

数 学 习 题 集

THE COLLECTION OF MATHEMATICS PROBLEMS

李太吉 编

2019 年 8 月 9 日



Copyright © 2019 - 2020 Li Taiji. All Rights Reserved.

目录

1	数学分析	3
1.1	数列与极限	3
1.2	不等式	30
1.3	连续函数	34
1.4	一元函数微分学	50
1.5	数项级数	59
1.6	黎曼积分	69
2	线性代数	95
2.1	矩阵的初等变换	95
2.2	矩阵的相似变换	96
3	概率论与数理统计	97
3.1	随机事件与概率	97
3.1.1	概率的性质	97
3.2	随机变量及其分布	98
3.2.1	随机变量的方差与标准差	98
3.3	常用离散分布	99
4	离散数学	101
4.1	数理逻辑	101
4.2	集合论	101
4.2.1	函数	101
4.3	代数结构	102
4.3.1	代数系统	102
4.3.2	群与环	103

5	复分析	104
5.1	复数	104
5.2	复积分	105
5.3	复级数	110
5.4	解析函数	119
5.5	共形映射	125
6	信号与系统	136
6.1	信号与系统	136
6.2	线性时不变系统	136
6.3	连续时间傅里叶变换	137
6.4	离散时间傅里叶变换	138
6.5	采样	140
6.6	拉普拉斯变换	141
6.7	z 变换	142

第一章

数学分析

§1 数列与极限

命题 1.1.1 (Cauchy 命题) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 l , 则它的前 n 项的算术平均数也收敛于 l , 即有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛于 l , 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时

$$|x_n - l| < \varepsilon$$

则有

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - l \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n x_i - l}{n} \right| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - l|}{n} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - l|}{n} + \frac{\sum_{i=N+1}^n |x_i - l|}{n} \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

其中 $M = \sum_{i=1}^N |x_i - l|$, M 为有限值。

$N_1 = \max \left\{ \left\lceil \frac{M}{\varepsilon} \right\rceil, N \right\}$, 当 $N > N_1$ 时成立不等式

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - l \right| < \varepsilon$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l$$

推论 1.1.1 (Cauchy 命题推论) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$$

证明: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = d$, 所以数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 收敛于 d .
由 Cauchy 命题知,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{a_{n+1}}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{n} = d \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = d$$

推论 1.1.2 (Cauchy 命题推论) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 且收敛于 A , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$$

证明: 显然有

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}$$

由 Cauchy 命题知, 因为 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 即数列 $\{\ln a_n\}$ 收敛于 $\ln A$.
所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} = \ln A$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$$

推论 1.1.3 (Cauchy 命题推论) 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 且存在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

证明: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, 所以数列 $\left\{ \ln \frac{a_n}{a_{n-1}} \right\}$ 收敛于 $\ln l$
 由 Cauchy 命题知

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{a_2}{a_1} + \ln \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{a_{n+1}}{a_1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \frac{\ln a_{n+1}}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1}{n} = \ln l \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \ln l$$

也即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

命题 1.1.2 (Cauchy 命题 ∞ 时的特例) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$$

证明: $\forall A > 0$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 故 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时, $a_n > 2A + 2$.

又

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - N_1}{n} &= 1 > \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= 0 > -1 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}}{n} + \frac{x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \cdots + x_n}{n} \\ &> -1 + \frac{n - N_1}{n} (2A + 2) \\ &> -1 + \frac{1}{2} (2A + 2) \\ &= A \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$$

命题 1.1.3 ($\frac{0}{0}$ 型的 stolz 公式) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是收敛于 0 的数列, 其中 $\{a_n\}$ 是严格单调递减数列, 且存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$$

其中 l 为有限值或无穷。则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$ 时

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon$$

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1})$$

任取 $m > n$, 将上式中 n 替换为 $n+1, n+2, n+3, \dots, m-1$, 有

$$(l - \varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2}) < b_{n+1} - b_{n+2} < (l + \varepsilon)(a_{n+1} - a_{n+2})$$

$$(l - \varepsilon)(a_{n+2} - a_{n+3}) < b_{n+2} - b_{n+3} < (l + \varepsilon)(a_{n+2} - a_{n+3})$$

\vdots

$$(l - \varepsilon)(a_{m-1} - a_m) < b_{m-1} - b_m < (l + \varepsilon)(a_{m-1} - a_m)$$

将上式相加得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m)$$

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon$$

对于 m , 令 $m \rightarrow +\infty$, 有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$$

又有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| = \left| \frac{b_n}{a_n} - l \right|$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

命题 1.1.4 ($\frac{*}{\infty}$ 型的 stolz 公式) 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 其中 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的散数列, 且存在

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l$$

其中 l 为有限值或无穷。则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l$$

证明: (1) l 为有限值时。

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$ 时

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon$$

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1})$$

取定 n , 将上式中 n 替换为 $N, N+1, N+2, \dots, n-1$, 有

$$(l - \varepsilon)(a_N - a_{N+1}) < b_N - b_{N+1} < (l + \varepsilon)(a_N - a_{N+1})$$

$$(l - \varepsilon)(a_{N+1} - a_{N+2}) < b_{N+1} - b_{N+2} < (l + \varepsilon)(a_{N+1} - a_{N+2})$$

\vdots

$$(l - \varepsilon)(a_{n-1} - a_n) < b_n - b_n < (l + \varepsilon)(a_{n-1} - a_n)$$

将上式相加得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_N) < b_n - b_N < (l + \varepsilon)(a_n - a_N)$$

$$\left| \frac{b_n - b_N}{a_n - a_N} - l \right| < \varepsilon$$

$$\frac{b_n}{a_n} - l = \left(1 - \frac{a_N}{a_n}\right) \left(\frac{b_n - b_N}{a_n - a_N} - l\right) + \frac{b_N - la_N}{a_N}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时成立

$$0 < 1 - \frac{a_N}{a_n} < 2$$

$$\left| \frac{b_N - la_N}{a_n} \right| < \varepsilon$$

则当 $n > \max\{N_1, N\}$ 时有

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| < 3\varepsilon$$

(2) l 为 $+\infty$ 时。

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$ 时

$$b_{n+1} - b_n > a_{n+1} - a_n$$

由 (1) 可知

$$b_{n+1} - b_N > a_{n+1} - a_n$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 且 $\{b_n\}$ 严格单调增加。

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = 0$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{b_n}} = +\infty$$

(3) l 为 $-\infty$ 时同 (2).

命题 1.1.5 (Carleman 不等式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛的正项级数, 则不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

证明:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{a_1 (2a_2) \cdots (na_n)}}{\sqrt[n]{n!}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n \sqrt[n]{n!}} \\ &\leq e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\ &= e \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n ka_k \right] \\ &= e \sum_{k=1}^N \left\{ ka_k \left[\sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \right] \right\} \\ &= e \sum_{k=1}^N \left[ka_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1} \right) \right] \\ &\leq e \sum_{k=1}^N a_k \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 即可得到 Carleman 不等式。

下证不等式右边的系数 e 不能在改进。

对于每个 N 构造一个数列

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \cdots, N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

然后作出两个级数和之比, 令 $n \rightarrow +\infty$, 应用 stolz 定理得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}{\sum_{n=1}^N b_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{\sqrt[N]{N!}} = e$$

定理 1.1.1 (Sapagof 判别法) 设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ 发散。

证明: 先证充分性。

正数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 则 $\{a_n\}$ 存在极限, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a > 0)$$

设

$$b_n = 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m b_n &= \sum_{n=1}^m \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \\ &\leq \frac{1}{a} \sum_{n=1}^m (a_n - a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{a} (a_1 - a_{m+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m b_n \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{a} (a_1 - a_{m+1}) \\ &= \frac{1}{a} (a_1 - a) \end{aligned}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

再证必要性。若 $a = 0$, 则由柯西准则得

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k - a_{k+1}}{a_k} \\ &= \frac{1}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n+p+1}) \\ &= \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则总存在 $p \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \geq \frac{1}{2}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

定理 1.1.2 (Sapagof 判别法等价形式 I) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数列, 则该数列与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

同敛散。

证明: $\{a_n\}$ 单调增加, 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (a \neq +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.
所以

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| &= \left| \frac{a_{n+p+1} - a + a - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| \\ &= \frac{|a_{n+p+1} - a| + |a_{n+1} - a|}{a_{n+1}} \\ &= \frac{2\varepsilon}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{n+p+1}} \\
&= \frac{a_{n+p+1} - a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \\
&= 1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}}
\end{aligned}$$

由柯西准则, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 则存在 $p \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \leq \frac{1}{2}$$

则

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \geq \frac{1}{2}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

定理 1.1.3 $\{S_n\}$ 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 同敛散。

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_{n+1}} \\
&\leq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_{n+1}} \\
&\leq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_n}
\end{aligned}$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时, $|S_n - S| < \varepsilon$.

则有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_n} \right| &= \left| \frac{S_{n+p+1} - S + S - S_n}{S_n} \right| \\
&\leq \frac{|S_{n+p+1} - S| + |S_{n+1} - S|}{S_n} \\
&= \frac{2\varepsilon}{S_n}
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} &\geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_{n+p+1}} \\ &\geq \frac{S_{n+p+1} - S_n}{S_{n+p+1}} \\ &= 1 - \frac{S_n}{S_{n+p+1}} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 则存在 $p \in \mathbb{N}$,

$$1 - \frac{S_n}{S_{n+p+1}} \geq \frac{1}{2}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散。

定理 1.1.4 (1) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件时存在正数列 $\{b_n\}$ 和正数 δ , 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta > 0$$

(2) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散的充分必要条件时存在发散的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$, 使得当 n 充分大时有

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$$

证明: (1) 先证充分性。

由 $b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta > 0$ 得

$$a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq \delta a_{n+1}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{\delta} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$$

不妨设 $n \geq 1$ 时上式成立, 则

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^n a_k \\
 &\leq a_1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) \\
 &= a_1 + \frac{1}{\delta} (a_1 b_1 - a_n b_n) \\
 &= a_1 + \frac{1}{\delta} a_1 b_1
 \end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。再证必要性。

令

$$b_n = \frac{R_n}{a_n}$$

其中 R_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的余项, 即

$$\begin{aligned}
 R_n &= S - S_n \\
 b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} &= \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 > 0
 \end{aligned}$$

必要性得证。

(2) 充分性即为比较判别法的比值形式。

下证必要性。

令

$$b_n = \frac{S_n}{a_n}$$

易知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 \leq 0$$

必要性得证。

命题 1.1.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$, p 为固定的正整数, λ 是常数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\lambda} = \frac{\lambda}{p}$$

证明: 对固定的 $i \in \mathbb{N}$, $\{a_{np+i}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+p} - a_n = \lambda$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n+1)p+i} - a_{np+i} = \lambda$$

令 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$, 由 Cauchy 命题知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n} = \lambda$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{n} = \lambda$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{np+i}}{np+i} = \frac{n}{np+i} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{np+i}}{n} = \frac{\lambda}{p}$$

命题 1.1.7 将二项式系数 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 的算术平均数和几何平均数分别记作 A_n 和 G_n . 证明:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 2$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = e^{\frac{1}{2}}$$

证明: (1) 因为

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = 2$$

(2) 因为

$$G_n = \sqrt[n]{\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}}$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\binom{n}{0} \binom{n}{1} \cdots \binom{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k} = e^{\frac{1}{2}}$$

命题 1.1.8 设

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证明: 应用 stolz 公式, 知

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \binom{n+1}{k} - \sum_{k=0}^n \ln \binom{n}{k}}{(n+1)^2 - n^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln (1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

命题 1.1.9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3na_n} = 1$$

证明: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$, 则 S_n 单调增加, 且 $S_n \rightarrow \infty$, 否则若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n S = 0$$

与题设矛盾. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, 又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot S_n \cdot \frac{1}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} = 0$$

$$\begin{aligned}
S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_{n-1}S_n + S_{n-1}^2) \\
&= a_n^2(2S_n^2 - 3a_n^2 S_n + a_n^4) \\
&= 2a_n^2 S_n^2 - 3a_n^4 S_n + a_n^6
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^3 - S_{n-1}^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n^3 S_n^3} \cdot \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3na_n} = 1$$

命题 1.1.10 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

证明: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 故数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 有界, $\exists M > 0$,

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

取自然数 $N_1 > \max \left\{ N, \frac{2M}{\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^n |a_k - a| + \sum_{k=0}^n (|b_k - a|) + |b| \right) \right\}$

则当 $n > N_1$ 时有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^n b_{n-k} (a_k - a) + \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} - b) + ab \right| \\ &= \frac{M}{N} \left| \sum_{k=0}^{N_1} |a_k - a| + \sum_{k=0}^{N_1} |b_{n-k} - b| + |b| \right| \\ &\quad + \frac{M}{n} \left| \sum_{k=N_1+1}^n |a_k - a| + \sum_{k=N_1}^n |b_{n-k} - b| \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n} (n - N_1) - \frac{\varepsilon}{4M} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

命题 1.1.11 设 $a_1 = 1, a_n = n(a_{n-1} + 1), n = 2, 3, \cdots$, 且

$$x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

证明: 由 $\frac{a_{n-1} + 1}{a_n} = \frac{1}{n}$ 得

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) &= \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \\
&= \frac{a_1+1}{a_1} \cdot \frac{a_2+1}{a_2} \cdots \frac{a_n+1}{a_n} \\
&= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1+1}{a_2} \cdot \frac{a_2+1}{a_3} \cdots \frac{a_{n-1}+1}{a_n} \cdot a_{n+1} \\
&= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \\
&= \frac{a_{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!} &= \frac{n(a_{n-1}+1)}{n!} = \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \\
&\cdots \\
&= \frac{a_1}{1!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

则

$$\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$$

命题 1.1.12 设 $a_1, a_2 > 0$, $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}}$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛。

证明: 选取 α , 使得

$$\alpha < \min\{a_0, a_1\} \leq \max\{a_0, a_1\} < \frac{1}{\alpha}$$

由数学归纳法可证

$$\alpha < \min\{a_{n-1}, a_n\} \leq \max\{a_{n-1}, a_n\} < \frac{1}{\alpha}$$

即

$$\alpha < a_n < \frac{1}{\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

所以 $\{a_n\}$ 有界。

令

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad l = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$$

且易知 L, l 均是有限数, 则 $L \leq \frac{1}{\alpha}, l \geq \alpha$.

$$\begin{aligned} L &= \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{a_{n-1} + a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_{n-1} + a_{n-2})} = \frac{2}{\liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} + \liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{l} \end{aligned}$$

同理 $l = \frac{1}{L}$, 则 $lL = 1$.

可设 $\{a_{nk+3}\}$ 收敛到 L , $\{a_{nk+2}\}$, $\{a_{nk+1}\}$, $\{a_{nk}\}$ 分别收敛到 a, b, c , 则 $l < a, b, c < L$, 又

$L = \frac{2}{a+b}$, 则 $a+b=2l$, 同理, $b=c=L$

所以 $l=L=1$, $\{a_n\}$ 收敛, 极限为 1.

命题 1.1.13 证明: 数列 $x_n = \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\frac{1}{n}} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}}$ ($n=1, 2, \cdots$)

有位位于 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 的极限。

证明: 设

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

则

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 1, \quad x \in [1, +\infty)$$

所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调减少。

$$\begin{aligned} x_n &\geq \int_1^2 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx + \int_2^3 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx + \cdots + \int_2^3 \frac{1}{x + \frac{1}{x}} dx - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \int_1^{n+1} \frac{x}{x^2 + 1} dx - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^{n+1} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(n+1)^2 + 1}{2} - \ln \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &= \ln \sqrt{\frac{(n+1)^2 + 1}{n}} \\ &\geq \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$\{x_n\}$ 有下界, 又

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1 + \frac{1}{n+1}} - \ln \frac{1}{n} + 1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 0$$

$\{x_n\}$ 单调减少, 则 $\{x_n\}$ 收敛。由 $x_n \geq 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ 知, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$, 所以

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{1}{2}$$

命题 1.1.14 设 $a_n > 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$$

证明: 数列 $\{a_n\}$ 无界。

证明: 反证法。假设 $\{a_n\}$ 有界, 即 $\exists M > 0$, $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 则有

$$0 < \frac{a_n}{2M} \leq \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

两边对 n 取极限, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

设

$$A(n) = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}}, \quad B(n) = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n+2}}$$

显然 $B(n) \in (0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2} + a_{n+3}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_{n+2} + a_{n+3}} \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2} + a_{n+3}} = 0$$

同理可证, 对任意 $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+p} + a_{n+p+1}} = 0$$

则 $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists N_p \in \mathbb{N}$, $n > N_p$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+p} + a_{n+p+1}} < \frac{1}{4}$$

即 $n > N_p$ 时, $a_n < 2a_{n+p}$ 和 $a_n < 2a_{n+p+1}$ 中至少有一个成立。

显然我们可以选取一个子列, 使其单调增加且无界。

命题 1.1.15 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

对所有正数数列 $\{a_n\}$ 成立, 且 e 不能再改进。

证明: 设 $s_k = \left(\frac{1 + a_{k+1}}{a_k} \right)^k$, 则 $s_k \geq 0$, 且 $\sup_{k \geq n} \{s_k\}$ 对 n 不增。
则 $\sup_{k \geq n} \{s_k\}$ 对 n 极限存在, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{s_k\} = l > e$$

则对任意 $0 < \varepsilon < l - e$, 选取 $N \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时

$$l \leq \sup_{k \geq n} \{s_k\} < e - \varepsilon$$

我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

令

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

选取 $N' \in \mathbb{N}$, $n > N'$ 时

$$e - \varepsilon < r_n < e + \varepsilon$$

令 $M = \max\{N, N'\}$,

$$s_n \leq \sup_{k \geq n} \{s_k\} < r_n, \quad \forall n > M$$

进一步有

$$s_n \leq \sup_{k \geq n} \{a_k\} \leq r_n, \quad \forall n > M$$

则有

$$\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_{M+1}}{M+1}, \quad n > M$$

$$\sum_{k=M+1}^{m-1} \frac{1}{k+1} < \frac{a_{M+1}}{M+1} - \frac{a_m}{m} < \frac{a_{M+1}}{M+1}$$

令 $m \rightarrow \infty$, 则 $\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ 收敛, 而调和级数不收敛。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

命题 1.1.16 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q, \quad |q| < 1$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}$$

证明: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, n > N_1$ 时

$$|a_n - a| < \frac{1 - |q|}{3(1 - q)} \varepsilon$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, 则存在 $N_2 \in \mathbb{N}, n > N_2$ 时

$$|q|^n < \frac{\varepsilon}{3N_1M|1 - q|}, \quad |aq^n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

因此当 $n > N = N_1 + N_2 + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & |(1 - q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1} - a)| \\ &= \left| (1 - q)[(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_{N_1+1} - a)q^{n-N_1-1} + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1} - aq^n] \right| \\ &< |1 - q| \left[\frac{(1 - |q|)\varepsilon}{3(1 - q)} \cdot \frac{1 - |q|^{n-N_1}}{1 - |q|} + N_1M \frac{\varepsilon}{3N_1M|1 - q|} \right] + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = a$$

又 $1 - q \neq 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \frac{a}{1 - q}$$

命题 1.1.17 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明:

(1) 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_n = \frac{n+1}{2n} a_n + 1$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

证明: (1) 由 $a_n = \frac{n+1}{2n} a_n + 1$ 知,

$$2a_n - a_{n-1} - 2 = \frac{a_{n-1}}{n}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} + 1$$

所以

$$\begin{aligned} 2a_n - a_{n-1} - 2 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{k!(n-k)!}{n!} + \frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!} - \frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{k!(n-k-1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} a_{n-1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2(a_n - a_{n-1}) &= \frac{n+1}{n} a_{n-1} - \frac{n+2}{n+1} a_n \\ &= a_{n-1} - a_n + \frac{1}{n} a_{n-1} - \frac{1}{n+1} a_n \\ &> (a_{n-1} - a_n) + \frac{1}{n+1} (a_{n-1} - a_n) \\ &= \frac{n+2}{n+1} (a_{n-1} - a_n) \end{aligned}$$

因为 $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{8}{3}$, 所以 $n \geq 4$ 时, $b_n \geq a_{n+1}$
即 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, 所以 $\{a_n\}$ 存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} a_{n-1} + 1$$

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

引理 1.1.1 设集合

$$S = \{n\alpha - [n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

其中 $\{n\alpha\} = n\alpha - [n\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 即 α 为无理数。

证明: 集合 S 在区间 $[0, 1]$ 上稠密。

证明: 先证集合 S 为无穷集合。设任意 $i, j \in \mathbb{N}$

$$\{i\alpha\} \neq \{j\alpha\}$$

否则 $\exists i, j \in \mathbb{N}$ 使得

$$\{i\alpha\} = i\alpha - [i\alpha] = j\alpha - [j\alpha] = \{j\alpha\}$$

则有

$$\alpha = \frac{[i\alpha] - [j\alpha]}{i - j} \in \mathbb{Q}$$

与题设矛盾, 所以显然集合 S 是无穷集, 且 $S \subseteq [0, 1]$.

由 Bolzano-Weierstrass 定理知, 集合 S 至少存在一个聚点. 因此易知, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists i, j \in \mathbb{N}$ 使得

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{n}$$

则存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \leq 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

又因为 α 是无理数, 所以不存在 $M \in \mathbb{N}$, 使 $M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) = 1$, 则

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) < 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

因为 $\{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{n}$, 则对任意 $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, 存在 $k \in \{1, 2, \dots, M\}$

$$k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right]$$

$$\begin{aligned} k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) &= \{k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})\} \\ &= \{k[(i\alpha - [i\alpha]) - (j\alpha - [j\alpha])]\} \\ &= \{k(i-j)\alpha + k([j\alpha] - [i\alpha])\} \\ &= \{k(i-j)\alpha\} \end{aligned}$$

因此

$$\{k(i-j)\alpha\} \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right] \cap S$$

即集合 S 在区间 $[0, 1]$ 上稠密。

命题 1.1.18 证明: 数列 $\{\sin n\}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上稠密。

证明: $\forall v \in [-1, 1]$, $\exists u \in [0, 2\pi]$

$$\sin u = v$$

由 $y = \sin x$ 的连续性可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $|x - u| < \delta$ 时

$$|\sin u - \sin x| = |v - \sin x| < \varepsilon$$

由引理 1.1.1 知, 对任意无理数 α , 集合

$$\{n\alpha - [n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

在区间 $[0, 1]$ 上稠密。所以令 $\alpha = \frac{u}{2\pi}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} - \frac{u}{2\pi} \right| < \frac{\delta}{2\pi}$$

其中

$$\left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} = \frac{n}{2\pi} - \left[\frac{n}{2\pi} \right]$$

两边乘以 2π , 得

$$\left| 2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} - u \right| < \delta$$

所以

$$\left| \sin \left(2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} \right) - \sin u \right| < \varepsilon$$

又因为

$$2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} = \frac{n}{2\pi} - \left[\frac{n}{2\pi} \right]$$

则有

$$\sin \left(2\pi \left\{ \frac{n}{2\pi} \right\} \right) = \sin \left[2\pi \left(\frac{n}{2\pi} - \left[\frac{n}{2\pi} \right] \right) \right] = \sin \left(2\pi \cdot \frac{n}{2\pi} \right) = \sin n$$

即

$$|\sin n - \sin u| = |\sin n - v| < \varepsilon$$

命题 1.1.19 求数列 $a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}$ 的极限。

证明: 由算术几何平均值不等式知

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}} &= \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n} \right) \times 1 \times \cdots \times 1} \\ &\leq \frac{n - 1 + 1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{2 + 3 + \cdots + n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

又 $a_n \leq 0$, 则由夹逼定理得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

命题 1.1.20 证明: 若 $p_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a$$

证明: 由题设知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| < \varepsilon$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, 使得

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

且 $\exists M > 0$, 使得

$$|a_n| < M, \quad n \in \mathbb{N}$$

则当 $n > N = N_1 + N_2$ 时有

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - a \right| &= \left| \frac{p_1(a_n - a) + p_2(a_{n-1} - a) + \dots + p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{p_1(a_n - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + \dots + \left| \frac{p_{n-N_2}(a_{N_2+1} - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\quad + \left| \frac{p_{n-N_2+1}(a_{N_2} - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + \dots + \left| \frac{p_n(a_1 - a)}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| \\ &\leq \left| \frac{(p_1 + p_2 + \dots + p_{n-N_2})\varepsilon}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \right| + 2MN_2\varepsilon \\ &\leq (2MN_2 + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \dots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = a$$

命题 1.1.21 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left(\frac{x}{n} \right) dx \right)^{\frac{1}{n}}$$

证明: 易知

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left(\frac{x}{n}\right) dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4n}\right)$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{x}{n}\right)^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \sqrt[n]{\frac{\pi}{n+1}} = \frac{\pi}{4}$$

又有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{\pi}{4} \tan^n \left(\frac{\pi}{4n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \left(\frac{\pi}{4n}\right) \cdot \sqrt[n]{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

则由夹逼定则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \left(\frac{x}{n}\right) dx \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}$$

命题 1.1.22 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 用定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right)}{\ln n} = 0$$

证明: 设 $\max |x_n| = M$, 且对任意 $\varepsilon' > 0$, 存在一个 $N_1(\varepsilon')$, 使得当 $N > N_1(\varepsilon')$ 时, $|x_k| \leq \varepsilon'$ 成立. 则有

$$\begin{aligned} \frac{\left|x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right|}{\ln n} &= \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} x_k + \sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} x_k\right|}{\ln n} \\ &\leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} x_k\right| + \left|\sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} x_k\right|}{\ln n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^{N_1(\varepsilon')} \frac{1}{n+1-k} |x_k| + \sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k} |x_k|}{\ln n} \\ &\leq \frac{M\varepsilon' + \left(\sum_{k=N_1(\varepsilon')+1}^n \frac{1}{n+1-k}\right) \varepsilon'}{\ln n} \\ &< (M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

因此令 $\varepsilon = (M+1)\varepsilon'$, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $N(\varepsilon) = N_1(\varepsilon') = N_1(\frac{\varepsilon}{M+1})$, 使得当 $N > N(\varepsilon)$ 时

$$\frac{\left|x_n + \frac{x_{n-1}}{2} + \cdots + \frac{x_1}{n}\right|}{\ln n} < \varepsilon$$

命题 1.1.23 已知正数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}$, $n \geq 1$. 证明: $\{x_n\}$ 收敛并求出该极限。

证明: (1) 如果 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 则有

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq x_2$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}) - (\sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}) = (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}) + (\sqrt{x_n} - \sqrt{x_{n-1}}) \geq 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加。且由数学归纳法可证, 若 $x_n \leq 4$, 则

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \leq 4$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛, 且极限为 4.

(2) 如果 $0 < x_2 < x_1 < 1$, 则有

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq x_1$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_{n-1}} \geq 0$$

同上。

(3) 如果 $x_1 \geq 1$ 或 $x_2 \geq 1$, 则

$$x_3 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 1 \implies x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \geq 1$$

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 4| &= |\sqrt{x_{n+1}} - 2 + \sqrt{x_n} - 2| \\ &\leq |\sqrt{x_{n+1}} - 2| + |\sqrt{x_n} - 2| \\ &= \left| \frac{x_{n+1} - 4}{\sqrt{x_{n+1}} + 2} \right| + \left| \frac{x_n - 4}{\sqrt{x_n} + 2} \right| \\ &\leq \frac{1}{3}|x_{n+1} - 4| + \frac{1}{3}|x_n - 4| \end{aligned}$$

由递推公式易知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+2} - 4| = 0$$

命题 1.1.24 设 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 定义 $x_{n+1} = \sin x_n$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2$ 的值。

证明: 因为 $nx_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$, 由 Stolz 定理知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n}$$

易知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{3}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n^2 = 3$$

同时可知

$$x_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 发散。

命题 1.1.25 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛并求出该极限。

证明: 由数学归纳法易证

$$a_n \leq 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

设函数 $f(x) = \sqrt{2}^x - x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2} \ln 2 \sqrt{2}^x - 1, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{2} \ln 2\right)^2 \sqrt{2}^x \geq 0$$

易知 $x \leq 2$ 时, $f'(x) < 0$, 且 $f(2) = 0$. 因此

$$f(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 2$$

即 $a_{n+1} \leq a_n$. 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且极限 a 满足

$$\sqrt{2}^a = a$$

即 $a = 2$.

命题 1.1.26 设

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right]$$

证明 S_n 收敛并求其值。

证明: 易知

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right] \right] \\
&= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right] \\
&= \frac{3}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

命题 1.1.27 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n = +\infty$$

证明: 注意到, $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$, $\forall x \geq 0$, 得到

$$\begin{aligned}
\left(1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n &\geq \left(1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n \\
&\geq \left(1 + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n \\
&\geq \left(1 + \frac{5}{6\sqrt{n}} \right)^n \\
&\geq \frac{5\sqrt{n}}{6}
\end{aligned}$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n} dx \right)^n = +\infty$$

命题 1.1.28 求 $x \in [1, 2)$, 使得对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$, 满足 $[2^n x]$ 被 4 除后余 1 或者余 2.

证明: x 可以表示为二进制形式, $[2^n x]$ 即为 x 小数点右移 $n-2$ 位 (若 $n < 2$ 时, 即为左端补 0 后小数点左移相应位数) 后保留整数部分。

$[2^n x]$ 被 4 除后的余数即为 $[2^n x]$ 二进制表示的最后两位数, 因此 x 的二进制形式中, 任意连续两位数必为 01 或 10, 则

$$x = 1.0101 \cdots$$

即 $x = \frac{4}{3}$.

§2 不等式

定理 1.2.1 (Bernoulli 不等式) 设 $h > -1$, $n \in \mathbb{N}$, 则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

其中 $n > 1$ 时等号成立的充分必要条件时 $h = 0$.

证明: $n = 1$ 或 $h = 0$ 时不等式显然成立, 下面只证明 $n > 1$ 和 $h \neq 0$ 时的情况。

将 $(1+h)^n - 1$ 作因式分解, 可以得到

$$(1+h)^n - 1 = h[1 + (1+h) + (1+h)^2 + \cdots + (1+h)^{n-1}]$$

当 $h > 0$ 时, 右边方括号内第二项起都大于 1, 因此 $(1+h)^n - 1 > nh$.

当 $-1 < h < 0$ 时, 右边方括号内第二项起都小于 1, 则 $(1+h)^n - 1 < nh$, 又因为 $h < 0$, 所以得到 $(1+h)^n - 1 > nh$.

下证等号成立的条件, 易知 $A > 0$, $A+B > 0$, $n \in \mathbb{N}$ 时成立不等式

$$(A+B)^n \geq A^n + nA^{n-1}B$$

且 $n > 1$ 时等号成立的充分必要条件是 $B = 0$.

定理 1.2.2 (算术平均值-几何平均值不等式) 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个非负实数, 则成立不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

证明: 显然, 若 a_1, a_2, \dots, a_n 中有 0, 则不等式成立, 且此时等号成立的充分必要条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

下面只证 a_1, a_2, \dots, a_n 全为正数时的情况。 $n = 1$ 时不等式成立。

假设 $n = k$ 时不等式成立, 则 $n = k+1$ 时有以下分解

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} + \frac{ka_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}{k(k+1)}$$

令

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

$$B = \frac{ka_{k+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)}{k(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} \\
&= (A+B)^{k+1} \\
&\geq A^{k+1} + (k+1)A^k B \\
&= A^k(A + (k+1)B) \\
&= A^k a_{k+1} \\
&\geq a_1 a_2 \cdots a_{k+1}
\end{aligned}$$

不等式等号成立时条件也可以由数学归纳法得到。

$n=1$ 时显然成立。

假设 $n=k$ 时成立, 则 $n=k+1$ 时可以由以上推导过程观察得到等号成立的充分必要条件是

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2 = \cdots = a_k \\
ka_{k+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_k
\end{aligned}$$

也就是

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$$

定理 1.2.3 (Young 不等式) $p, q \in \mathbb{R}^+$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p > 1) \\
a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p < 1)
\end{aligned}$$

其中 a, b 为任意实数。

证明: 设函数

$$f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$$

易证 $\alpha < 1$ 时, $f(x) \leq 0$; $\alpha \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$. 令 $x = \frac{a}{b}$, 则

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 &\leq 0 \quad (\alpha < 1) \\
\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha \left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 &\geq 0 \quad (\alpha \geq 1)
\end{aligned}$$

令 $\alpha = \frac{1}{p}$, 有

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad (p > 1) \\ a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad (p < 1) \end{aligned}$$

定理 1.2.4 (Hölder 不等式) $p, q \in \mathbb{R}^+$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则

$$\sum x_i y_i \leq \left(\sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

其中, $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 均为非负数。

证明: 令 $X = \sum x_i^p$, $Y = \sum y_i^q$. 由 Young 不等式得

$$\begin{aligned} \frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} &= \left(\frac{x_i^p}{X} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{Y} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{Y} \\ \sum \frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\sum x_i^p}{X} + \frac{1}{q} \frac{\sum y_i^q}{Y} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \sum x_i y_i &\leq X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}} = \left(\sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

定理 1.2.5 (Minkowski 不等式) 设 $p \in \mathbb{R}^+$

$$\left(\sum (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

其中, $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 均为非负数。

证明:

$$\sum (x_i + y_i)^p = \left(\sum (x_i + y_i)^{p-1} \right) (x_i + y_i) = x_i \sum (x_i + y_i)^{p-1} + y_i \sum (x_i + y_i)^{p-1}$$

由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned} \sum (x_i + y_i)^p &\leq \left(\sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_i + y_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum (x_i + y_i)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned}$$

定理 1.2.6 (1) 设 $F \in C[a, b]$, 处处大于 0, 且单调减少, 则有

$$\int_a^b F(x) dx \int_a^b x F^2(x) dx \leq \int_a^b F^2(x) dx \int_a^b x F(x) dx$$

(2) 设 f, g 在区间 $[a, b]$ 上对于任何 x, y 有

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

又设 $p(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数, 且处处大于 0. 则有

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \int_a^b p(x)g(x)dx \leq \int_a^b p(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

证明: (1) 令两边第二项积分变量替换为 y , 化为二重积分, 得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b \int_a^b F(x)yF^2(y) - F(x)yF(y)dx dy \\ &= \int_a^b \int_a^b yF(x)F(y)(F(y) - F(x))dx dy \end{aligned}$$

再令 x 与 y 交换, 得

$$I_2 = \int_a^b \int_a^b xF(x)F(y)(F(x) - F(y))dx dy$$

因为积分区域关于 $x = y$ 对称, 则

$$2I = I_1 + I_2 = \int_a^b \int_a^b F(x)F(y)(F(x) - F(y))dx dy$$

因为 $F(x)$ 单调减少且处处大于 0, 所以 $F(x)F(y)(F(x) - F(y)) \leq 0$, 即 $I \leq 0$. 则

$$\int_a^b F(x)dx \int_a^b xF^2(x)dx \leq \int_a^b F^2(x)dx \int_a^b xF(x)dx$$

(2) 同 (1), 先化为二重积分, 再利用题设证明。

定理 1.2.7 (Bellman-Gronwall 不等式) 设当 $x \geq 0$ 时, $f(x), g(x)$ 为非负连续函数, 且有

$$f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt$$

其中 $A > 0$.

则当 $x \geq 0$ 时

$$f(x) \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$$

证明: 由题设得

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} &\leq 1 \\ \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} &\leq g(x) \\ \int_0^x \frac{f(x)g(x)}{A + \int_0^x f(t)g(t)dt} dx &\leq \ln A + \int_0^x g(t)dt\end{aligned}$$

即

$$f(x) \leq A + \int_0^x f(t)g(t)dt \leq Ae^{\int_0^x g(t)dt}$$

定理 1.2.8 设 f 是区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数, 且 $0 < m \leq f(x) \leq M$, 则有

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} (b-a)^2$$

证明: 左右两边同乘 Mm , 得

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(M+m)^2}{4} (b-a)^2$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx} \sqrt{\int_a^b f(x) dx} &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{Mm}{f(x)} + f(x) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{(f(x) - M)(f(x) - m)}{f(x)} + (M + m) \right] dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b (M + m) dx \\ &= \frac{1}{2} (b-a)(M + m)\end{aligned}$$

则有

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{4} (b-a)^2 (M + m)^2$$

即

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \int_a^b f(x) dx \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} (b-a)^2$$

§3 连续函数

命题 1.3.1 设 $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$ 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是互异实数, c_1, c_2, \dots, c_n 不同时为 0.

证明: $f(x)$ 的零点个数小于 n .

证明: 应用数学归纳法。 $n = 1$ 时, $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ 无零点, 结论成立。

假设 $n = m$ 时成立, 则 $n = m + 1$ 时, 应用反证法, 假设此时零点个数大于等于 $m + 1$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m+1} c_k e^{\lambda_k x} = \left[c_{m+1} + \sum_{k=1}^m c_k e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x} \right]$$

令

$$g(x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x} + c_{m+1}$$

则 $g(x)$ 有至少 $m + 1$ 个零点, 由 Rolle 中值定理得, $g'(x) = \sum_{k=1}^m c_k (\lambda_k - \lambda_{m+1}) e^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x}$ 至少有 m 个零点

因为 $a_k = c_k (\lambda_k - \lambda_{m+1})$ 互异, 且 $\lambda_k - \lambda_{m+1}$ 不同时为 0

所以 $g'(x)$ 零点个数小于 m 个, 与假设矛盾。则 $n = m + 1$ 时结论成立。

由数学归纳法, 结论得证。

命题 1.3.2 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 且 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$)

证明:

$$f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

证明: 因为 $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = O(x)$ ($x \rightarrow 0$), 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| < \delta$$

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x\alpha(x), \quad |x| < \delta$$

其中 $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x| < \delta$, 则

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{2^{k-1}} \alpha\left(\frac{x}{2^k}\right) \right]$$

因为 $k \in \mathbb{N}$ 时,

$$\left| \frac{x}{2^{k-1}} \right| \leq |x|$$

所以

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{2^{k-1}} \left| \alpha\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) \right| |x| \right] \\
&\leq |x| \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2^k} \right) \varepsilon \\
&= |x| \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] \varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| \leq \varepsilon \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right] < \varepsilon$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon$$

所以

$$f(x) = O(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

命题 1.3.3 设 $f \in C(I)$, I 为区间。证明：若 $x_0 \in I$ 是 f 的唯一极值点，则 x_0 一定是最值点；若 x_0 是极小值（极大值）点，则 x_0 是 f 的最小值（最大值）点。

证明：不妨设 x_0 是 f 的唯一极小值点， x_1 是 f 的最小值点，应用反证法，假设 $x_0 \neq x_1$ ，则不妨设 $x_0 < x_1$

因为 x_0 是极小值点，所以存在 $x_2 > x_0$, $x_2 < x_1$

$$f(x_2) > f(x_0) > f(x_1)$$

由介值定理得， $\exists x_3 \in (x_2, x_1)$

$$f(x_3) = f(x_0)$$

则易知 $\exists \eta \in (x_3, x_0)$

$$f'(\eta) = 0$$

其中 η 为极值点，与题设矛盾。

所以 $x_0 = x_1$ ，又若最值点不唯一，即 $\exists \alpha \in I$, $\alpha \neq x_0$

$$f(\alpha) = f(x_0)$$

同上可知与题设矛盾。

命题 1.3.4 若 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 为

(1) 单调增加

(2) 单调减少

是否存在 $x \in [0, 1]$, 使得 $f(x) = x$

证明: (1) 存在。

令 $A = \{x | x \in [0, 1] \wedge f(x) > x\}$, 若 $f(0) = 0$, 则结论显然成立。

若不然, 则 A 非空, 因此 A 有上确界, 不妨设为 a , 令 $b = f(a)$

a) $a < b$ 时。

因为 f 是单调的, a 为上确界, 可得

$$b = f(a) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{a+b}{2}$$

与 $a < b$ 矛盾。

b) $a > b$ 时。

因为 a 为上确界, 所以存在 $\eta \in A$, $\eta > \frac{a+b}{2}$, 则

$$b = f(a) \geq f(\eta) > \eta > \frac{a+b}{2}$$

与 $a > b$ 矛盾。

所以 $a = b$, 即 $f(a) = a$.

(2) 不一定存在。

例如, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

命题 1.3.5 设 $f, g: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 是单调增加函数, 且 $f \circ g = g \circ f$. 证明: f 和 g 有一个公共不动点。

证明: 设

$$A = \{x | x \in [a, b] \wedge x \leq f(x) \wedge x \leq g(x)\}$$

显然 A 非空, 所以存在上确界 $u = \sup A$

易知 $u \leq f(u)$, $u \leq g(u)$, 所以

$$f(u) \leq f(g(u)) = g(f(u))$$

又

$$f(f(u)) \geq f(u)$$

即 $f(u) \in A$, 则

$$f(u) \leq u$$

所以

$$u = f(u) = g(u)$$

则 u 为 f 和 g 的公共不动点。

命题 1.3.6 设函数 f 在区间 I 上只有可去间断点, 定义

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$$

证明: $g \in C(I)$

证明: $\forall x_0 \in I$, 因为 $g(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$, 所以存在 $\delta > 0$, $t \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时

$$|f(t) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是, 当 $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - g(x_0) \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow x} |f(t) - g(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

即 g 在 x_0 处连续, 由 x_0 的任意性可知, g 在区间 I 上连续。

命题 1.3.7 设函数 f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续, 且有 $x_n \in [a, b]$, 使得

$$g(x_n) = f(x_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

证明: 必有一点 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$

证明： 反证法。若 $F(x) = f(x) - g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, 不妨设 $F(x) > 0$

则由 F 连续知, F 在 $[a, b]$ 上有最值, 设 $\min F(x) = m$

则

$$F(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - g(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) - f(x_{n+2}) \geq m$$

所以

$$f(x_n) - f(x_{n+1}) \geq m$$

...

$$f(x_1) - f(x_2) \geq m$$

则

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_1) - mn$$

即 f 无界, 与题设矛盾。得证。

命题 1.3.8 设函数 f 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且有界。证明: 对任意给定的 λ , 存在一个数列 $\{x_n\}$ 满足

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + \lambda) - f(x_n)] = 0$$

证明： 反证法。不失一般性地, 我们设 $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ 时结论显然成立; 若 $\lambda < 0$, 则有

$$-[f(x_n + \lambda + |\lambda|) - f(x_n + \lambda)] = f(x_n + \lambda) - f(x_n)$$

化为 $\lambda > 0$ 的形式。

若命题不成立, 则必存在 $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $\forall M > 0$, 当 $x > M$ 时

$$|f(x + \lambda) - f(x)| > \varepsilon$$

由 f 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 所以 $f(x + \lambda) - f(x)$ 不变号, 不妨设

$$f(x + \lambda) - f(x) > \delta, \quad x > M$$

则

$$\begin{aligned}
 f(x_n + m\lambda) &\geq f[x_n + (m+1)\lambda] + \varepsilon \\
 &\dots \\
 &\geq f(x_n) + m\lambda
 \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$, 则

$$f(x_n + m\lambda) \rightarrow \infty$$

与 f 有界矛盾。

命题 1.3.9 设函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且任意 $x \in [0, 1]$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x+n) = 0$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

证明: 因为 f 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in [0, +\infty)$ 时

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

将 $[0, 1]$ 等分成 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, 使每个区间的长度为 $\frac{1}{m} < \delta$
 因为 $x - [x]$, $\forall x \geq 1$, 且

$$x \rightarrow +\infty \leftrightarrow [x] \rightarrow +\infty$$

所以存在 $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$

$$x - [x] \in [x_k, x_{k+1}]$$

即

$$0 \leq x - [x] - x_k < \delta$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$ 成立, 所以对任意 x_k , $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x+n) = 0$$

因此 $\exists N \in \mathbb{N}$, $n > N$ 时

$$|f(x_k + n)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

当 $x > N > 1$ 时, $[x] > N$, 且

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f([x] + x_k) + f(x_k + [x])| \\
&= |f(x) - f([x] + x_k)| + |f(x_k + [x])| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

命题 1.3.10 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上定义, 且处处有极限。证明:

- (1) 对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $[a, b]$ 上使 $\left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \varepsilon$ 的点至多只有有限个。
(2) f 在 $[a, b]$ 中至多只有可列个间断点。

证明: (1) 反证法。若对 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $[a, b]$ 上使 $\left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \varepsilon$ 的点有无限个, 令间断点集合为点列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, 由聚点定理得, 存在子列 $\{x_k\}$ 收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

又由题设, 设 $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \alpha$, 由极限性质得知, $\exists \delta > 0$, $|t - \alpha| < \delta$

$$|f(t) - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon_0$$

又由 Heine 归结定理得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t) = \alpha$$

则存在 $k_0 \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$ 时

$$|f(t) - f(x_k)| \leq |f(t) - \alpha| + |f(x_k) - \alpha| = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

其中 $|t - x_k|$ 可任意小, 与题设矛盾。

- (2) 设 $A = \left\{ x \mid x \in [a, b] \wedge \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > 0 \right\}$ 为间断点集合

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

其中

$$A_n = \left\{ x \mid x \in [a, b] \wedge \left| \lim_{t \rightarrow x} f(t) - f(x) \right| > \frac{1}{n} \right\}$$

由 (1) 知 A_n 为有限集, 所以 A 至多可列。

命题 1.3.11 设函数 f 在 $[0, +\infty)$ 上定义, 且在其中的每个有界子区间上上有界。证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

证明: 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > \max\{0, a\}$, $x > \delta_1$ 时

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3}$$

固定 δ_1 , 由题设知 f 在 $(\delta_1, \delta_1 + 1)$ 上有界, 则存在 $M > 0$

$$|f(x)| < M, \quad x \in (\delta_1, \delta_1 + 1)$$

选取 $\delta > \delta_1$, 使

$$\frac{M}{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \frac{\delta_1 + 1}{\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是, 当 $x > \delta$ 时, $\exists n \in \mathbb{N}$, 使 $x - n \in (\delta_1, \delta_1 + 1)$

又

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} - A \right| &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n [f(x-i) - f(x-i-1) + f(x-n)]}{x} - A \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{i=1}^n [f(x-i) - f(x-i-1) - A] + nA + f(x-n)}{x} - A \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{f(x-i) - f(x-i-1)}{x} - A \right| + \left| \frac{(x-n)A}{x} \right| + \left| \frac{f(x-n)}{x} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{n}{x} + \frac{\delta_1 + 1}{\delta} A + \frac{M}{\delta} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)]$$

命题 1.3.12 设 f 是 $[a, b]$ 上的可微函数, 且 $f(a) = 0$, $\exists A > 0$, $\beta \geq 1$

$$|f'(x)| \leq A|f(x)|^\beta, \quad \forall x \in [a, b]$$

证明: $f(x) \equiv 0$

证明： 反证法。设存在 $x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$.

令 $S = \{x | x \in [a, b] \wedge f(x) \neq 0\}$, 则显然 S 非空。设 $c = \inf S$

如果 $c = b$, 则 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, 又由连续性可知

$$f(b) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$$

即 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, 与题设矛盾。因此 $c \neq b$, 又若 $c = a$, 则有 $f(c) = 0$.

否则当 $a < c < b$ 时

$$f(x) = 0, \quad \forall x < c$$

则由函数连续性知 $f(c) = 0$. 综上

$$f(c) = 0, \quad a \leq c < b$$

因为 f 在 $x = c$ 处连续且 $f(c) = 0$, 则存在 $\delta > 0$, 选取一个 d 满足 $|d - c| < \delta$, 使得 $x \in [c, d]$ 时, $|f(x)| \leq 1$, 且

$$A(x - c) \leq \frac{1}{2}$$

因为 f 在 $[c, d]$ 连续, 所以存在最值, 即令

$$|f(t)| = \max_{x \in [c, d]} |f(x)|$$

又因为 $c = \inf S$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists m \in (c, c + \varepsilon)$, 使得 $f(m) \neq 0$

则 $f(t) \neq 0$, 且 $t > c$, 由 Lagrange 中值定理知

$$|f(t)| = |f(t) - f(c)| = |t - c| |f'(u)| \leq |t - c| |f(u)|^\beta, \quad u \in (c, t)$$

又由 $A(x - c) \leq \frac{1}{2}$ 得

$$|t - c| |f(u)|^\beta \frac{1}{2} |f(u)|^\beta \leq \frac{1}{2} |f(u)|$$

即 $|f(t)| \leq \frac{1}{2} |f(u)|$ 则

$$f(t) = f(u) = 0$$

也即 $f(x) \equiv 0$, 与假设矛盾。得证。

命题 1.3.13 设 $y = (1 + \sqrt{x})^{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, 求 $y^{(n)}(1)$

证明： 设 $f(x) = (1 - \sqrt{x})^{2n+2}$, 易知对 $f(x)$ 求 n 次导后, 每项依然会有 $(1 - \sqrt{x})$, 则

$$f^{(n)}(1) = 0$$

所以

$$y^{(n)}(1) = \left[(1 + \sqrt{x})^{2n+2} + (1 - \sqrt{x})^{2n+2} \right]^{(n)} \Big|_{x=1}$$

$$(1 + \sqrt{x})^{2n+2} + (1 - \sqrt{x})^{2n+2} = 2 \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2}{2k} x^k$$

对右侧函数求 n 次导, 易知

$$y^{(n)}(1) = 4(n+1)(n+1)!$$

命题 1.3.14 设 $f \in C^2(a, b)$, $f + f' + f'' \geq 0$. 证明: f 有下界。

证明: 设

$$g(t) = e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

则

$$g + g'' = \frac{4}{3} e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} \left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) \right] \geq 0, \quad t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

选取 s, t , 使得

$$\max\{b-a, \pi\} < t < s < b$$

设

$$h_s(t) = g(t) \cos(t-s) - g'(t) \sin(t-s)$$

$$h'_s(t) = -[g(t) + g''(t)] \sin(t-s) \geq 0$$

其中 $\sin(t-s) < 0$ 则

$$g(s) = h_s(s) \geq h_s(t) \geq -|g(t)| - |g'(t)|$$

选取任意 $t \in (\max\{b-a, \pi\}, b)$, 上式表明 g 在 (t, b) 上有上界。

设 $G(x) = g(a+b-x)$, 则显然 $G \in C^2(a, b)$

$$G(x) + G''(x) = g(a+b-x) + g''(a+b-x) \geq 0$$

所以 G 在 (t, b) 上有下界, 即 g 在 $(a, a+b-t)$ 上有下界。

若 $a+b-t > t$, 即 $t < \frac{a+b}{2}$ 时, g 在 (a, b) 上有界。否则可在 $(a+b-t, t)$ 上重复以上操作。

命题 1.3.15 设 f 是可微实函数, 且存在 $M > 0$, 使得

$$|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leq Mt^2, \quad \forall x, t$$

证明:

$$|f'(x+t) - f'(x)| \leq M|t|$$

证明： 我们将证明即使没有 f 可微的条件，依然可以得出结论。

由题设得

$$-Mt^2 \leq f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) \leq 2, \quad \forall x, t$$

设 $h_1(x) = f(x) - \frac{M}{2}x^2$ ，则由上式得

$$h_1(x+t) - 2h_1(x) + h_1(x-t) = f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) - Mt^2 \leq 0$$

这表明 h_1 是 \mathbb{R} 上连续的下凸函数，同理设 $h_2(x) = f(x) + \frac{M}{2}x^2$ ， h_2 是 \mathbb{R} 上连续的上凸函数。则

$$h_1^{(-)}(x) \leq h_1^{(+)}(x) \quad (1)$$

$$h_2^{(-)}(x) \leq h_2^{(+)}(x) \quad (2)$$

所以 $f^{(-)}$ ， $f^{(+)}$ 在任意点有定义，且满足

$$f^{(-)}(x) \equiv h_1^{(-)}(x) + Mx \quad (3)$$

$$f^{(+)}(x) \equiv h_1^{(+)}(x) + Mx \quad (4)$$

$$f^{(-)}(x) \equiv h_2^{(-)}(x) + Mx \quad (5)$$

$$f^{(+)}(x) \equiv h_2^{(+)}(x) + Mx \quad (6)$$

由 (1), (3), (4) 得 $f^{(-)} \geq f^{(+)}$ ，而由 (2), (5), (6) 得 $f^{(-)} \leq f^{(+)}$ ，因此 $f^{(-)} \equiv f^{(+)}$ ，即 f 在 \mathbb{R} 上可微，且 h_1, h_2 也可微，由 h_1, h_2 凸性得， $\forall x, y, x \leq y$ 有

$$h_1'(y) - h_1'(x) = f'(y) - f'(x) - M(y-x) \leq 0$$

$$h_2'(y) - h_2'(x) = f'(y) - f'(x) + M(y-x) \geq 0$$

即

$$|f'(y) - f'(x)| \leq M|y - x|$$

命题 1.3.16 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是二阶可微，周期为 2π 的偶函数。证明：若

$$f''(x) + f'(x) = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则 f 的周期为 $\frac{\pi}{2}$

证明： 由 f 的偶性得

$$f''(x) = f''(-x), \quad f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(-x) + f(-x) = f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(-x + \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

f 以 3π 为周期, 又由题设知, f 周期为 2π , 则 f 必以 π 为周期。

考察函数

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

因为

$$f(x + \pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x + \frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{g(x)}$$

又

$$g(-x) = f\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$$

所以 $g(x)$ 也是偶函数,

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ g''(x) &= f''\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

有

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{g(x)} \tag{1}$$

$$g''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{2}$$

即

$$fg'' - gf'' = (fg' - g'f)'$$

所以

$$f'g - g'f = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

同时由于 $g'(x)$, $f'(x)$ 是奇函数, 则 $c = 0$

又 f, g 为 \mathbb{R} 上周期函数, 所以 f, g 必有界, 则由 (1) 式得 $g(x) \neq 0$
故

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{c}{g^2} = 0$$

即

$$f = ag, \quad a \in \mathbb{R}$$

又因为 f 在 \mathbb{R} 上连续且是周期函数, 则存在最值点 x_0, x_1 , 其中

$$f(x_0) = \min f(x), \quad f(x_1) = \max f(x)$$

则有

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) \geq f(x_0) \\ g(x_1) &= f\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) \leq f(x_1) \end{aligned}$$

则

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

命题 1.3.17 设 $f \in \mathbb{C}^n[0, 1)$, 满足

$$f^{(k)} \leq 1 + |f| + |f'| + \cdots + |f^{(k-1)}|, \quad k \leq n$$

证明: f 有上界

证明: 因为 $f \in \mathbb{C}^n[0, 1)$, 由 Taylor 公式知

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + O(x^n)$$

由题设

$$f'(x) \leq 1 + |f(x)|$$

$$f''(x) \leq 1 + |f(x)| + |f'(x)| \leq 2(1 + |f(x)|)$$

应用数学归纳法可证

$$f^{(k)}(x) \leq 2^{k-1}(1 + |f(x)|), \quad k \leq n$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq f(0) + (1 + |f(0)|) \left(\frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{n-1}x^n}{n!} \right) + O(x^n) \\
&= f(0) + \frac{1 + |f(0)|}{2} \left(\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!} \right) + O(x^n) \\
&\leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(e^{2x} - 1) + O(x^n)
\end{aligned}$$

因为 f 定义在 $[0, 1)$ 上, 所以

$$f(x) \leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(e^2 - 1) + 1$$

即 f 有上界

命题 1.3.18 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty]$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$, 常数 $h > 0$

证明: 存在 $\xi \in [h, +\infty)$, 使得

$$f(\xi) = f(\xi - h)$$

证明: 反证法。令

$$g(x) = f(x) - f(x - h)$$

则 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续。则

$$g(x) \neq 0, \quad x \in [0, +\infty)$$

不妨设

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
S_n &= g(h) + g(2h) + \cdots + g(nh) \\
&= [f(h) - f(0)] + [f(2h) - f(h)] + [f(3h) - f(2h)] + \cdots + [f(nh) - f((n-1)h)] \\
&= f(nh) - f(0)
\end{aligned}$$

因为 $g(x) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$, 所以 $S_n > 0$, 然而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nh) - f(0) = 0$$

矛盾, 得证。

命题 1.3.19 设 $f \in C(0, 1)$, 且

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \alpha < \beta = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

其中 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0, 1)$. 证明: 对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$, 存在 $x_5, x_6 \in (0, 1)$, 使得

$$\lambda = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$$

证明: 设

$$F(t) = \frac{f((1-t)x_2 + tx_4) - f((1-t)x_1 + tx_3)}{(1-t)(x_2 - x_1) + t(x_4 - x_3)}$$

则 F 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\alpha = F(0) < \lambda < F(1) = \beta$. 根据连续函数的介值定理, 存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得 $\lambda = F(t_0)$. 令

$$x_5 = (1 - t_0)x_1 + t_0x_3$$

$$x_6 = (1 - t_0)x_2 + t_0x_4$$

则

$$\lambda = F(t_0) = \frac{f(x_6) - f(x_5)}{x_6 - x_5}$$

命题 1.3.20 证明: $e^{-x} + \cos 2x + x \sin x = 0$ 在区间 $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ 恰有两个根 $x_{2n-1} < x_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n(x_n - n\pi)$$

证明: 令 $\varphi(x) = e^{-x} + \cos 2x + x \sin x$, 则 $\varphi'(x) = -e^{-x} - 2 \sin 2x + \sin x + x \cos x$.

$$\varphi((2n-1)\pi) = e^{-(2n-1)\pi} + 1 > 0$$

$$\varphi\left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e^{-((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2})} - 1 - \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

当 $x \in (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 时,

$$\varphi(x) = e^{-x} + \cos^2 x + (x - \sin x) \sin x > 0$$

于是存在 $x_{2n-1} \in \left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $x_{2n} \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi\right)$. 使得

$$\varphi(x_{2n-1}) = \varphi(x_{2n}) = 0$$

下面证明 $\varphi(x) = 0$ 在区间 $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ 只有上述两个根。

当 $x \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, ((2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4})\right)$ 时,

$$\varphi(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 1 < 0$$

所以 $\varphi(x) = 0$ 的两个根分别在区间 $\left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 和

$\left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, ((2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4})\right)$ 上。

当 $x \in \left((2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ 时,

$$\varphi'(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}(2n-1)\pi < 0$$

当 $x \in \left((2n-1)\pi + \frac{\pi}{4}, (2n+1)\pi + \frac{3\pi}{4} \right)$ 时,

$$\varphi'(x) > \frac{\sqrt{x}}{2} \left((2n-1)\pi + \frac{3\pi}{4} \right) - 1 > 0$$

由函数单调性确定了根的个数。

因为 $\lim_{x_n} = +\infty$, 所以

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x} + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n (2 \sin x_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(x_n - n\pi) (2 \sin x_n - x_n)$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n\pi) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n (x_n - n\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n (x_n - n\pi)}{(-1)^n \sin(x_n - n\pi) (2 \sin x_n - x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2 \sin x_n - x_n} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

命题 1.3.21 已知函数 $f(x) = x^n - ax - 1$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$. 证明:

- (1) 方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个正实数根 β , 且 $\beta > 1$.
- (2) 方程 $f(x) = 0$ 的任意复数根 α 满足对 (1) 中 β 有 $|\alpha| \leq \beta$.

证明: (1) 因为 $f'(x) = nx^{n-1} - a$, 所以 $f'(1) > 1$, 又 $f(1) = -a < 0$, 因此方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个正实数根 β , 且 $\beta > 1$.

(2) 应用反证法. 假设存在 $\alpha \in \mathbb{C}$, 且 $|\alpha| > \beta$, 使得 $f(\alpha) = 0$.

易知 $x > \beta$ 时, $x^n - ax$ 单调增加, 因此有

$$1 = |\alpha^n - a\alpha| \geq |\alpha^n| - a|\alpha| = |\alpha|^n - a|\alpha| > \beta^n - a\beta = 1$$

矛盾, 得证。

§4 一元函数微分学

命题 1.4.1 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $\exists c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$$

证明: 设 $F(x) = [f(x) - f(a)]e^{-\frac{x}{b-a}}$ 则 $F'(x) = [f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a}]e^{-\frac{x}{b-a}}$

$$F'(c) = -\left(\frac{f(c) - f(a)}{b-a}\right)e^{-\frac{c}{b-a}} = -\frac{F(c)}{b-a}$$

由 Lagrange 中值定理得 $\exists \eta \in (a, b)$,

$$F'(\eta) = \frac{F(c) - F(a)}{c-a} = \frac{F(c)}{c-a}$$

因为 $F'(\eta)$ 与 $F'(c)$ 异号, 所以由达布定理知, $\exists \eta \in (a, b)$

$$F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$$

定理 1.4.1 (Flett 中值定理) 设 f 在 $[a, b]$ 上可微, $f'(a) = f'(b)$, 则有 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

证明: 设

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b-x}, & a \leq x < b \\ f'(b), & x = b \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f'(a), & x = a \\ \frac{f(x) - f(a)}{x-a}, & a < x \leq b \end{cases}$$

又令 $F(x) = g(x) - h(x)$, 则有

$$F(a) = g(a) - h(a) = f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$F(b) = g(b) - h(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} - f'(a)$$

易见 $F(a)F(b)$ 异号, 所以存在 $\eta \in (a, b)$, 使得

$$f(\eta) = g(\eta) - h(\eta) = 0$$

即

$$g(\eta) = \frac{f(\eta) - f(a)}{\eta - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

则存在 $\xi \in (\eta, b)$ 使得

$$g'(\xi) = \frac{(\xi - a)f'(\xi) - [f(\xi) - f(a)]}{(\xi - a)^2}$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

命题 1.4.2 设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = f(1)$. 证明: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, 使得

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$$

证明: 设 $F(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

若不存在 ξ_n , 使得 $f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$

不妨设 $F(x)$ 恒大于 0, 则有

$$f(1) = f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right) > \cdots > f(1)$$

与题设矛盾, 所以存在 $\xi_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$

$$f(\xi_n) = f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right)$$

命题 1.4.3 设 f 与 g 是两个周期函数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$. 证明:

$$f = g$$

证明: 设 f 与 g 的周期分别为 T 和 S , 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - g(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(f(x + nT) - g(x + nT)) + \\ &\quad (g(x + nT + nS) - f(x + nT + nS) + f(x + nS) - g(n + nS))] \\ &= 0 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以

$$f(x) = g(x)$$

命题 1.4.4 设 f 为 \mathbb{R} 上的连续函数, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, 又设 f 的最小值 $f(a) < a$. 证明: $f(f(x))$ 至少有两个最小值点。

证明: 由题设知, $f(x)$ 的至于为 $[f(a), +\infty]$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

因为 $f(a) < a$, 所以存在 $x_1, x_2, x_1 \neq x_2, f(x_1) = a = f(x_2)$

显然 $f(f(x)) \geq f(a) = f(f(x_1)) = f(f(x_2))$,

所以 $f(f(x))$ 至少有两个最小值点。

命题 1.4.5 (Cauchy 方程) 设 f 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 满足方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 证明:

(1) 若 f 在某一点 x_0 处连续, 则 $f(x) = f(1)x$

(2) 若 f 在 \mathbb{R} 单调, 也有 $f(x) = f(1)x$

证明: (1) 因为 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 0$

因为 $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, $\forall x$, 所以 $f(x) = -f(-x)$

易知 $f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, 由数学归纳法易证

$$f(n) = nf(1)$$

对任意有理数 $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, 由于 $f(1) = f\left(n \cdot \frac{1}{n}\right)$, 故 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$, 从而

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

则只需证 $f(x) = f(1)x$, $x \notin \mathbb{Q}$

f 在 x_0 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 也即

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

因为 $f(x + \Delta x) = f(x_0) + f(\Delta x)$, 所以

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = 0$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) + f(\Delta x)) \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

所以 f 在 \mathbb{R} 连续。

设 p_0 为任意无理数, 则存在有理数列 $\{p_n\} \rightarrow p_0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$f(p_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n f(1) = p_0 f(1)$$

(2) 不妨设 f 在 \mathbb{R} 上单调增加。 $\forall x \in \mathbb{R}$, 取有理数列 $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$,

使 $x'_n f(1) < x < x''_n$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x$$

由 f 单调增加的条件,

$$x'_n f(1) < f(x'_n) \leq f(x) \leq f(x''_n) = x''_n f(1)$$

令 $n \rightarrow +\infty$,

$$xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$$

即

$$f(x) = xf(1)$$

命题 1.4.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 上可导。证明: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内存在相异的两点 ξ, η , 使

$$f'(\xi)f'(\eta) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2$$

证明: 令 $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, $h(x) = [f(x) - f(a)]^2 - k^2(x - a)^2$

$$h'(x) = 2[f(x) - f(a)]f'(x) - 2k^2(x - a)$$

因为 $f(a) = f(b) = 0$, 由 Rolle 中值定理知 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$h'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = k^2 \cdot \frac{\xi - a}{f(\xi) - f(a)}$$

又由 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(\eta), \quad \eta \in (a, \xi)$$

所以

$$f'(\xi)f'(\eta) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^2$$

命题 1.4.7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可微。证明: $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, 使

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$$

其中, $c \in (0, 1)$

证明: 令 $F(x) = x^2 f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$, 则有

$$F(1) - F(0) = c^2 f(1) + (1 - c^2)f(0)$$

$F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由介值定理得, $\exists \xi \in (0, 1)$

$$f(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F(1) - F(0)$$

又由 Lagrange 中值定理知, $\exists \xi \in (0, 1)$

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta)$$

即

$$2\eta f(1) + (c^2 - 1)f'(\eta) = f(\xi)$$

命题 1.4.8 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可微, $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$. 证明: $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$, 使得

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

证明: 令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$, 则 $F(0) = F(1) = 0$

若 $F\left(\frac{1}{2}\right) = F(0) = F(1) = 0$, 则存在 $\xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$

$$F'(\xi) + F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

若 $F\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$, 不妨设 $F\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi \neq \eta$

$$\frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = F'(\xi) = -2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2} - 0} = F'(\eta) = 2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

则

$$F'(\xi) + F'(\eta) = 0$$

即

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$$

命题 1.4.9 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上可微, 且 $f(0) = g(0) = f(1) = 0$, $g'(x) \neq 0$. 证明: $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$, $\xi < \eta$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

证明： $g(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续，则存在 $\alpha \in (0, 1)$ ，使得

$$g(\alpha) = \frac{1}{2}[g(1) + g(0)]$$

由 Lagrange 中值定理得， $\exists \xi, \eta \in (0, 1)$

$$\frac{f(\alpha) - f(0)}{g(\alpha) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(1) - f(\alpha)}{g(1) - g(\alpha)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)} = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

则

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

命题 1.4.10 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 二阶可微，且满足 $f(0) = 2$, $f'(0) = -2$, $f(1) = 1$. 证明： $\exists \xi \in (0, 1)$ ，使得

$$f(\xi) + f'(\xi) + f''(\xi) = 0$$

证明： 定义函数 $g(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + f'(x)$ ，则

$$g'(x) = f(x)f'(x) + f''(x)$$

因为 $g(0) = 0$ ，所以只需证明 $\exists \eta \in (0, 1]$ ，使得 $g(\eta) = 0$

(1) 若 f 无零点，则令

$$h(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{f(x)}$$

因为 $h(0) = h(1) = -\frac{1}{2}$ ，所以存在 $\eta \in (0, 1)$ ，使得

$$h'(\eta) = 0$$

又由 $g(x) = f^2(x)h'(x)$ ，所以

$$g(\eta) = 0$$

(2) 若 f 至少有一个零点，令 z_1 为第一个零点， z_2 为最后一个零点，由题设知， $0 < z_1 \leq z_2 < 1$ 函数 f 在区间 $[0, z_1]$, $[z_2, 1]$ 上是正的，这表明

$$f'(z_1) \leq 0, \quad f'(z_2) \geq 0$$

所以

$$g(z_1) = f'(z_1) \leq 0, \quad g(z_2) = f'(z_2) \geq 0$$

则存在 $\eta \in [z_1, z_2]$ ，使得

$$g'(\eta) = 0$$

命题 1.4.11 设函数 $f(x)$ 可导, 曲线 $y = f(x)$ 上存在三点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ 共线, 其中 $0 < x_1 < x_2 < x_3$. 证明: $\exists \xi, \eta \in (x_1, x_3)$, 使得

$$\xi f'(\eta) - f(\xi) = \eta f'(\eta) - f(\eta)$$

证明: 若 $\xi = \eta$ 则结论显然成立。

$\xi \neq \eta$ 时, 问题等价于

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

因为三点共线, 所以存在 $\alpha, \beta \in (x_1, x_3)$, $\alpha \neq \beta$

$$f'(\alpha) = f'(\beta)$$

又由 Flett 中值定理得, $\exists \xi, \eta \in (x_1, x_3)$

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\alpha)}{\eta - \alpha} = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

命题 1.4.12 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且 f 在 $(0, 1)$ 上可微, $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明: 存在点列 $\{\alpha_k\}$, 使得

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

证明: 由介值定理知, 存在 n 个实数 b_0, b_1, \dots, b_n , 其中

$$0 = b_0 < b_1 < \dots < b_n = 1$$

且

$$f(b_i) = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

由 Lagrange 中值定理知, 对于任意区间 $[b_i, b_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\exists \alpha_i \in (b_{i-1}, b_i)$

$$f'(\alpha_i) = \frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \frac{1}{n(b_i - b_{i-1})}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(\alpha_i)} = n \sum_{i=0}^n (b_i - b_{i-1}) = n(b_n - b_0) = n$$

命题 1.4.13 设 f 在 $[a, b]$ 上 $n+1$ 阶可微, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, 在 $[a, b]$ 上有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{n+1}$$

证明： 分别将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开为 $n + 1$ 阶 Peano 余项的 Taylor 公式和 $n - 1$ 阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x) = f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n}{n!}$$

两式相减有

$$\frac{(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{\xi - x_0} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + O(x - x_0)^{n+1}$$

两边对 x 取极限, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{n+1}$$

命题 1.4.14 设 \mathbb{R} 上的函数 f 有任意阶导数, 并且对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $C_k > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|x|^k |f(x)| + |f^{(k)}(x)|) \leq C_k$$

证明： 对于任意 $k, l \in \mathbb{N}$, 存在 $C_{k,l} > 0$ 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| \leq C_{k,l}$$

证明： 观察到, 问题可以约化为证明: 对于任意 $k \in \mathbb{N}^+$, 存在 $D_k > 0$, 对于任意绝对值大于 2 的数 $x \in \mathbb{R}$, 成立

$$|x|^k |f'(x)| \leq D_k$$

任意给定 $\varepsilon > 0$, 由 Taylor 定理知, 存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x + \theta\varepsilon)\varepsilon^2$$

于是我们有

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x + \varepsilon)| + |f(x)|}{\varepsilon} + \frac{1}{2}|f''(x + \theta\varepsilon)|\varepsilon$$

将 $\varepsilon = \frac{1}{|x|^k}$ 代入上式, 并利用已知条件, 得到

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot |x|^{2k}(|f(x)| + |f(x + |x|^{-k})|) \\ &\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + C_{2k}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot (2|x + |x|^{-k}||)^{2k}|f(x + |x|^{-k})| \\ &\leq \left(\frac{C_2}{2} + (2^{2k} + 1)C_{2k} \right) |x|^{-k} \end{aligned}$$

取 $D_k = \frac{C_2}{2} + (2^{2k} + 1)C_{2k}$, 即证。

§5 数项级数

命题 1.5.1 设 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的实数列, 且 $a_n \leq n^2 \ln n$, $n \in \mathbb{N}$. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$$

证明: 反证法。假设级数收敛, 则由 $a_1 \leq 1^2 \ln 1 \leq 0$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a}{4k})} \\ &\leq +\infty \end{aligned}$$

这意味着 $\exists k \in \mathbb{N}$, 使

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a}{4k})}$$

同时, 由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \right) \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} (a_{n+1} - a_n) \right) \\ &\geq \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1 \right)^2 = (2^k - 2^{k-1})^2 = 4^{k-1} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{4(\ln 2 \cdot k - \frac{a}{4k})} &> \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \\ &\leq \frac{4^{k-1}}{\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} (a_{n+1} - a_n)} \\ &= \frac{4^{k-1}}{a_{2^k} - a_{2^{k-1}}} \\ &\geq \frac{4^{k-1}}{a_{2^k} - a_1} \end{aligned}$$

其中

$$a_{2^k} - a_1 > 4^k \left(\ln 2^k - \frac{a_1}{4^k} \right) = 4^k \ln 2^k - a_1$$

则

$$a_{2^k} > (2^k)^2 \ln 2^k$$

与题设矛盾。

命题 1.5.2 设 $\{a_n\}$ 使单调减少收敛于 0 的实数列。证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty$$

当且仅当 $a_n = O\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}\right)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \ln n$

证明： 令

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n}, \quad T_N = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) \ln n$$

因为 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0, 且 S_n, T_n 单调增加, 则假设 $\{S_n\}, \{T_n\}$ 收敛, S, T 分别为其极限, 注意到

$$\ln n - \ln(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right)$$

(1) 如果 $S_N < \infty, N \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} a_N \ln N &\leq a_N \sum_{n=2}^{\infty} [\ln n - \ln(n-1)] \\ &\leq a_N \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} \\ &= S_{n-1} \\ &\leq S \end{aligned}$$

这表明 $a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$, 同时

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) \ln n \\
&= \sum_{n=2}^N a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N+1} a_n \ln (n-1) \\
&= \sum_{n=2}^N [a_n (\ln n - \ln(n-1))] - a_{N+1} \ln N \\
&\leq \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^N \frac{a_{n-1}}{n-1} \\
&= S_{n-1} \\
&\leq S
\end{aligned}$$

即 $T < \infty$

(2) 如果 $T < \infty$, 且 $a_N \ln N \leq M$, $N \geq 2$ 时

$$\begin{aligned}
S_N - a_1 &= \sum_{n=2}^N \frac{a_n}{n} \\
&\leq \sum_{n=2}^N a_n (\ln n - \ln(n-1)) \\
&= \sum_{n=2}^N a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N-1} a_{n+1} \ln n \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \ln n + a_N \ln N \\
&= T_{N-1} + a_N \ln(N+1) \\
&< T + M
\end{aligned}$$

即 $S < \infty$

命题 1.5.3 对 $N \in \mathbb{N}$, 定义

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{n+2} + \frac{n-2}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2}$$

证明： 设数列 $\{a_k\}$, 其中 a_k 为 S_n 中的第 k 项, 则当 $k \geq 2$ 时有

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n+k)!} = \frac{(2n)!(n-1)!}{(n-k)!(n+k)!} = \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} \\ &= \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sum_{k=1}^n \binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n-1}} \\ &= \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\binom{2n}{n-1}} \\ &= \frac{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}{2(2n)!} - \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{n+1}{n} \frac{2^{2n}(n!)^2}{2(2n)!\sqrt{n}} - \frac{n+1}{2^n\sqrt{n}}$$

由 Waills 公式知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

命题 1.5.4 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$$

证明： 令 $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 则有 $a_n = b_n - b_{n-1}$.

再令 $b_n = 0$, 于是原级数部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2}$ 有

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2(b_k - b_{k-1})}{b_k^2} \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{k^2(b_k - b_{k-1})}{b_k b_{k-1}} + \frac{1}{a_1} \\
&\leq \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{b_{k-1}} - \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{b_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{2k+1}{b_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{k}{b_k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{b_k} \\
&= \frac{5}{a_1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{k}{b_k} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2} \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k\sqrt{a_k}}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) \right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a_k}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \\
&= S_n T_n
\end{aligned}$$

其中 $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$

则有

$$\begin{aligned}
S_n &\leq \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_n T_n} + T_n \\
&\leq \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_n T} + T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n - 2\sqrt{S_n T} + T &\leq \frac{1}{a_1} + 2T \\
(\sqrt{S_n} - \sqrt{T})^2 &\leq \frac{1}{a_1} + 2T \\
S_n - \sqrt{T} &\leq \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T} \\
S_n &\leq \sqrt{T} + \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T}
\end{aligned}$$

所以 S_n 有上界, 则原级数收敛。

命题 1.5.5 设 $a_n > 0$. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$$

收敛

证明:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\ &= \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\ & \quad \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\ &\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\ & \quad \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} \\ &\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-2})} \\ &\quad \dots \\ &\leq \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

部分和有上界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$ 收敛。

命题 1.5.6 $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明:

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛, 且和为

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

证明: (1) 设 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 特别地 $S_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} &= \frac{\sum_{k=1}^n ka_k}{n} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n k(S_k - S_{k-1})}{n} \\
&= \frac{nS_n - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1})}{n} \\
&= S_n - \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

由 Cauchy 命题知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(2)

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n + (n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}$$

设 $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 则原级数有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n b_k - b_{k+1} + a_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k+1} + b_1 + b_{n+1} \\
&= S_n - a_1 + b_1 - b_{n+1} \\
&= S_n - b_{n+1}
\end{aligned}$$

取极限 $n \rightarrow \infty$, 则原级数收敛, 且和为 S .

命题 1.5.7 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛。证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

收敛。

证明: (1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加, 则有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1} \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \leq na_n$$

因此有不等式

$$\frac{2n-1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}} + \frac{2n1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}} \leq \frac{2n-1}{a_n} + \frac{2n}{na_n} \leq \frac{4}{a_n}$$

所以部分和有上界, 级数收敛。

(2) 对于一般情况, 将 $\{a_n\}$ 按照升序排列, 重排后的数列可记为 $\{b_n\}$, 收敛的正项级数重排后仍收敛, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 收敛。由 (1) 知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ 收敛, 同时可以看出, 有

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \frac{n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛。

命题 1.5.8 证明: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$

- (1) 在 $x = e$ 处收敛。
- (2) 在任意有理点收敛。
- (3) 在任意区间内存在发散点。

证明: (1)

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + O\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} = \frac{n!}{k!} + (n+1) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$$

则有

$$\sin(n!\pi x) = \sin\left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + (n+1) + O\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}\right]$$

$$\sim (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n+1}$ 显然收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$ 在 $x = e$ 处, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi e)$$

收敛。

(2) 有理点 $x = \frac{p}{q}$, 则当 $n \geq q$ 时,

$$n!\pi x = n!\pi \frac{p}{q} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

则

$$\sin(n!\pi x) = 0, \quad n \geq q$$

显然 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n!\pi x)$ 收敛。

(3) 注意到 $\forall x \in [0, 1]$, 可以被表示为如下形式

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

又由 x 的展开形式得

$$\sin(n!\pi x) = (-1)^{na_{n-1}+a_n} \sin\left(\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)$$

由观察得

$$\begin{aligned} |\sin(n!\pi x)| &= \left| \sin\left(\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right) \right| \\ \frac{a_{n+1}}{n+1} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} \leq \frac{a_{n+1}+1}{n+1} \end{aligned}$$

将 a_k 看作在 $\{0, 1, \dots, k-1\}$ 上的随机变量, 是 x 的函数, 且 a_k 相互独立, 所以由 Borel - Cantelli 定理知

$$\sum_{k=2}^{\infty} P\left(\left|\frac{a_k}{k} - \frac{1}{2}\right|\right) = +\infty$$

则 $\frac{1}{2} < \frac{a_k}{k} < \frac{1}{4}$, 对无限 $k \in \mathbb{N}$ 成立

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |\sin(n!\pi x)| \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

对几乎所有 $x \in [0, 1]$ 成立, 又 $x \in M$ 不满足上式, 其中 M 为收敛点集合, 所以 M 为勒贝格集, 不包含任何区间。

命题 1.5.9 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 满足 $f(x) > 0$, $f''(x) \leq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 证明极限

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^s(n)}$$

收敛并求其值。

命题 1.5.10 由 $f''(x) \leq 0$ 知, $f'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 单调递减, 容易看出 $f'(x)$ 恒正. 事实上若存在 x_0 , $f'(x_0) \leq 0$, 则由单调性知

$$f'(x) \leq f'(x_0), \quad f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \geq x_0$$

与 $f(+\infty) = +\infty$ 矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 严格单调增加. 设

$$S_{2n}(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} \right)$$

注意和式中每个括号都是负的且级数通项收敛于 0, 只需要证明对固定的 $s > 0$, $S_{2n}(s)$ 有下界, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(s)$$

存在且等于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)}$$

由 Lagrange 中值定理知,

$$\frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} = \frac{-sf'(\xi)}{f^{(s+1)}(\xi)}, \quad \xi \in (2k-1, 2k)$$

注意到 $f(x)$ 单调增加而 $f'(x)$ 单调减少, 则有

$$\begin{aligned} \frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} &\leq \frac{1}{f^{(s)}(2k)} - \frac{1}{f^{(s)}(2k-1)} \leq \frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} \\ \sum_{k=1}^n \frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} &\leq S_{2n}(s) \leq \sum_{k=1}^n \frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} \end{aligned}$$

利用面积原理的思想来估计左右两端. 由单调性知 $k \geq 2$ 时

$$\begin{aligned} \frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} &\leq \frac{1}{2} \int_{2k-3}^{2k-1} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt \\ \sum_{k=2}^n \frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)} &\leq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{-1}{sf^{(s)}(t)} \right|_1^{+\infty} = \frac{1}{2sf^{(s)}(1)} \end{aligned}$$

$S_{2n}(s)$ 有下界故极限存在. 再次利用面积原理知 $k \leq 1$ 时

$$\begin{aligned} \frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} &\geq \frac{1}{2} \int_{2k}^{2k+2} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt \\ \sum_{k=1}^n \frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)} &\geq \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{-1}{sf^{(s)}(t)} \right|_2^{+\infty} = \frac{1}{2sf^{(s)}(2)} \\ -s \left(\frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)} + \frac{1}{2sf^{(s)}(1)} \right) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(s) \leq -s \frac{1}{2sf^{(s)}(2)} \end{aligned}$$

由前面说明就有

$$-s \left(\frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)} + \frac{1}{2sf^{(s)}(1)} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)} \leq -s \frac{1}{2sf^{(s)}(2)}$$

而上市左右两端在 $s \rightarrow 0^+$ 时的极限都是 $-\frac{1}{2}$, 所以

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)} = -\frac{1}{2}$$

§6 黎曼积分

命题 1.6.1 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且对任意满足 $\int_a^b g(x)dx$ 的连续函数 $g(x)$ 有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

证明: $f(x)$ 是常值函数。

证明: 设 $g(x) = f(x) - \int_a^b f(x)dx$

因为

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0$$

又有

$$\begin{aligned} \int_a^b g^2(x)dx &= \int_a^b g(x) \left[f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right] dx \\ &= \int_a^b g(x)f(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \int_a^b f(x)dx \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

则知 $g(x) = 0$, 即

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = 0 \\ f(x) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

命题 1.6.2 设 $f(x) \in \mathbb{C}[-1, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$$

证明: (核函数方法) 设 $K_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx}$, 显然有

$$\int_{-1}^1 K_n(x) dx = 1$$

且 $x \neq 0$ 时有 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N$ 时有

$$|K_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} \right| \\ &= \left| \int_{-1}^1 K_n(x) dx - \int_{-1}^1 f(0)K_n(x) dx \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x) - f(0)|K_n(x) dx \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(0)|K_n(x) dx + \int_{-1}^{-\delta} |f(x) - f(0)|K_n(x) dx + \int_{\delta}^1 |f(x) - f(0)|K_n(x) dx \\ &\leq \varepsilon + 4M\varepsilon \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n dx}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = f(0)$$

命题 1.6.3 $0 < a < b, f : [a, b] \rightarrow [-1, 1]$, 满足 $\int_a^b f(x) dx = 0$. 证明:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \leq \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}$$

证明:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{f(x)}{x} + kf(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left(\frac{1}{x} + k \right) dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \end{aligned}$$

其中 k 为实数, 显然当 $k = -\frac{2}{a+b}$ 时, 上式积分最小, 即

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{f(x)}{x} dx &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{x} + k \right| dx \\ &= \int_a^b \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{a+b} \right| dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{x} - \frac{2}{a+b} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{2}{a+b} - \frac{1}{x} dx \\ &= \ln \frac{(a+b)^2}{4ab}\end{aligned}$$

命题 1.6.4 设函数 f 为 $[0, 1]$ 上的单调增加函数, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. 证明:

$$\int_0^1 f(f(x)) dx \leq 2 \int_0^1 f(x) dx$$

证明: 设 f 与 $y = x$ 的交点为 x_1, x_2, \dots, x_n

任意区间 $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ 上, 若 $f(x) < x$, 则

$$f(f(x)) \leq f(x)$$

即

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x)) dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1})) dx \leq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

若 $f(x) \geq x$, 则 $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$

$$2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \geq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} x dx = x_{i+1}^2 - x_i^2$$

$$2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x)) dx \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1})) dx = x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

则

$$\int_0^1 f(f(x)) dx \leq 2 \int_0^1 f(x) dx$$

命题 1.6.5 设 f, g 是 $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 的连续函数, 且 f 单调增加. 证明:

$$\int_0^1 f(g(x)) dx \leq \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx$$

证明: 设 $h(x) = f(x) - x$, $h(t) = \max_{x \in [0, 1]} h(x) = f(t) - t$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(g(x))dx - \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx \\
& \leq f(t) - t - \int_0^1 f(x)dx \\
& = \int_0^1 [f(t) - f(x)]dx - t \\
& \leq t - t = 0
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f(g(x))dx \leq \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$$

命题 1.6.6 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t)dt \geq \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$$

证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$$

证明:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x(f(x) - g(x))dx &= a \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx + b \int_\eta^b (f(x) - g(x))dx \\
&= a \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx - b \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx \\
&= (a - b) \int_a^\eta (f(x) - g(x))dx
\end{aligned}$$

其中 $\eta \in [a, b]$. 由题设知, $\int_a^\eta (f(x) - g(x))dx < 0$, 则

$$\int_a^b xf(x)dx \leq \int_a^b xg(x)dx$$

命题 1.6.7 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明:

$$2 \left(\int_0^1 xf(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 (1 - x^2)f^2(x)dx$$

证明:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 x f(x) dx \right)^2 &= \left(\int_0^1 (x-1) f(x) dx \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{1-x^2} dx \right) \left(\int_0^1 (1-x^2) f^2(x) dx \right) \\ &= (2 \ln 2 - 1) \left(\int_0^1 (1-x^2) f^2(x) dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (1-x^2) f^2(x) dx \right) \end{aligned}$$

所以

$$2 \left(\int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (1-x^2) f^2(x) dx$$

命题 1.6.8 设 f 是 $[-1, 1]$ 上的连续函数。证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x f(x) dx \right)^2$$

证明: 令 $M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$, $g(x) = f(x) - M$, 则有

$$\int_{-1}^1 \lambda g(x) dx = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f^2(x) dx &= \int_{-1}^1 (g(x) + M)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x) + M^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x) dx + \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

因为 $\int_{-1}^1 Mx dx = 0$, 所以

$$\int_{-1}^1 g^2(x) dx \geq \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x g(x) dx \right)^2 \geq \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x f(x) dx \right)^2$$

则有

$$\int_{-1}^1 f^2(x) dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^1 x f(x) dx \right)^2$$

命题 1.6.9 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是有连续导数的可微函数, 且 $f(1) = 0$. 证明:

$$4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right)^2$$

证明: 令 $c = \int_0^1 f(x)dx$, 不失一般性地, 我们假设

$$\int_0^1 (f(x) + c)^2 dx > 0$$

否则 $f(x) \equiv -c$, 即

$$f(x) \equiv 0$$

此时不等式显然成立. 应用分部积分法有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(x) + c)dx \\ &= [x(f(x) + c)^2] \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x(f(x) + c) - f'(x)dx \\ &= c^2 + 2 \int_0^1 x(f(x) + c) - f'(x)dx \end{aligned}$$

因为 $f(1) = 0$, 应用 Jensen 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) + c|^2 dx - c^2 &\leq 2\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx} \\ \sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx} - \frac{c^2}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} &\leq 2\sqrt{\int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx} \end{aligned}$$

两边平方得

$$\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx - 2c^2 + \frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} \leq 4 \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x) + c|^2 dx &= \int_0^1 f^2(x)dx + 2c \int_0^1 f(x)dx + c^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x)dx + 3c^2 \\ &= \int_0^1 f^2(x)dx + 3 \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 + \frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x) + c|^2 dx}} \leq 4 \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx$$

由 $\int_0^1 (f(x) + c)^2 dx > 0$ 得

$$4 \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^1 |f(x)|^2 dx + \left(\int_0^1 |f(x)|dx \right)^2$$

命题 1.6.10 设 f 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续可微函数。证明：

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

证明： 设 $x_0 \in [0, 1]$, 且

$$|f(x_0)| \leq |f(x)|, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

则有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f'(x) dx \\ \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| &= |f(x_0)| + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx \end{aligned}$$

由 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 得

$$|f(x_0)| \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx$$

又有

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)| dx$$

对于 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 有不等式

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)| dx$$

所以有

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)| dx$$

命题 1.6.11 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续实值函数, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$. 证明: $\exists c \in (0, 1)$

$$c^2 f(c) = \int_0^c (x^2 + x) f(x) dx$$

证明： 令

$$F(x) = \int_0^x [t^2 + (1-x)t] f(t) dt$$

因为 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 F 在 $[0, 1]$ 上存在最大值, 最小值。设

$$M = \max f(x) = f(x_M), \quad m = \min f(x) = f(x_m)$$

由题设 $\int_0^1 f(x)dx = 0$, 则不妨设 f 不恒等于 0, 否则不等式显然成立。
所以

$$M > 0, \quad m < 0$$

令 $a = x_M$, 有

$$F'(a) = Mx_M - M \int_0^{x_M} t dt = Mx_M \left(1 - \frac{x_M}{2}\right) > 0$$

同理可知 $\exists b \in (0, 1), F'(b) < 0$

由介值定理知 $\exists d \in (a, b)$, 使 $F'(d) = 0$

又由 Rolle 中值定理知, $\exists c \in (0, d)$

$$F(c) - F(0) = cF'(c)$$

即

$$\begin{aligned} \int_0^c [t^2 + (1-c)t]f(t)dt &= c^2 f(c) - c \int_0^c t f(t)dt \\ c^2 f(c) &= \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx \end{aligned}$$

命题 1.6.12 设 f 是 $[0, 1]$ 上的连续可微函数, $b > 0$, 且 $f(0) = 0$. 证明:

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^b (f'(x))^2 dx$$

证明: 应用分部积分法, 有

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx = - \left(\frac{f(x)}{x^2} \Big|_0^b - \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \right)$$

又因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)f(x) = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx &= -\frac{f^2(b)}{b} + 2 \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \\ &\leq 2 \int_0^b \frac{2f'(x)f(x)}{x} dx \\ &\leq 2 \left(\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \cdot \int_0^b (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^b \frac{f^2(x)}{x^2} dx \leq 4 \int_0^b (f'(x))^2 dx$$

命题 1.6.13 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 是可微函数, 且对于常数 k , 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leq k|x - y|$$

其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 证明:

$$(f'(x))^2 < 2kf(x)$$

证明: 由题设知 f' 是连续函数, 因此 f' 黎曼可积, 对于 $d \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} 0 < f(x+d) - f(x) &= \int_x^{x+d} f'(t) dt \\ &= f(x) + df'(x) + \int_x^{x+d} (f'(t) - f'(x)) dt \\ &\leq f(x) + df'(x) + \int_x^{x+d} k(t-x) dt \\ &= f(x) + df'(x) + \frac{1}{2}kd^2 \end{aligned}$$

对于 $d < 0$, 有

$$\begin{aligned} \int_x^{x+d} f'(t) dt &= - \int_{x+d}^x f'(t) dt \\ &\leq - \int_{x+d}^x k(t-x) dt \\ &= \frac{k}{d^2} \end{aligned}$$

特别地, 令 $d = -\frac{f'(x)}{k}$, 有

$$0 < f(x) - \frac{(f'(x))^2}{k} + \frac{(f'(x))^2}{2k} = f(x) - \frac{(f'(x))^2}{2k}$$

所以

$$(f'(x))^2 < 2kf(x)$$

命题 1.6.14 设 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的连续实值函数, 且

$$\int_0^{+\infty} f^2(x) dx < \infty$$

证明: 函数

$$g(x) = f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

证明： 由题设得

$$f(x) - g(x) = 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

则有

$$(f(x) - g(x))' = -2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt + 2f(x) = f(x) + g(x)$$

应用 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned} e^{-w} \left| \int_0^w e^t f(t) dt \right| &\leq e^{-w} \left| \int_0^{\frac{w}{2}} e^t f(t) dt \right| + e^{-w} \left| \int_{\frac{w}{2}}^w e^t f(t) dt \right| \\ &\leq e^{-w} \left(\int_0^{\frac{w}{2}} e^{2t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{w}{2}} f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + e^{-w} \left(\int_{\frac{w}{2}}^w e^{2t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{w}{2}}^w f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{-\frac{w}{2}} \int_0^{+\infty} f^2(t) dt + \int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} f^2(t) dt \end{aligned}$$

则有

$$\lim_{w \rightarrow \infty} e^{-w} \int_0^w e^t f(t) dt = 0$$

则 $\frac{1}{2}(f(x) - g(x))^2$ 在 $[0, a]$ ($\forall a \in \mathbb{R}^+$) 上必定有界连续, 则

$$\begin{aligned} \int_0^w f^2(x) - g^2(x) dx &= \int_0^w \left(\frac{(f(x) - g(x))^2}{2} \right)' dx \\ &= \frac{(f(x) - g(x))^2}{2} \Big|_0^w \\ &= 2^{-2w} \left(\int_0^w e^t f(t) dt \right)^2 \end{aligned}$$

由上式可知

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \infty} \int_0^w f^2(x) - g^2(x) dx &= \int_0^{+\infty} f^2(x) - g^2(x) dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} 2^{-2w} \left(\int_0^w e^t f(t) dt \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) dx = \int_0^{+\infty} f^2(x) dx$$

命题 1.6.15 设 f 是周期为 T 的连续函数, 且 $\int_0^T f(x)dx = 0$. 证明:

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

证明: 由题设知, f 可以展开为 Fourier 级数,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

易知 $a_0 = 0$, 又

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi}{T} b_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right) - \frac{2n\pi}{T} a_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

由 Parseval 恒等式知

$$\begin{aligned} \int_0^T |f'(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2\pi^2}{T^2} (a_n^2 + b_n^2) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{T^2} (a_n^2 + b_n^2) \\ \int_0^T |f(x)|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx$$

命题 1.6.16 设 f 在 $[0, a]$ ($a > 0$) 上有可积的导函数。证明:

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)| dx + \int_0^a |f'(x)| dx$$

证明: 对任意 $x \in [0, a]$, 有

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t) dt \\ f(0) &= f(x) - \int_0^x f'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(0)| &\leq |f(x)| + \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \int_0^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(x)| + \int_0^a |f'(t)| dt \end{aligned}$$

两边对 x 从 0 到 a 积分, 得

$$a|f(0)| \leq \int_0^a |f(x)|dx + a \int_0^a |f'(x)|dx$$

即

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx$$

命题 1.6.17 设 f 在 $[0, 1]$ 上有可积的导函数。证明:

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)|dx, \left| \int_0^1 f(x)dx \right| \right\}$$

证明: 若

$$\int_0^1 |f'(x)|dx = \left| \int_0^1 f(x)dx \right|$$

则不等式显然成立若

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| < \int_0^1 |f'(x)|dx$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一定变号, 所以存在 $x_0 \in [0, 1]$, $f(x_0) = 0$, 则

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(x_0)| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f'(t)dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f'(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |f'(x)|dx \end{aligned}$$

则

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 |f'(x)|dx$$

命题 1.6.18 函数 $f(x)$, $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的可导函数, 且

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)dx$$

证明: 在 $[0, 1]$ 上存在不同的两点 ξ , η , 使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)(f(\eta) - f(\xi))$$

证明： 反证法。设 $\forall x, y \in [0, 1], x \neq y$, 有

$$f'(x) \neq g'(x)(f(y) - f(x))$$

不妨设

$$f'(x) > g'(x)(f(y) - f(x))$$

否则由 Darboux 定理知, 必存在不同的两点 x, y 使得

$$f'(x) = g'(x)(f(y) - f(x))$$

令 $y \rightarrow x$, 有

$$\lim_{y \rightarrow x} f'(x) = f'(x) \geq \lim_{y \rightarrow x} g'(x)(f(y) - f(x)) = 0$$

由 x 的任意性知, $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$, 则由题设

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx = 2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx$$

然而由于 $f'(x) \geq 0$

$$2 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx \geq \int_0^{\frac{2}{3}} f(x) dx$$

与假设矛盾。得证。

命题 1.6.19 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。证明:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx$$

证明： 设 x, x_0 是 $[a, b]$ 上两点, 则有

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

所以

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| f(x) - \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f(x)| + \int_{x_0}^x |f'(t)| dt \\ &\leq |f(x)| + \int_a^b |f'(t)| dt \end{aligned}$$

两边对 x 从 a 到 b 积分得

$$(b-a)|f(x_0)| \leq \int_a^b |f(x)|dx + (b-a) \int_a^b |f'(t)|dt$$

即

$$|f(x_0)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)|dx$$

由 x_0 的任意性知

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^b |f'(x)|dx$$

定理 1.6.1

$$\iiint_{\Omega} f(ax+by+cz)d\Omega = \pi \int_{-1}^1 (1-u^2)f(\delta u)du$$

其中, 积分区域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $\delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

证明: 设平面 P_u

$$ax + by + cz = \delta u$$

与原点的距离为 u , 且 $-1 \leq u \leq 1$.

平面 P_{u+du}

$$ax + by + cz = u + du$$

与平面 P_u 之间所夹的体元为

$$\begin{aligned} \int_u^{u+du} \pi(\sqrt{1-u^2})^2 du &= \pi \int_u^{u+du} (1-u^2)du \\ &= \pi \left(u - \frac{1}{3}u^3 \right) \Big|_u^{u+du} \\ &= \pi \left[du - \frac{1}{3}((u+du)^3 - u^3) \right] \\ &= \pi(1-u^2)du \end{aligned}$$

所以原积分可化为

$$\pi \int_{-1}^1 (1-u^2)f(\delta u)du$$

定理 1.6.2

$$\iint_S f(ax+by+cz)dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\delta u)du$$

其中, 积分曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\delta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

证明： 存在一个正交矩阵 \mathbf{A} ，将 (x, y, z) 转换为 (u, v, w) ，即

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

且 \mathbf{A} 的第一行为

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\delta} & \frac{b}{\delta} & \frac{c}{\delta} \end{pmatrix}$$

又因为矩阵 A 为正交矩阵，则

$$|\mathbf{A}| = 1$$

所以原积分可应用坐标变换得

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax + by + cz) dS &= \iint_S f(\delta u) dS \\ &= 2 \iint_D f(\delta u) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2} du dv \\ &= 2 \iint_D f(\delta u) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} du dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \cdot 2 \int_0^{\sqrt{1-u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(\delta u) du \cdot 2 \arcsin \left(\frac{v}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(\delta u) du \end{aligned}$$

命题 1.6.20 证明：

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi)} \sin \theta d\theta$$

证明： 设曲面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，应用球面坐标系，易知

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \cos \theta$$

其中, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

应用定理 1.6.2, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{\sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi)} \sin \theta d\theta &= \oiint_S e^{x-y} dS \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{2}u) du \\ &= \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

命题 1.6.21 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的恒正连续函数, 且 $f(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加。

证明:

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

证明: 由 $f(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加知, $\forall m, n \in \mathbb{R}$, 有

$$(f(m) - f(n)) \left(\frac{f(m)}{g(m)} - \frac{f(n)}{g(n)} \right) \geq 0$$

对上式关于 m, n 从 0 到 x 积分, 得

$$x \int_0^x g(t) dt \geq \int_0^x f(t) dt \int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt$$

其中, $x > 0$, 则有

$$\frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt} \geq \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt}$$

由 Hölder 不等式得

$$\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)} dt \int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt \geq \frac{x^4}{4}$$

所以

$$\frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \leq 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} dx \leq \int_0^1 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3} dx$$

其中

$$\int_0^1 4 \frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)} dt}{x^3} dx = \int_0^1 \int_t^1 \frac{f(t)t^2}{g(t)} \frac{4}{x^3} dx dt = 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} (1 - t^2) dt$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} dx &\leq 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} (1-t^2) dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} dx \leq 2 \int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} dx$$

命题 1.6.22 证明:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$$

证明: 易知

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+m+1} &= \int_0^1 x^{k+m} dx \\ \frac{1}{k+n+1} &= \int_0^1 x^{k+n} dx\end{aligned}$$

原等式左边有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} &= \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k+m} dx \right] \\ &= \int_0^1 \left[x^m \sum_{k=0}^n \left[(-1)^k \binom{n}{k} x^k \right] \right] dx \\ &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx\end{aligned}$$

同理, 原等式右边有

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1} = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

易证

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

即

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+m+1} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{k+n+1}$$

定理 1.6.3 (Frullani 定理) 设函数 $f(x)$ 是 $[0, \alpha]$ 上的连续函数, 且对任意的 β , $\int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 存在。则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

证明: 对任意的 β 有

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\beta}^T \frac{f(ax)}{x} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{a\beta}^{aT} \frac{f(x)}{x} dx \\ &= \int_{a\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \end{aligned}$$

同理

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{b\beta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(x)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx$$

又

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = f(0) \int_a^b \frac{1}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$$

命题 1.6.23 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx$$

证明: 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{1}{\sin^4 x} - \frac{1}{x^4} \right) = \frac{2}{3}$$

知存在常数 $C > 0$, 使得

$$\left| \frac{x \sin^4 nx}{\sin^4 x - \frac{\sin^4 nx}{x^3}} \right| \leq C \frac{\sin^4 nx}{x} \leq Cn, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 nx}{x^3} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^3 x \cos x}{x^2} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{6 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^4 x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} dx
\end{aligned}$$

由 Frullani 公式知

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} dx = \ln 2$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right) dx = \ln 2$$

命题 1.6.24 设函数 $f \in C^1[0, 1]$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

证明:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k) \left(x - \frac{k}{n}\right) dx
\end{aligned}$$

因为 $f \in C^1[0, 1]$, 所以在 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, 2, \dots, n$ 中, 存在 m_k, M_k , 使得

$$m_k \leq f'(x) \leq M_k$$

因此有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} m_k \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} m_k \left(x - \frac{k}{n}\right) dx \\
&\leq \sum_{k=1}^n -m_k \cdot \frac{1}{2n^2} \\
&= -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n m_k
\end{aligned}$$

同理

$$\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \geq -\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n M_k$$

两边对 n 取极限, 由黎曼积分性质可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}(f(1) - f(0))$$

命题 1.6.25 设函数 $f \in C^1[0, 1]$, $\theta \in [0, 1]$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\left(\theta - \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(0))$$

证明:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) &= \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right] \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] \\
&\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\frac{1}{n}(\theta - 1) \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)
\end{aligned}$$

其中, $\xi_k \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, 1, \dots, n$ 对 n 取极限, 由黎曼积分性质可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -(\theta - 1)(f(1) - f(0))$$

综上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) \right] = -\left(\theta - \frac{1}{2}\right)(f(1) - f(0))$$

命题 1.6.26 设函数 $f \in C[0, 1]$, 如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(1)}{n} = M$$

其中 M 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。证明: $f(x) \equiv M$.

证明: 反证法。设 $\exists x_0 \in [0, 1], f(x_0) = y < M$, 则由函数连续性可知, $\exists \delta > 0, |x - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

其中 $\varepsilon = \frac{M - y}{2}$, 又由黎曼积分性质知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \cdots + f(1)}{n} = \int_0^1 f(x) dx = M$$

然而

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx < 2\delta \frac{M + y}{2} = \delta(M + y) < 2M\delta$$

所以

$$\int_0^1 f(x) dx < M$$

与题设矛盾。得证。

命题 1.6.27 设非负函数 $f(x) \in C[0, 1]$, 且在 $[0, 1]$ 上是单调递增的, 记

$$s = \frac{\int_0^1 x f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$$

(1) 证明: $s \geq \frac{1}{2}$;

(2) 试比较 $\int_0^s f(x) dx$ 与 $\int_s^1 f(x) dx$ 的大小。

证明: (1) 由题设, 即证

$$\int_0^1 x f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2}) f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2}) f(x) dx \end{aligned}$$

由积分中值定理可得,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})f(x)dx &= -\frac{1}{8}f(\xi_1) \\ \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})f(x)dx &= \frac{1}{8}f(\xi_2)\end{aligned}$$

其中, $0 < \xi_1 < \frac{1}{2} < \xi_2 < 1$, 再由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 可知

$$f(\xi_2) - f(\xi_1) \geq 0$$

即

$$s \geq \frac{1}{2}$$

(2) 因为 $f(x) \in C[0, 1]$, 则 $f'(x) \geq 0$, 考虑变上限积分

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

显然 $F''(x) = f'(x) \geq 0$, 因此 $F(x)$ 的图像是下凸的且 $F(x) \geq 0$. 不妨设

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

则 $F(1) = 1$, $F(0) = 0$. 由题设知, 即证

$$F(s) = \int_0^s f(x)dx \leq \int_s^1 f(x)dx = F(1) - F(s)$$

也即 $F(s) \leq \frac{1}{2}$.

由几何直观, $x = s$ 处的切线 (斜率 $k > 0$)

$$y = k(x - s) + F(s)$$

在函数 $y = F(x)$ 的下方, 即

$$F(x) \geq k(x - s) + F(s)$$

利用 $f(x)$ 的非负性得

$$F(x)f(x) \geq k(x - s)f(x) + F(s)f(x)$$

不等式两边从 0 到 1 积分得

$$\text{左边} = \int_0^1 F(x)f(x)dx = \int_0^1 F(x)dF(x) = \frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{右边} = \int_0^1 k(x - s)f(x)dx + \int_0^1 F(x)f(x)dx = (ks - ks) + F(s) = F(s)$$

所以 $F(s) \leq \frac{1}{2}$, 即

$$\int_0^s f(x)dx \leq \int_s^1 f(x)dx$$

命题 1.6.28 设 $f(x) \in C^2[0, 1]$, 且满足 $f(0) = f(1) = f'(0) = 0, f'(1) = 1$

证明:

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 4$$

并指出不等式中等号成立的条件。

证明: 显然

$$\int_0^1 (f''(x) + ax + b)^2 dx \geq 0$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f''(x) + ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a \int_0^1 x f''(x) dx + 2b \int_0^1 f''(x) dx + \int_0^1 (ax + b)^2 dx \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a \int_0^1 x df'(x) + 2b f'(x) \Big|_0^1 + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2ax f'(x) \Big|_0^1 - 2a \int_0^1 f'(x) dx + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a - 2af(x) \Big|_0^1 + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\ &= \int_0^1 (f''(x))^2 dx + 2a + 2b + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq \max_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(-2a - 2b - \frac{a^2}{3} - ab - b^2 \right) = 4$$

右端最小值在 $a = -6, b = 2$ 时取得, 因此, 当 $f''(x) = 6x - 2$ 且满足题设时不等式取等, 不难得到此时 $f(x) = x^3 - x^2$.

命题 1.6.29 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上二阶连续可微。证明

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 9 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

证明: 设 $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, 由 Lagrange 中值定理知, $\exists z \in (x, y)$, 使得

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

所以

$$|f'(z)| \leq 3|f(x)| + 3|f(y)|$$

对于任意的 $w \in [0, 1]$, 有

$$f'(w) - f'(z) = \int_0^1 f''(t) dt$$

因此可得

$$|f'(w)| \leq 3|f(x)| + 3|f(y)| + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

分别对 x, y 从 0 到 1 积分, 得

$$\frac{1}{9}|f'(w)| \leq \int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)| dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(y)| dy + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \frac{1}{9} \int_0^1 |f''(x)| dx$$

即

$$\max |f'(w)| \leq 9 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx$$

定理 1.6.4 设 f, g 是区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数, 且存在 $u, v \in [a, b]$, 使得 $\max f(x) = f(u)$, $\max g(x) = g(u)$, $\min f(x) = f(v)$, $\min g(x) = g(v)$.

则对任意 $\lambda \in (0, 1)$, 存在 $c \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda f(c) \int_a^b f(x)dx + (1-\lambda)g(c) \int_a^b g(x)dx$$

证明: 显然, 对任意 $x \in [a, b]$, 有 $f(v) \leq f(x) \leq f(u)$. 因为 g 非负, 所以

$$f(v)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(u)g(x)$$

因此

$$f(v) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(u) \int_a^b g(x)dx$$

等号成立当且仅当 f 为常值函数或 $g \equiv 0$. 同理有

$$g(v) \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq g(u) \int_a^b f(x)dx$$

等号成立当且仅当 g 为常值函数或 $f \equiv 0$. 设 $\lambda \in (0, 1)$, 考虑函数 $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) = \lambda f(t) \int_a^b g(x)dx + (1-\lambda)g(t) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)g(x)dx$$

易知 $h(u) \geq 0$, $h(v) \leq 0$. 由函数连续性知, 存在 $c \in [u, v]$, 使得 $h(c) = 0$.

下证 $c \in (a, b)$. 若 $c \neq u$ 且 $c \neq v$, 则显然满足 $c \in (a, b)$. 否则我们不妨设 $c = u$, 易知 f 和 g 为常值函数, 因此任意 $t \in [a, b]$, 满足 $h(t) = 0$. 若 $c = v$, 同理可证。

命题 1.6.30 设函数 $f(x) \in C^1[0, 1]$, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \frac{1}{12} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx$$

证明: 应用分部积分法, 因为 $f(0) = f(1) = 0$, 则对任意 $y \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^y f(x)dx = \int_0^y (y-x)f'(x)dx$$

且有

$$\int_y^1 f(x)dx = \int_y^1 (y-x)f'(x)dx$$

令 $y = \frac{1}{2}$, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \right)^2 &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x \right) f'(x)dx \right)^2 \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{24} \int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2 dx \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \right)^2 &= \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - x \right) f'(x)dx \right)^2 \\ &\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 dx \int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \frac{1}{24} \int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2 dx \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 &\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \right)^2 + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{24} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 (f'(x))^2 dx \end{aligned}$$

命题 1.6.31 设 $f(x)$ 是区间 $[-1, 1]$ 上的连续函数, 且满足:

- (1) $f(-1) > f(1)$
- (2) $x + f(x)$ 是单调非减的。

$$(3) \int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$

证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \leq \frac{2}{3}$$

证明: 易知 $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$, 则不等式可转换为

$$\int_{-1}^1 (f^2(x) - x^2)dx \leq 0$$

令 $g(x) = f(x) + x$, $h(x) = f(x) - x$, 易知 $g(x)$ 单调增加, 所以有积分第二中值定理得, 对任意 $y \in (-1, 1)$ 有

$$\int_{-1}^1 (f^2(x) - x^2)dx = \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx = g(-1) \int_{-1}^y h(x)dx + g(1) \int_y^1 h(x)dx$$

又因为 $g(x) = h(x) + 2x$, 则

$$\begin{aligned} & g(-1) \int_{-1}^y h(x)dx + g(1) \int_y^1 h(x)dx \\ &= g(-1) \int_{-1}^y (h(x) + 2x)dx + g(1) \int_y^1 (h(x) + 2x)dx - g(-1) \int_{-1}^y 2x dx - g(1) \int_y^1 2x dx \\ &= g(-1) \int_y^1 g(x)dx + g(1) \int_y^1 g(x)dx + (1 - y^2)(g(-1) - g(1)) \\ &= g(-1) \left(\int_y^1 g(x)dx + 1 - y^2 \right) + g(1) \left(\int_y^1 g(x)dx - 1 + y^2 \right) \end{aligned}$$

令 $A = \int_{-1}^y g(x)dx + 1 - y^2$, 则 $\int_y^1 g(x)dx - 1 + y^2 = -A$, 由积分第一中值定理得, 存在 $\xi \in [-1, y]$, 使得

$$A = g(\xi)(y + 1) + 1 - y^2$$

反证法, 假设 $A < 0$, 则 $g(\xi) < y - 1$; 同理, 存在 $\eta \in [y, 1]$, 使得 $-A = g(\eta)(1 - y) > 0$, 则 $g(\eta) > y + 1$, 所以 $g(\eta) - g(\xi) > 2$.

然而由题设可知, $g(-1) + 1 \geq g(1) - 1$, 即 $g(1) - g(-1) \leq 2$. 所以 $A \geq 0$.

又 $g(x)$ 是单调不减函数, 所以

$$A(g(-1) - g(1)) \leq 0$$

即

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \leq \frac{2}{3}$$

第二章

线性代数

§1 矩阵的初等变换

定理 2.1.1 设 \mathbf{A} 是严格对角占优矩阵, 即

$$|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ki}|, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

则 \mathbf{A} 是非奇异矩阵。

证明: 反证法。假设 $\det \mathbf{A} = 0$, 则齐次线性方程组有非零解 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. 设 $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ 中最大的一个是 $|x_k|$, 显然 $|x_k| > 0$. 由假设知

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| &= | -a_{kk}x_k | = |a_{kk}| |x_k| \\ &> |x_k| \sum_{j \neq k} |x_{kj}| \\ &\geq \sum_{j \neq k} |x_j| |a_{kj}| \\ &\geq \left| \sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \right| \end{aligned}$$

与假设矛盾。得证。

§2 矩阵的相似变换

定理 2.2.1 实对称矩阵的特征值为实数。

证明： 设 λ 是实对称矩阵 A 的特征值， \mathbf{x} 为对应的特征向量，即 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ， $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 。则有

$$A\bar{\mathbf{x}} = \overline{A\mathbf{x}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$$

于是

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T (A\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{x}}^T \lambda\mathbf{x} = \lambda\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

及

$$\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}^T A^T)\mathbf{x} = (A\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{x} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

两式相减得

$$(\lambda - \bar{\lambda})\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

但因为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq \mathbf{0}$ ，所以

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$$

因此 $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ ，即 λ 是实数。

第三章

概率论与数理统计

§1 随机事件与概率

1.1 概率的性质

命题 3.1.1 证明:

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$

命题 3.1.2 因为

$$P(AB) - P(A)P(B) = P(AB) + P(A)[P(AB) - P(\bar{A}B)] = P(AB)[1 - P(A)] - P(A)P(\bar{A}B)$$

且

$$0 \leq P(AB)[1 - P(A)] \leq P(A)[1 - P(A)]$$

$$0 \leq P(A)P(\bar{A}B) \leq P(A)P(\bar{A}) = P(A)[1 - P(A)]$$

所以

$$\begin{aligned} |P(AB) - P(A)P(B)| &= |P(AB)[1 - P(A)] - P(A)P(\bar{A}B)| \\ &\leq \max\{P(AB)[1 - P(A)], P(A)P(\bar{A}B)\} \\ &\leq P(A)[1 - P(A)] = P(A) - [P(A)]^2 \\ &= \frac{1}{4} - \left[P(A) - \frac{1}{2}\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

§2 随机变量及其分布

2.1 随机变量的方差与标准差

定理 3.2.1 (Chebyshev 不等式) 设随机变量 X 的数学期望和方差都存在, 则对任意常数 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

证明: 设 X 是一个随机变量, 其密度函数为 $p(x)$. 记 $E(X) = a$, 则有

$$\begin{aligned} P(|X - a| \geq \varepsilon) &= \int_{|x-a| \geq \varepsilon} p(x) dx \\ &\leq \int_{|x-a| \geq \varepsilon} \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} p(x) dx \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x) dx \\ &= \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

命题 3.2.1 设随机变量 X 仅在区间 $[a, b]$ 上取值. 证明: $a \leq E(X) \leq b, Var(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

证明: 设随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$, 则有

$$E(X) = \int_a^b xp(x) dx \leq \int_a^b p(x) dx = b$$

同理 $E(X) \geq a$, 即 $a \leq E(X) \leq b$. 因为 $a \leq X \leq b$, 则

$$-\frac{b-a}{2} \leq X - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2}$$

因此

$$\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

易知

$$E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

则有

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \text{Var}\left(X - \frac{a+b}{2}\right) \\
 &= E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left[E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)\right]^2 \\
 &\leq E\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\
 &\leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

命题 3.2.2 设 $g(x)$ 为随机变量 X 取值的集合上的非负不减函数, 且 $E(g(x))$ 存在。证明: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}$$

证明: 因为 $g(x)$ 为非负不减函数, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$g(x) \geq g(\varepsilon) \geq 0$$

即 $\frac{g(x)}{g(\varepsilon)} \geq 1$, 因此

$$\begin{aligned}
 P(X > \varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)dx \\
 &\leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{g(\varepsilon)} p(x)dx \\
 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx}{g(\varepsilon)} \\
 &= \frac{E(g(X))}{g(\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

§3 常用离散分布

定理 3.3.1 (Poisson 定理) 在 n 重伯努利试验中, 记事件 A 在一次实验中发生的概率为 p_n (与试验次数有关)。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明： 记 $np_n^k = \lambda_n$, 即 $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$, 则有

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

对固定的 k 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n &= \lambda \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} &= e^{-\lambda} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

因此, 对任意的 k 成立。定理得证。

第四章

离散数学

§1 数理逻辑

§2 集合论

2.1 函数

命题 4.2.1 设函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin k}$$

证明：函数 f 是单射。

证明：易知 $\sin n = \frac{1}{2i}(e^{in} - e^{-in})$ ，则有

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \frac{1}{e^{ik} - e^{-ik}} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^n \frac{1}{z^n - z^{-n}}$$

其中 $z = e^{ik}$ 。因为 z 为超越数，所以 z 不能是任何有理系数代数方程的根。反证法。假设存在 $n_1, n_2, n_1 < n_2$ ，使得 $f(n_1) = f(n_2)$ ，则有

$$f(n_2) - f(n_1) = \frac{1}{2i} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{z^n - z^{-n}} = 0$$

即

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{z^n - z^{-n}} = 0$$

而上式为有理函数，与 z 为超越数的性质矛盾。得证。

§3 代数结构

3.1 代数系统

命题 4.3.1

$$V_1 = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle, \quad V_2 = \langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$$

其中, \mathbb{Z} 为整数集, $+$, \cdot 分别为普通加法和乘法, $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, \oplus , \otimes 分别为模 n 加法和模 n 乘法, 令 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, $f(x) = x \bmod n$. 证明 f 为 V_1 到 V_2 的满同态映射。

证明: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(x + y) = (x + y) \bmod n$$

$$f(x) \oplus f(y) = [(x \bmod n) + (y \bmod n)] \bmod n$$

由取模运算的定义知, $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_n$

$$x = q_1n + r_1$$

$$y = q_2n + r_2$$

则

$$\begin{aligned} (x + y) \bmod n &= q_1n + r_1 + q_2n + r_2 \\ &= (q_1 + q_2)n + r_1 + r_2 \\ &= (q_1 + q_2 + q_3)n + r_3 \\ &= [(x \bmod n) + (y \bmod n)] \bmod n \\ &= (r_1 + r_2) \bmod n \end{aligned}$$

其中

$$r_1 + r_2 = q_3n + r_3, \quad q_3 \in \mathbb{Z}, r_3 \in \mathbb{Z}_n$$

即

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$$

同理可证

$$f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

且 f 显然是满映射, 得证。

3.2 群与环

定理 4.3.1 G 为群, 则 G 中满足消去律, 即对任意 $a, b, c \in G$ 有

(1) 若 $ab = ac$, 则 $b = c$

(2) 若 $ba = ca$, 则 $b = c$

证明: (1) 因为 $ab = ac$, 且 G 是群, 所以存在 $a^{-1} \in G$, 两边左乘 a^{-1} 得

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac$$

即 $b = c$, 得证。

(2) 同上。

命题 4.3.2 设 G 是群, $a, b \in G$ 是有限阶元。证明:

(1) $|b^{-1}ab| = |a|$

(2) $|ab| = |ba|$

证明: (1) 设 $|b^{-1}ab| = k$, $|a| = l$, 则

$$[b^{-1}ab]^l = \overbrace{[b^{-1}ab \ b^{-1}ab \ \cdots \ b^{-1}ab]}^l = b^{-1}a^l b = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

即 $k \leq l$, 同理设 $|bb^{-1}abb^{-1}| = m$, 显然 $m = l$, 同时

$$[bb^{-1}abb^{-1}]^k = \overbrace{[b(b^{-1}ab)b^{-1} \ b(b^{-1}ab)b^{-1} \ \cdots \ b(b^{-1}ab)b^{-1}]}^k = b(b^{-1}ab)^k b^{-1} = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

因此 $l = m \leq k \leq l$, 即

$$|b^{-1}ab| = |a|$$

(2) $|ba| = |b^{-1}bab| = |ba|$, 得证。

命题 4.3.3 偶数阶群必含 2 阶元。

证明: 由群的性质和逆元的唯一性知, $\forall a \in G$, 若 $|a| > 2$, 则存在 $a^{-1} \in G$, 且 $a \neq a^{-1}$ 即群中除单位元外的任何元素都和它的逆元成对存在。因此, 偶数阶群必存在 2 阶元。

第五章

复分析

§1 复数

命题 5.1.1 证明: 对于 $|z| \leq 1$, $|w| \leq 1$, 有

$$|w - z| \leq |1 - \bar{w}z|$$

证明: 设 $z = x_1 + y_1i$, $w = x_2 + y_2i$.

$$|w - z| = |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i|$$

$$|1 - \bar{w}z| = |1 - (x_2 - y_2i)(x_1 - y_1i)| = |(1 - x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i|$$

$$\begin{aligned} & |w - z|^2 - |1 - \bar{w}z|^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 1 - x_1^2x_2^2 - y_1^2y_2^2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 \\ &= (1 - x_1^2 - y_1^2)(1 - x_2^2 - y_2^2) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

其中

$$0 \leq x_1^2 + y_1^2 \leq 1, \quad 0 \leq x_2^2 + y_2^2 \leq 1$$

则

$$|w - z| \leq |1 - \bar{w}z|$$

命题 5.1.2 设数列 $\{a_n\}$ 由 -1 , 0 , 1 组成。证明:

$$a_0 \sqrt{2 + \sqrt{a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \cdots}}}} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n a_1 \cdots a_n}{2^n} \right)$$

证明： 设

$$z_n = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right)$$

易知

$$\operatorname{sgn} z_n = \operatorname{sgn} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \right) = a_0$$

对 $a_0 \neq 0$, 有

$$z_n^2 - 2 = a_1 \sqrt{2 + a_2 \sqrt{2 + \cdots + a_n \sqrt{2}}}$$

且有

$$\begin{aligned} z_n^2 - 2 &= -2 \cos \left(\frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a_0 a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n \frac{a_1 \cdots a_k}{2^k} \right) \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{a_1 \cdots a_k}{2^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

得证。

§2 复积分

命题 5.2.1 证明：对任意 $\xi \in \mathbb{C}$, 有

$$e^{-\pi \xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

证明：

$$e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} = e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi)}$$

因为

$$-\pi(x^2 + 2ix\xi) = -\pi(x^2 + 2\pi i x - \xi^2 + \xi^2) = -\pi(x + i\xi)^2 - \pi\xi^2$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

令 $z = x + i\xi$, $dx = dz$, 则有

$$\begin{aligned}
& e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx \\
&= e^{\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z^2} dz \\
&= e^{\pi\xi^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\
&= e^{\pi\xi^2}
\end{aligned}$$

命题 5.2.2 证明:

$$\left| \int_{\gamma} e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}$$

其中 $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $r \in \mathbb{R}^+$

证明:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma} e^{iz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir^2(\cos 2t + i \sin 2t)} i r e^{it} dt \right| \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{ir^2(\cos 2t + i \sin 2t)} i r e^{it} \right| dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-r^2 \sin 2t} dt
\end{aligned}$$

因为 $\sin 2t \geq \frac{4t}{\pi}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-r^2 \sin 2t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} r e^{-\frac{4r^2 t}{\pi}} dt = \frac{\pi}{4r} (1 - e^{-r^2})$$

命题 5.2.3 设 $f(z)$ 在复平面上处处解析, 并且不等式

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq r^{\frac{16}{5}}$$

对所有 $r > 0$ 成立. 证明: $f(z) \equiv 0$

证明: 由题设 $f(z)$ 在复平面 C 内都能 Taylor 展开, 则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

应用 Cauchy 积分公式, 得

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta$$

从而 $2\pi|f(0)| \leq 6\frac{16}{5}$, 令 $r \rightarrow 0^+$, 有 $f(0) = 0$ 再由

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta$$

则可知 $f'(0) = 0$, 同理 $f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$

当 $n \geq 4$ 时

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}} d\theta$$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{r^{\frac{16}{5}}}{r^n} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow +\infty)$$

从而

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

即

$$f(z) \equiv 0$$

命题 5.2.4 设函数 f 在 $z = 0$ 的邻域上连续。证明：

(1)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt = 2\pi f(0)$$

(2)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_L \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0)$$

其中 L 是圆 $|z| = r$.

证明： (1) 因为函数 f 在 $z = 0$ 的邻域上连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 使得当 $r < \delta$ 时

$$|f(re^{it}) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt - 2\pi f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) - f(0) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

(2) 设 $z = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 使得当 $r < \delta$ 时

$$\begin{aligned} \left| \int_L \frac{f(z)}{z} dt - 2\pi i f(0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}} re^{it} i - f(0) i dt \right| \\ &= \left| i \int_0^{2\pi} f(re^{it}) - f(0) dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) - f(0)| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

命题 5.2.5 设 $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ 是一多项式。

(1) 如果系数 c_k ($k = 0, 1, \cdots, n$) 是实数, 证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x) dx \leq \pi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \sum_{k=0}^n c_k^2$$

(2) 如果系数 c_k ($k = 0, 1, \cdots, n$) 是复数, 证明:

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \leq \pi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

(3) 证明:

$$\left| \sum_{j,k=0}^n \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

证明: (1) 先证右边等号成立, 注意到

$$|f(e^{i\theta})|^2 = (c_0 + c_1 \cos \theta + \cdots + c_n \cos n\theta)^2 + (c_0 + c_1 \sin \theta + \cdots + c_n \sin n\theta)^2$$

易知

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx &= \begin{cases} \pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \begin{cases} \pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$\pi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \sum_{k=0}^n c_k^2$$

再证不等号。应用 Cauchy 积分公式得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_1} f^2(x)dx + \int_{\Gamma_2} f^2(z)dz \\ &= \int_{-1}^1 f^2(x)dx + \int_0^\pi f^2(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta \end{aligned}$$

其中, Γ_1 : 从 $(-1, 0)$ 到 $(1, 0)$ 的直径, Γ_2 : 从 $(1, 0)$ 沿单位圆逆时针到 $(-1, 0)$.

所以

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \leq \left| \int_0^\pi f^2(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta \right| \leq \int_0^\pi |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

再把积分曲线变为下半圆可得

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \leq \int_\pi^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

因此

$$\int_{-1}^1 f^2(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

(2) 设 $c_k = x_k + iy_k$ ($x_k, y_k \in \mathbb{R}$), 并且

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= [(x_0 + x_1 \cos \theta + \cdots + x_n \cos n\theta) - (y_1 \sin \theta + y_2 \sin 2\theta + \cdots + y_n \sin n\theta)] \\ &\quad + i[(x_1 \sin \theta + \cdots + x_n \sin n\theta) + (y_0 + y_1 \cos \theta + y_2 \cos 2\theta + \cdots + y_n \cos n\theta)] \end{aligned}$$

易知

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

同 (1) 可证等号部分成立。

令 $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$ 得

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\cos \theta)|^2 |\sin \theta| d\theta$$

令 $x = \sin \theta$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 并作换元 $t = \pi - \theta$ 可得

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\sin \theta)|^2 |\cos \theta| d\theta$$

令 $x = \sin \theta$, $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, 并作换元 $t = 3\pi - \theta$ 可得

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(\sin \theta)|^2 |\cos \theta| d\theta$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |f(\cos \theta)|^2 + |f(\sin \theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4} (2\pi) \left[x_0^2 + y_0^2 + \sum_{k=0}^n (x_k^2 + y_k^2) \right] \\ &\leq \frac{1}{4} (2\pi) \left[2 \sum_{k=0}^n (x_k^2 + y_k^2) \right] \\ &= \pi \sum_{k=0}^n |c_k|^2\end{aligned}$$

(3) 对 $f^2(x)$ 展开, 可得 x^m 的系数是 $\sum_{j+k=m} c_j c_k$, 我们把它记为 a_m ($m = 0, 1, \dots, 2n$).

注意到下面的等式成立

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f^2(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \sum_{m=0}^{2n} a_m x^m dx \right| \\ &= \left| \sum_{m=0}^{2n} \frac{a_m}{m+1} \right| \\ &= \left| \sum_{j,k=0}^n \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right|\end{aligned}$$

由 (2) 结论可得

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 f^2(x) dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \\ &\leq \pi \sum_{k=0}^n |c_k|^2\end{aligned}$$

上面的等式成立当且仅当在 $-1 < x < 0$ 上有 $|f(x)| \equiv 0$, 即 $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

§3 复级数

命题 5.3.1 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n$ 收敛。证明：

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

证明: 记 $A_k = \sum_{n=1}^k A_n$, $A_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N (1-r^n)a_n &= (1-r^N)A_N + \sum_{n=1}^N (r^n - r^{n+1})A_n \\ &= (1-r)A_N + \sum_{n=1}^N (r^n - r^{n+1})(A_N - A_n)\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} (1-r)A_N = 0$$

所以只需证

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} (r^n - r^{n+1})(A_N - A_n) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N' \in \mathbb{N}$, $n > N'$ 时

$$|A_n - A| < \varepsilon$$

其中 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$

取 $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{N'}} < r < 1$, 则

$$0 < 1-r < 1-r^{N'} < \varepsilon$$

由于 A_n 有界, 设 $|A_n| \leq M$, 则 $n > N'$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1} (r^n - r^{n+1})(A_N - A_n) &\leq (1-r) \sum_{n=1}^{N'} r^n |A_n - A| + \sum_{n=N'+1}^{N-1} r^n (|A_n - A| + |A_N - A|) \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{N'} 2r^n M + \sum_{n=N'+1}^{N-1} r^n 2\varepsilon \right) \\ &= (1-r) \left(2M \frac{r - r^{N'+1}}{1-r} + 2\varepsilon r^{N'+1} \frac{1 - R^{N-N'+1}}{1-r} \right) \\ &< 2M\varepsilon + 2\varepsilon \\ &= 2(M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty$, 再 $r \rightarrow 1$

即

$$\lim_{r \rightarrow 1, r < 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

命题 5.3.2 设 f 在 \mathbb{C} 上解析, 且满足对于任一点 $z_0 \in \mathbb{C}$, f 在 z_0 的 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

满足至少有一个 c_n 为 0. 证明 f 是多项式。

证明: 考虑开单位圆盘 $D = \Delta(0, 1)$, 则 D 内有不可数的点, 所以存在正整数 p , 使得 D 内有无穷多点 $\{z_n\}$, 在这些点处的 Taylor 展开式中第 p 项系数 $c_p = 0$

可以在这些点中选取一个收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 且该子列收敛到 $z_0 \in D$, 由唯一性定理知, $f^{(p)} \equiv 0$ 在 \mathbb{C} 上恒成立, 故 f 为多项式。

命题 5.3.3 设

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

证明: 如果幂级数 $A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ 的收敛半径 $R(A)$ 为 1, 则幂级数 $C = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k$ 的收敛半径 $R(C)$ 也为 1.

证明: 因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} u_m z^m = \sum_{k=0}^{\infty} S_k z^k = C$$

则有 $R(C) \geq 1$, 因为左边乘积中幂级数的收敛半径都是 1, 右边幂级数 C 的收敛半径 $R(C)$ 不可能大于 1, 即 $R(C) \leq 1$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 对任意 $p \in \mathbb{N}^+$ 有

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k| |z|^k \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1) |a_k| |z|^k, \quad 1 < |z| < R$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k) |a_k| |z|^k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1) |a_k| |z|^k < \varepsilon, \quad 1 < |z| < R \quad (1)$$

因此

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k+1) |a_k| |z|^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (n+p-k) |a_k| |z|^k + \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| |z|^k$$

由 (1) 式知,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| |z|^k < \varepsilon, \quad 1 < |z| < R$$

若 $R(C) < 1$, 则必有 $R(A) < 1$, 与题设矛盾。得证。

定理 5.3.1 (Tauber 定理) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. 有

(1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^m n |a_n|}{m} = 0$$

(2) 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n, \quad |z| < 1$$

如果存在 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$, 那么级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛到 A .

证明: (1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, $n|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 选择 $n = n_0$ 满足上述条件. 则对任意 $m > n_0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{n=1}^m n|a_n|}{m} &= \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\sum_{n=n_0+1}^m n|a_n|}{m} \\ &< \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{m - n_0}{2m} \varepsilon \\ &< \frac{\sum_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

对足够大的 $m > M$, 有

$$\frac{\sum_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此对 $m > \max(N, M)$ 有

$$\frac{\sum_{n=1}^m n|a_n|}{m} < \varepsilon$$

(2)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \\ &\leq (1-x) \sum_{k=0}^n [|a_k|(1 + x + \cdots + x^{k-1})] + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k \\ &< n(1-x) \frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \frac{x^k}{k} \end{aligned}$$

令 $m|a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, 由 (a) 知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$, 使得当 $m > M$ 时有

$$\frac{\sum_{k=0}^n k|a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

我们由上述不等式得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n a_k - f(x) \right| &< n(1-x)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n} \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left[n(1-x) + \frac{1}{n} \frac{x^{n+1}}{1-x} \right] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \left[n(1-x) + \frac{1}{n} \frac{1}{1-x} \right] \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k = A$$

引理 5.3.1 设函数

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

的收敛半径为 R , w 是收敛圆边界上的点, z_1 是半径 $z_0 \vec{w}$ 上不同于 z_0 和 w 的任意一点。证明: 如果

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则 w 是 $\varphi(z)$ 的发散点。且如果

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则 w 是 $\varphi(z)$ 的收敛点。

证明: 由题设知, $\varphi(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内收敛, 固定 w , 选择 z_1 , 并将 $\varphi(z)$ 在 $z = z_1$ 展开, 得到

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad |z - z_1| < r$$

其中 r 是收敛半径, 且有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\varphi^{(n)}(z_1)}{n!} \\ &= a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} (z_1 - z_0) + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2} (z_1 - z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_m (z_1 - z_0)^{m-n} \end{aligned}$$

易知, 若 w 是 $\varphi(z)$ 的发散点, 则 $\varphi(z)$ 在 $z = z_1$ 处的 Taylor 展开式的收敛半径为 r , 因此对 b_n 有

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = r$$

即

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

反之, 若 w 是 $\varphi(z)$ 的收敛点, 则 $\varphi(z)$ 在 $z = z_1$ 处的 Taylor 展开式的收敛半径大于 r , 因此对 b_n 有

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

定理 5.3.2 (Pringshajm 定理) 设幂级数 $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R = 1$, 且 $a_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $z = 1$ 是 $\varphi(z)$ 的发散点。

证明: 反证法。假设 $z_0 = 1$ 不是 $\varphi(z)$ 的发散点。设 x 是区间 $(0, 1)$ 上的任意点, 由引理 5.3.1 可知

$$\Delta = R - |x - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

设 w 是单位圆上的任意一点, 且 z_1 是半径 $z_0 w$ 和圆 $|z| = x$ 的交点, 则有

$$R - |z_1| = 1 - x$$

且有

$$\begin{aligned} |\varphi^{(n)}(z_1)| &= \left| a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2} z_1^2 + \cdots \right| \\ &\leq a_n + \frac{n+1}{1} a_{n+1} x + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a_{n+2} x^2 + \cdots \\ &= \varphi^{(n)}(x) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \geq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}}$$

从最后一个不等式知

$$\Delta < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

由 w 的任意性和引理 5.3.1 可知, $\varphi(z)$ 在 $|z| = 1$ 上没有发散点, 这与 $\varphi(z)$ 的收敛半径 $R = 1$ 矛盾. 得证.

命题 5.3.4 设 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| < \infty$, 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \cdots + a_{m+n}|$$

证明: 因为 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_m| < \infty$, 所以存在 $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m = S$

令

$$C_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |a_{m-n} + a_{m-n+1} + \cdots + a_{m+n}|$$

下证 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = |S|$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{|m| > M} |a_m| < \varepsilon$$

则对 $m > M$ 有

$$\begin{aligned} (2n+1)C_n &= \sum_{|m| > n+M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \\ &+ \sum_{n+M \leq |m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \\ &+ \sum_{|m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{|m| > n+M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| &\leq \sum_{|m| > n+M} |a_{m-n}| + \cdots + |a_{m+n}| \\ &\leq (2n+1) \sum_{|m| > M} |a_m| \\ &\leq (2n+1)\varepsilon \end{aligned}$$

且

$$\sum_{|m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| \leq \sum_{|m| < n-M} \sigma \leq 4M\sigma$$

因为 $|m| \leq n-M$ 即 $m-n \leq -M \leq M \leq m+n$, 则对 $|m| \leq n-M$ 有

$$\left| |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - |S| \right| \leq \sum_{|m| \leq M} |a_m| < \varepsilon$$

所以

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{|m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - (2n-2M+1)|S| \right| \\ & \leq \sum_{|m| < n-M} |a_{m-n} + \cdots + a_{m+n}| - |S| \\ & \leq (2n-2M+1)\varepsilon \end{aligned}$$

因此

$$\left| (2n+1)C_n - (2n-2M+1)|S| \right| \leq (2n+1)\varepsilon + 4M\sigma + (2n-2M+1)\varepsilon$$

两边除以 $(2n+1)$ 并令 $n \rightarrow \infty$ 得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |C_n - |S|| \leq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = |S|$$

命题 5.3.5 设

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n}, \quad |z-a| < R$$

其中 $b_0 \neq 0$. 证明: $f(z)$ 可以表示为下列形式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a| < R$$

并用系数 a_n 和 b_n 来表示上述系数 c_n .

证明: 易知

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n}$$

在 $|z - a| < R$ 内解析, 因此存在 Taylor 级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < R$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} (z - a)^n \end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性可得

$$\begin{aligned} c_0 b_0 &= a_0 \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 &= a_1 \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 &= a_2 \\ &\vdots \\ c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_n b_0 &= a_n \end{aligned}$$

可得线性方程组, 解得

$$c_n = \frac{1}{b_{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

且

$$\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \neq 0$$

§4 解析函数

命题 5.4.1 设 f 在一个包含单位圆盘的开集上 (除去单位圆盘上的唯一一个极点 z_0) 解析。

证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 表示 f 在开单位圆盘上的 Taylor 级数, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$$

证明: 函数 f 在单位圆内可以表示为

$$f(z) = \frac{c}{z - z_0} + h(z)$$

其中 $h(z)$ 是解析函数且 $c \neq 0$. 因为 $h(z)$ 解析, 因此在单位圆内有 Taylor 级数

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

又 $\frac{c}{z - z_0}$ 能展开为幂级数

$$\frac{c}{z - z_0} = -\frac{c}{z_0} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0} \right)^n$$

所以

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

则有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n - \frac{c}{z_0^{n+1}}}{b_{n+1} - \frac{c}{z_0^{n+2}}} = z_0 \frac{(b_n z_0^n) z_0 - c}{(b_{n+1} z_0^{n+1}) z_0 - c} = z_0 \frac{z_0 h_n - c}{z_0 h_{n+1} - c}$$

其中 h_n 是 $h(z)$ 在 $z = z_0$ 处 Taylor 级数第 n 项的系数。因为 $h(z)$ 在单位圆内解析, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$. 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(z_0 \frac{a_0 h_n - c}{z_0 h_{n+1} - c} \right) = z_0$$

命题 5.4.2 证明: 函数 $\frac{d_r}{r}$ 是 r 的单调不减函数。其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| \mid z, w \in D(0, r), |z| = |w|\}$$

证明: 考虑 $0 < r < R < 1$, 易知 $d_r = \sup\{|f(z) - f(zu)| \mid z \in D(0, 1), |z| = 1\}$, 注意到对于任意的 $|u| = 1$, $z \mapsto \frac{f(z) - f(zu)}{z}$ 是单位圆 $D(0, 1)$ 上的解析函数, 因此

$$\begin{aligned}
\frac{d_r}{r} &= \frac{1}{r} \sup_{z \in D(0,r)} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} |f(z) - f(zu)| \\
&= \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&\leq \sup_{z \in \overline{D}(0,R)} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&= \sup_{|z|=R} \left| \frac{f(z) - f(zu)}{z} \right| \\
&= \frac{1}{R} \sup_{|z|=R} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{R} \sup_{z \in D(0,R)} |f(z) - f(zu)| \\
&= \frac{1}{R} d_R \leq \frac{1}{R} d_1
\end{aligned}$$

令 $R \rightarrow 1$, 则有

$$\frac{d_r}{r} \leq \frac{1}{R} d_R \leq d_1$$

命题 5.4.3 已知 D 是单位圆盘, 设 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是解析函数。证明: 函数 f 的直径 $d = \sup_{z, w \in D} |f(z) - f(w)|$ 满足

$$2|f'(0)| \leq d$$

证明: 由 Cauchy 公式得,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz \\
f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{-f(-z)}{z^2} dz
\end{aligned}$$

其中 $0 < r < 1$, 即

$$\begin{aligned}
2f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz \\
2|f'(0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|z|=r} \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} dz \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(-z)}{z^2} \right| dz \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \frac{d}{r^2} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{d}{r}
\end{aligned}$$

则显然有 $2|f'(0)| \leq d$.

定理 5.4.1 对任意的 $0 < r < 1$,

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

成立当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0, 1)$$

其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| \mid z, w \in D(0, r), |z| = |w|\}$$

证明： 充分性显然。

必要性。易知

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} |f(z) - f(-z)| \leq d_r$$

所以 $2|f'(0)| \leq \frac{d_r^*}{r}$, 因此

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z$$

假设存在 $|a| = r$, 使得

$$\operatorname{Im}\{f'(a)\} \neq 0$$

函数 $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ 是单位圆上的解析函数。对 $\theta \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= |f(ae^{i\theta}) - f(-a)|^2 \\ &= \left| f(ae^{i\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r}a \right|^2 \\ &= \left(f(ae^{i\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r}a \right) \left(f^*(\bar{a}e^{-i\theta}) - f^*(\bar{a}) + \frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right) \end{aligned}$$

由 Cauchy 定理知,

$$\varphi'(\theta) = 2\operatorname{Re} \left\{ aie^{i\theta} f'(ae^{i\theta}) \left(f^*(\bar{a}e^{-i\theta}) - f^*(\bar{a}) + \frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right) \right\}$$

所以

$$\varphi'(0) = 2\operatorname{Re} \left\{ aif'(a)\frac{d_r^*}{r}\bar{a} \right\} = -2\frac{d_r^*}{r}|a|^2\operatorname{Im}\{f'(a)\} \neq 0$$

因此 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处要么单调增加要么单调减少, 所以存在 θ_0 , 使得 $\varphi(\theta_0) > \varphi(0)$. 也即

$$d_r \geq |f(ae^{i\theta_0}) - f(-a)| = \sqrt{\varphi(\theta_0)} > \sqrt{\varphi(0)} = |f(a) - f(-a)| = \frac{d_r^*}{r}r = d_r$$

与 $d_r^* \leq d_r$ 矛盾。所以

$$f'(z) = 0, \quad \forall |z| = r$$

由最大模定理知,

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in D(0, r)$$

因此由 Cauchy-Riemann 条件知, $f'(z)$ 是常值函数, 即

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0, 1)$$

成立。

定理 5.4.2 设函数 $f(z)$ 是单位圆上的解析函数。则

$$2|f'(0)| = d$$

当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

其中

$$d = \sup_{z, w \in D(0, 1)} |f(z) - f(w)|$$

证明: 充分性显然。

必要性。易知

$$\frac{d_r^*}{r} \leq \frac{d_r}{r} \leq d$$

因此

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

由定理 5.4.1 知,

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

得证。

命题 5.4.4 设 f 在 $0 < |z| < R$ 解析, 存在 $M > 0$, 使得任意 r , $0 < r < R$, 有

$$r \int_0^{2\pi} |2f(e^{i\theta})| d\theta < M$$

证明: $z = 0$ 是一个可去发散点, 否则是简单极点。

命题 5.4.5 设 $f: D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ 是解析函数。证明: 对于任意 $0 < r < 1$,

$$2|f'(0)| \leq \frac{d_r^*}{r}$$

成立。其中

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} |f(z) - f(-z)|$$

且等号成立当且仅当

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z, \quad \forall z \in D(0, 1)$$

证明： 不等式自证不难。下证等号成立时的情况。充分性显然。
必要性。应用反证法，不妨设

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3, \quad \forall z \in D(0, 1)$$

其中 $f'(0) = r_1 e^{i\theta_1}$, $f^{(3)}(0) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0$. 则

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0, r)} (|2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3|) = \sup_{z \in D(0, r)} (2|z||f'(0) + f^{(3)}(0)z^2|)$$

总存在 $|z| = r$, 使得 $f'(0)$ 与 $f^{(3)}(0)z^2$ 同向, 也即

$$\frac{d_r^*}{r} = 2|f'(0) + f^{(3)}(0)z^2| > 2|f'(0)|$$

与题设矛盾, 得证。

证明： 设 $r_2 < R$, 选取 z_0 , 满足 $0 < z_0 < \frac{r_2}{2}$, 再选取 r_1 , 使 $0 < r_1 < \frac{|z_0|}{2}$
由 Cauchy 积分公式得

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{C_2} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| + \int_{C_1} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \right) \end{aligned}$$

其中 $C_1 = r_1 e^{i\theta}$, $C_2 = r_2 e^{i\theta}$ 由 $|z - z_0| \geq \frac{r_2}{2}$, $z \in C_2$ 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \leq \frac{1}{\pi r_2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{\pi r_2^2}$$

由 $|z - z_0| \geq \frac{|z|}{2}$, $z \in C_1$ 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \left| \frac{f(z)}{z - z_0} \right| |dz| \leq \frac{1}{\pi |z|} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M}{\pi |z|}$$

因此, 我们有

$$|f(z)| \leq \frac{M}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi |z|}, \quad 0 < |z| < \frac{r_2}{2}$$

所以

$$|zf(z)| \leq \frac{M|z|}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi}$$

则极限是有限的。

$z = 0$ 是可去极点, 极限为 0.

$z = 0$ 是简单极点, 极限非 0.

命题 5.4.6 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 并且 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的 $n(n \geq 1)$ 级零点, 当 $|z| < 1$ 时, $|f(z)| < 1$.

证明: 当 $|z| < 1$ 时, $|f(z)| \leq |z|^n$

证明: $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $z = 0$ 为 $n(n \geq 1)$ 级零点, 则有

$$f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m z^m$$

显然 $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1}}$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $\varphi(0) = 0$, 有

$$\max \varphi(z) \leq \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{r^{n-1}} \leq \frac{1}{r^{n-1}}$$

令 $n \rightarrow 1$, 则 $|\varphi(z)| < 1$, 于是 $|\varphi(z)| \leq |z|$, 即

$$|f(z)| \leq |z|^n$$

命题 5.4.7 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n \neq 0$) 的收敛半径 $R > 0$, 而且

$$M = \max_{|z|=\rho} |f(z)| \quad (\rho < R)$$

则在圆盘 $|z| < \frac{|a_0|}{|a_0| + M}$ 内, $f(z)$ 没有零点。

证明: 由 Cauchy 不等式知, $|a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$. 对于 $|z| < \frac{|a_0|}{|a_0| + M}$ ($\rho < R$), 有

$$\begin{aligned} |f(z) - a_0| &\leq |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n + \cdots \\ &\leq \left(\frac{|z|}{\rho} + \frac{|z|^2}{\rho^2} + \cdots + \frac{|z|^n}{\rho^n} + \cdots \right) \\ &= M \frac{|z|}{\rho - |z|} \\ &< M \frac{\frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho}{\rho - \frac{|a_0|}{|a_0| + M} \rho} \\ &= |a_0| \end{aligned}$$

因为

$$|f(z)| = |f(z) - a_0 + a_0| \geq |a_0| - |f(z) - a_0| > 0$$

所以 $f(z)$ 没有零点。

命题 5.4.8 设 $f(z)$ 是整函数, 且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^n} < +\infty$, 其中 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. 证明: $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式。

证明: 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < +\infty$, 由 Cauchy 不等式得

$$|c_k| \leq \frac{M(r)}{r^k}, k = 1, 2, \dots$$

下证当 $k \geq n+1$ 时, $c_k = 0$. 令 $k = n+p$ ($p \geq 1$), 由题设知

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^k} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^p} \frac{M(r)}{r^n} = 0$$

则 $k \geq n+1$ 时 $c_k = 0$. 即 $f(z)$ 是不高于 n 次的多项式。

§5 共形映射

命题 5.5.1 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z | |z| < 1\}$ 到其自身的解析映射, 且有 $f(z) \neq z$. 证明: $f(z)$ 至少有一个零点。

证明: 反证法。若存在 $a, b \in \mathbb{D}$, $a \neq b$, 且

$$f(a) = a, \quad f(b) = b$$

则设 $\varphi(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 于是 φ 将 \mathbb{D} 映射成 \mathbb{D} , 且有 $\varphi(0) = a$.

令 $F(z) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z)$, 则有 $F(0) = 0$, 且

$$F[(\varphi^{-1}(b))] = \varphi^{-1}(b)$$

由 Schwarz 引理知 $F(z) = e^{i\theta} z$,

因为

$$F[(\varphi^{-1}(b))] = \varphi^{-1}(b) = e^{i\theta} \varphi^{-1}(b)$$

所以 $e^{i\theta} = 1$ 则

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = z$$

即 $f[\varphi(z)] = \varphi(z)$, f 为恒等映射, 与题设矛盾, 得证。

命题 5.5.2 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z | |z| < 1\}$ 到其自身的映射, 且为解析函数, $f(0) = 0$. 证明:

(1)

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2 \quad (|z| < 1)$$

(2) 如果 $\exists z_0 \neq 0$, 使得上面不等式中的等号在 $z = z_0$ 处成立, 则

$$f(z) = e^{i\theta} z^2 (\theta \in \mathbb{R})$$

证明: (1) $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 则可以 Taylor 展开, 又因为 $f(0) = 0$, 所以

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

令 $\varphi(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$, 显然 $z = 0$ 是 $\varphi(z)$ 的 $k(k \geq 2)$ 级零点, 所以

$$|\varphi(z)| = |z|^2$$

即

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2$$

(2)

$$|\varphi(z)| = \frac{1}{2}|f(z) + f(-z)| \leq \frac{1}{2}(|f(z)| + |f(-z)|) \leq 1$$

由 (1) 知, $\left| \frac{\varphi(z)}{z^2} \right| \leq 1$, 且 $\left| \frac{\varphi(z_0)}{z_0^2} \right| = 1$, $|z_0| < 1$, 则由 Schwarz 引理得

$$\varphi(z) = e^{i\theta} z^2$$

即

$$f(z) + f(-z) = 2e^{i\theta} z^2$$

$$f(z) + f(-z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

设 $f(z) = e^{i\theta} z^2 + h(z)$, 其中 $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} z^{2n-1}$.

显然有 $h(z) = -h(-z)$, 则由 $|f(z)| \leq 1$ 得

$$|e^{i\theta} z^2 + h(z)| \leq 1$$

$$|e^{i\theta} z^2 - h(z)| \leq 1$$

即有

$$(e^{i\theta} z^2 + h(z)) \overline{(e^{i\theta} z^2 + h(z))} \leq 1$$

$$(e^{i\theta} z^2 - h(z)) \overline{(e^{i\theta} z^2 - h(z))} \leq 1$$

则

$$|z|^4 + |H(z)| \leq 1$$

由最大模定理可知 $h(z) \equiv 0$, 即

$$f(z) = e^{i\theta} z^2$$

命题 5.5.3 函数 $f(z)$ 在可求面积得区域 D 内单叶解析, 并且满足 $|f(z)| \leq 1$. 证明:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi$$

证明: $S = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$ 为 $f(z)$ 将 D 映射成的区域面积, 又 $|f(z)| \leq 1$, 则显然有

$$\iint_D |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi$$

证明: 若 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, 其中 $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$$

命题 5.5.4 由极限定义知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |z - z_0| < \delta$ 时, $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

又因为

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

则

$$||f(z)| - |w|| \leq |f(z) - w| < \varepsilon$$

易知

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$$

命题 5.5.5 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内解析, 在 $|z| = 1$ 上有 $|f(z)| > m$, 并且 $|f(0)| < m$, 其中 $m > 0$. 证明: $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内至少有一个零点。

证明: 反证法。假设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内无零点, 又 $|z| = 1$ 上 $|f(0)| > m > 0$

则 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 内无零点, $\frac{1}{f(z)}$ 在 $|z| \leq 1$ 解析, 由最大模定理知

$$\max_{|z| \leq 1} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{|z|=1} \left| \frac{1}{f(z)} \right| < \frac{1}{m}$$

然而 $\left| \frac{1}{f(z)} \right| > \frac{1}{m}$, 与题设矛盾, 所以 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内至少有一个零点。

命题 5.5.6 设单叶解析函数 $f(z)$ 将 z 平面上可求面积的区域 D 映射成 w 平面上的区域 G , 设区域 G 的面积为 A . 证明:

$$A = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy$$

证明： 显然 $A = \iint_D dx dy$, 积分区域为 G , 则由积分换元公式知

$$\begin{aligned} A &= \iint_G dx dy \\ &= \iint_D \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy \\ &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

命题 5.5.7 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ 内的单叶解析函数, G 为 f 将单位圆盘 \mathbb{D} 映射成的区域, A 为区域 G 的面积. 证明:

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

证明： 易证 $A = \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dx dy$, 又 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, 设 $z = e^{i\theta}$, 则有

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{D}} f'(z) \overline{f'(z)} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{D}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) \overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right)} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{(n-1)i\theta} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \overline{a_n} r^{n-1} e^{-(n-1)i\theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^1 r \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 |a_n|^2 \pi r^{2n-2} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \end{aligned}$$

其中

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

即

$$A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

定理 5.5.1 (Area theorem) 设 $f(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots$ 在 $0 < |z| < 1$ 内为单射且解析, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n|^2 \leq 1$$

证明: 由题设知, $f(z)$ 将正向圆周 $|z| = r$ ($r < 1$) 映射成简单闭曲线 γ_r , 即

$$\gamma_r(\theta) = f(re^{-i\theta}), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

令 D_r 为简单闭曲线 γ 围成的有界区域, S_r 为 D_r 的面积, 易知, 曲线 γ 正向包围 D_r . 因此

$$S_r = \int_{\gamma_r} xdy - \int_{\gamma_r} ydx$$

应用链式法则得

$$S_r = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(f(re^{-i\theta})) \operatorname{Im}(-ire^{-i\theta} f'(re^{-i\theta})) d\theta = - \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(f(re^{-i\theta})) \operatorname{Re}(-ire^{-i\theta} f'(re^{-i\theta})) d\theta$$

因此 D 等于上式右边两项的平均值, 即

$$S_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(re^{-i\theta}) \overline{re^{-i\theta} f'(re^{-i\theta})} d\theta$$

令 $c_{-1} = 1$, 幂级数展开得

$$S_r = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sum_{n=-1}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} mr^{n+m} a_n \overline{a_m} e^{i(m-n)\theta} d\theta$$

因为

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

所以

$$S_r = -\pi \sum_{n=-1}^{\infty} nr^{2n} |a_n|^2 = \frac{\pi}{r^2} - \pi \sum_{n=1}^{\infty} nr^{2n} |a_n|^2 \geq 0$$

令 $r \rightarrow 1$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1$$

下证 γ_r 正向围绕 D_r . 设 r' 满足 $r < r' < 1$, $z_0 = f(r')$. 存在足够小的正数 s , 使得 γ_s 环绕 z_0 , 且环绕数为 1. 当 $t \neq r'$ 时, 因为 f 是单射, 所以 γ_t 不通过 z_0 . 因此由环绕数的同伦不变性可知, γ_r 对 z_0 的环绕数为 1, 也即 $z_0 \in D_r$, 且 γ_r 正向环绕 D_r .

引理 5.5.1 设解析函数 $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ 为单射. 证明: 存在一个函数 $g(z)$, 满足 $g^2(z) = f(z^2)$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, 且 $g(z)$ 为单射.

证明: 显然 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 作 $\frac{f(z)}{z}$ 没有零点, 则存在函数 $\varphi(z)$, 使得 $\varphi^2(z) = \frac{f(z)}{z}$. 令 $g(z) = z\varphi(z^2)$, 容易验证 $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, 且 $g(z)$ 为单射。

定理 5.5.2 设解析函数 $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ 是单射, 则 $|a_2| \leq 2$, 等号成立当且仅当

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta})^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

证明: 由引理 5.5.1 得

$$\frac{1}{g(z)} = \sqrt{\frac{1}{f(z^2)}} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{1}{1 + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots}} = \frac{1}{z} + b_0 + b_1z + \cdots$$

化简得

$$1 = (1 + b_0z + b_1z^2 + \cdots)^2(1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots)$$

比较 z , z^2 系数可得 $b_0 = 0$, $a_2 + 2b_1 + b_0^2 = 0$, 所以 $b_1 = -\frac{a_2}{2}$.

因此

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} - \frac{a_2}{2}z + \cdots$$

由引理 5.5.1 知 $\frac{1}{g(z)}$ 单射, 又由 Area Theorem 得

$$\left| \frac{a_2}{2} \right|^2 = |b_1|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

所以 $|a_2| \leq 2$.

下证等号成立的情况。如果等号成立即 $|a_2| = 2$, 则存在 $\theta \in \mathbb{R}$, 使得 $a_2 = 2e^{i\theta}$. 由 Area Theorem 得, $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$, 可知其余系数 $b_2 = b_3 = \cdots = 0$, 因此

$$\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{z} - e^{i\theta}z$$

由引理 5.5.1 知

$$g^2(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{z} - e^{i\theta}z\right)^2} = \frac{z^2}{(1 - e^{i\theta}z^2)^2} = f(z^2)$$

所以

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta})^2}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

定理 5.5.3 设解析函数 $f(z) = \frac{1}{z} + c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots$ 是 \mathbb{D} 上的单射, 且 $h(z)$ 取不到 w_1, w_2 , 则 $|w_1 - w_2| \leq 4$.

证明： 由题设得

$$\frac{1}{f(z) - w_1} = \frac{z}{1 + (c_0 - w_1)z + c_1z^2 + c_2z^3 + \cdots}$$

则

$$z = (1 + (c_0 - w_1)z + c_1z^2 + c_2z^3 + \cdots)(b_0 + b_1z + \cdots)$$

比较系数得

$$b_0 = 0, b_1 = 1, b_0c_1 + b_1(c_0 - w_1) + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = w_1 - c_0$$

因此函数 $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - w_1}$ 满足 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, 且为解析的单射。

由定理 5.5.2 得, $|b_2| = |w_1 - c_0| \leq 2$, 同理 $|w_2 - c_0| \leq 2$.

所以

$$|w_1 - w_2| \leq |w_1 - c_0| + |c_0 - w_2| \leq 4$$

定理 5.5.4 (Koebe-Bieberbach 定理) 设 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 是解析函数, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, 且 f 为单射, 则必有 $D\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(\mathbb{D})$, 即 $f(\mathbb{D})$ 包含以原点为圆心, 半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆盘。

证明： 设 $f(z)$ 取不到 w , 则 $\frac{1}{f(z)}$ 取不到 0 和 $\frac{1}{w}$.

由定理 5.5.3 知 $\left|0 - \frac{1}{w}\right| \leq 4$, 即 $|w| \geq 4$.

因此 $f(z)$ 取不到的值都位于圆盘 $D\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 之外, 所以 $D\left(0, \frac{1}{4}\right) \subset f(\mathbb{D})$.

命题 5.5.8 设 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 为解析函数, $|f(z)| \leq 1$, 并且 $f(\alpha) = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$, 则

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

当且仅当等号成立时, 有 $f(z) = \varphi_{-\beta}(\varphi_{\alpha}(z))$. 其中

$$\varphi_{\alpha} = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad \varphi_{\beta} = \frac{z - \beta}{1 - \bar{\beta}z}$$

证明： 令 $g = \varphi_{\beta} \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$, 于是 g 在 D 内解析, $|g(z)| \leq 1$, 并且 $g(0) = 0$, 由 Schwarz 引理得

$$|g'(0)| \leq 1$$

且

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_{\beta}(\beta) f'(\alpha) \varphi_{-\alpha}(0) \\ &= (1 - |\beta|^2)^{-1} f'(\alpha) (1 - |\alpha|^2) \end{aligned}$$

则有

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}$$

命题 5.5.9 设 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 是解析函数, $f(0) = 0$, 并且任意 $z \in D$, $\operatorname{Re}(f(z)) \leq A$, 其中 $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$, A 是正实数, 则对任意 $r \in (0, 1)$ 有

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1-r}$$

其中 $M(r) = \max_{|z|=r} \{|f(z)|\}$

证明: $\forall r \in (0, 1)$, 令

$$A(r) = \max_{|z|=r} \{\operatorname{Re} f(z)\}$$

因为

$$e^{A(r)} = \max_{|z|=r} \{|e^{f(z)}|\}$$

由最大模原理知 $A(r)$ 是单调增加的非负函数, 并且由假设知 $A(r) \leq A$
令

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)} = \frac{P + Qi}{(2A - P) - Qi}$$

其中

$$P = \operatorname{Re} f(z), \quad Q = \operatorname{Im} f(z)$$

那么 $f(z)$ 在 \mathbb{D} 内解析, 对任意 $x \in \mathbb{D}$ 有

$$|g(z)|^2 = \frac{P^2 + Q^2}{(2A - P)^2 + Q^2} \leq \frac{R^2 + Q^2}{A^2 + Q^2} \leq 1$$

从而 $|g(z)| \leq 1$, $g(0) = 0$, 于是由 Schwarz 引理得

$$|g(z)| \leq |z|$$

由 $g(z)$ 定义知

$$f(z) = \frac{2Ag(z)}{1 + g(z)}$$

则

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{1 - |z|} \leq \frac{2Ar}{1 - r}$$

即

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1 - r}$$

引理 5.5.2 (Schwarz 引理) 设 $f(z)$ 在单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ 内解析, 在闭圆盘 $\bar{\mathbb{D}} = \{z \mid |z| \leq 1\}$ 上是连续的, 并且满足 $f(0) = 0$, 又在 \mathbb{D} 内处处有 $|f(z)| < 1$, 则

(1) $|f(z)| \leq |z|$, 且 $|f'(0)| \leq 1$.

(2) 若在开圆盘内有一复数 $z_0 \neq 0$, 是 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$, 那么 $f(z) = e^{i\alpha}z$, α 为一实数。

证明: 由于 $f(0) = 0$, 且 $f(z)$ 在 \mathbb{D} 内解析, 则 $f(z)$ 在 \mathbb{D} 内可以 Taylor 展开, 有

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots +$$

令 $\varphi(z) = c_1 + c_2 z + \cdots$, 则

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

显然 $\varphi(z)$ 在 \mathbb{D} 内解析, 对于圆内一点 z_0 , 设 $|z_0| < r < 1$, 则由最大模定理知

$$|\varphi(z_0)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

令 $r \rightarrow 1$, 则有 $|\varphi(z_0)| \leq 1$

若 $z_0 = 0$, 有 $|f'(0)| = |\varphi(0)| \leq 1$

若 $z_0 \neq 0$, 有 $|f'(0)| = \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq 1$, 即

$$|f(z_0)| \leq |z_0|$$

由于 $f(0) = 0$, 上式当 $z = 0$ 时成立, 则

$$|f(z_0)| \leq |z_0|, \quad x \in \mathbb{D}$$

若有 $z_0 \neq 0$, 使 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或者 $|f'(0)| = 1$, 则 $\varphi(z)$ 在 \mathbb{D} 内取得最大模。

从而 $\varphi(z) \equiv c$, 又 $|c| = 1$, 则 $\varphi(z) = e^{i\alpha}$, 所以

$$f(z) = e^{i\alpha}z$$

定理 5.5.5 (拟双曲型距离) 定义拟双曲型距离

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|, \quad z, w \in \mathbb{D}$$

设 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 解析, 则

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}$$

另外, 如果 f 是单位圆盘的自同构映射, 则 f 保持拟双曲型距离不变:

$$\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}$$

证明: $\forall w \in \mathbb{D}$, 记 $g = \psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w^{-1}$, 满足

$$g(0) = \psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w^{-1}(0) = \psi_{f(w)} \circ f(w) = 0, \quad |g(z)| \leq 1, \quad (|z| \leq 1)$$

由 Schwarz 引理知,

$$|g(z)| = |\psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w^{-1}(z)| \leq |z|$$

取 $z = \psi_w(u)$, 则 $|\psi_{f(w)} \circ f(u)| \leq |\psi_w(w)|$, 即

$$\rho(f(u), f(w)) \leq \rho(w, w), \quad \forall w \in \mathbb{D}$$

若 f 是单位圆盘的自同构映射, 则 g^{-1} 有定义, 且满足 $g^{-1}(0) = 0$, $|g^{-1}(z)| \leq 1$, 仿照上面步骤可得到

$$|(\psi_{f(w)} \circ f \circ \psi_w^{-1}(z))^{-1}| \leq |z|$$

从而

$$\rho(w, w) \leq \rho(f(u), f(w)), \quad \forall w \in \mathbb{D}$$

综上所述可知

$$\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{D}$$

定理 5.5.6 (Schwarz-Pick 定理 I) 设 $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ 在 D 内解析, $|f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$, 且 $f(z_0) = w_0$. 则

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

等号当且仅当 $f(z)$ 是分式线性映射时成立。

证明: 设函数 $w = f(z)$, 考虑分式线性映射

$$\zeta = T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad \tau = S(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0}w}$$

分别 z 平面和 w 平面上的单位圆盘双方单值映射成 ζ 和 τ 平面上的单位圆盘, 并且把 z_0, w_0 映射成 $\zeta = 0, \tau = 0$. 则

$$F(\zeta) = S(f(T^{-1}(\zeta)))$$

在 $|\zeta| < 1$ 内解析, $|F(\zeta)| \leq 1$, 且 $F(0) = 0$.

于是在 $|\zeta| < 1$ 内, 由 Schwarz 引理得

$$|F(\zeta)| = |S((f(T^{-1}(\zeta))))| \leq |\zeta|$$

从而在 $|z| < 1$ 内有

$$|S(f(z))| \leq |T(z)|$$

即

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

定理 5.5.7 (Schwarz-Pick 定理 II) 设 $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 解析, 则

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

证明: 由拟双曲型距离定理可知

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|$$

整理得

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \frac{1}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{1}{1 - \overline{w}z} \right|$$

令 $w \rightarrow z$, 并利用 $\alpha \overline{\alpha} = |\alpha|^2$, 可得

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

第六章

信号与系统

§1 信号与系统

命题 6.1.1 考虑离散时间信号

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k]$$

确定整数 M 和 n_0 的值, 使得 $x[n]$ 能表示为

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

证明: 由题设知,

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n - 1 - k] = 1 - \sum_{k=4}^{\infty} \delta[n - k]$$

即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq 3 \\ 0, & n \geq 4 \end{cases}$$

因此

$$x[n] = u[-n + 3]$$

所以, $M = -1$, $n_0 = -3$.

§2 线性时不变系统

命题 6.2.1 考虑一个离散时间系统 X_1 , 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

- (1) 求整数 A 以满足 $h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$.
 (2) 利用 (a) 的结果, 求 S_1 的逆系统 S_2 是线性时不变的单位脉冲响应 $g[n]$.

证明: (1) 由题设, 因为

$$h[n] - Ah[n-1] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] - A \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} u[n-1]$$

即

$$h[n] - Ah[n-1] = \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^n - A \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, & n \geq 0 \\ 1, & n = 0 \\ 0, & n \leq -1 \end{cases}$$

所以, $A = \frac{1}{5}$

- (2) 即求 $g[n]$, 使得

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

由 (a) 知, $h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n]$, 易得

$$g[n] = \delta[n] - \frac{1}{5}\delta[n-1]$$

§3 连续时间傅里叶变换

引理 6.3.1 考虑连续时间信号 $x(t)$, $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 求连续时间信号

$$y(t) = X(jt)$$

的傅里叶变换 $Y(j\omega)$.

证明: 由傅里叶变换综合公式知,

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt)e^{-j\omega t} dt$$

应用积分变量变换, 令 $t = \omega$, $\omega = t$, 则有

$$Y(jt) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi x(-t)$$

因此

$$Y(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

命题 6.3.1 考虑下面的傅里叶变换对:

$$e^{-|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+\omega^2}$$

- (1) 利用恰当的傅里叶变换性质求 $te^{-|t|}$ 的傅里叶变换。
 (2) 根据 (a) 的结果, 再结合对偶性质, 求 $\frac{4t}{(1+t^2)^2}$ 的傅里叶变换。

证明: (1) 因为

$$tx(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

所以, $te^{-|t|}$ 的傅里叶变换为

$$j \frac{d\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)}{d\omega} = \frac{-4\omega j}{(1+\omega^2)^2}$$

- (2) 设 $x(t) = te^{-|t|}$, 则有

$$y(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2} = jX(jt)$$

由引理 6.3.1 知,

$$Y(j\omega) = -2\pi jte^{-|t|}$$

§4 离散时间傅里叶变换

命题 6.4.1 设 $Y(e^{j\omega})$ 的逆变换是

$$y[n] = \left(\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\right)^2$$

其中 $0 < \omega_c < \pi$. 试确定 ω_c 的值, 以保证

$$Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2}$$

证明: 易知

$$\frac{\sin \omega_c n}{\pi n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

由傅里叶变换相乘性质得

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega-\omega_c}^{\omega+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\pi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\pi-\omega_c}^{\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta + \int_{2\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(e^{j\theta}) d\theta \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} (2\omega_c - \pi + 2\omega_c - \pi) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

即 $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$.

命题 6.4.2

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \left(\frac{\sin \frac{3}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \right) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

求 $x[n]$.

证明： 由离散时间傅里叶变换对知

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sin \frac{(N+1)\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

则

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) - 3\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

由离散时间傅里叶变换卷积性质可知

$$x[n] = x_1[n] * u[n] + 1$$

即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq -2 \\ n+3, & |n| \leq 1 \\ 4, & n \geq 2 \end{cases}$$

§5 采样

命题 6.5.1 采用离散时间滤波实现连续时间滤波，假定所用的采样周期为 T ，输入 $x_c(t)$ 为带限信号，而有 $X_c(j\omega) = 0$ ， $|\omega| \geq \frac{\pi}{T}$ 。若整个系统具有

$$y_c(t) = \frac{d}{dt} x_c \left(t - \frac{T}{2} \right)$$

试求离散时间滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$ 。

证明： 由题设易得

$$\begin{aligned} Y_c(j\omega) &= j\omega X_c(j\omega) e^{-\frac{j\omega T}{2}} \\ H_c(j\omega) &= \frac{Y_c(j\omega)}{X_c(j\omega)} = j\omega e^{-\frac{j\omega T}{2}} \end{aligned}$$

因为

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

所以

$$H_d(e^{j\omega T}) = H_c \left(\frac{j\omega}{T} \right) = j \frac{\omega}{T} e^{-\frac{j\omega}{2}}, \quad |\omega| \leq \pi$$

由离散时间傅里叶逆变换公式得

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} H_d(e^{j\omega T}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j \frac{\omega}{T} e^{-\frac{j\omega}{2}} e^{j\omega n} d\omega \\ &= -\frac{\sin \left[\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right]}{\pi T \left(n - \frac{1}{2} \right)^2} \end{aligned}$$

§6 拉普拉斯变换

命题 6.6.1 考虑有图所示 RL 电路。

- (1) 当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 时, 确定该电路的零状态响应。
- (2) 已知 $y(0^-) = 1$, 确定该电路在 $t > 0^-$ 时的零输入响应。
- (3) 当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$, 初始条件同 (b) 时, 确定该电路的输出。

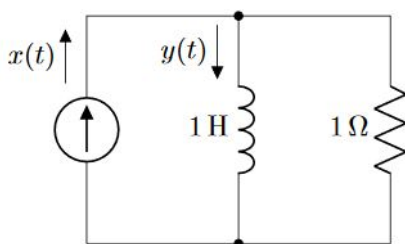


图 6.1: RL 电路图

证明: (1) 由图可知, RL 电路的微分方程为

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$, 且 $y(0^-) = 0$ 时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) + Y(s) = X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

- (2) 当输入电流 $x(t) = 0$, 且 $y(0^-) = 1$ 时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = 0$$

即

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

由 Laplace 变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t)$$

(3) 当输入电流 $x(t) = e^{-2t}u(t)$, 初始条件同 (b) 时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = X(s) = \frac{1}{s+2}$$

即

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由 Laplace 变换对易知, 电路的零状态响应为

$$y(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

命题 6.6.2 关于信号 $x(t)$, 已知以下三点:

- (1) $x(t) = 0, t < 0$
- (2) $x\left(\frac{k}{80}\right) = 0, k = 1, 2, 3, \dots$
- (3) $x\left(\frac{1}{160}\right) = e^{-120}$

设 $X(s)$ 为 $x(t)$ 的 Laplace 变换, 则 $X(s)$ 在有限 s 平面内有几个极点。

§7 z 变换

命题 6.7.1 有一个信号 $x[n]$ 的 z 变换的代数表达式为

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

- (1) 假定收敛域是 $|z| > \frac{1}{3}$, 利用长除法求 $x[0]$, $x[1]$ 和 $x[2]$ 的值。
- (2) 假定收敛域是 $|z| < \frac{1}{3}$, 利用长除法求 $x[0]$, $x[1]$ 和 $x[2]$ 的值。

证明: (1)

$$(1 + z^{-1}) / \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right) = \left(1 + \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}\right)$$

(2)

$$(z^{-1} + 1) / \left(\frac{1}{3}z^{-1} + 1\right) = (3 - 6z^1 + 18z^2)$$