n > \max\{N_1, N\}$  有

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| < 3\varepsilon$$

(2)  $l$  为  $+\infty$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时

$$b_{n+1} - b_n > a_{n+1} - a_n$$

由 (1) 可知,

$$b_{n+1} - b_N > a_{n+1} - a_n$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , 且  $\{b_n\}$  严格单调增加, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = 0$$



故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{b_n}} = +\infty$$

(3)  $l$  为  $-\infty$  时同 (2)

**命题 1.1.5 (Carleman 不等式)** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  为收敛的正项级数, 则不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 (2a_2) \cdots (na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n \sqrt[n]{n!}} \\ &\leq e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\ &= e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k a_k \\ &= e \sum_{k=1}^N \left\{ k a_k \left[ \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \right] \right\} \\ &= e \sum_{k=1}^N k a_k \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) \\ &\leq e \sum_{k=1}^N a_k \end{aligned}$$

令  $N \rightarrow +\infty$ , 即可得到 Carleman 不等式。

下证不等式右边的系数  $e$  不能在改进。

对于每个  $N$  构造一个数列

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots, N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

然后作出两个级数和之比, 令  $n \rightarrow +\infty$ , 应用 stolz 定理, 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}{\sum_{n=1}^N b_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\sqrt[N]{N!}} = e$$

**定理 1.1.1 (Sapagof 判别法)** 设正数列  $\{a_n\}$  单调减少, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  的充分必要条件是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})$  发散。

**证明:** 先证充分性,

正数列  $\{a_n\}$  单调减少, 则  $\{a_n\}$  存在极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a > 0)$$

设  $b_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m b_n &= \sum_{n=1}^m (1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) \\ &\leq \frac{1}{a} \sum_{n=1}^m (a_n - a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{a} (a_1 - a_{m+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m b_n \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a} (a_1 - a_{m+1}) \\ &= \frac{1}{a} (a_1 - a) \end{aligned}$$

可知  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛。

再证必要性, 若  $a = 0$ , 则由柯西准则,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} (1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n+p+1}) \\ &= \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则总存在  $p \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \geq \frac{1}{2}$$

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散。

**定理 1.1.2 (Sapagof 判别法等价形式 I)** 设  $\{a_n\}$  是单调增加的正数列, 则该数列与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

同敛散。

**证明:**  $\{a_n\}$  单调增加, 若  $\{a_n\}$  收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (a \neq +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$  时,

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| &= \left| \frac{a_{n+p+1} - a + a - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| \\ &= \frac{|a_{n+p+1} - a| + |a_{n+1} - a|}{a_{n+1}} \\ &= \frac{2\varepsilon}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

所以,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛。

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{n+p+1}} \\
&= \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \\
&= 1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}}
\end{aligned}$$

由柯西准则, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 则存在  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \leq \frac{1}{2}$$

则

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \geq \frac{1}{2}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散。

**定理 1.1.3**  $\{S_n\}$  是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和数列, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  同敛散。

**证明:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_{n+1}} \\
&\leq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_{n+1}} \\
&\leq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_n}
\end{aligned}$$

设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$  时,

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_n} \right| &= \left| \frac{S_{n+p+1} - S + S - S_n}{S_n} \right| \\
&\leq \frac{|S_{n+p+1} - S| + |S_{n+1} - S|}{S_n} \\
&= \frac{2\varepsilon}{S_n}
\end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$ , 且有

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} &\geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_{n+p+1}} \\ &\geq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_{n+p+1}} \\ &= 1 - \frac{S_n}{S_{n+p+1}} \end{aligned}$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , 则存在  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$1 - \frac{S_n}{S_{n+p+1}} \geq \frac{1}{2}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  发散。

**定理 1.1.4** (1) 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的充分必要条件时存在正数列  $\{b_n\}$  和正数  $\delta$ , 使得当  $n$  充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta > 0$$

(2) 正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散的充分必要条件时存在发散的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ , 使得当  $n$  充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$$

**证明:** (1) 先证充分性。

由  $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta > 0$  得

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\delta} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$$

不妨设  $n \geq 1$ , 时上式成立, 则

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^n a_k \\
 &\leq a_1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) \\
 &= a_1 + \frac{1}{\delta} (a_1 b_1 - a_n b_n) \\
 &= a_1 + \frac{1}{\delta} a_1 b_1
 \end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。再证必要性。

令

$$b_n = \frac{R_n}{a_n}$$

其中  $R_n$  为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的余项，即

$$\begin{aligned}
 R_n &= S - S_n \\
 b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} &= \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 > 0
 \end{aligned}$$

必要性得证。

(2) 充分性即为比较判别法的比值形式。

必要性

令

$$b_n = \frac{S_n}{a_n}$$

易知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  发散

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 \leq 0$$

必要性得证。

**命题 1.1.6**  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ ,  $p$  为固定的正整数,  $\lambda$  是常数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda} = \frac{\lambda}{p}$$

**证明:** 对固定的  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\{a_{np+i}\}$  是  $\{a_n\}$  的子列

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} - a_n = \lambda$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n+1)p+i} - a_{np+i} = \lambda$$

令  $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$ , 由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \lambda$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{np+i}}{np+i} = \frac{n}{np+i} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{np+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}$$

**命题 1.1.7** 将二项式系数  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$  的算术平均数和几何平均数分别记作  $A_n$  和  $G_n$ . 证明:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 2$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = e^{\frac{1}{2}}$$

**证明:** (1) 因为

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2$$

(2) 因为

$$G_n = \sqrt[n]{\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k} = e^{\frac{1}{2}}$$

**命题 1.1.8** 设  $x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**证明:** 应用 stolz 公式, 知

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \binom{n+1}{k} - \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}}{(n+1)^2 - n^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**命题 1.1.9** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3na_n} = 1$$

**证明:** 令  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ , 则  $S_n$  单调增加, 且  $S_n \rightarrow \infty$ , 否则若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n S = 0$$

与题设矛盾。故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot S_n \cdot \frac{1}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = 0$$

$$\begin{aligned}
S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_{n-1}S_n + S_{n-1}^2) \\
&= a_n^2(2S_n^2 - 3a_n^2 S_n + a_n^4) \\
&= 2a_n^2 S_n^2 - 3a_n^4 S_n + a_n^6
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^3 - S_{n-1}^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^3 S_n^3} \cdot \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3na_n} = 1$$



**命题 1.1.10**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

**证明:** 因  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 故数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  有界,  
 $\exists M > 0$ ,

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

取自然数  $N_1 > \max \left\{ N, \frac{2M}{\varepsilon} \left( \sum_{k=0}^n |a_k - a| + \sum_{k=0}^n (|b_k - a|) + |b| \right) \right\}$

则当  $n > N_1$  时有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^n b_{n-k} (a_k - a) + \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} - b) + ab \right| \\ &= \frac{M}{N} \left| \sum_{k=0}^{N_1} |a_k - a| + \sum_{k=0}^{N_1} |b_{n-k} - b| + |b| \right| \\ &\quad + \frac{M}{n} \left| \sum_{k=N_1+1}^n |a_k - a| + \sum_{k=N_1}^n |b_{n-k} - b| \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n} (n - N_1) - \frac{\varepsilon}{4M} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

**命题 1.1.11** 设  $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$ , 且

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{a_k} \right)$$

求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

**证明:** 由  $\frac{a_{n-1} + 1}{a_n} = \frac{1}{n}$  得

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) &= \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \\
&= \frac{a_1 + 1}{a_1} \cdot \frac{a_2 + 1}{a_2} \cdots \frac{a_n + 1}{a_n} \\
&= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1 + 1}{a_2} \cdot \frac{a_2 + 1}{a_3} \cdots \frac{a_{n-1} + 1}{a_n} \cdot a_{n+1} \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \\
&= \frac{a_{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} &= \frac{n(a_{n-1} + 1)}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&\cdots \\
&= \frac{a_1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

则

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

**命题 1.1.12** 设  $a_1, a_2 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}}$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛。

**证明:** 选取  $\alpha$ , 使得

$$\alpha < \min\{a_0, a_1\} \leq \max\{a_0, a_1\} < \frac{1}{\alpha}$$

由数学归纳法可证

$$\alpha < \min\{a_{n-1}, a_n\} \leq \max\{a_{n-1}, a_n\} < \frac{1}{\alpha}$$

即

$$\alpha < a_n < \frac{1}{\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

所以  $\{a_n\}$  有界

令

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad l = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

且易知  $L, l$  均是有限数, 则  $L \leq \frac{1}{\alpha}, \quad l \geq \alpha$

$$\begin{aligned} L &= \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{a_{n-1} + a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_{n-1} + a_{n-2})} = \frac{2}{\liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} + \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{l} \end{aligned}$$

同理  $l = \frac{1}{L}$ , 则  $lL = 1$

可设  $\{a_{nk+3}\}$  收敛到  $L$ ,  $\{a_{nk+2}\}, \{a_{nk+1}\}, \{a_{nk}\}$  分别收敛到  $a, b, c$ , 则  $l < a, b, c < L$ , 又

$L = \frac{2}{a+b}$ , 则  $a+b=2l$ , 同理,  $b=c=L$

所以  $l=L=1$ ,  $\{a_n\}$  收敛, 极限为 1。

**命题 1.1.13** 证明: 数列  $x_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\frac{1}{n}} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \quad (n=1, 2, \cdots)$

有位于  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  的极限。

**证明:** 设

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

则

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 1, \quad x \in [1, +\infty)$$

所以  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调减少。

$$\begin{aligned} x_n &\geq \int_1^2 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx + \cdots + \int_2^3 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \int_1^{n+1} \frac{x}{x^2 + 1} dx - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) \Big|_1^{n+1} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(n+1)^2 + 1}{2} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \ln \sqrt{\frac{(n+1)^2 + 1}{n}} \\ &\geq \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$\{x_n\}$  有下界, 又

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1 + \frac{1}{n+1}} - \ln \frac{1}{n} + 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 0$$

$\{x_n\}$  单调减少, 则  $\{x_n\}$  收敛。由  $x_n \geq 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$  知,  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ , 所以

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{2}$$

**命题 1.1.14** 设  $a_n > 0$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$$

证明: 数列  $\{a_n\}$  无界。

**证明:** 反证法。假设  $\{a_n\}$  有界, 即  $\exists M > 0$ ,  $a_n \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 则有

$$0 < \frac{a_n}{2M} \leq \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

两边对  $n$  取极限, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

设

$$A(n) = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}}, \quad B(n) = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n+2}}$$

显然  $B(n) \in (0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2} + a_{n+3}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_{n+2} + a_{n+3}} \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2} + a_{n+3}} = 0$$

同理可证, 对任意  $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+p} + a_{n+p+1}} = 0$$

则  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\exists N_p \in \mathbb{N}$ ,  $n > N_p$  时

$$\frac{a_n}{a_{n+p} + a_{n+p+1}} < \frac{1}{4}$$

即  $n > N_p$  时,  $a_n < 2a_{n+p}$  和  $a_n < 2a_{n+p+1}$  中至少有一个成立。

显然我们可以选取一个子列, 使其单调增加且无界。

**命题 1.1.15** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

对所有正数数列  $\{a_n\}$  成立, 且  $e$  不能再改进。

**证明:** 设  $s_k = \left( \frac{1 + a_{k+1}}{a_k} \right)^k$ , 则  $s_k \geq 0$ , 且  $\sup_{k \geq n} \{s_k\}$  对  $n$  不增。  
则  $\sup_{k \geq n} \{s_k\}$  对  $n$  极限存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{s_k\} = l > e$$

则对任意  $0 < \varepsilon < l - e$ , 选取  $N \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$  时

$$l \leq \sup_{k \geq n} \{s_k\} < e - \varepsilon$$

我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

令

$$r_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

选取  $N' \in \mathbb{N}$ ,  $n > N'$  时

$$e - \varepsilon < r_n < e + \varepsilon$$

令  $M = \max\{N, N'\}$ ,

$$s_n \leq \sup_{k \geq n} \{s_k\} < r_n, \quad \forall n > M$$

进一步有

$$s_n \leq \sup_{k \geq n} \{a_k\} \leq r_n, \quad \forall n > M$$

则有

$$\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_{M+1}}{M+1}, \quad n > M$$

$$\sum_{k=M+1}^{m-1} \frac{1}{k+1} < \frac{a_{M+1}}{M+1} - \frac{a_m}{m} < \frac{a_{M+1}}{M+1}$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 则  $\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$  收敛, 而调和级数不收敛。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

**命题 1.1.16** 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q, \quad |q| < 1$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$$

**证明:**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1$  时

$$|a_n - a| < \frac{1 - |q|}{3(1 - q)} \varepsilon$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , 则存在  $N_2 \in \mathbb{N}, n > N_2$  时

$$|q|^n < \frac{\varepsilon}{3N_1M|1 - q|}, \quad |aq^n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因此当  $n > N = N_1 + N_2 + 1$  时, 有

$$\begin{aligned} & |(1 - q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1} - a)| \\ &= \left| (1 - q)[(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_{N_1+1} - a)q^{n-N_1-1} + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1} - aq^n] \right| \\ &< |1 - q| \left[ \frac{(1 - |q|)\varepsilon}{3(1 - q)} \cdot \frac{1 - |q|^{n-N_1}}{1 - |q|} + N_1M \frac{\varepsilon}{3N_1M|1 - q|} \right] + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = a$$

又  $1 - q \neq 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1 - q}$$

**命题 1.1.17** 设数列  $\{a_n\}$  满足

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

**证明:**

(1) 当  $n \geq 2$  时,

$$a_n = \frac{n+1}{2n} a_n + 1$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

**证明:** (1) 由  $a_n = \frac{n+1}{2n} a_n + 1$  知,

$$2a_n - a_{n-1} - 2 = \frac{a_{n-1}}{n}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} + 1$$

所以

$$\begin{aligned} 2a_n - a_{n-1} - 2 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!} - \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{k!(n-k-1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} a_{n-1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2(a_n - a_{n-1}) &= \frac{n+1}{n} a_{n-1} - \frac{n+2}{n+1} a_n \\ &= a_{n-1} - a_n + \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{1}{n+1} a_n \\ &> (a_{n-1} - a_n) + \frac{1}{n+1} (a_{n-1} - a_n) \\ &= \frac{n+2}{n+1} (a_{n-1} - a_n) \end{aligned}$$

因为  $a_1 = 2, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{8}{3}$ , 所以  $n \geq 4$  时,  $b_n \geq a_{n+1}$   
即  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$ , 所以  $\{a_n\}$  存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} a_{n-1} + 1$$

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

**引理 1.1.1** 设集合

$$S = \{n\alpha - [n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

其中  $\{n\alpha\} = n\alpha - [n\alpha]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , 即  $\alpha$  为无理数。

证明: 集合  $S$  在区间  $[0, 1]$  上稠密。

**证明:** 先证集合  $S$  为无穷集合。设任意  $i, j \in \mathbb{N}$

$$\{i\alpha\} \neq \{j\alpha\}$$

否则  $\exists i, j \in \mathbb{N}$  使得

$$\{i\alpha\} = i\alpha - [i\alpha] = j\alpha - [j\alpha] = \{j\alpha\}$$

则有

$$\alpha = \frac{[i\alpha] - [j\alpha]}{i - j} \in \mathbb{Q}$$

与题设矛盾, 所以显然集合  $S$  是无穷集, 且  $S \subseteq [0, 1]$ 。

由 Bolzano-Weierstrass 定理知, 集合  $S$  至少存在一个聚点。因此易知,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists i, j \in \mathbb{N}$  使得

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{n}$$

则存在  $M \in \mathbb{N}$  使得

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \leq 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

又因为  $\alpha$  是无理数, 所以不存在  $M \in \mathbb{N}$ , 使  $M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) = 1$ , 则

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) < 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

因为  $\{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{n}$ , 则对任意  $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , 存在  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \in \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right]$$

$$\begin{aligned} k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) &= \{k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})\} \\ &= \{k[(i\alpha - [i\alpha]) - (j\alpha - [j\alpha])]\} \\ &= \{k(i-j)\alpha + k([j\alpha] - [i\alpha])\} \\ &= \{k(i-j)\alpha\} \end{aligned}$$

因此

$$\{k(i-j)\alpha\} \in \left[ \frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right] \cap S$$

即集合  $S$  在区间  $[0, 1]$  上稠密。

**命题 1.1.18** 证明: 数列  $\{\sin n\}$  在区间  $[-1, 1]$  上稠密。

**证明:**  $\forall v \in [-1, 1]$ ,  $\exists u \in [0, 2\pi]$

$$\sin u = v$$

由  $y = \sin x$  的连续性可知,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使得当  $|x - u| < \delta$  时

$$|\sin u - \sin x| = |v - \sin x| < \varepsilon$$



由引理 1.1.1 知, 对任意无理数  $\alpha$ , 集合

$$\{n\alpha - [n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

在区间  $[0, 1]$  上稠密。所以令  $\alpha = \frac{u}{2\pi}$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} - \frac{u}{2\pi} \right| < \frac{\delta}{2\pi}$$

其中

$$\left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} = \frac{n}{2\pi} - \left[ \frac{n}{2\pi} \right]$$

两边乘以  $2\pi$ , 得

$$\left| 2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} - u \right| < \delta$$

所以

$$\left| \sin \left( 2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} \right) - \sin u \right| < \varepsilon$$

又因为

$$2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} = \frac{n}{2\pi} - \left[ \frac{n}{2\pi} \right]$$

则有

$$\sin \left( 2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} \right) = \sin \left[ 2\pi \left( \frac{n}{2\pi} - \left[ \frac{n}{2\pi} \right] \right) \right] = \sin \left( 2\pi \cdot \frac{n}{2\pi} \right) = \sin n$$

即

$$|\sin n - \sin u| = |\sin n - v| < \varepsilon$$

**命题 1.1.19** 求数列  $a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}$  的极限。

**证明:** 由算术几何平均值不等式知

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}} &= \sqrt[n]{\left( 1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n} \right) \times 1 \times \cdots \times 1} \\ &\leq \frac{n - 1 + 1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{2 + 3 + \cdots + n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

又  $a_n \leq 0$ , 则由夹逼定理得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**命题 1.1.20** 证明: 若  $p_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a$$

**证明:** 由题设知,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\left| \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| < \varepsilon$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得

$$|a_n - a| \varepsilon$$

且  $\exists M > 0$ , 使得

$$|a_n| < M, \quad n \in \mathbb{N}$$

则当  $n > N = N_1 + N_2$  时有

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - a \right| &= \left| \frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \dots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{p_1(a_n - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + \dots + \left| \frac{p_{n-N_2}(a_{N_2+1} - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\quad + \left| \frac{p_{n-N_2+1}(a_{N_2} - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + \dots + \left| \frac{p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-N_2})\varepsilon}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + 2MN_2\varepsilon \\ &\leq (2MN_2 + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a$$

**命题 1.1.21** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left( \frac{x}{n} \right) dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

**证明:** 易知

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4n}\right)$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x}{n}\right)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \sqrt[n]{\frac{\pi}{n+1}} = \frac{\pi}{4}$$

又有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \tan \left(\frac{\pi}{4n}\right) \cdot \sqrt[n]{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

则由夹逼定则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left(\frac{x}{n}\right) dx \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$$

**命题 1.1.22** 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 用定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right)}{\ln n} = 0$$

**证明:** 设  $\max |x_n| = M$ , 且对任意  $\varepsilon' > 0$ , 存在一个  $N_1(\varepsilon')$ , 使得当  $N > N_1(\varepsilon')$  时,  $|x_k| \leq \varepsilon'$  成立. 则有

$$\begin{aligned} \frac{\left|x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right|}{\ln n} &= \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} x_k + \sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} x_k\right|}{\ln n} \\ &\leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} x_k\right| + \left|\sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} x_k\right|}{\ln n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} |x_k| + \sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} |x_k|}{\ln n} \\ &\leq \frac{M\varepsilon' + \left(\sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k}\right) \varepsilon'}{\ln n} \\ &< (M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

因此令  $\varepsilon = (M+1)\varepsilon'$ , 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在一个  $N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon') = N_1(\frac{\varepsilon}{M+1})$ , 使得当  $N > N(\varepsilon)$  时

$$\frac{\left|x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right|}{\ln n} < \varepsilon$$

**命题 1.1.23** 已知正数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$ ,  $n \geq 1$ 。证明:  $\{x_n\}$  收敛并求出该极限。

**证明:** (1) 如果  $0 < x_1 < x_2 < 1$ , 则有

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq x_2$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}) - (\sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}) = (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}) + (\sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n-1}}) \geq 0$$

所以  $\{x_n\}$  单调增加。且由数学归纳法可证, 若  $x_n \leq 4$ , 则

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \leq 4$$

所以  $\{x_n\}$  收敛, 且极限为 4。

(2) 如果  $0 < x_2 < x_1 < 1$ , 则有

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq x_1$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_{n-1}} \geq 0$$

同上。

(3) 如果  $x_1 \geq 1$  或  $x_2 \geq 1$ , 则

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 1 \implies x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \geq 1$$

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 4| &= |\sqrt{x_{n+1}} - 2 + \sqrt{x_n} - 2| \\ &\leq |\sqrt{x_{n+1}} - 2| + |\sqrt{x_n} - 2| \\ &= \left| \frac{x_{n+1} - 4}{\sqrt{x_{n+1}} + 2} \right| + \left| \frac{x_n - 4}{\sqrt{x_n} + 2} \right| \\ &\leq \frac{1}{3}|x_{n+1} - 4| + \frac{1}{3}|x_n - 4| \end{aligned}$$

由递推公式易知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - 4| = 0$$

**命题 1.1.24** 设  $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 定义  $x_{n+1} = \sin x_n$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2$  的值。

**证明:** 因为  $nx_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ , 由 Stolz 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n}$$

易知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = 3$$

同时可知

$$x_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$  发散。

**命题 1.1.25** 设  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ 。证明: 数列  $\{a_n\}$  收敛并求出该极限。

**证明:** 由数学归纳法易证

$$a_n \leq 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

设函数  $f(x) = \sqrt{2}^x - x$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln 2 \sqrt{2}^x - 1, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{2} \ln 2\right)^2 \sqrt{2}^x \geq 0$$

易知  $x \leq 2$  时,  $f'(x) < 0$ , 且  $f(2) = 0$ . 因此

$$f(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 2$$

即  $a_{n+1} \leq a_n$ . 所以数列  $\{a_n\}$  收敛, 且极限  $a$  满足

$$\sqrt{2}^a = a$$

即  $a = 2$ 。

**命题 1.1.26** 设

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right]$$

证明  $S_n$  收敛并求其值。

**证明:** 易知

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right] \right] \\
&= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right] \\
&= \frac{3}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

**命题 1.1.27** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n = +\infty$$

**证明:** 注意到,  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ ,  $\forall x \geq 0$ , 得到

$$\begin{aligned}
\left( 1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n &\geq \left( 1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n \\
&\geq \left( 1 + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n \\
&\geq \left( 1 + \frac{5}{6\sqrt{n}} \right)^n \\
&\geq \frac{5\sqrt{n}}{6}
\end{aligned}$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n = +\infty$$

## §2 不等式

**定理 1.2.1 (Bernoulli 不等式)** 设  $h > -1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

其中  $n > 1$  时等号成立的充分必要条件时  $h = 0$ .

**证明:**  $n = 1$  或  $h = 0$  时不等式显然成立, 下面只证明  $n > 1$  和  $h \neq 0$  时的情况。

将  $(1+h)^n - 1$  作因式分解, 可以得到

$$(1+h)^n - 1 = h[1 + (1+h) + (1+h)^2 + \cdots + (1+h)^{n-1}]$$

当  $h > 0$  时, 右边方括号内第二项起都大于 1, 因此  $(1+h)^n - 1 > nh$ .

当  $-1 < h < 0$  时, 右边方括号内第二项起都小于 1, 则  $(1+h)^n - 1 < nh$ , 又因为  $h < 0$ , 所以得到  $(1+h)^n - 1 > nh$ .

下证等号成立的条件, 易知  $A > 0$ ,  $A+B > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  时成立不等式

$$(A+B)^n \geq A^n + nA^{n-1}B$$

且  $n > 1$  时等号成立的充分必要条件是  $B = 0$ .

**定理 1.2.2 (算术平均值-几何平均值不等式)** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个非负实数, 则成立不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

其中等号成立的充分必要条件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**证明:** 显然, 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  中有 0, 则不等式成立, 且此时等号成立的充分必要条件是  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

下面只证  $a_1, a_2, \dots, a_n$  全为正数时的情况。  $n = 1$  时不等式成立。

假设  $n = k$  时不等式成立, 则  $n = k+1$  时有以下分解

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} + \frac{ka_{k+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{k(k+1)}$$

令

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

$$B = \frac{ka_{k+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} \\ &= (A+B)^{k+1} \\ &\geq A^{k+1} + (k+1)A^k B \\ &= A^k (A + (k+1)B) \\ &= A^k a_{k+1} \\ &\geq a_1 a_2 \dots a_{k+1} \end{aligned}$$

不等式等号成立时条件也可以由数学归纳法得到。

$n = 1$  时显然成立。

假设  $n = k$  时成立, 则  $n = k + 1$  时可以由以上推导过程观察得到等号成立的充分必要条件是

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \cdots = a_k \\ ka_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k \end{aligned}$$

也就是

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$$

**定理 1.2.3 (Young 不等式)**  $p, q \in \mathbb{R}^+$ , 且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p > 1) \\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p < 1) \end{aligned}$$

其中  $a, b$  为任意实数。

**证明:** 设函数

$$f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$$

易证  $\alpha < 1$  时,  $f(x) \leq 0$ ;  $\alpha \geq 1$  时,  $f(x) \geq 0$ . 令  $x = \frac{a}{b}$ , 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 &\leq 0 \quad (\alpha < 1) \\ \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 &\geq 0 \quad (\alpha \geq 1) \end{aligned}$$

令  $\alpha = \frac{1}{p}$ , 有

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p > 1) \\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p < 1) \end{aligned}$$

**定理 1.2.4 (Hölder 不等式)**  $p, q \in \mathbb{R}^+$ , 且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则

$$\sum x_i y_i \leq \left( \sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

其中,  $\{x_i\}$  和  $\{y_i\}$  均为非负数。



**证明:** 令  $X = \sum x_i^p$ ,  $Y = \sum y_i^q$ . 由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} &= \left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{Y} \\ \sum \frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{\sum y_i^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \sum x_i y_i &\leq X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}} = \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

**定理 1.2.5 (Minkowski 不等式)** 设  $p \in \mathbb{R}^+$

$$\left(\sum (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中,  $\{x_i\}$  和  $\{y_i\}$  均为非负数。

**证明:**

$$\sum (x_i + y_i)^p = \left(\sum (x_i + y_i)^{p-1}\right) (x_i + y_i) = x_i \sum (x_i + y_i)^{p-1} + y_i \sum (x_i + y_i)^{p-1}$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\sum (x_i + y_i)^p &\leq \left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum y_i^q\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

**定理 1.2.6** (1) 设  $F \in \mathbb{C}[a, b]$ , 处处大于 0, 且单调减少, 则有

$$\int_a^b F(x) dx \int_a^b x F^2(x) dx \leq \int_a^b F^2(x) dx \int_a^b x F(x) dx$$

(2) 设  $f, g$  在区间  $[a, b]$  上对于任何  $x, y$  有

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

又设  $p \in \mathbb{R}[a, b]$ , 且处处大于 0. 则有

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx$$

**证明:** (1) 令两边第二项积分变量替换为  $y$ , 化为二重积分, 得

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_a^b \int_a^b F(x) y F^2(y) - F(x) y F(y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b y F(x) F(y) (F(y) - F(x)) dx dy\end{aligned}$$

再令  $x$  与  $y$  交换, 得

$$I_2 = \int_a^b \int_a^b xF(x)F(y)(F(x) - F(y))dxdy$$

因为积分区域关于  $x = y$  对称, 则

$$2I = I_1 + I_2 = \int_a^b \int_a^b F(x)F(y)(F(x) - F(y))dxdy$$

因为  $F(x)$  单调减少且处处大于 0, 所以  $F(x)F(y)(F(x) - F(y)) \leq 0$ , 即  $I \leq 0$ . 则

$$\int_a^b F(x)dx \int_a^b xF^2(x)dx \leq \int_a^b F^2(x)dx \int_a^b xF(x)dx$$

(2) 同 (1), 先化为二重积分, 再利用题设证明。

**定理 1.2.7 (Bellman-Gronwall 不等式)** 设当  $x \geq 0$  时,  $f(x)$ ,  $g(x)$  为非负连续函数, 且有

$$f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

其中  $A > 0$ .

则当  $x \geq 0$  时

$$f(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$$

**证明:** 由题设得

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} &\leq 1 \\ \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} &\leq g(x) \\ \int_0^x \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt}dx &\leq \ln A + \int_0^x g(t)dt \end{aligned}$$

即

$$f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$$

**定理 1.2.8** 设  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ , 且  $0 < m \leq f(x) \leq M$ , 则有

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2$$

**证明：** 左右两边同乘  $MN$ , 得

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(M+m)^2}{4} (b-a)^2$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx} \sqrt{\int_a^b f(x) dx} &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[ \frac{Mm}{f(x)} + f(x) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[ \frac{(f(x) - M)(f(x) - m)}{f(x)} + (M + m) \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b (M + m) dx \\ &= \frac{1}{2} (b-a)(M + m) \end{aligned}$$

则有

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{4} (b-a)^2 (M+m)^2$$

即

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} (b-a)^2$$

### §3 连续函数

**命题 1.3.1** 设  $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$  其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  是互异实数,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  不同时为 0.

证明:  $f(x)$  的零点个数小于  $n$ .

**证明：** 应用数学归纳法。  $n = 1$  时,  $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$  无零点, 结论成立。

假设  $n = m$  时成立, 则  $n = m + 1$  时, 应用反证法, 假设此时零点个数大于等于  $m + 1$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m+1} c_k e^{\lambda_k x} = \left[ c_{m+1} + \sum_{k=1}^m c_k e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x} \right]$$

令

$$g(x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x} + c_{m+1}$$

则  $g(x)$  有至少  $m + 1$  个零点, 由 Rolle 中值定理得,  $g'(x) = \sum_{k=1}^m c_k (\lambda_k - \lambda_{m+1}) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x}$  至少有  $m$  个零点

因为  $a_k = c_k(\lambda_k - \lambda_{m+1})$  互异, 且  $\lambda_k - \lambda_{m+1}$  不同时为 0  
 所以  $g'(x)$  零点个数小于  $m$  个, 与假设矛盾. 则  $n = m + 1$  时结论成立.  
 由数学归纳法, 结论得证.

**命题 1.3.2** 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 且  $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = O(x)$  ( $x \rightarrow 0$ )

证明:

$$f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

**证明:** 因为  $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = O(x)$  ( $x \rightarrow 0$ ), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| < \delta$$

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x\alpha(x), \quad |x| < \delta$$

其中  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $|x| < \delta$ , 则

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^n \left( f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{x}{2^{k-1}} \alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) \right]$$

因为  $k \in \mathbb{N}$  时,

$$\left| \frac{x}{2^{k-1}} \right| \leq |x|$$

所以

$$\begin{aligned} \left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left[ \frac{x}{2^{k-1}} \left| \alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| |x| \right] \\ &\leq |x| \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2^k} \right) \varepsilon \\ &= |x| \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| \leq \varepsilon \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] < \varepsilon$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

所以

$$f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

**命题 1.3.3** 设  $f \in C(I)$ ,  $I$  为区间。证明：若  $x_0 \in I$  是  $f$  的唯一极值点，则  $x_0$  一定是最值点；若  $x_0$  是极小值（极大值）点，则  $x_0$  是  $f$  的最小值（最大值）点。

**证明：**不妨设  $x_0$  是  $f$  的唯一极小值点， $x_1$  是  $f$  的最小值点，应用反证法，假设  $x_0 \neq x_1$ ，则不妨设  $x_0 < x_1$

因为  $x_0$  是极小值点，所以存在  $x_2 > x_0$ ,  $x_2 < x_1$

$$f(x_2) > f(x_0) > f(x_1)$$

由介值定理得， $\exists x_3 \in (x_2, x_1)$

$$f(x_3) = f(x_0)$$

则易知  $\exists \eta \in (x_3, x_0)$

$$f'(\eta) = 0$$

其中  $\eta$  为极值点，与题设矛盾。

所以  $x_0 = x_1$ ，又若最值点不唯一，即  $\exists \alpha \in I$ ,  $\alpha \neq x_0$

$$f(\alpha) = f(x_0)$$

同上可知与题设矛盾。

**命题 1.3.4** 若  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  为

(1) 单调增加

(2) 单调减少

是否存在  $x \in [0, 1]$ ，使得  $f(x) = x$

**证明：**(1) 存在

令  $A = \{x | x \in [0, 1] \wedge f(x) > x\}$ ，若  $f(0) = 0$ ，则结论显然成立。

若不然，则  $A$  非空，因此  $A$  有上确界，不妨设为  $a$ ，令  $b = f(a)$

a)  $a < b$  时

因为  $f$  是单调的,  $a$  为上确界, 可得

$$b = f(a) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2}$$

与  $a < b$  矛盾。

b)  $a > b$  时

因为  $a$  为上确界, 所以存在  $\eta \in A$ ,  $\eta > \frac{a+b}{2}$ , 则

$$b = f(a) \geq f(\eta) > \eta > \frac{a+b}{2}$$

与  $a > b$  矛盾。

所以  $a = b$ , 即  $f(a) = 0$ .

(2) 不一定存在

例如, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

**命题 1.3.5** 设  $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  是单调增加函数, 且  $f \circ g = g \circ f$ , 证明:  $f$  和  $g$  有一个公共不动点。

**证明:** 设

$$A = \{x | x \in [a, b] \wedge x \leq f(x) \wedge x \leq g(x)\}$$

显然  $A$  非空, 所以存在上确界  $u = \sup A$

易知  $u \leq f(u)$ ,  $u \leq g(u)$ , 所以

$$f(u) \leq f(g(u)) = g(f(u))$$

又

$$f(f(u)) \geq f(u)$$

即  $f(u) \in A$ , 则

$$f(u) \leq u$$

所以

$$u = f(u) = g(u)$$

则  $u$  为  $f$  和  $g$  的公共不动点。

**命题 1.3.6** 设函数  $f$  在区间  $I$  上只有可去间断点, 定义

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$$

证明:  $g \in C(I)$

**证明:**  $\forall x_0 \in I$ , 因为  $g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$ , 所以存在  $\delta > 0$ ,  $t \in \mathring{U}(x_0, \delta)$  时

$$|f(t) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是, 当  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$  时, 有

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - g(x_0) \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow x} |f(t) - g(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

即  $g$  在  $x_0$  处连续, 由  $x_0$  的任意性可知,  $g$  在区间  $I$  上连续。

**命题 1.3.7** 设函数  $f$  和  $g$  在  $[a, b]$  上连续, 且有  $x_n \in [a, b]$ , 使得

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

证明: 必有一点  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$

**证明:** 反证法。若  $F(x) = f(x) - g(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , 不妨设  $F(x) > 0$

则由  $F$  连续知,  $F$  在  $[a, b]$  上有最值, 设  $\min F(x) = m$

则

$$F(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_{n+2}) \geq m$$

所以

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m$$

...

$$f(x_1) - f(x_2) \geq m$$

则

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_1) - mn$$

即  $f$  无界, 与题设矛盾。得证。

**命题 1.3.8** 设函数  $f$  在区间  $[0, +\infty)$  上连续且有界, 证明: 对任意给定的  $\lambda$ , 存在一个数列  $\{x_n\}$  满足

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + \lambda) - f(x_n)] = 0$$

**证明:** 反证法。不失一般性地, 我们设  $\lambda > 0$ ,  $\lambda = 0$  时结论显然成立; 若  $\lambda < 0$ , 则有

$$-[f(x_n + \lambda + |\lambda|) - f(x_n + \lambda)] = f(x_n + \lambda) - f(x_n)$$

化为  $\lambda > 0$  的形式。

若命题不成立, 则必存在  $\lambda > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\forall M > 0$ ,  $x > M$  时

$$|f(x + \lambda) - f(x)| > \varepsilon$$

由  $f$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 所以  $f(x + \lambda) - f(x)$  不变号, 不妨设

$$f(x + \lambda) - f(x) > \delta, \quad x > M$$

则

$$\begin{aligned} f(x_n + m\lambda) &\geq f[x_n + (m+1)\lambda] + \varepsilon \\ &\dots \\ &\geq f(x_n) + m\varepsilon \end{aligned}$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 则

$$f(x_n + m\lambda) \rightarrow \infty$$

与  $f$  有界矛盾。

**命题 1.3.9** 设函数  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且任意  $x \in [0, 1]$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x + n) = 0$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



**证明:** 因为  $f$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x', x'' \in [0, +\infty)$  时

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

将  $[0, 1]$  等分成  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ , 使每个区间的长度为  $\frac{1}{m} < \delta$   
 因为  $x - [x], \forall x \geq 1$ , 且

$$x \rightarrow +\infty \leftrightarrow [x] \rightarrow +\infty$$

所以存在  $k \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$

$$x - [x] \in [x_k, x_{k+1}]$$

即

$$0 \leq x - [x] - x_k < \delta$$

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0, \forall x \in [0, 1]$  成立, 所以对任意  $x_k, k \in \{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$$

因此  $\exists N \in \mathbb{N}, n > N$  时

$$|f(x_k + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, \cdots, m\}$$

当  $x > N > 1$  时,  $[x] > N$ , 且

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f([x] + x_k) + f(x_k + [x])| \\ &= |f(x) - f([x] + x_k)| + |f(x_k + [x])| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

**命题 1.3.10** 设函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上定义, 且处处有极限, 证明:

- (1) 对任意  $\varepsilon > 0$ , 在  $[a, b]$  上使  $\left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \varepsilon$  的点至多只有有限个。
- (2)  $f$  在  $[a, b]$  中至多只有可列个间断点。

**证明:** (1) 反证法。若对  $\varepsilon_0 > 0$ , 在  $[a, b]$  上使  $\left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \varepsilon$  的点有无限个, 令间断点集合为点列  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , 由聚点定理得, 存在子列  $\{x_k\}$  收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

又由题设, 设  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \alpha$ , 由极限性质得知,  $\exists \delta > 0$ ,  $|t - \alpha| < \delta$

$$|f(t) - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

又由 Heine 归结定理得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \alpha$$

则存在  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq k_0$  时

$$|f(t) - f(x_k)| \leq |f(t) - \alpha| + |f(x_k) - \alpha| = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

其中  $|t - x_k|$  可任意小, 与题设矛盾。

(2) 设  $A = \left\{ x \mid x \in [a, b] \wedge \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > 0 \right\}$  为间断点集合

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

其中

$$A_n = \left\{ x \mid x \in [a, b] \wedge \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \frac{1}{n} \right\}$$

由 (1) 知  $A_n$  为有限集, 所以  $A$  至多可列。

**命题 1.3.11** 设函数  $f$  在  $[0, +\infty)$  上定义, 且在其中的每个有界子区间上上有界, 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

**证明:** 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$ , 所以  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 > \max\{0, a\}$ ,  $x > \delta_1$  时

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

固定  $\delta_1$ , 由题设知  $f$  在  $(\delta_1, \delta_1 + 1)$  上有界, 则存在  $M > 0$

$$|f(x)| < M, \quad x \in (\delta_1, \delta_1 + 1)$$

选取  $\delta > \delta_1$ , 使

$$\frac{M}{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \frac{\delta_1 + 1}{\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是, 当  $x > \delta$  时,  $\exists n \in \mathbb{N}$ , 使  $x - n \in (\delta_1, \delta_1 + 1)$

又

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n [f(x-i) - f(x-i-1) + f(x-n)]}{x} - A \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{i=1}^n [f(x-i) - f(x-i-1) - A] + nA + f(x-n)}{x} - A \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(x-i) - f(x-i-1)}{x} - A \right| + \left| \frac{(x-n)A}{x} \right| + \left| \frac{f(x-n)}{x} \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{n}{x} + \frac{\delta_1 + 1}{\delta} A + \frac{M}{\delta} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

**命题 1.3.12** 设  $f$  是  $[a, b]$  上的可微函数, 且  $f(a) = 0$ ,  $\exists A > 0$ ,  $\beta \geq 1$

$$|f'(x)| \leq A|f(x)|^\beta, \quad \forall x \in [a, b]$$

证明:  $f(x) \equiv 0$

**证明:** 反证法。设  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$

令  $S = \{x | x \in [a, b] \wedge f(x) = 0\}$ , 则显然  $S$  非空。设  $c = \inf S$

如果  $c = b$ , 则  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , 由连续性可知

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$$

与题设矛盾。因此  $c \neq b$ , 又  $c = a$ , 则有  $f(c) = 0$ , 否则  $a < c < b$  时

$$f(x) = 0, \quad \forall x < c$$

则由函数连续性知  $f(c) = 0$ . 综上

$$f(c) = 0, \quad a \leq c < b$$

因为  $f$  在  $x = c$  处连续且  $f(c) = 0$ , 则存在  $d > c$ , 使  $d$  充分接近  $c$ , 且  $|f(x)| \leq 1$ ,  $A(x-c) \leq \frac{1}{2}$ ,  $x \in [c, d]$  因为  $f$  在  $[c, d]$  连续, 所以存在最值, 即令

$$|f(t)| = \max_{x \in [c, d]} |f(x)|, \quad t \in [c, d]$$

又因为  $c = \inf S$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in (m, m + \varepsilon)$ , 使得  $f(m) \neq 0$   
 则  $f(t) \neq 0$ , 且  $t > c$ , 由 Lagrange 中值定理知

$$|f(t)| = |f(t) - f(c)| = |t - c||f'(u)| \leq |t - c||f(u)|^\beta, \quad u \in (c, t)$$

又由  $A(x - c) \leq \frac{1}{2}$  得

$$|t - c||f(u)|^\beta \frac{1}{2}|f(u)|^\beta \leq \frac{1}{2}|f(u)|$$

即  $|f(t)| \leq \frac{1}{2}|f(u)|$  则

$$f(t) = f(u) = 0$$

也即  $f(x) \equiv 0$ , 与假设矛盾。得证。

**命题 1.3.13** 设  $y = (1 + \sqrt{x})^{2n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 求  $y^{(n)}(1)$

**证明:** 设  $f(x) = (1 - \sqrt{x})^{2n+2}$ , 易知对  $f(x)$  求  $n$  次导后, 每项依然会有  $(1 - \sqrt{x})$ , 则

$$f^{(n)}(1) = 0$$

所以

$$y^{(n)}(1) = [(1 + \sqrt{x})^{2n+2} + (1 - \sqrt{x})^{2n+2}]^{(n)} \Big|_{x=1}$$

$$(1 + \sqrt{x})^{2n+2} + (1 - \sqrt{x})^{2n+2} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} x^k$$

对右侧函数求  $n$  次导, 易知

$$y^{(n)}(1) = 4(n+1)(n+1)!$$

**命题 1.3.14** 设  $f \in C^2(a, b)$ ,  $f + f' + f'' \geq 0$ , 证明:  $f$  有下界。

**证明:** 设

$$g(t) = e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

则

$$g + g'' = \frac{4}{3}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} \left[ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) \right] \geq 0, \quad t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

选取  $s, t$ , 使得

$$\max\{b - a, \pi\} < t < s < b$$

设

$$h_s(t) = g(t) \cos(t - s) - g'(t) \sin(t - s)$$

$$h'_s(t) = -[g(t) + g''(t)] \sin(t - s) \geq 0$$

其中  $\sin(t-s) < 0$  则

$$g(s) = h_s(s) \geq h_s(t) \geq -|g(t)| - |g'(t)|$$

选取任意  $t \in (\max\{b-a, \pi\}, b)$ , 上式表明  $g$  在  $(t, b)$  上有上界。

设  $G(x) = g(a+b-x)$ , 则显然  $G \in C^2(a, b)$

$$G(x) + G''(x) = g(a+b-x) + g''(a+b-x) \geq 0$$

所以  $G$  在  $(t, b)$  上有下界, 即  $g$  在  $(a, a+b-t)$  上有下界。

若  $a+b-t > t$ , 即  $t < \frac{a+b}{2}$  时,  $g$  在  $(a, b)$  上有界。否则可在  $(a+b-t, t)$  上重复以上操作。

**命题 1.3.15** 设  $f$  是可微实函数, 且存在  $M > 0$ , 使得

$$|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq Mt^2, \quad \forall x, t$$

证明:

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq M|t|$$

**证明:** 我们将证明即使没有  $f$  可微的条件, 依然可以得出结论。

由题设得

$$-Mt^2 \leq f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) \leq^2, \quad \forall x, t$$

设  $h_1(x) = f(x) - \frac{M}{2}x^2$ , 则由上式得

$$h_1(x+t) - 2h_1(x) + h_1(x-t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) - Mt^2 \leq 0$$

这表明  $h_1$  是  $\mathbb{R}$  上连续的下凸函数, 同理设  $h_2(x) = f(x) + \frac{M}{2}x^2$ ,  $h_2$  是  $\mathbb{R}$  上连续的上凸函数。则

$$h_1^{(-)}(x) \leq h_1^{(+)}(x) \tag{1}$$

$$h_2^{(-)}(x) \leq h_2^{(+)}(x) \tag{2}$$

所以  $f^{(-)}$ ,  $f^{(+)}$  在任意点有定义, 且满足

$$f^{(-)}(x) \equiv h_1^{(-)}(x) + Mx \tag{3}$$

$$f^{(+)}(x) \equiv h_1^{(+)}(x) + Mx \tag{4}$$

$$f^{(-)}(x) \equiv h_2^{(-)}(x) + Mx \tag{5}$$

$$f^{(+)}(x) \equiv h_2^{(+)}(x) + Mx \tag{6}$$

由 (1), (3), (4) 得  $f^{(-)} \geq f^{(+)}$ , 而由 (2), (5), (6) 得  $f^{(-)} \leq f^{(+)}$   
 因此  $f^{(-)} \equiv f^{(+)}$ , 即  $f$  在  $\mathbb{R}$  上可微, 且  $h_1, h_2$  也可微, 由  $h_1, h_2$  凸性得,  $\forall x, y, x \leq y$  有

$$h'_1(y) - h'_1(x) = f'(y) - f'(x) - M(y - x) \leq 0$$

$$h'_2(y) - h'_2(x) = f'(y) - f'(x) + M(y - x) \geq 0$$

即

$$|f'(y) - f'(x)| \leq M|y - x|$$

**命题 1.3.16** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是二阶可微, 周期为  $2\pi$  的偶函数, 证明: 若

$$f''(x) + f'(x) = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则  $f$  的周期为  $\frac{\pi}{2}$

**证明:** 由  $f$  的偶性得

$$f''(x) = f''(-x), \quad f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(-x) + f(-x) = f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(-x + \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$f$  以  $3\pi$  为周期, 又由题设知,  $f$  周期为  $2\pi$ , 则  $f$  必以  $\pi$  为周期。

考察函数

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

因为

$$f(x + \pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{g(x)}$$

又

$$g(-x) = f\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$$

所以  $g(x)$  也是偶函数,

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\g''(x) &= f''\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

有

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{g(x)} \quad (1)$$

$$g''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x)} \quad (2)$$

即

$$fg'' - gf'' = (fg' - g'f)'$$

所以

$$f'g - g'f = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

同时由于  $g'(x)$ ,  $f'(x)$  是奇函数, 则  $c = 0$

又  $f, g$  为  $\mathbb{R}$  上周期函数, 所以  $f, g$  必有界, 则由 (1) 式得  $g(x) \neq 0$  故

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{c}{g^2} = 0$$

即

$$f = ag, \quad a \in \mathbb{R}$$

又因为  $f$  在  $\mathbb{R}$  上连续且是周期函数, 则存在最值点  $x_0, x_1$ , 其中

$$f(x_0) = \min f(x), \quad f(x_1) = \max f(x)$$

则有

$$\begin{aligned}g(x_0) &= f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) \geq f(x_0) \\g(x_1) &= f\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) \leq f(x_1)\end{aligned}$$

则

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**命题 1.3.17** 设  $f \in \mathbb{C}^n[0, 1)$ , 满足

$$f^{(k)} \leq 1 + |f| + |f'| + \cdots + |f^{(k-1)}|, \quad k \leq n$$

证明:  $f$  有上界

**证明:** 因为  $f \in \mathbb{C}^n[0, 1)$ , 由 Taylor 公式知

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + O(x^n)$$

由题设

$$f'(x) \leq 1 + |f(x)|$$

$$f''(x) \leq 1 + |f(x)| + |f'(x)| \leq 2(1 + |f(x)|)$$

应用数学归纳法可证

$$f^{(k)}(x) \leq 2^{k-1}(1 + |f(x)|), \quad k \leq n$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(0) + (1 + |f(0)|) \left( \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{n-1}x^n}{n!} \right) + O(x^n) \\ &= f(0) + \frac{1 + |f(0)|}{2} \left( \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} \right) + O(x^n) \\ &\leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(e^{2x} - 1) + O(x^n) \end{aligned}$$

因为  $f$  定义在  $[0, 1)$  上, 所以

$$f(x) \leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(e^2 - 1) + 1$$

即  $f$  有上界

**命题 1.3.18** 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$ , 常数  $h > 0$

证明: 存在  $\xi \in [h, +\infty)$ , 使得

$$f(\xi) = f(\xi - h)$$

**证明:** 反证法。令

$$g(x) = f(x) - f(x - h)$$

则  $g(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上连续。则

$$g(x) \neq 0, \quad x \in [0, +\infty)$$



不妨设

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} S_n &= g(h) + g(2h) + \cdots + g(nh) \\ &= [f(h) - f(0)] + [f(2h) - f(h)] + [f(3h) - f(2h)] + \cdots + [f(nh) - f((n-1)h)] \\ &= f(nh) - f(0) \end{aligned}$$

因为  $g(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$ , 所以  $S_n > 0$ , 然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nh) - f(0) = 0$$

矛盾, 得证。

**命题 1.3.19** 设  $f \in C(0, 1)$ , 且

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \alpha < \beta = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

其中  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1)$ . 证明: 对任意  $\lambda \in (\alpha, \beta)$ , 存在  $x_5, x_6 \in (0, 1)$ , 使得

$$\lambda = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$$

**证明:** 设

$$F(t) = \frac{f((1-t)x_2 + tx_4) - f((1-t)x_1 + tx_3)}{(1-t)(x_2 - x_1) + t(x_4 - x_3)}$$

则  $F$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $\alpha = F(0) < \lambda < F(1) = \beta$ . 根据连续函数的介值定理, 存在  $t_0 \in (0, 1)$ , 使得  $\lambda = F(t_0)$ . 令

$$x_5 = (1 - t_0)x_1 + t_0x_3$$

$$x_6 = (1 - t_0)x_2 + t_0x_4$$

则

$$\lambda = F(t_0) = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$$

**命题 1.3.20** 证明:  $e^{-x} + \cos 2x + x \sin x = 0$  在区间  $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$  恰有两个根  $x_{2n-1} < x_{2n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^+$  证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(x_n - n\pi)$$

**证明:** 令  $\varphi(x) = e^{-x} + \cos 2x + x \sin x$ , 则  $\varphi'(x) = -e^{-x} - 2 \sin 2x + \sin x + x \cos x$ .

$$\varphi((2n-1)\pi) = e^{-(2n-1)\pi} + 1 > 0$$

$$\varphi\left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2})} - 1 - \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

当  $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$  时,

$$\varphi(x) = e^{-x} + \cos^2 x + (x - \sin x) \sin x > 0$$

于是存在  $x_{2n-1} \in \left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x_{2n} \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi\right)$ . 使得

$$\varphi(x_{2n-1}) = \varphi(x_{2n}) = 0$$

下面证明  $\varphi(x) = 0$  在区间  $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$  只有上述两个根。

当  $x \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, ((2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4})\right)$  时,

$$\varphi(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 1 < 0$$

所以  $\varphi(x) = 0$  的两个根分别在区间  $\left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$  和

$\left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, ((2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4})\right)$  上。

当  $x \in \left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$  时,

$$\varphi'(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}(2n-1)\pi < 0$$

当  $x \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, ((2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4})\right)$  时,

$$\varphi'(x) > \frac{\sqrt{x}}{2} \left((2n-1)\pi + \frac{3\pi}{4}\right) - 1 > 0$$

由函数单调性确定了根的个数。

因为  $\lim_{x_n} = +\infty$ , 所以

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x_n} + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n (2 \sin x_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(x_n - n\pi) (2 \sin x_n - x_n)$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (x_n - n\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n (x_n - n\pi)}{(-1)^n \sin(x_n - n\pi) (2 \sin x_n - x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \sin x_n - x_n} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

## §4 一元函数微分学

**命题 1.4.1** 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导, 且  $\exists c \in (a, b)$ ,  $f'(c) = 0$ . 证明:  $\exists \xi \in (a, b)$

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$$

**证明:** 设  $F(x) = [f(x) - f(a)]e^{-\frac{x}{b-a}}$  则  $F'(x) = [f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}]e^{-\frac{x}{b-a}}$

$$F'(c) = -\left(\frac{f(c) - f(a)}{b - a}\right)e^{-\frac{c}{b-a}} = -\frac{F(c)}{b - a}$$

由 Lagrange 中值定理得  $\exists \eta \in (a, b)$ ,

$$F'(\eta) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} = \frac{F(c)}{c - a}$$

因为  $F'(\eta)$  与  $F'(c)$  异号, 所以由达布定理知,  $\exists \eta \in (a, b)$

$$F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$$

**定理 1.4.1 (Flett 中值定理)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上可微,  $f'(a) = f'(b)$ , 则有  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

**证明:** 设

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}, & a \leq x < b \\ f'(b), & x = b \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f'(a), & x = a \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, & a < x \leq b \end{cases}$$

又令  $F(x) = g(x) - h(x)$ , 则有

$$F(a) = g(a) - h(a) = f'(a) - \frac{f(a) - f(a)}{b - a}$$

$$F(b) = g(b) - h(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(a)$$

易见  $F(a)F(b)$  异号, 所以存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得

$$f(\eta) = g(\eta) - h(\eta) = 0$$

即

$$g(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

则存在  $\xi \in (\eta, b)$  使得

$$g'(\xi) = \frac{(\xi - a)f'(\xi) - [f(\xi) - f(a)]}{(\xi - a)^2}$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

**命题 1.4.2** 设  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(0) = f(1)$ . 证明:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists \xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ , 使得

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$$

**证明:** 设  $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

若不存在  $\xi_n$ , 使得  $f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$

不妨设  $F(x)$  恒大于 0, 则有

$$f(1) = f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right) > \cdots > f(1)$$

与题设矛盾, 所以存在  $\xi_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$$

**命题 1.4.3** 设  $f$  与  $g$  是两个周期函数, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$ . 证明:

$$f = g$$

**证明:** 设  $f$  与  $g$  的周期分别为  $T$  和  $S$ , 则对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - g(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(f(x + nT) - g(x + nT)) + \\ &\quad (g(x + nT + nS) - f(x + nT + nS) + f(x + nS) - g(n + nS))] \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = g(x)$$

**命题 1.4.4** 设  $f$  为  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 并且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ , 又设  $f$  的最小值  $f(a) < a$ , 证明:

$f(f(x))$  至少有两个最小值点。

**证明:** 由题设知,  $f(x)$  的至多为  $[f(a), +\infty]$ , 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

因为  $f(a) < a$ , 所以存在  $x_1, x_2, x_1 \neq x_2, f(x_1) = a = f(x_2)$

显然  $f(f(x)) \geq f(a) = f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ ,

所以  $f(f(x))$  至少有两个最小值点。

**命题 1.4.5 (Cauchy 方程)** 设  $f$  对任意  $x, y \in \mathbb{R}$ , 满足方程  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 证明:

(1) 若  $f$  在某一点  $x_0$  处连续, 则  $f(x) = f(1)x$

(2) 若  $f$  在  $\mathbb{R}$  单调, 也有  $f(x) = f(1)x$

**证明:** (1) 因为  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 令  $x = y = 0$ , 得  $f(0) = 0$

因为  $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ ,  $\forall x$ , 所以  $f(x) = -f(-x)$

易知  $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ , 由数学归纳法易证

$$f(n) = nf(1)$$

对任意有理数  $q = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , 由于  $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)$ , 故  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$ , 从而

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

则只需证  $f(x) = f(1)x$ ,  $x \notin \mathbb{Q}$

$f$  在  $x_0$  处连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 也即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

因为  $f(x + \Delta x) = f(x_0) + f(\Delta x)$ , 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = 0$$

对于任意  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) + f(\Delta x)) \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以  $f$  在  $\mathbb{R}$  连续。

设  $p_0$  为任意无理数, 则存在有理数列  $\{p_n\} \rightarrow p_0 (n \rightarrow \infty)$

$$f(p_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n f(1) = p_0 f(1)$$

(2) 不妨设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上单调增加。  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 取有理数列  $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ , 使  $x'_n f(1) < x < x''_n$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x$$

由  $f$  单调增加的条件,

$$x'_n f(1) < f(x'_n) \leq f(x) \leq f(x''_n) = x''_n f(1)$$

令  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$$

即

$$f(x) = xf(1)$$

**命题 1.4.6** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  上可导, 证明:  $f(x)$  在  $[a, b]$  内存在相异的两点  $\xi, \eta$ , 使

$$f'(\xi)f'(\eta) = \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2$$

**证明:** 令  $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ,  $h(x) = [f(x) - f(a)]^2 - k^2(x - a)^2$

$$h'(x) = 2[f(x) - f(a)]f'(x) - 2k^2(x - a)$$

因为  $f(a) = f(b) = 0$ , 由 Rolle 中值定理知  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$h'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = k^2 \cdot \frac{\xi - a}{f(\xi) - f(a)}$$

又由 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\eta), \quad \eta \in (a, \xi)$$

所以

$$f'(\xi)f'(\eta) = \left( \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2$$

**命题 1.4.7** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  上可微, 证明:  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ , 使

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$$

其中,  $c \in (0, 1)$

**证明:** 令  $F(x) = x^2 f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$ , 则有

$$F(1) - F(0) = c^2 f(1) + (1 - c^2)f(0)$$

$F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 由介值定理得,  $\exists \xi \in (0, 1)$

$$f(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1) - F(0)$$

又由 Lagrange 中值定理知,  $\exists \xi \in (0, 1)$

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta)$$

即

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$$

**命题 1.4.8** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  上可微,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ ,  $\xi \neq \eta$ , 使得

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

**证明:** 令  $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ , 则  $F(0) = F(1) = 0$

若  $F\left(\frac{1}{2}\right) = F(0) = F(1) = 0$ , 则存在  $\xi, \eta \in (0, 1)$ ,  $\xi \neq \eta$

$$F'(\xi) + F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

若  $F\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ , 不妨设  $F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ ,  $\xi \neq \eta$

$$\frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = F'(\xi) = -2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2} - 0} = F'(\eta) = 2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

则

$$F'(\xi) + F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

**命题 1.4.9** 设函数  $f(x), g(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  上可微, 且  $f(0) = g(0) = f(1) = 0$ ,  $g'(x) \neq 0$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$ ,  $\xi < \eta$  使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

**证明:**  $g(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 则存在  $\alpha \in (0, 1)$ , 使得

$$g(\alpha) = \frac{1}{2}[g(1) + g(0)]$$

由 Lagrange 中值定理得,  $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{g(\alpha) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(1) - f(\alpha)}{g(1) - g(\alpha)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

则

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

**命题 1.4.10** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  二阶可微, 且满足  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = -2$ ,  $f(1) = 1$ , 证明:  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f(\xi) + f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

**证明:** 定义函数  $g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$ , 则

$$g'(x) = f(x)f'(x) + f''(x)$$

因为  $g(0) = 0$ , 所以只需证明  $\exists \eta \in (0, 1]$ , 使得  $g(\eta) = 0$

(1) 若  $f$  无零点, 则令

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}$$

因为  $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$ , 所以存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$h'(\eta) = 0$$

又由  $g(x) = f^2(x)h'(x)$ , 所以

$$g(\eta) = 0$$

(2) 若  $f$  至少有一个零点, 令  $z_1$  为第一个零点,  $z_2$  为最后一个零点, 由题设知,  $0 < z_1 \leq z_2 < 1$  函数  $f$  在区间  $[0, z_1]$ ,  $[z_2, 1]$  上是正的, 这表明

$$f'(z_1) \leq 0, \quad f'(z_2) \geq 0$$



所以

$$g(z_1) = f'(z_1) \leq 0, \quad g(z_2) = f'(z_2) \geq 0$$

则存在  $\eta \in [z_1, z_2]$ , 使得

$$g'(\eta) = 0$$

**命题 1.4.11** 设函数  $f(x)$  可导, 曲线  $y = f(x)$  上存在三点  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$  共线, 其中  $0 < x_1 < x_2 < x_3$ , 证明:  $\exists \xi, \eta \in (x_1, x_3)$ , 使得

$$\xi f'(\eta) - f(\xi) = \eta f'(\eta) - f(\eta)$$

**证明:** 若  $\xi = \eta$  则结论显然成立。

$\xi \neq \eta$  时, 问题等价于

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

因为三点共线, 所以存在  $\alpha, \beta \in (x_1, x_3)$ ,  $\alpha \neq \beta$

$$f'(\alpha) = f'(\beta)$$

又由 Flett 中值定理得,  $\exists \xi, \eta \in (x_1, x_3)$

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\alpha)}{\eta - \alpha} = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

**命题 1.4.12** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的连续函数, 且  $f$  在  $(0, 1)$  上可微,  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 证明: 存在点列  $\{\alpha_k\}$ , 使得

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

**证明:** 由介值定理知, 存在  $n$  个实数  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , 其中

$$0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$$

且

$$f(b_i) = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

由 Lagrange 中值定理知, 对于任意区间  $[b_i, b_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\exists \alpha_i \in (b_{i-1}, b_i)$

$$f'(\alpha_i) = \frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \frac{1}{n(b_i - b_{i-1})}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\alpha_i)} = n \sum_{i=0}^n (b_i - b_{i-1}) = n(b_n - b_0) = n$$

**命题 1.4.13** 设  $f$  在  $[a, b]$  上  $n+1$  阶可微,  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 在  $[a, b]$  上有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{n+1}$$

**证明:** 分别将  $f(x)$  在  $x = x_0$  处展开为  $n+1$  阶 Peano 余项的 Taylor 公式和  $n-1$  阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x) = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}$$

两式相减有

$$\frac{(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{\xi - x_0} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

两边对  $x$  取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{n+1}$$

**命题 1.4.14** 设  $\mathbb{R}$  上的函数  $f$  有任意阶导数, 并且对于任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $C_k > 0$  使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|x|^k |f(x)| + |f^{(k)}(x)|) \leq C_k$$

证明: 对于任意  $k, l \in \mathbb{N}$ , 存在  $C_{k,l} > 0$  使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| \leq C_{k,l}$$

**证明:** 观察到, 问题可以约化为证明: 对于任意  $k \in \mathbb{N}^+$ , 存在  $D_k > 0$ , 对于任意绝对值大于 2 的数  $x \in \mathbb{R}$ , 成立

$$|x|^k |f'(x)| \leq D_k$$

任意给定  $\varepsilon > 0$ , 由 Taylor 定理知, 存在  $\theta \in (0, 1)$ , 使得

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x + \theta\varepsilon)\varepsilon^2$$

于是我们有

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x + \varepsilon)| + |f(x)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}|f''(x + \theta\varepsilon)|\varepsilon$$

将  $\varepsilon = \frac{1}{|x|^k}$  代入上式, 并利用已知条件, 得到

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot |x|^{2k}(|f(x)| + |f(x + |x|^{-k})|) \\ &\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + C_{2k}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot (2|x + |x|^{-k}|)^{2k}|f(x + |x|^{-k})| \\ &\leq \left(\frac{C_2}{2} + (2^{2k} + 1)C_{2k}\right)|x|^{-k} \end{aligned}$$

取  $D_k = \frac{C_2}{2} + (2^{2k} + 1)C_{2k}$ , 即证。

## §5 数项级数

**命题 1.5.1** 设  $\{a_n\}$  是严格单调增加的实数列, 且  $a_n \leq n^2 \ln n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$$

**证明:** 反证法。假设级数收敛, 则由  $a_1 \leq 1^2 \ln 1 \leq 0$ , 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a}{4k})} \\ &\leq +\infty \end{aligned}$$

这意味着  $\exists k \in \mathbb{N}$ , 使

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a}{4k})}$$

同时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right) \left( \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{n+1} - a_n \right) \\ &\geq \left( \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \right)^2 = (2^k - 2^{k-1})^2 = 4^{k-1} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a_1}{4k})} &> \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \\ &\leq \frac{4^{k-1}}{\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} (a_{n+1} - a_n)} \\ &= \frac{4^{k-1}}{a_{2^k} - a_{2^{k-1}}} \\ &\geq \frac{4^{k-1}}{a_{2^k} - a_1} \end{aligned}$$

其中

$$a_{2^k} - a_1 > 4^k \left( \ln 2 \cdot k - \frac{a_1}{4k} \right) = 4^k \ln 2^k - a_1$$

则

$$a_{2^k} > (2^k)^2 \ln 2^k$$

与题设矛盾。

**命题 1.5.2** 设  $\{a_n\}$  使单调减少收敛于 0 的实数列, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$$

当且仅当  $a_n = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}\right)$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \ln n$

**证明:** 令

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n}, \quad T_N = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) \ln n$$

因为  $\{a_n\}$  单调减少收敛于 0, 且  $S_n, T_n$  单调增加, 则假设  $\{S_n\}, \{T_n\}$  收敛,  $S, T$  分别为其极限, 注意到

$$\ln n - \ln n - 1 = \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \in \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right)$$

(1) 如果  $S_N < \infty, N \geq 2$  时,

$$\begin{aligned}
a_N \ln N &\leq a_N \sum_{n=2}^{\infty} [\ln n - \ln(n-1)] \\
&\leq a_N \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} \\
&= S_{n-1} \\
&\leq S
\end{aligned}$$

这表明  $a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ , 同时

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) \ln n \\
&= \sum_{n=2}^N a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N+1} a_n \ln(n-1) \\
&= \sum_{n=2}^N [a_n (\ln n - \ln(n-1))] - a_{N+1} \ln N \\
&\leq \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^N \frac{a_{n-1}}{n-1} \\
&= S_{n-1} \\
&\leq S
\end{aligned}$$

即  $T < \infty$

(2) 如果  $T < \infty$ , 且  $a_N \ln N \leq M$ ,  $N \geq 2$  时

$$\begin{aligned}
S_N - a_1 &= \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{n} \\
&\leq \sum_{n=2}^N a_n (\ln n - \ln(n-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^N a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N-1} a_{n+1} \ln n \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \ln n + a_N \ln N \\
&= T_{N-1} + a_N \ln(N+1) \\
&< T + M
\end{aligned}$$

即  $S < \infty$

**命题 1.5.3** 对  $N \in \mathbb{N}$ , 定义

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{n+2} + \frac{n-2}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2}$$

**证明:** 设数列  $\{a_k\}$ , 其中  $a_k$  为  $S_n$  中的第  $k$  项, 则当  $k \geq 2$  时有

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \cdots (n+k)} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n+k)!} = \frac{(2n)!(n-1)!}{(n+k)!(2n)!} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n+k)!} = \frac{(2n)!(n-1)!}{(n+k)!(2n)!} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\
&= \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}}
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n-1}} \\
&= \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2 \binom{2n}{n-1}} \\
&= \frac{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}{2(2n)!} - \frac{n+1}{2^n}
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{n+1}{n} \frac{2^{2n}(n!)^2}{2(2n)!\sqrt{n}} - \frac{n+1}{2^n \sqrt{n}}$$

由 Waills 公式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**命题 1.5.4** 设  $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ , 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}$$

**证明:** 令  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 则有  $a_n = b_n - b_{n-1}$ .

再令  $b_n = 0$ , 于是原级数部分和  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2}$  有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2(b_k - b_{k-1})}{b_k^2} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{k^2(b_k - b_{k-1})}{b_k b_{k-1}} + \frac{1}{a_1} \\ &\leq \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{b_{k-1}} - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{b_k} \\ &= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{b_k} \\ &= \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{k}{b_k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{b_k} \\ &= \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{k}{b_k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \right)^2 &= \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{k\sqrt{a_k}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) \right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \\ &= S_n T_n \end{aligned}$$

$$\text{其中 } T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

则有

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_n T_n} + T_n \\ &\leq \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_n T} + T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n - 2\sqrt{S_n T} + T &\leq \frac{1}{a_1} + 2T \\
(\sqrt{S_n} - \sqrt{T})^2 &\leq \frac{1}{a_1} + 2T \\
S_n - \sqrt{T} &\leq \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T} \\
S_n &\leq \sqrt{T} + \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T}
\end{aligned}$$

所以  $S_n$  有上界, 则原级数收敛。

**命题 1.5.5** 设  $a_n > 0$ , 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$$

收敛

**证明:**

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\
&= \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\
&\quad \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\
&\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\
&\quad \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} \\
&\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-2})} \\
&\dots \\
&\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

部分和有上界, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$  收敛。

**命题 1.5.6**  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$



(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$  收敛, 且和为

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**证明:** (1) 设  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 特别地  $S_0 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} &= \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n k(S_k - S_{k-1})}{n} \\ &= \frac{nS_n - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1})}{n} \\ &= S_n - \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

由 Cauchy 命题知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(2)

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n + (n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}$$

设  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 则原级数有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} + a_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k+1} + b_1 + b_{n+1} \\ &= S_n - a_1 + b_1 - b_{n+1} \\ &= S_n - b_{n+1} \end{aligned}$$

取极限  $n \rightarrow \infty$ , 则原级数收敛, 且和为  $S$ 。

**命题 1.5.7** 若正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛, 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

收敛。

**证明:** (1) 若数列  $\{a_n\}$  单调增加, 则有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \leq na_n$$

因此有不等式

$$\frac{2n-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}} \leq \frac{2n-1}{a_n} + \frac{2n}{na_n} \leq \frac{4}{a_n}$$

所以部分和有上界, 级数收敛。

(2) 对于一般情况, 将  $\{a_n\}$  按照升序排列, 重排后的数列可记为  $\{b_n\}$ , 收敛的正项级数重排后仍收敛, 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  收敛。由 (1) 知道  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$  收敛, 同时可以看出, 有

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$  收敛。

**命题 1.5.8** 证明: 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$

- (1) 在  $x = e$  处收敛。
- (2) 在任意有理点收敛。
- (3) 在任意区间内存在发散点。

**证明:** (1)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!} + (n+1) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$$

则有

$$\sin(n!\pi x) = \sin \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + (n+1) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} \right]$$

$$\sim (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$  显然收敛, 所以  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$  在  $x = e$  处, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi e)$$

收敛。

(2) 有理点  $x = \frac{p}{q}$ , 则当  $n \geq q$  时,

$$n!\pi x = n!\pi \frac{p}{q} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

则

$$\sin(n!\pi x) = 0, \quad n \geq q$$

显然  $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$  收敛。

(3) 注意到  $\forall x \in [0, 1]$ , 可以被表示为如下形式

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

又由  $x$  的展开形式得

$$\sin(n!\pi x) = (-1)^{na_{n-1}+a_n} \sin\left(\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)$$

由观察得

$$|\sin(n!\pi x)| = \left| \sin\left(\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right) \right|$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{a_{n+1}+1}{n+1}$$

将  $a_k$  看作在  $\{0, 1, \dots, k-1\}$  上的随机变量, 是  $x$  的函数, 且  $a_k$  相互独立, 所以由 Borel - Cantelli 定理知

$$\sum_{k=2}^{\infty} P\left(\left|\frac{a_k}{k} - \frac{1}{2}\right|\right) = +\infty$$

则  $\frac{1}{2} < \frac{a_k}{k} < \frac{1}{4}$ , 对无限  $k \in \mathbb{N}$  成立

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\sin(n!\pi x)| \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

对几乎所有  $x \in [0, 1]$  成立, 又  $x \in M$  不满足上式, 其中  $M$  为收敛点集合, 所以  $M$  为勒贝格集, 不包含任何区间。

**命题 1.5.9** 设函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  满足  $f(x) > 0$ ,  $f''(x) \leq 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . 证明极限

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)}$$

收敛并求其值。

**命题 1.5.10** 由  $f''(x) \leq 0$  知,  $f'(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递减, 容易看出  $f'(x)$  恒正. 事实上若存在  $x_0$ ,  $f'(x_0) \leq 0$ , 则由单调性知

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \geq x_0$$

与  $f(+\infty) = +\infty$  矛盾. 因此  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  严格单调增加. 设

$$S_{2n}(s) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} \right)$$

注意和式中每个括号都是负的且级数通项收敛于 0, 只需要证明对固定的  $s > 0$ ,  $S_{2n}(s)$  有下界, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(s)$$

存在且等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)}$$

由 Lagrange 中值定理知,

$$\frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} = \frac{-sf'(\xi)}{f^{(s+1)}(\xi)}, \quad \xi \in (2k-1, 2k)$$

注意到  $f(x)$  单调增加而  $f'(x)$  单调减少, 则有

$$\frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} \leq \frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} \leq \frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} \leq S_{2n}(s) \leq \sum_{k=1}^n \frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}$$

利用面积原理的思想来估计左右两端. 由单调性知  $k \geq 2$  时

$$\frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} \leq \frac{1}{2} \int_{2k-3}^{2k-1} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} \leq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{-1}{sf^{(s)}(t)} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{2sf^{(s)}(1)}$$

$S_{2n}(s)$  有下界故极限存在。再次利用面积原理知  $k \leq 1$  时

$$\begin{aligned}\frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} &\geq \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt \\ \sum_{k=1}^n \frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} &\geq \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{-1}{s f^{(s)}(t)} \right|_2^{+\infty} = \frac{1}{2s f^{(s)}(2)} \\ -s \left( \frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)} + \frac{1}{2s f^{(s)}(1)} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(s) \leq -s \frac{1}{2s f^{(s)}(2)}\end{aligned}$$

由前面说明就有

$$-s \left( \frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)} + \frac{1}{2s f^{(s)}(1)} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)} \leq -s \frac{1}{2s f^{(s)}(2)}$$

而上市左右两端在  $s \rightarrow 0^+$  时的极限都是  $-\frac{1}{2}$ , 所以

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)} = -\frac{1}{2}$$

## §6 黎曼积分

**命题 1.6.1** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 且对任意满足  $\int_a^b g(x)dx$  的连续函数  $g(x)$  有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

证明:  $f(x)$  是常值函数。

**证明:** 设  $g(x) = f(x) - \int_a^b f(x)dx$

因为

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0$$

又有

$$\begin{aligned}\int_a^b g^2(x)dx &= \int_a^b g(x) \left[ f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right] dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \int_a^b f(x)dx \\ &= 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

则知  $g(x) = 0$ , 即

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$$

**命题 1.6.2** 设  $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$$

**证明:** (核函数方法) 设  $K_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}$ , 显然有

$$\int_{-1}^1 K_n(x) dx = 1$$

且  $x \neq 0$  时有  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $n > N$  时有

$$|K_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $|x| < \delta$  时

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 K_n(x) dx - \int_{-1}^1 f(0) K_n(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x) - f(0)| K_n(x) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(0)| K_n(x) dx + \int_{-1}^{-\delta} |f(x) - f(0)| K_n(x) dx + \int_{\delta}^1 |f(x) - f(0)| K_n(x) dx \\ &\leq \varepsilon + 4M\varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$$

**命题 1.6.3**  $0 < a < b$ ,  $f: [a, b] \rightarrow [-1, 1]$ , 满足  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 证明:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{f(x)}{x} + kf(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left( \frac{1}{x} + k \right) dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \end{aligned}$$

其中  $k$  为实数, 显然当  $k = -\frac{2}{a+b}$  时, 上式积分最小, 即

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \\ &= \int_a^b \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{a+b} \right| dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{x} - \frac{2}{a+b} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{2}{a+b} - \frac{1}{x} dx \\ &= \ln \frac{(a+b)^2}{4ab} \end{aligned}$$

**命题 1.6.4** 设函数  $f$  为  $[0, 1]$  上的单调增加函数,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , 证明:

$$\int_0^1 f(f(x)) dx \leq 2 \int_0^1 f(x) dx$$

**证明:** 设  $f$  与  $y = x$  的交点为  $x_1, x_2, \dots, x_n$

任意区间  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  上, 若  $f(x) < x$ , 则

$$f(f(x)) \leq f(x)$$

即

$$\int_{x_i}^{x_{i+1} f(f(x))} dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1})) dx \leq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

若  $f(x) \geq x$ , 则  $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$

$$2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \geq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} x dx = x_{i+1}^2 - x_i^2$$

$$2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x)) dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1})) dx = x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

则

$$\int_0^1 f(f(x)) dx \leq 2 \int_0^1 f(x) dx$$

**命题 1.6.5** 设  $f, g$  是  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  的连续函数, 且  $f$  单调增加, 证明:

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

**证明:** 设  $h(x) = f(x) - x$ ,  $h(t) = \max_{x \in [0, 1]} h(x) = f(t) - t$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(g(x))dx - \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \\ & \leq f(t) - t - \int_0^1 f(x)dx \\ & = \int_0^1 [f(t) - f(x)]dx - t \\ & \leq t - t = 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

**命题 1.6.6** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$

**证明:**

$$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$$

**证明:**

$$\begin{aligned} \int_a^b x(f(x) - g(x))dx &= a \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx + b \int_\eta^b (f(x) - g(x))dx \\ &= a \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx - b \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx \\ &= (a - b) \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx \end{aligned}$$

其中  $\eta \in [a, b]$ 。由题设知,  $\int_a^\eta (f(x) - g(x))dx < 0$ , 则

$$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$$

**命题 1.6.7** 设  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数, 且  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 证明:

$$2 \left( \int_0^1 xf(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 (1 - x^2)f^2(x)dx$$



证明:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 &= \left(\int_0^1 (x-1)f(x)dx\right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{1-x^2}dx\right) \left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx\right) \\ &= (2\ln 2 - 1) \left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx\right)\end{aligned}$$

所以

$$2 \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)dx$$

**命题 1.6.8** 设  $f$  是  $[-1, 1]$  上的连续函数, 证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 xf(x)dx\right)^2$$

**证明:** 令  $M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x)dx$ ,  $g(x) = f(x) - M$ , 则有

$$\int_{-1}^1 \lambda g(x)dx = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f^2(x)dx &= \int_{-1}^1 (g(x) + M)^2dx \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x) + M^2dx \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x)dx + \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2\end{aligned}$$

因为  $\int_{-1}^1 Mx dx = 0$ , 所以

$$\int_{-1}^1 g^2(x)dx \geq \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 xg(x)dx\right)^2 \geq \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 xf(x)dx\right)^2$$

则有

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)dx\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 xf(x)dx\right)^2$$

**命题 1.6.9** 设  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  是有连续导数的可微函数, 且  $f(1) = 0$ , 证明:

$$4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx\right)^2$$

**证明:** 令  $c = \int_0^1 f(x)dx$ , 不失一般性地, 我们假设

$$\int_0^1 (f(x) + c)^2 dx > 0$$

否则  $f(x) \equiv -c$ , 即

$$f(x) \equiv 0$$

此时不等式显然成立. 应用分部积分法有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(x) + c)dx \\ &= [x(f(x) + c)^2] \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x(f(x) + c) - f'(x)dx \\ &= c^2 + 2 \int_0^1 x(f(x) + c) - f'(x)dx \end{aligned}$$

因为  $f(1) = 0$ , 应用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) + c|^2 dx - c^2 &\leq 2 \sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx} \\ \sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx} - \frac{c^2}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} &\leq 2 \sqrt{\int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx} \end{aligned}$$

两边平方得

$$\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx - 2c^2 + \frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} \leq 4 \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) + c|^2 dx &= \int_0^1 f^2(x)dx + 2c \int_0^1 f(x)dx + c^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x)dx + 3c^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x)dx + 3 \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 f(x)dx \right)^2 + \frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} \leq 4 \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx$$

由  $\int_0^1 (f(x) + c)^2 dx > 0$  得

$$4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left( \int_0^1 |f(x)|dx \right)^2$$

**命题 1.6.10** 设  $f$  是定义在  $[0, 1]$  上的连续可微函数, 证明:

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

**证明:** 设  $x_0 \in [0, 1]$ , 且

$$|f(x_0)| \leq |f(x)|, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

则有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f'(x) dx \\ \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= |f(x_0)| + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx \end{aligned}$$

由  $|f(x_0)| \leq |f(x)|, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  得

$$|f(x_0)| \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx$$

又有

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx$$

对于  $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 有不等式

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)| dx$$

所以有

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

**命题 1.6.11** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的连续实值函数, 且  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 证明:  $\exists c \in (0, 1)$

$$c^2 f(c) = \int_0^c (x^2 + x) f(x) dx$$

**证明:** 令

$$F(x) = \int_0^x [t^2 + (1-x)t] f(t) dt$$

因为  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 则  $F$  在  $[0, 1]$  上存在最大值, 最小值。设

$$M = \max f(x) = f(x_M), \quad m = \min f(x) = f(x_m)$$

由题设  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , 则不妨设  $f$  不恒等于 0, 否则不等式显然成立。  
所以

$$M > 0, \quad m < 0$$

令  $a = x_M$ , 有

$$F'(a) = Mx_M - M \int_0^{x_M} t dt = Mx_M \left(1 - \frac{x_M}{2}\right) > 0$$

同理可知  $\exists b \in (0, 1), F'(b) < 0$

由介值定理知  $\exists d \in (a, b)$ , 使  $F'(d) = 0$

又由 Rolle 中值定理知,  $\exists c \in (0, d)$

$$F(c) - F(0) = cF'(c)$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^c [t^2 + (1-c)t]f(t)dt &= c^2 f(c) - c \int_0^c t f(t)dt \\ c^2 f(c) &= \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx \end{aligned}$$

**命题 1.6.12** 设  $f$  是  $[0, 1]$  上的连续可微函数,  $b > 0$ , 且  $f(0) = 0$ , 证明:

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^b (f'(x))^2 dx$$

**证明:** 应用分部积分法, 有

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx = - \left( \frac{f(x)}{x^2} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \right)$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)f(x) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx &= -\frac{f^2(b)}{b} + 2 \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \\ &\leq 2 \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \\ &\leq 2 \left( \int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \cdot \int_0^b (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^b (f'(x))^2 dx$$

**命题 1.6.13** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  是可微函数, 且对于常数  $k$ , 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leq k|x - y|$$

其中  $x, y \in \mathbb{R}$ , 证明:

$$(f'(x))^2 < 2kf(x)$$

**证明:** 由题设知  $f'$  是连续函数, 因此  $f'$  黎曼可积, 对于  $d \geq 0$ , 有

$$\begin{aligned} 0 < f(x+d) &= f(x) + \int_x^{x+d} f'(t) dt \\ &= f(x) + df'(x) + \int_x^{x+d} (f'(t) - f'(x)) dt \\ &\leq f(x) + df'(x) + \int_x^{x+d} k(t-x) dt \\ &= f(x) + df'(x) + \frac{1}{2}kd^2 \end{aligned}$$

对于  $d < 0$ , 有

$$\begin{aligned} \int_x^{x+d} f'(t) dt &= - \int_{x+d}^x f'(t) dt \\ &\leq - \int_{x+d}^x k(t-x) dt \\ &= \frac{k}{d^2} \end{aligned}$$

特别地, 令  $d = -\frac{f'(x)}{k}$ , 有

$$0 < f(x) - \frac{(f'(x))^2}{k} + \frac{(f'(x))^2}{2k} = f(x) - \frac{(f'(x))^2}{2k}$$

所以

$$(f'(x))^2 < 2kf(x)$$

**命题 1.6.14** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的连续实值函数, 且

$$\int_0^{+\infty} f^2(x) dx < \infty$$

证明: 函数

$$g(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

**证明：** 由题设得

$$f(x) - g(x) = 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

则有

$$(f(x) - g(x))' = -2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + 2f(x) = f(x) + g(x)$$

应用 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} e^{-w} \left| \int_0^w e^t f(t) dt \right| &\leq e^{-w} \left| \int_0^{\frac{w}{2}} e^t f(t) dt \right| + e^{-w} \left| \int_{\frac{w}{2}}^w e^t f(t) dt \right| \\ &\leq e^{-w} \left( \int_0^{\frac{w}{2}} e^{2t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\frac{w}{2}} f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + e^{-w} \left( \int_{\frac{w}{2}}^w e^{2t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{w}{2}}^w f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{-\frac{w}{2}} \int_0^{+\infty} f^2(t) dt + \int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} f^2(t) dt \end{aligned}$$

则有

$$\lim_{w \rightarrow \infty} e^{-w} \int_0^w e^t f(t) dt = 0$$

则  $\frac{1}{2}(f(x) - g(x))^2$  在  $[0, a]$  ( $\forall a \in \mathbb{R}^+$ ) 上必定有界连续, 则

$$\begin{aligned} \int_0^w f^2(x) - g^2(x) dx &= \int_0^w \left( \frac{(f(x) - g(x))^2}{2} \right)' dx \\ &= \frac{(f(x) - g(x))^2}{2} \Big|_0^w \\ &= 2^{-2w} \left( \int_0^w e^t f(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w f^2(x) - g^2(x) dx &= \int_0^{+\infty} f^2(x) - g^2(x) dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} 2^{-2w} \left( \int_0^w e^t f(t) dt \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

**命题 1.6.15** 设  $f$  是周期为  $T$  的连续函数, 且  $\int_0^T f(x)dx = 0$ , 证明:

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

**证明:** 由题设知,  $f$  可以展开为 Fourier 级数,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

易知  $a_0 = 0$ , 又

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{T} b_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) - \frac{2n\pi}{T} a_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

由 Parseval 恒等式知

$$\begin{aligned} \int_0^T |f'(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2\pi^2}{T^2} (a_n^2 + b_n^2) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{T^2} (a_n^2 + b_n^2) \\ \int_0^T |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

**命题 1.6.16** 设  $f$  在  $[0, a]$  ( $a > 0$ ) 上有可积的导函数, 证明:

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)| dx + \int_0^a |f'(x)| dx$$

**证明:** 对任意  $x \in [0, a]$ , 有

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t) dt \\ f(0) &= f(x) - \int_0^x f'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq |f(x)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(x)| + \int_0^a |f'(t)| dt \end{aligned}$$

两边对  $x$  从 0 到  $a$  积分, 得

$$a|f(0)| \leq \int_0^a |f(x)|dx + a \int_0^a |f'(x)|dx$$

即

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx$$

**命题 1.6.17** 设  $f$  在  $[0, 1]$  上有可积的导函数, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)|dx, \left| \int_0^1 f(x)dx \right| \right\}$$

**证明:** 若

$$\int_0^1 |f'(x)|dx = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|$$

则不等式显然成立若

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| < \int_0^1 |f'(x)|dx$$

则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上一定变号, 所以存在  $x_0 \in [0, 1]$ ,  $f(x_0) = 0$ , 则

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0)| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f'(t)dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f'(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(x)|dx \end{aligned}$$

则

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx$$

**命题 1.6.18** 函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  是  $[0, 1]$  上的可导函数, 且

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

证明: 在  $[0, 1]$  上存在不同的两点  $\xi$ ,  $\eta$ , 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)(f(\eta) - f(\xi))$$



**证明：** 反证法。设  $\forall x, y \in [0, 1], x \neq y$ , 有

$$f'(x) \neq g'(x)(f(y) - f(x))$$

不妨设

$$f'(x) > g'(x)(f(y) - f(x))$$

否则由 Darboux 定理知, 必存在不同的两点  $x, y$  使得

$$f'(x) = g'(x)(f(y) - f(x))$$

令  $y \rightarrow x$ , 有

$$\lim_{y \rightarrow x} f'(x) = f'(x) \geq \lim_{y \rightarrow x} g'(x)(f(y) - f(x)) = 0$$

由  $x$  的任意性知,  $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ , 则由题设

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$$

然而由于  $f'(x) \geq 0$

$$2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx \geq \int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx$$

与假设矛盾。得证。

**命题 1.6.19** 设  $f'(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

**证明：** 设  $x, x_0$  是  $[a, b]$  上两点, 则有

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

所以

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| f(x) - \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \int_{x_0}^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(x)| + \int_a^b |f'(t)| dt \end{aligned}$$

两边对  $x$  从  $a$  到  $b$  积分得

$$(b-a)|f(x_0)| \leq \int_a^b |f(x)|dx + (b-a) \int_a^b |f'(t)|dt$$

即

$$|f(x_0)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)|dx$$

由  $x_0$  的任意性知

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)|dx$$

### 定理 1.6.1

$$\iiint_{\Omega} f(ax+by+cz)d\Omega = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2)f(\delta u)du$$

其中, 积分区域  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $\delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

**证明:** 设平面  $P_u$

$$ax + by + cz = \delta u$$

与原点的距离为  $u$ , 且  $-1 \leq u \leq 1$ 。

平面  $P_{u+du}$

$$ax + by + cz = u + du$$

与平面  $P_u$  之间所夹的体元为

$$\begin{aligned} \int_u^{u+du} \pi(\sqrt{1-u^2})^2 du &= \pi \int_u^{u+du} (1-u^2)du \\ &= \pi \left( u - \frac{1}{3}u^3 \right) \Big|_u^{u+du} \\ &= \pi \left[ du - \frac{1}{3}((u+du)^3 - u^3) \right] \\ &= \pi(1-u^2)du \end{aligned}$$

所以原积分可化为

$$\pi \int_{-1}^1 (1-u^2)f(\delta u)du$$

### 定理 1.6.2

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\delta u)du$$

其中, 积分曲面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $\delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 。

**证明：** 存在一个正交矩阵  $A$ ，将  $(x, y, z)$  转换为  $(u, v, w)$ ，即

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

且  $A$  的第一行为

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\delta} & \frac{b}{\delta} & \frac{c}{\delta} \end{pmatrix}$$

又因为矩阵  $A$  为正交矩阵，则

$$|A| = 1$$

所以原积分可应用坐标变换得

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax + by + cz) dS &= \iint_S f(\delta u) dS \\ &= 2 \iint_D f(\delta u) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} du dv \\ &= 2 \iint_D f(\delta u) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} du dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \cdot 2 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \cdot 2 \arcsin \left( \frac{v}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(\delta u) du \end{aligned}$$

**命题 1.6.20** 证明：

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi)} \sin \theta d\theta$$

**证明：** 设曲面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，应用球面坐标系，易知

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \cos \theta$$

其中,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 。

应用定理1.6.2, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi)} \sin \theta d\theta &= \oiint_S e^{x-y} dS \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{2}u) du \\ &= \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

**命题 1.6.21** 设  $f(x)$ ,  $g(x)$  是  $[0, 1]$  上的恒正连续函数, 且  $f(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  单调增加。

证明:

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

**证明:** 由  $f(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  单调增加知,  $\forall m, n \in \mathbb{R}$ , 有

$$(f(m) - f(n)) \left( \frac{f(m)}{g(m)} - \frac{f(n)}{g(n)} \right) \geq 0$$

对上式关于  $m, n$  从 0 到  $x$  积分, 得

$$x \int_0^x g(t) dt \geq \int_0^x f(t) dt \int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt$$

其中,  $x > 0$ , 则有

$$\frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt} \geq \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt}$$

由 Hölder 不等式得

$$\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt \int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt \geq \frac{x^4}{4}$$

所以

$$\frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \leq 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} dx \leq \int_0^1 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3} dx$$

其中

$$\int_0^1 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3} dx = \int_0^1 \int_t^1 \frac{f(t)t^2}{g(t)} \frac{4}{x^3} dx dt = 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} (1 - t^2) dt$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} dx &\leq 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} (1-t^2) dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

**命题 1.6.22** 证明:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$$

**证明:** 易知

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+m+1} &= \int_0^1 x^{k+m} dx \\ \frac{1}{k+n+1} &= \int_0^1 x^{k+n} dx\end{aligned}$$

原等式左边有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} &= \sum_{k=0}^n \left[ (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k+m} dx \right] \\ &= \int_0^1 \left[ x^m \sum_{k=0}^n \left[ (-1)^k \binom{n}{k} x^k \right] \right] dx \\ &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx\end{aligned}$$

同理, 原等式右边有

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1} = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

易证

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

即

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$$

**定理 1.6.3 (Frullani 定理)** 设函数  $f(x)$  是  $[0, \alpha]$  上的连续函数, 且对任意的  $\beta, \int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  存在。则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

**证明:** 对任意的  $\beta$  有

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^T \frac{f(ax)}{x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{a\beta}^{aT} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{a\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

同理

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{b\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(x)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx$$

又

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = f(0) \int_a^b \frac{1}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

**命题 1.6.23** 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx$$

**证明:** 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( \frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{x^4} \right) = \frac{2}{3}$$

知存在常数  $C > 0$ , 使得

$$\left| \frac{x \sin^4 nx}{\sin^4 x - \frac{\sin^4 nx}{x^3}} \right| \leq C \frac{\sin^4 nx}{x} \leq Cn, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x^3} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^3 x \cos x}{x^2} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{6 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^4 x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} dx
\end{aligned}$$

由 Frullani 公式知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} dx = \ln 2$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left( \frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx = \ln 2$$

**命题 1.6.24** 设函数  $f \in C^1[0, 1]$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

**证明:**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k) \left(x - \frac{k}{n}\right) dx
\end{aligned}$$

因为  $f \in C^1[0, 1]$ , 所以在  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  中, 存在  $m_k, M_k$ , 使得

$$m_k \leq f'(x) \leq M_k$$

因此有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} m_k \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} m_k \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^n -m_k \cdot \frac{1}{2n^2} \\
&= -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n m_k
\end{aligned}$$

同理

$$\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geq -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n M_k$$

两边对  $n$  取极限, 由黎曼积分性质可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

**命题 1.6.25** 设函数  $f \in C^1[0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 1]$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\left(\theta - \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(0))$$

**证明:**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) &= \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] \\
&\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\frac{1}{n}(\theta - 1) \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)
\end{aligned}$$

其中,  $\xi_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  对  $n$  取极限, 由黎曼积分性质可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -(\theta - 1)(f(1) - f(0))$$

综上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\left(\theta - \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(0))$$



**命题 1.6.26** 设函数  $f \in C[0, 1]$ , 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(1)}{n} = M$$

其中  $M$  为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值。证明:  $f(x) \equiv M$ 。

**证明:** 反证法。设  $\exists x_0 \in [0, 1]$ ,  $f(x_0) = y < M$ , 则由函数连续性可知,  $\exists \delta > 0$ ,  $|x - x_0| < \delta$  时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

其中  $\varepsilon = \frac{M - y}{2}$ , 又由黎曼积分性质知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(1)}{n} = \int_0^1 f(x) dx = M$$

然而

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx < 2\delta \frac{M + y}{2} = \delta(M + y) < 2M\delta$$

所以

$$\int_0^1 f(x) dx < M$$

与题设矛盾。得证。

**命题 1.6.27** 设非负函数  $f(x) \in C[0, 1]$ , 且在  $[0, 1]$  上是单调递增的, 记

$$s = \frac{\int_0^1 xf(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$$

(1) 证明:  $s \geq \frac{1}{2}$ ;

(2) 试比较  $\int_0^s f(x) dx$  与  $\int_s^1 f(x) dx$  的大小。

**证明:** (1) 由题设, 即证

$$\int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2}) f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2}) f(x) dx \end{aligned}$$

由积分中值定理可得,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})f(x)dx &= -\frac{1}{8}f(\xi_1) \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})f(x)dx &= \frac{1}{8}f(\xi_2)\end{aligned}$$

其中,  $0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1$ , 再由  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 可知

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) \geq 0$$

即

$$s \geq \frac{1}{2}$$

(2) 因为  $f(x) \in C[0, 1]$ , 则  $f'(x) \geq 0$ , 考虑变上限积分

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

显然  $F''(x) = f'(x) \geq 0$ , 因此  $F(x)$  的图像是下凸的且  $F(x) \geq 0$ . 不妨设

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

则  $F(1) = 1$ ,  $F(0) = 0$ . 由题设知, 即证

$$F(s) = \int_0^s f(x)dx \leq \int_s^1 f(x)dx = F(1) - F(s)$$

也即  $F(s) \leq \frac{1}{2}$ .

由几何直观,  $x = s$  处的切线 (斜率  $k > 0$ )

$$y = k(x - s) + F(s)$$

在函数  $y = F(x)$  的下方, 即

$$F(x) \geq k(x - s) + F(s)$$

利用  $f(x)$  的非负性得

$$F(x)f(x) \geq k(x - s)f(x) + F(s)f(x)$$

不等式两边从 0 到 1 积分得

$$\text{左边} = \int_0^1 F(x)f(x)dx = \int_0^1 F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{右边} = \int_0^1 k(x - s)f(x)dx + \int_0^1 F(x)f(x)dx = (ks - ks) + F(s) = F(s)$$

所以  $F(s) \leq \frac{1}{2}$ , 即

$$\int_0^s f(x)dx \leq \int_s^1 f(x)dx$$

**命题 1.6.28** 设  $f(x) \in C^2[0, 1]$ , 且满足  $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$ ,  $f'(1) = 1$

证明:  $\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 4$  并指出不等式中等号成立的条件。

**证明:** 显然

$$\int_0^1 (f''(x) + ax + b)^2 dx \geq 0$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f''(x) + ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a \int_0^1 x f''(x) dx + 2b \int_0^1 f''(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a \int_0^1 x df'(x) + 2bf'(x) \Big|_0^1 + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2axf'(x) \Big|_0^1 - 2a \int_0^1 f'(x) dx + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a - 2af(x) \Big|_0^1 + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq \max_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left( -2a - 2b - \frac{a^2}{3} - ab - b^2 \right) = 4$$

右端最小值在  $a = -6$ ,  $b = 2$  时取得, 因此, 当  $f''(x) = 6x - 2$  且满足题设时不等式取等, 不难得到此时  $f(x) = x^3 - x^2$ 。

**命题 1.6.29** 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上二阶连续可微, 证明

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 9 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

**证明:** 设  $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ,  $y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , 由 Lagrange 中值定理知,  $\exists z \in (x, y)$ , 使得

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

所以

$$|f'(z)| \leq 3|f(x)| + 3|f(y)|$$

对于任意的  $w \in [0, 1]$ , 有

$$f'(w) - f'(z) = \int_0^1 f''(t) dt$$

因此可得

$$|f'(w)| \leq 3|f(x)| + 3|f(y)| + \int_0^1 |f''(x)|dx$$

分别对  $x, y$  从 0 到 1 积分, 得

$$\frac{1}{9}|f'(w)| \leq \int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)|dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(y)|dy + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(x)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(x)|dx$$

即

$$\max |f'(w)| \leq 9 \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f''(x)|dx$$

**定理 1.6.4** 设  $f, g$  是区间  $[a, b]$  上的非负连续函数, 且存在  $u, v \in [a, b]$ , 使得  $\max f(x) = f(u)$ ,  $\max g(x) = g(u)$ ,  $\min f(x) = f(v)$ ,  $\min g(x) = g(v)$ .

则对任意  $\lambda \in (0, 1)$ , 存在  $c \in (a, b)$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda f(c) \int_a^b f(x)dx + (1 - \lambda)g(c) \int_a^b g(x)dx$$

**证明:** 显然, 对任意  $x \in [a, b]$ , 有  $f(v) \leq f(x) \leq f(u)$ . 因为  $g$  非负, 所以

$$f(v)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(u)g(x)$$

因此

$$f(v) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(u) \int_a^b g(x)dx$$

等号成立当且仅当  $f$  为常值函数或  $g \equiv 0$ . 同理有

$$g(v) \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq g(u) \int_a^b f(x)dx$$

等号成立当且仅当  $g$  为常值函数或  $f \equiv 0$ . 设  $\lambda \in (0, 1)$ , 考虑函数  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) = \lambda f(t) \int_a^b g(x)dx + (1 - \lambda)g(t) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

易知  $h(u) \geq 0$ ,  $h(v) \leq 0$ . 由函数连续性知, 存在  $c \in [u, v]$ , 使得  $h(c) = 0$ .

下证  $c \in (a, b)$ . 若  $c \neq u$  且  $c \neq v$ , 则显然满足  $c \in (a, b)$ . 否则我们不妨设  $c = u$ , 易知  $f$  和  $g$  为常值函数, 因此任意  $t \in [a, b]$ , 满足  $h(t) = 0$ . 若  $c = v$ , 同理可证。

## 第二章

# 线性代数

### §1 矩阵的初等变换

**定理 2.1.1** 设  $A$  是严格对角占优矩阵, 即

$$|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ki}|, \quad n = 1, 2, \dots, n$$

则  $A$  是非奇异矩阵。

**证明:** 反证法。假设  $\det A = 0$ , 则齐次线性方程组有非零解  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。设  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$  中最大的一个是  $|x_k|$ , 显然  $|x_k| > 0$ 。由假设知

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| &= | -a_{kk}x_k | = |a_{kk}| |x_k| \\ &> |x_k| \sum_{j \neq k} |x_{kj}| \\ &\geq \sum_{j \neq k} |x_j| |a_{kj}| \\ &\geq \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| \end{aligned}$$

与假设矛盾。得证。

## 第三章

# 概率论与数理统计

### §1 随机事件与概率

#### 1.1 概率的性质

命题 3.1.1 证明:

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

命题 3.1.2 因为

$$P(AB) - P(A)P(B) = P(AB) + P(A)[P(AB) - P(\bar{A}B)] = P(AB)[1 - P(A)] - P(A)P(\bar{A}B)$$

且

$$0 \leq P(AB)[1 - P(A)] \leq P(A)[1 - P(A)]$$

$$0 \leq P(A)P(\bar{A}B) \leq P(A)P(\bar{A}) = P(A)[1 - P(A)]$$

所以

$$\begin{aligned} |P(AB) - P(A)P(B)| &= |P(AB)[1 - P(A)] - P(A)P(\bar{A}B)| \\ &\leq \max\{P(AB)[1 - P(A)], P(A)P(\bar{A}B)\} \\ &\leq P(A)[1 - P(A)] = P(A) - [P(A)]^2 \\ &= \frac{1}{4} - \left[P(A) - \frac{1}{2}\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

## §2 随机变量及其分布

### 2.1 随机变量的方差与标准差

**定理 3.2.1 (Chebyshev 不等式)** 设随机变量  $X$  的数学期望和方差都存在, 则对任意常数  $\varepsilon > 0$ , 有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

**证明:** 设  $X$  是一个随机变量, 其密度函数为  $p(x)$ 。记  $E(X) = a$ , 则有

$$\begin{aligned} P(|X - a| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-a| \geq \varepsilon} p(x) dx \\ &\leq \int_{|x-a| \geq \varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} p(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x) dx \\ &= \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

**命题 3.2.1** 设随机变量  $X$  仅在区间  $[a, b]$  上取值, 证明:  $a \leq E(X) \leq b, Var(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ .

**证明:** 设随机变量  $X$  的密度函数为  $p(x)$ , 则有

$$E(X) = \int_a^b xp(x)dx \leq \int_a^b p(x)dx = b$$

同理  $E(X) \geq a$ , 即  $a \leq E(X) \leq b$ 。因为  $a \leq X \leq b$ , 则

$$-\frac{b-a}{2} \leq X - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$$

因此

$$\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

易知

$$E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

则有

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \text{Var}\left(X - \frac{a+b}{2}\right) \\
 &= E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left[E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)\right]^2 \\
 &\leq E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\
 &\leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

**命题 3.2.2** 设  $g(x)$  为随机变量  $X$  取值的集合上的非负不减函数, 且  $E(g(x))$  存在。证明: 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

**证明:** 因为  $g(x)$  为非负不减函数, 则对任意的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$g(x) \geq g(\varepsilon) \geq 0$$

即  $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} \leq 1$ , 因此

$$\begin{aligned}
 P(X > \varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx \\
 &\leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx}{g(\varepsilon)} \\
 &= \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

### §3 常用离散分布

**定理 3.3.1 (Poisson 定理)** 在  $n$  重伯努利试验中, 记事件  $A$  在一次实验中发生的概率为  $p_n$  (与试验次数有关)。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$



**证明：** 记  $np_n^k = \lambda_n$ , 即  $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ , 则有

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

对固定的  $k$  有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n &= \lambda \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} &= e^{-\lambda} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

因此, 对任意的  $k$  成立。定理得证。

## 第四章

# 离散数学

### §1 数理逻辑

### §2 集合论

### §3 代数结构

#### 3.1 代数系统

##### 命题 4.3.1

$$V_1 = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle, \quad V_2 = \langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$$

其中,  $\mathbb{Z}$  为整数集,  $+$ ,  $\cdot$  分别为普通加法和乘法,  $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ ,  $\oplus$ ,  $\otimes$  分别为模  $n$  加法和模  $n$  乘法, 令  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ ,  $f(x) = x \bmod n$ , 证明  $f$  为  $V_1$  到  $V_2$  的满同态映射。

**证明:**  $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(x + y) = (x + y) \bmod n$$

$$f(x) \oplus f(y) = [(x \bmod n) + (y \bmod n)] \bmod n$$

由取模运算的定义知,  $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_n$

$$x = q_1 n + r_1$$

$$y = q_2 n + r_2$$

则

$$\begin{aligned}
 (x + y) \bmod n &= q_1n + r_1 + q_2n + r_2 \\
 &= (q_1 + q_2)n + r_1 + r_2 \\
 &= (q_1 + q_2 + q_3)n + r_3 \\
 &= [(x \bmod n) + (y \bmod n)] \bmod n \\
 &= (r_1 + r_2) \bmod n
 \end{aligned}$$

其中

$$r_1 + r_2 = q_3n + r_3, \quad q_3 \in \mathbb{Z}, r_3 \in \mathbb{Z}_n$$

即

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

同理可证

$$f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

且  $f$  显然是满映射，得证。

## 3.2 群与环

**定理 4.3.1**  $G$  为群，则  $G$  中满足消去律，即对任意  $a, b, c \in G$  有

- (1) 若  $ab = ac$ ，则  $b = c$
- (2) 若  $ba = ca$ ，则  $b = c$

**证明：** (1) 因为  $ab = ac$ ，且  $G$  是群，所以存在  $a^{-1} \in G$ ，两边左乘  $a^{-1}$  得

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac$$

即  $b = c$ ，得证。

(2) 同上。

**命题 4.3.2** 设  $G$  是群， $a, b \in G$  是有限阶元，证明：

- (1)  $|b^{-1}ab| = |a|$
- (2)  $|ab| = |ba|$

**证明：** (1) 设  $|b^{-1}ab| = k$ ,  $|a| = l$ , 则

$$[b^{-1}ab]^l = \overbrace{[b^{-1}ab \ b^{-1}ab \ \cdots \ b^{-1}ab]}^l = b^{-1}a^l b = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

即  $k \leq l$ , 同理设  $|bb^{-1}abb^{-1}| = m$ , 显然  $m = l$ , 同时

$$[bb^{-1}abb^{-1}]^k = \overbrace{[b(b^{-1}ab)b^{-1} \ b(b^{-1}ab)b^{-1} \ \cdots \ b(b^{-1}ab)b^{-1}]}^k = b(b^{-1}ab)^k b^{-1} = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

因此  $l = m \leq k \leq l$ , 即

$$|b^{-1}ab| = |a|$$

(2)  $|ba| = |b^{-1}bab| = |ba|$ , 得证。

**命题 4.3.3** 偶数阶群必含 2 阶元。

**证明：** 由群的性质和逆元的唯一性知,  $\forall a \in G$ , 若  $|a| > 2$ , 则存在  $a^{-1} \in G$ , 且  $a \neq a^{-1}$  即群中除单位元外的任何元素都和它的逆元成对存在。因此, 偶数阶群必存在 2 阶元。

## 第五章

## 复分析

### §1 复数

**命题 5.1.1** 证明: 对于  $|z| \leq 1$ ,  $|w| \leq 1$ , 有

$$|w - z| \leq |1 - \bar{w}z|$$

**证明:** 设  $z = x_1 + y_1i$ ,  $w = x_2 + y_2i$

$$|w - z| = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i|$$

$$|1 - \bar{w}z| = |1 - (x_2 - y_2i)(x_1 - y_1i)| = |(1 - x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i|$$

$$\begin{aligned} & |w - z|^2 - |1 - \bar{w}z|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 1 - x_1^2x_2^2 - y_1^2y_2^2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 \\ &= (1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

其中

$$0 \leq x_1^2 + y_1^2 \leq 1, \quad 0 \leq x_2^2 + y_2^2 \leq 1$$

则

$$|w - z| \leq |1 - \bar{w}z|$$

**命题 5.1.2** 设数列  $\{a_n\}$  由  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  组成。证明:

$$a_0 \sqrt{2 + \sqrt{a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \cdots}}}} = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n a_1 \cdots a_n}{2^n} \right)$$

**证明：** 设

$$z_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right)$$

易知

$$\operatorname{sgn} z_n = \operatorname{sgn} \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \right) = a_0$$

对  $a_0 \neq 0$ , 有

$$z_n^2 - 2 = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \cdots + a_n \sqrt{2}}}$$

且有

$$\begin{aligned} z_n^2 - 2 &= -2 \cos \left( \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \\ &= 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{a_1 \cdots a_k}{2^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

得证。

## §2 复积分

**命题 5.2.1** 证明：对任意  $\xi \in \mathbb{C}$ , 有

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

**证明：**

$$e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} = e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi)}$$

因为

$$-\pi(x^2 + 2ix\xi) = -\pi(x^2 + 2\pi i x - \xi^2 + \xi^2) = -\pi(x + i\xi)^2 - \pi\xi^2$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

令  $z = x + i\xi$ ,  $dx = dz$ , 则有

$$\begin{aligned}
& e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx \\
&= e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz \\
&= e^{\pi\xi^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\
&= e^{\pi\xi^2}
\end{aligned}$$

**命题 5.2.2** 证明:

$$\left| \int_{\gamma} e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}$$

其中  $\gamma(t) = re^{it}$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $r \in \mathbb{R}^+$

**证明:**

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma} e^{iz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir^2(\cos 2t + i \sin 2t)} i r e^{it} dt \right| \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{ir^2(\cos 2t + i \sin 2t)} i r e^{it} \right| dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-r^2 \sin 2t} dt
\end{aligned}$$

因为  $\sin 2t \geq \frac{4t}{\pi}$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ , 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-r^2 \sin 2t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{4r^2 t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{4r} (1 - e^{-r^2})$$

**命题 5.2.3** 设  $f(z)$  在复平面上处处解析, 并且不等式

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq r^{\frac{16}{5}}$$

对所有  $r > 0$  成立, 证明:  $f(z) \equiv 0$

**证明:** 由题设  $f(z)$  在复平面  $C$  内都能 Taylor 展开, 则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

应用 Cauchy 积分公式, 得

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

从而  $2\pi|f(0)| \leq 6\frac{16}{5}$ , 令  $r \rightarrow 0^+$ , 有  $f(0) = 0$  再由

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta$$

则可知  $f'(0) = 0$ , 同理  $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$

当  $n \geq 4$  时

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta$$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{r^{\frac{16}{5}}}{r^n} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

从而

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

即

$$f(z) \equiv 0$$

**命题 5.2.4** 设函数  $f$  在  $z = 0$  的邻域上连续。证明：

(1)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt = 2\pi f(0)$$

(2)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_L \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

其中  $L$  是圆  $|z| = r$ 。

**证明：** (1) 因为函数  $f$  在  $z = 0$  的邻域上连续, 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta$ , 使得当  $r < \delta$  时

$$|f(re^{it}) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt - 2\pi f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) - f(0) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$



(2) 设  $z = re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta$ , 使得当  $r < \delta$  时

$$\begin{aligned} \left| \int_L \frac{f(z)}{z} dt - 2\pi i f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}} re^{it} i - f(0) i dt \right| \\ &= \left| i \int_0^{2\pi} f(re^{it}) - f(0) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

### §3 复级数

**命题 5.3.1** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n$  收敛, 证明:

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**证明:** 记  $A_k = \sum_{n=1}^k A_n$ ,  $A_0 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (1 - r^n) a_n &= (1 - r^N) A_N + \sum_{n=1}^N (r^n - r^{n+1}) A_n \\ &= (1 - r) A_N + \sum_{n=1}^N (r^n - r^{n+1}) (A_N - A_n) \end{aligned}$$

因为  $\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} (1 - r) A_N = 0$ , 所以只需证  $\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} (r^n - r^{n+1}) (A_N - A_n) = 0$   
对任意  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N' \in \mathbb{N}$ ,  $n > N'$  时

$$|A_n - A| < \varepsilon$$

其中  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

取  $(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{N'}} < r < 1$ , 则  $0 < 1 - r < 1 - r^{N'} < \varepsilon$

由于  $A_n$  有界, 设  $|A_n| \leq M$ , 则  $n > N'$  时

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1} (r^n - r^{n+1})(A_N - A_n) &\leq (1-r) \sum_{n=1}^{N'} r^n |A_n - A| + \sum_{n=N'+1}^{N-1} r^n (|A_n - A| + |A_N - A|) \\
&\leq \left( \sum_{n=1}^{N'} 2r^n M + \sum_{n=N'+1}^{N-1} r^n 2\varepsilon \right) \\
&= (1-r) \left( 2M \frac{r - r^{N'+1}}{1-r} + 2\varepsilon r^{N'+1} \frac{1 - R^{N-N'+1}}{1-r} \right) \\
&< 2M\varepsilon + 2\varepsilon \\
&= 2(M+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 再  $r \rightarrow 1$

即

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

**命题 5.3.2** 设  $f$  在  $\mathbb{C}$  上解析, 且满足对于任一点  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f$  在  $z_0$  的 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

满足至少有一个  $c_n$  为 0, 证明  $f$  是多项式。

**证明:** 考虑开单位圆盘  $D = \Delta(0, 1)$ , 则  $D$  内有不可数的点, 所以存在正整数  $p$ , 使得  $D$  内有无穷多点  $\{z_n\}$ , 在这些点处的 Taylor 展开式中第  $p$  项系数  $c_p = 0$

可以在这些点中选取一个收敛子列  $\{z_{n_k}\}$ , 且该子列收敛到  $z_0 \in D$ , 由唯一性定理知,  $f^{(p)} \equiv 0$  在  $\mathbb{C}$  上恒成立, 故  $f$  为多项式。

**命题 5.3.3** 设

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

**证明:** 如果幂级数  $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  的收敛半径  $R(A)$  为 1, 则幂级数  $C = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k$  的收敛半径  $R(C)$  也为 1。

**证明:** 因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k = C$$

则有  $R(C) \geq 1$ , 因为左边乘积中幂级数的收敛半径都是 1, 右边幂级数  $C$  的收敛半径  $R(C)$  不可能大于 1, 即  $R(C) \leq 1$ 。则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N$  时, 对任意  $p \in \mathbb{N}^+$  有

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k| |z|^k \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1) |a_k| |z|^k, \quad 1 < |z| < R$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k)|a_k||z|^K \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1)|a_k||z|^k < \varepsilon, \quad 1 < |z| < R \quad (1)$$

因此

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1)|a_k||z|^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k)|a_k||z|^k + \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k||z|^k$$

由 (1) 式知,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k||z|^k < \varepsilon, \quad 1 < |z| < R$$

若  $R(C) < 1$ , 则必有  $R(A) < 1$ , 与题设矛盾。得证。

**定理 5.3.1 (Tauber 定理)** 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  的收敛半径为 1, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ . 有

(1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^m n |a_n|}{m} = 0$$

(2) 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n, \quad |z| < 1$$

如果存在  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ , 那么级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  收敛到  $A$ 。

**证明:** (1)  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时,  $n|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 选择  $n = n_0$  满足上述条件。则对任意  $m > n_0$ , 有

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=1}^m n |a_n|}{m} &= \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^m n |a_n|}{m} \\ &< \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{m - n_0}{2m} \varepsilon \\ &< \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n |a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

对足够大的  $m > M$ , 有

$$\frac{\sum_{n=1}^{n_0} n |a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此对  $m > \max(N, M)$

$$\frac{\sum_{n=1}^m n|a_n|}{m} < \varepsilon$$

(2)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{k=0}^n [ |a_k|(1+x+\cdots+x^{k-1}) ] + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k \\ &< n(1-x) \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

令  $m|a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 由 (a) 知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$ , 使得当  $m > M$  时有

$$\frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

我们由上述不等式得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| &< n(1-x) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left[ n(1-x) + \frac{1}{n} \frac{x^{n+1}}{1-x} \right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left[ n(1-x) + \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \right] \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k = A$$

**引理 5.3.1** 设函数

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

的收敛半径为  $R$ 。  $w$  是收敛圆边界上的点,  $z_1$  是半径  $z_0 w$  上不同于  $z_0$  和  $w$  的任意一点。证明: 如果

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则  $w$  是  $\varphi(z)$  的发散点。且如果

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则  $w$  是  $\varphi(z)$  的收敛点。

**证明：** 由题设知， $\varphi(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内收敛，固定  $w$ ，选择  $z_1$ ，并将  $\varphi(z)$  在  $z = z_1$  展开，得到

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_1)^n, \quad |z - z_1| < r$$

其中  $r$  是收敛半径，且有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!} \\ &= a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1}(z_1 - z_0) + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2}(z_1 - z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (z_1 - z_0)^{m-n} \end{aligned}$$

易知，若  $w$  是  $\varphi(z)$  的发散点，则  $\varphi(z)$  在  $z = z_1$  处的 Taylor 展开式的收敛半径为  $r$ ，因此对  $b_n$  有

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = r$$

即

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

反之，若  $w$  是  $\varphi(z)$  的收敛点，则  $\varphi(z)$  在  $z = z_1$  处的 Taylor 展开式的收敛半径大于  $r$ ，因此对  $b_n$  有

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

**定理 5.3.2 (Pringshajm 定理)** 设幂级数  $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  收敛半径  $R = 1$ ，且  $a_n \geq n$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，则  $z = 1$  是  $\varphi(z)$  的发散点。

**证明:** 反证法。假设  $z_0 = 1$  不是  $\varphi(z)$  的发散点。设  $x$  是区间  $(0, 1)$  上的任意点, 由引理 5.3.1 可知,

$$\Delta = R - |x - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

设  $w$  是单位圆上的任意一点, 且  $z_1$  是半径  $z_0 w$  和圆  $|z| = x$  的交点, 则有

$$R - |z_1| = 1 - x$$

且有

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(z_1)| &= \left| a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2} z_1^2 + \cdots \right| \\ &\leq a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2} x^2 + \cdots \\ &= \varphi^{(n)}(x) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \geq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}}$$

从最后一个不等式知

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

由  $w$  的任意性和引理 5.3.1 可知,  $\varphi(z)$  在  $|z| = 1$  上没有发散点, 这与  $\varphi(z)$  的收敛半径  $R = 1$  矛盾。得证。

**命题 5.3.4** 设  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| < \infty$ , 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \cdots + a_{m+n}|$$

**证明:** 因为  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| < \infty$ , 所以存在  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m = S$

令

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \cdots + a_{m+n}|$$

下证  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = |S|$ 。  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists M \in \mathbb{N}$ , 使得

$$\sum_{|m| > M} |a_m| < \varepsilon$$

则对  $m > M$  有

$$\begin{aligned}(2n+1)C_n &= \sum_{|m|>n+M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \\ &+ \sum_{n+M \leq |m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \\ &+ \sum_{|m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}|\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{|m|>n+M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| &\leq \sum_{|m|>n+M} |a_{m-n}| + \cdots + |a_{m+n}| \\ &\leq (2n+1) \sum_{|m|>M} |a_m| \\ &\leq (2n+1)\varepsilon\end{aligned}$$

且

$$\sum_{|m|<n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \leq \sum_{|m|<n-M} \sigma \leq 4M\sigma$$

因为  $|m| \leq n-M$  即  $m-n \leq -M \leq M \leq m+n$ , 则对  $|m| \leq n-M$  有

$$\left| |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - |S| \right| \leq \sum_{|m| \leq M} |a_m| < \varepsilon$$

所以

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{|m|<n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - (2n-2M+1)|S| \right| \\ &\leq \sum_{|m|<n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - |S| \\ &\leq (2n-2M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

因此

$$\left| (2n+1)C_n - (2n-2M+1)|S| \right| \leq (2n+1)\varepsilon + 4M\sigma + (2n-2M+1)\varepsilon$$

两边除以  $(2n+1)$  并令  $n \rightarrow \infty$  得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n - |S|| \leq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon$$

由  $\varepsilon$  的任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = |S|$$

**命题 5.3.5** 设

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n}, \quad |z-a| < R$$

其中  $b_0 \neq 0$ . 证明:  $f(z)$  可以表示为下列形式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R$$

并用系数  $a_n$  和  $b_n$  来表示上述系数  $c_n$ .

**证明:** 易知

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n}$$

在  $|z-a| < R$  内解析, 因此存在 Taylor 级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} (z-a)^n \end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性可得

$$\begin{aligned} c_0 b_0 &= a_0 \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 &= a_1 \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 &= a_2 \\ &\vdots \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_n b_0 &= a_n \end{aligned}$$



可得线性方程组, 解得

$$c_n = \frac{1}{b_{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

且

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0$$

## §4 解析函数

**命题 5.4.1** 设  $f$  在一个包含单位圆盘的开集上 (除去单位圆盘上的唯一一个极点  $z_0$ ) 解析。

证明: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  表示  $f$  在开单位圆盘上的 Taylor 级数, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$$

**证明:** 函数  $f$  在单位圆内可以表示为

$$f(z) = \frac{c}{z - z_0} + h(z)$$

其中  $h(z)$  是解析函数且  $c \neq 0$ . 因为  $h(z)$  解析, 因此在单位圆内有 Taylor 级数

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

又  $\frac{c}{z - z_0}$  能展开为幂级数

$$\frac{c}{z - z_0} = -\frac{c}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{z_0} \right)^n$$

所以

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

则有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}}}{b_{n+1} - \frac{c}{z_0^{n+2}}} = z_0 \frac{(b_n z_0^n) z_0 - c}{(b_{n+1} z_0^{n+1}) z_0 - c} = z_0 \frac{z_0 h_n - c}{z_0 h_{n+1} - c}$$

其中  $h_n$  是  $h(z)$  在  $z = z_0$  处 Taylor 级数第  $n$  项的系数。因为  $h(z)$  在单位圆内解析, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ . 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_0 \frac{a_0 h_n - c}{z_0 h_{n+1} - c} \right) = z_0$$

**命题 5.4.2** 设  $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  是解析函数,

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} |f(z) - f(-z)|$$

证明: 对于任意  $0 < r < 1$ ,

$$2|f'(0)| \leq \frac{d_r^*}{r}$$

成立。且等号成立当且仅当

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z, \quad \forall z \in D(0, 1)$$

**证明:** 充分性显然。

必要性。应用反证法, 不妨设

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3, \quad \forall z \in D(0, 1)$$

其中  $f'(0) = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $f^{(3)}(0) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$ . 则

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} (|2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3|) = \sup_{z \in D(0, r)} (2|z||f'(0) + f^{(3)}(0)z^2|)$$

总存在  $|z| = r$ , 使得  $f'(0)$  与  $f^{(3)}(0)z^2$  同向, 也即

$$\frac{d_r^*}{r} = 2|f'(0) + f^{(3)}(0)z^2| > 2|f'(0)|$$

与题设矛盾, 得证。

**命题 5.4.3** 证明: 函数  $\frac{d_r}{r}$  是  $r$  的单调不减函数。其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| : z, w \in D(0, r), |z| = |w|\}$$

**证明:** 考虑  $0 < r < R < 1$ , 易知  $d_r = \sup\{|f(z) - f(zu)| : z \in D(0, 1), |z| = 1\}$ , 注意到对于任意的  $|u| = 1$ ,  $z \mapsto \frac{f(z) - f(zu)}{z}$  是单位圆  $D(0, 1)$  上的解析函数, 因此

$$\begin{aligned}
\frac{d_r}{r} &= \frac{1}{r} \sup_{z \in D(0,r)} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} |f(z) - f(zu)| \\
&= \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&\leq \sup_{z \in \overline{D}(0,R)} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&= \sup_{|z|=R} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&= \frac{1}{R} \sup_{|z|=R} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{R} \sup_{z \in D(0,R)} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{R} d_R \leq \frac{1}{R} d_1
\end{aligned}$$

令  $R \rightarrow 1$ , 则有

$$\frac{d_r}{r} \leq \frac{1}{R} d_R \leq d_1$$

**命题 5.4.4** 已知  $D$  是单位圆盘, 设  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  是解析函数, 证明: 函数  $f$  的直径  $d = \sup_{z, w \in D} |f(z) - f(w)|$  满足

$$2|f'(0)| \leq d$$

**证明:** 由 Cauchy 公式得,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz \\
f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{-f(-z)}{z^2} dz
\end{aligned}$$

其中  $0 < r < 1$ , 即

$$\begin{aligned}
2f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz \\
2|f'(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} \right| dz \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{d}{r^2} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{d}{r}
\end{aligned}$$

则显然有  $2|f'(0)| \leq d$ .

**定理 5.4.1** 对任意的  $0 < r < 1$ ,

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

成立当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0, 1)$$

其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| \mid z, w \in D(0, r), |z| = |w|\}$$

**证明：** 充分性显然。

必要性。易知

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} |f(z) - f(-z)| \leq d_r$$

所以  $2|f'(0)| \leq \frac{d_r^*}{r}$ , 因此

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z$$

假设存在  $|a| = r$ , 使得

$$\operatorname{Im}\{f'(a)\} \neq 0$$

函数  $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$  是单位圆上的解析函数。对  $\theta \in \mathbb{R}$ , 有

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= |f(ae^{i\theta}) - f(-a)|^2 \\ &= \left| f(ae^{i\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r}a \right|^2 \\ &= \left( f(ae^{i\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r}a \right) \left( f^*(\bar{a}e^{-i\theta}) - f^*(\bar{a}) + \frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right) \end{aligned}$$

由 Cauchy 定理知,

$$\varphi'(\theta) = 2\operatorname{Re} \left\{ aie^{i\theta} f'(ae^{i\theta}) \left( f^*(\bar{a}e^{-i\theta}) - f^*(\bar{a}) + \frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right) \right\}$$

所以

$$\varphi'(0) = 2\operatorname{Re} \left\{ aif'(a)\frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right\} = -2\frac{d_r^*}{r}|a|^2\operatorname{Im}\{f'(a)\} \neq 0$$

因此  $\varphi(\theta)$  在  $\theta = 0$  处要么单调增加要么单调减少, 所以存在  $\theta_0$ , 使得  $\varphi(\theta_0) > \varphi(0)$ . 也即

$$d_r \geq |f(ae^{i\theta}) - f(-a)| = \sqrt{\varphi(\theta)} > \sqrt{\varphi(0)} = |f(a) - f(-a)| = \frac{d_r^*}{r}r = d_r$$

与  $d_r^* \leq d_r$  矛盾。所以

$$f'(z) = 0, \quad \forall |z| = r$$

由最大模定理知,

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in D(0, r)$$

因此由 Cauchy-Riemann 条件知,  $f'(z)$  是常值函数, 即

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0, 1)$$

成立。

**定理 5.4.2** 设函数  $f(z)$  是单位圆上的解析函数。则

$$2|f'(0)| = d$$

当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

其中

$$d = \sup_{z, w \in D(0, 1)} |f(z) - f(w)|$$

**证明:** 充分性显然。

必要性。易知

$$\frac{d_r^*}{r} \leq \frac{d_r}{r} \leq d$$

因此

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

由定理 5.4.1 知,

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

得证。

**命题 5.4.5** 设  $f$  在  $0 < |z| < R$  解析, 存在  $M > 0$ , 使得任意  $r$ ,  $0 < r < R$ , 有

$$r \int_0^{2\pi} |2f(e^{i\theta})| d\theta < M$$

证明:  $z = 0$  是一个可去发散点, 否则是简单极点。

**证明:** 设  $r_2 < R$ , 选取  $z_0$ , 满足  $0 < z_0 < \frac{r_2}{2}$ , 再选取  $r_1$ , 使  $0 < r_1 < \frac{|z_0|}{2}$

由 Cauchy 积分公式得

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{C_2} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| + \int_{C_1} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \right) \end{aligned}$$

其中  $C_1 = r_1 e^{i\theta}$ ,  $C_2 = r_2 e^{i\theta}$  由  $|z - z_0| \geq \frac{r_2}{2}$ ,  $z \in C_2$  有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \leq \frac{1}{\pi r_2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{\pi r_2^2}$$

由  $|z - z_0| \geq \frac{|z|}{2}$ ,  $z \in C_1$  有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \leq \frac{1}{\pi |z|} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{\pi |z|}$$

因此, 我们有

$$|f(z)| \leq \frac{M}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi |z|}, \quad 0 < |z| < \frac{r_2}{2}$$

所以

$$|zf(z)| \leq \frac{M|z|}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi}$$

则极限是有限的。

$z = 0$  是可去极点, 极限为 0.

$z = 0$  是简单极点, 极限非 0.

**命题 5.4.6** 设  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 并且  $z = 0$  为  $f(z)$  的  $n(n \geq 1)$  级零点, 当  $|z| < 1$  时,  $|f(z)| < 1$ .

证明: 当  $|z| < 1$  时,  $|f(z)| \leq |z|^n$

**证明:**  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 且  $z = 0$  为  $n(n \geq 1)$  级零点, 则有

$$f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m z^m$$

显然  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1}}$  在  $|z| < 1$  内解析, 且  $\varphi(0) = 0$ , 有

$$\max_{|z|=r} \varphi(z) \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{r^{n-1}} \leq \frac{1}{r^{n-1}}$$

令  $n \rightarrow 1$ , 则  $|\varphi(z)| < 1$ , 于是  $|\varphi(z)| \leq |z|$ , 即

$$|f(z)| \leq |z|^n$$

## §5 共形映射

**命题 5.5.1** 设  $f(z)$  是单位圆盘  $\Delta(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$  到其自身的解析映射, 且有  $f(z) \neq z$

证明:  $f(z)$  至少有一个零点。

**证明：** 反证法。若存在  $a, b \in \Delta(0, 1)$ ,  $a \neq b$ , 且

$$f(a) = a, \quad f(b) = b$$

则设  $\varphi(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ ,  $\varphi$  将  $\Delta(0, 1)$  映射成  $\Delta(0, 1)$ , 且  $\varphi(0) = a$

令  $F(z) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z)$ , 则有  $F(0) = 0$ ,

$$F[(\varphi^{-1}(b))] = \varphi^{-1}(b)$$

由 Schwarz 引理知  $F(z) = e^{i\theta}z$ ,

因为

$$F[(\varphi^{-1}(b))] = \varphi^{-1}(b) = e^{i\theta}\varphi^{-1}(b)$$

所以  $e^{i\theta} = 1$  则

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = z$$

即  $f[\varphi(z)] = \varphi(z)$ ,  $f$  为恒等映射, 与题设矛盾, 得证。

**命题 5.5.2** 设  $f(z)$  是单位圆盘  $\Delta(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$  到其自身的映射, 且为解析函数,  $f(0) = 0$ , 证明:

(1)

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2 \quad (|z| < 1)$$

(2) 如果  $\exists z_0 \neq 0$ , 使得上面不等式中的等号在  $z_0$  处成立, 则

$$f(z) = e^{i\theta}z^2 (\theta \in \mathbb{R})$$

**证明：** (1)  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 则可以 Taylor 展开, 又因为  $f(0) = 0$ , 所以

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

令  $\varphi(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$ , 显然  $z = 0$  是  $\varphi(z)$  的  $k(k \geq 2)$  级零点, 所以

$$|\varphi(z)| = |z|^2$$

即

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$$

(2)  $|\varphi(z) = \frac{1}{2}|f(z) + f(-z)| \leq \frac{1}{2}(|f(z)| + |f(-z)|) \leq 1$  由 (1) 知,  $\left| \frac{\varphi(z)}{z^2} \right| \leq 1$ , 且  $\left| \frac{\varphi(z_0)}{z_0^2} \right| =$

1,  $|z_0| < 1$ , 则由 Schwarz 引理得

$\varphi(z) = e^{i\theta}z^2$ , 即  $f(z) + f(-z) = 2e^{i\theta}z^2$

$$f(z) + f(-z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

设  $f(z) = e^{i\theta}z^2 + h(z)$ , 其中  $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}z^{2n-1}$   
 显然有  $h(z) = -h(-z)$ , 则由  $|f(z)| \leq 1$  得

$$|e^{i\theta}z^2 + h(z)| \leq 1$$

$$|e^{i\theta}z^2 - h(z)| \leq 1$$

即有

$$(e^{i\theta}z^2 + h(z))\overline{(e^{i\theta}z^2 + h(z))} \leq 1$$

$$(e^{i\theta}z^2 - h(z))\overline{(e^{i\theta}z^2 - h(z))} \leq 1$$

则

$$|z|^4 + |H(z)| \leq 1$$

由最大模定理可知  $h(z) \equiv 0$ , 即

$$f(z) = e^{i\theta}z^2$$

**命题 5.5.3** 函数  $f(z)$  在可求面积得区域  $D$  内单叶解析, 并且满足  $|f(z)| \leq 1$ , 证明:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi$$

**证明:**  $S = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$  为  $f(z)$  将  $D$  映射成的区域面积, 又  $|f(z)| \leq 1$ , 则显然有

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi$$

**证明:** 若  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ , 其中  $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ , 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$$

**命题 5.5.4** 由极限定义,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta$  时

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon$$

又  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ , 则

$$||f(z) - |w|| \leq |f(z) - w| < \varepsilon$$

易知

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$$



**命题 5.5.5** 设  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  内解析, 在  $|z| = 1$  上有  $|f(z)| > m$ , 并且  $|f(0)| < m$ , 其中  $m > 0$

证明:  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内至少有一个零点。

**证明:** 反证法。假设  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内无零点, 又  $|z| = 1$  上  $|f(0)| > m > 0$  则  $f(z)$  在  $|z| \leq 1$  内无零点,  $\frac{1}{f(z)}$  在  $|z| \leq 1$  解析, 由最大模定理知

$$\max_{|z| \leq 1} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{|z|=1} \left| \frac{1}{f(z)} \right| < \frac{1}{m}$$

然而  $\left| \frac{1}{f(z)} \right| > \frac{1}{m}$ , 与题设矛盾, 所以  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内至少有一个零点。

**命题 5.5.6** 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  为单位圆盘  $D = \{z | |z| < 1\}$  内的单叶解析函数,  $G$  为  $f$  将单位圆  $D$  映射成的区域,  $A$  为区域  $G$  的面积, 证明:

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

**证明:** 易证  $A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$ , 又  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ , 设  $z = e^{i\theta}$ , 则有

$$\begin{aligned} A &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy \\ &= \iint_D f'(z) \overline{f'(z)} dx dy \\ &= \iint_D \left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) \overline{\left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right)} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( r \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{(n-1)i\theta} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} n \overline{a_n} r^{n-1} e^{-(n-1)i\theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^1 r \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 |a_n|^2 \pi r^{2n-2} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

即

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

**命题 5.5.7** 设  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  为解析函数,  $|f(z)| \leq 1$ , 并且  $f(\alpha) = \beta$ ,  $\alpha, \beta \in D$ , 则

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

当且仅当等号成立时, 有  $f(z) = \varphi_{-\beta}(\varphi_{\alpha}(z))$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , 且  $|c| = 1$ , 其中

$$\varphi_{\alpha} = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \varphi_{\beta} = \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta}z}$$

**证明:** 令  $g = \varphi_{\beta} \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$ , 于是  $g$  在  $D$  内解析,  $|g(z)| \leq 1$ , 并且  $g(0) = 0$ , 由 Schwarz 引理得

$$|g'(0)| \leq 1$$

且

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_{\beta}(\beta) f'(\alpha) \varphi_{-\alpha}(0) \\ &= (1 - |\beta|^2)^{-1} f'(\alpha(1 - |\alpha|^2)) \end{aligned}$$

则有

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

**命题 5.5.8** 设单叶解析函数  $f(z)$  将  $z$  平面上可求面积的区域  $D$  映射成  $w$  平面上的区域  $G$ , 设区域  $G$  的面积为  $A$ , 证明:

$$A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

**证明:** 显然  $A = \iint_D dx dy$ , 积分区域为  $G$ , 则由积分换元公式知

$$\begin{aligned} A &= \iint_G dx dy \\ &= \iint_D \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \\ &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

**命题 5.5.9** 设  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  是解析函数,  $f(0) = 0$ , 并且任意  $z \in D$ ,  $\operatorname{Re}(f(z)) \leq A$ , 其中  $D = \{z \mid |z| < 1\}$ ,  $A$  是正实数, 那么任意  $r \in (0, 1)$

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1-r}$$

其中  $M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$

**证明:**  $\forall r \in (0, 1)$ , 令

$$A(r) = \max_{|z|=r} \{\operatorname{Re} f(z)\}$$

因为

$$e^{A(r)} = \max_{|z|=r} \{|e^{f(z)}|\}$$

由最大模原理知  $A(r)$  是单调增加的飞赴函数, 并且由假设知  $A(r) \leq A$   
令

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)} = \frac{P + Qi}{(2A - P) - Qi}$$

其中

$$P = \operatorname{Re} f(z), \quad Q = \operatorname{Im} f(z)$$

那么  $f(z)$  在  $D$  内解析,  $\forall x \in D$

$$|g(z)|^2 = \frac{P^2 + Q^2}{(2A - P)^2 + Q^2} \leq \frac{R^2 + Q^2}{A^2 + Q^2} \leq 1$$

从而  $|g(z)| \leq 1$ ,  $g(0) = 0$ , 于是由 Schwarz 引理得

$$|g(z)| \leq z$$

由  $g(z)$  定义知

$$f(z) = \frac{2Ag(z)}{1 + g(z)}$$

则

$$|f(z)| \leq \frac{2A(z)}{1 - |z|} \leq \frac{2Ar}{1 - r}$$

即

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1 - r}$$

**引理 5.5.1 (Schwarz 引理)** 设  $f(z)$  在单位圆盘  $|z| < 1$  内解析, 在闭圆盘  $|z| \leq 1$  上是连续的, 并且满足  $f(0) = 0$ , 又在  $|z| < 1$  内处处有  $|f(z)| < 1$ , 则

(1)  $|f(z)| \leq |z|$ , 且  $|f'(0)| \leq 1$

(2) 若在开圆盘内有一复数  $z_0 \neq 0$ , 是  $|f(z_0)| = |z_0|$ , 或者  $|f'(0)| = 1$ , 那么  $f(z) = e^{i\alpha}z$ ,  $\alpha$  为一实数。

**证明:** 由于  $f(0) = 0$ , 且  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 则  $f(z)$  在  $|z| < 1$  内可以 Taylor 展开, 有

$$f(z) = c_1z + c_2z^2 + \cdots +$$

令  $\varphi(z) = c_1 + c_2 z + \cdots$ , 则

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

显然  $\varphi(z)$  在  $|z| < 1$  内解析, 对于圆内一点  $z_0$ , 设  $|z_0| < r < 1$ , 则由最大模定理

$$|\varphi(z+0)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z_0)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

令  $r \rightarrow 1$ , 则有  $|\varphi(z_0)| \leq 1$

若  $z_0 = 0$ , 有  $|f'(0)| = |\varphi(0)| \leq 1$

若  $z_0 \neq 0$ , 有  $|f'(0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq 1$ , 即

$$|f(z_0)| \leq |z_0|$$

由于  $f(0) = 0$ , 上式当  $z = 0$  时成立, 则

$$|f(z_0)| \leq |z_0|, \quad x \in \Delta(0, 1)$$

若有  $z_0 \neq 0$ , 使  $|f(z_0)| = |z_0|$ , 或者  $|f'(0)| = 1$ , 则  $\varphi(z)$  在  $\Delta(0, 1)$  内取得最大模, 从而  $\varphi(z) \equiv c$ , 又  $|c| = 1$ , 则  $\varphi(z) = e^{i\alpha}$ , 所以

$$f(z) = e^{i\alpha} z$$

**定理 5.5.1 (Schwarz-Pick 定理)** 设  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  在  $D$  内解析,  $|f(z)| \leq 1$ , 且  $f(z_0) = w_0$ ,  $z \in D$ , 则

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

等号当且仅当  $f(z)$  是分式线性映射时成立。

**证明:** 设函数  $w = f(z)$ , 考虑分式线性映射

$$\zeta = T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \tau = S(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$$

分别  $z$  平面和  $w$  平面上的单位圆双方单值映射成  $\zeta$  和  $\tau$  平面上的单位圆, 并且把  $z_0, w_0$  映射成  $\zeta = 0, \tau = 0$ , 则

$$F(\zeta) = S(f(T^{-1}(\zeta)))$$

在  $|\zeta| < 1$  内解析,  $|F(\zeta)| \leq 1$ , 且  $F(0) = 0$ , 于是在  $|\zeta| < 1$  内, 由 Schwarz 引理得

$$|F(\zeta)| = |S(f(T^{-1}(\zeta)))| \leq |\zeta|$$

从而在  $|z| < 1$  内

$$|S(f(z))| \leq |T(z)|$$

即

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

# 第六章

## 信号与系统

### §1 信号与系统

**命题 6.1.1** 考虑离散时间信号

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k]$$

确定整数  $M$  和  $n_0$  的值, 使得  $x[n]$  能表示为

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

**证明:** 由题设知,

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k] = 1 - \sum_{k=4}^{\infty} \delta[n - k]$$

即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$$

因此

$$x[n] = u[-n + 3]$$

所以,  $M = -1$ ,  $n_0 = -3$ .

### §2 线性时不变系统

**命题 6.2.1** 考虑一个离散时间系统  $X_1$ , 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

- (1) 求整数  $A$  以满足  $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$ 。  
 (2) 利用 (a) 的结果, 求  $S_1$  的逆系统  $S_2$  是线性时不变的单位脉冲响应  $g[n]$ 。

**证明:** (1) 由题设, 因为

$$h[n] - Ah[n-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1]$$

即

$$h[n] - Ah[n-1] = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n - A \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, & n \geq 0 \\ 1, & n = 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$$

所以,  $A = \frac{1}{5}$

- (2) 即求  $g[n]$ , 使得

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

由 (a) 知,  $h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n]$ , 易得

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$$

### §3 连续时间傅里叶变换

**引理 6.3.1** 考虑连续时间信号  $x(t)$ ,  $x(t)$  的傅里叶变换为  $X(j\omega)$ , 求连续时间信号

$$y(t) = X(jt)$$

的傅里叶变换  $Y(j\omega)$ .

**证明:** 由傅里叶变换综合公式知,

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt)e^{-j\omega t} dt$$

应用积分变量变换, 令  $t = \omega$ ,  $\omega = t$ , 则有

$$Y(jt) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi x(-t)$$

因此

$$Y(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

**命题 6.3.1** 考虑下面的傅里叶变换对:

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

(1) 利用恰当的傅里叶变换性质求  $te^{-|t|}$  的傅里叶变换。

(2) 根据 (a) 的结果, 再结合对偶性质, 求  $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$  的傅里叶变换。

**证明:** (1) 因为

$$tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

所以,  $te^{-|t|}$  的傅里叶变换为

$$j \frac{d\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)}{d\omega} = \frac{-4\omega j}{(1+\omega^2)^2}$$

(2) 设  $x(t) = te^{-|t|}$ ,  $y(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} = jX(jt)$

由引理 6.3.1 知,

$$Y(j\omega) = -2\pi jte^{-|t|}$$

## §4 离散时间傅里叶变换

**命题 6.4.1** 设  $Y(e^{j\omega})$  的逆变换是

$$y[n] = \left( \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \right)^2$$

其中  $0 < \omega_c < \pi$ . 试确定  $\omega_c$  的值, 以保证

$$Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2}$$

**证明:** 易知

$$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

由傅里叶变换相乘性质得

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-\omega_c}^{\omega+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\pi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\pi-\omega_c}^{\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta + \int_{2\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\omega_c - \pi + 2\omega_c - \pi) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

即  $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$ .

#### 命题 6.4.2

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \left( \frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

求  $x[n]$

**证明：** 由离散时间傅里叶变换对知

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{(N+1)\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

则

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) - 3\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

由离散时间傅里叶变换卷积性质可知

$$x[n] = x_1[n] * u[n] + 1$$



即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq -2 \\ n+3, & |n| \leq 1 \\ 4, & n \geq 2 \end{cases}$$

## §5 采样

**命题 6.5.1** 采用离散时间滤波实现连续时间滤波，假定所用的采样周期为  $T$ ，输入  $x_c(t)$  为带限信号，而有  $X_c(j\omega) = 0$ ， $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ 。若整个系统具有

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

试求离散时间滤波器的单位脉冲响应  $h[n]$ 。

**证明：** 由题设易得

$$Y_c(j\omega) = j\omega X_c(j\omega) e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

$$H_c(j\omega) = \frac{Y_c(j\omega)}{X_c(j\omega)} = j\omega e^{-\frac{j\omega T}{2}}$$

因为

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & else \end{cases}$$

所以

$$H_d(e^{j\omega T}) = H_c \left( \frac{j\omega}{T} \right) = j \frac{\omega}{T} e^{-\frac{j\omega}{2}}, \quad |\omega| \leq \pi$$

由离散时间傅里叶逆变换公式得

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega T}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j \frac{\omega}{T} e^{-\frac{j\omega}{2}} e^{j\omega n} d\omega \\ &= -\frac{\sin \left[ \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \right]}{\pi T \left( n - \frac{1}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

## §6 拉普拉斯变换

**命题 6.6.1** 考虑有图所示  $RL$  电路。

- (1) 当输入电流  $x(t) = e^{-2t}u(t)$  时, 确定该电路的零状态响应。
- (2) 已知  $y(0^-) = 1$ , 确定该电路在  $t > 0^-$  时的零输入响应。
- (3) 当输入电流  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , 初始条件同 (b) 时, 确定该电路的输出。

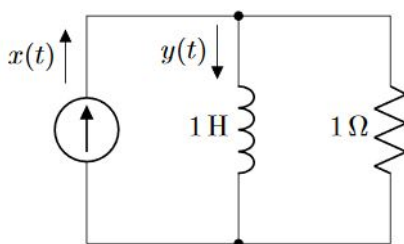


图 6.1:  $RL$  电路图

**证明:** (1) 由图可知,  $RL$  电路的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

当输入电流  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , 且  $y(0^-) = 0$  时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) + Y(s) = X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

- (2) 当输入电流  $x(t) = 0$ , 且  $y(0^-) = 1$  时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = 0$$

即

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

由 Laplace 变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t)$$

(3) 当输入电流  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ , 初始条件同 (b) 时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = X(s) = \frac{1}{s+2}$$

即

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由 Laplace 变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

**命题 6.6.2** 关于信号  $x(t)$ , 已知以下三点:

- (1)  $x(t) = 0, t < 0$
- (2)  $x\left(\frac{k}{80}\right) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$
- (3)  $x\left(\frac{1}{160}\right) = e^{-120}$

设  $X(s)$  为  $x(t)$  的 Laplace 变换, 则  $X(s)$  在有限  $s$  平面内有几个极点。

## §7 z 变换

**命题 6.7.1** 有一个信号  $x[n]$  的  $z$  变换的代数表达式为

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

- (1) 假定收敛域是  $|z| > \frac{1}{3}$ , 利用长除法求  $x[0]$ ,  $x[1]$  和  $x[2]$  的值。
- (2) 假定收敛域是  $|z| < \frac{1}{3}$ , 利用长除法求  $x[0]$ ,  $x[1]$  和  $x[2]$  的值。

**证明:** (1)

$$(1 + z^{-1}) / \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right) = \left(1 + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}\right)$$

(2)

$$(z^{-1} + 1) / \left(\frac{1}{3}z^{-1} + 1\right) = (3 - 6z^1 + 18z^2)$$