数　学　习　题　集

THE COLLECTION OF MATHEMATICS PROBLEMS

李太吉 编

2019 年 8 月 9 日

目录

第一章

数学分析

§1　数列与极限

命题 1.1.1 (Cauthy 命题) 设 $\{x_n\}$ 收敛于 l，则它的前 n 项的算术平均数也收敛于 l，即有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=l$$

证明： $\{x_n\}$ 收敛于 l，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时

$$|x_n-l|<\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-l\right|&=\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-l}{n}\right|\\&\leq\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-l|}{n}\\&=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i-l|}{n}+\frac{\sum\limits_{i=N+1}^{n}|x_i-l|}{n}\\&\leq\frac{M}{n}+\frac{(n-N)\varepsilon}{n}\end{aligned}$$

其中 $M=\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i-l|$，$M$ 为有限值。$N_1=\max\left\{\left\lfloor\dfrac{M}{\varepsilon}\right\rfloor,\ N\right\}$，即有 $n>N_1$ 时成立不等式

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-l\right|<\varepsilon$$

也即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=l$$

推论 1.1.1 (Cauthy 命题推论) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$$

证明： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$，所以数列 $\{a_n-a_{n-1}\}$ 收敛于 d。
由 Cauthy 命题知,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_1}{n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{a_{n+1}}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{n}=d\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$$

推论 1.1.2 (Cauthy 命题推论) 设 $\{a_n\}$ 是正数列，且收敛于 A，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$$

证明： 显然有

$$\ln\left((a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}$$

由 Cauthy 命题知，因为 $\{a_n\}$ 收敛于 A，即数列 $\{\ln a_n\}$ 收敛于 $\ln A$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=\ln A$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$$

推论 1.1.3 (Cauthy 命题推论) 设 $\{a_n\}$ 是正数列，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$$

证明： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$，所以数列 $\left\{\ln\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right\}$ 收敛于 $\ln l$
由 Cauthy 命题知,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{a_2}{a_1}+\ln\dfrac{a_3}{a_2}+\cdots+\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}{n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_1}}{n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_1}{n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{\ln a_{n+1}}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1}{n}=\ln l
\end{aligned}
$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}=\ln l$$

也即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$$

命题 1.1.2 (Cauthy 命题 ∞ 时的特例) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$$

证明： $\forall A>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，故 $\exists N_1\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时，$a_n>2A+2$，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-N_1}{n}=1>\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0>-1$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}&=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{x_{N_1+1}+x_{N_1+2}+\cdots+x_n}{n}\\
&>-1+\frac{n-N_1}{n}(2A+2)\\
&>-1+\frac{1}{2}(2A+2)\\
&=A
\end{aligned}
$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$$

命题 1.1.3 ($\boldsymbol{\dfrac{0}{0}}$ 型的 stolz 公式) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是收敛于 0 的数列，其中 $\{a_n\}$ 是严格单调递减数列，且存在

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$$

其中 l 为有限值或无穷。
则有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$$

证明： $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时
$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon$$
$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1})$$
任取 $m>n$，将上式中 n 替换为 $n+1$，$n+2$，$n+3$，$\cdots$，$m-1$，有

$$\begin{aligned}
&(l-\varepsilon)(a_{n+1}-a_{n+2})<b_{n+1}-b_{n+2}<(l+\varepsilon)(a_{n+1}-a_{n+2})\\
&(l-\varepsilon)(a_{n+2}-a_{n+3})<b_{n+2}-b_{n+3}<(l+\varepsilon)(a_{n+2}-a_{n+3})\\
&\vdots\\
&(l-\varepsilon)(a_{m-1}-a_m)<b_{m-1}-b_m<(l+\varepsilon)(a_{m-1}-a_m)
\end{aligned}$$

将上式相加得到
$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m)$$
$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon$$
对于 m，令 $m\to+\infty$，有
$$\lim_{m\to\infty}a_m=\lim_{m\to\infty}b_m=0$$
又
$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|=\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|$$
则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$$

命题 1.1.4 ($\frac{*}{\infty}$ 型的 stolz 公式) 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，其中 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的发散数列，且存在
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l$$
其中 l 为有限值或无穷。
则有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l$$

证明： (1) l 为有限值

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon$$

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1})$$

取定 n，将上式中 n 替换为 N，$N+1$，$N+2$，$\cdots$，$n-1$，有

$$\begin{aligned}
&(l-\varepsilon)(a_N-a_{N+1})<b_N-b_{N+1}<(l+\varepsilon)(a_N-a_{N+1})\\
&(l-\varepsilon)(a_{N+1}-a_{N+2})<b_{N+1}-b_{N+2}<(l+\varepsilon)(a_{N+1}-a_{N+2})\\
&\vdots\\
&(l-\varepsilon)(a_{n-1}-a_n)<b_n-b_n<(l+\varepsilon)(a_{n-1}-a_n)
\end{aligned}$$

将上式相加得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_N)<b_n-b_N<(l+\varepsilon)(a_n-a_N)$$

$$\left|\frac{b_n-b_N}{a_n-a_N}-l\right|<\varepsilon$$

$$\frac{b_n}{a_n}-l=\left(1-\frac{a_N}{a_n}\right)\left(\frac{b_n-b_N}{a_n-a_N}-l\right)+\frac{b_N-la_N}{a_N}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，使 $n>N_1$ 成立

$$0<1-\frac{a_N}{a_n}<2$$

$$\left|\frac{b_N-la_N}{a_n}\right|<\varepsilon$$

则当 $n>\max\{N_1,N\}$ 有

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|<3\varepsilon$$

(2) l 为 $+\infty$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时

$$b_{n+1}-b_n>a_{n+1}-a_n$$

由 (1) 可知,

$$b_{n+1}-b_N>a_{n+1}-a_n$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，且 $\{b_n\}$ 严格单调增加，所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=0$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}}{b_n}=+\infty$$

(3) l 为 $-\infty$ 时同 *(2)*

命题 1.1.5 (Carleman 不等式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为收敛的正项级数，则不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

证明：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{a_1(2a_2)\cdots(na_n)}}{\sqrt[n]{n!}}\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n\sqrt[n]{n!}}\\
&\le \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n(n+1)}\\
&=\mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}ka_k\\
&=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}\left\{ka_k\left[\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\right]\right\}\\
&=\mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}ka_k(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1})\\
&\le \mathrm{e}\sum_{k=1}^{N}a_k
\end{aligned}$$

令 $N\to+\infty$，即可得到 Carleman 不等式。
下证不等式右边的系数 e 不能在改进。
对于每个 N 构造一个数列

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=1,2,\cdots,N\\ 0, & n>N\end{cases}$$

然后作出两个级数和之比，令 $n\to+\infty$，应用 stolz 定理，有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N}b_n}=\lim_{N\to\infty}\frac{N}{\sqrt[N]{N!}}=\mathrm{e}$$

定理 1.1.1 (Sapagof 判别法) 设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 的充分必要条件是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})$ 发散。

证明： 先证充分性,
正数列 $\{a_n\}$ 单调减少，则 $\{a_n\}$ 存在极限，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a(a>0)$$

设 $b_n = 1-\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n} \le \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} b_n &= \sum_{n=1}^{m}(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\\ &\le \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{m}(a_n - a_{n+1})\\ &= \frac{1}{a}(a_1 - a_{m+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} b_n\\ &\le \lim_{m\to\infty}\frac{1}{a}(a_1 - a_{m+1})\\ &= \frac{1}{a}(a_1 - a)\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。
再证必要性，若 $a=0$，则由柯西准则,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p}(1-\frac{a_{k+1}}{a_k})\\ &\ge \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k - a_{k+1}}{a_k}\\ &= \frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1} - a_{n+p+1})\\ &= \frac{a_{n+p+1}}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则总存在 $p\in\mathbb{N}$，使得

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \ge \frac{1}{2}$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

定理 1.1.2 (Sapagof 判别法等价形式 I) 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数列，则该数列与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

同敛散。

证明： $\{a_n\}$ 单调增加，若 $\{a_n\}$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ (a \neq +\infty)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p}(1-\frac{a_k}{a_{k+1}})\\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n+1}}\\ &= \frac{a_{n+p+1}-a_{n+1}}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时，

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+p+1}-a_{n+1}}{a_{n+1}}\right| &= \left|\frac{a_{n+p+1}-a+a-a_{n+1}}{a_{n+1}}\right|\\ &= \frac{|a_{n+p+1}-a|+|a_{n+1}-a|}{a_{n+1}}\\ &= \frac{2\varepsilon}{a_{n+1}}\end{aligned}$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。
若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p}(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}) \\ &\le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{n+p+1}} \\ &= \frac{a_{n+p+1}-a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \\ &= 1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}}\end{aligned}$$

由柯西准则，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，则存在 $p \in \mathbb{N}$，

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \le \frac{1}{2}$$

则

$$1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+p+1}} \ge \frac{1}{2}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散。

定理 1.1.3 $\{S_n\}$ 是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 同敛散。

证明： $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k} &\le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_{n+1}} \\ &\le \frac{S_{n+p+1}-S_n}{S_{n+1}} \\ &\le \frac{S_{n+p+1}-S_n}{S_n}\end{aligned}$$

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，$n > N$ 时，

$$|S_n - S| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_{n+p+1}-S_n}{S_n}\right| &= \left|\frac{S_{n+p+1}-S+S-S_n}{S_n}\right| \\ &\le \frac{|S_{n+p+1}-S|+|S_{n+1}-S|}{S_n} \\ &= \frac{2\varepsilon}{S_n}\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 收敛。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=+\infty$，且有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}&\geq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_{n+p+1}}\\&\geq\frac{S_{n+p+1}-S_n}{S_{n+p+1}}\\&=1-\frac{S_n}{S_{n+p+1}}\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=+\infty=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$，则存在 $p\in\mathbb{N}$,

$$1-\frac{S_n}{S_{n+p+1}}\geq\frac{1}{2}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散。

定理 1.1.4 (1) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件时存在正数列 $\{b_n\}$ 和正数 δ，使得当 n 充分大时有

$$b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geq\delta>0$$

(2) 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的充分必要条件时存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$，使得当 n 充分大时有

$$b_n\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\leq 0$$

证明： (1) 先证充分性。

由 $b_n\cdot\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-b_{n+1}\geq\delta>0$ 得

$$a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1}\geq\delta a_{n+1}$$

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{\delta}(a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1})$$

不妨设 $n\geq 1$，时上式成立，则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \\ &\le a_1 + \frac{1}{\delta}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k b_k - a_{k+1}b_{k+1}) \\ &= a_1 + \frac{1}{\delta}(a_1 b_1 - a_n b_n) \\ &= a_1 + \frac{1}{\delta}a_1 b_1\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。再证必要性。

令

$$b_n = \frac{R_n}{a_n}$$

其中 R_n 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的余项，即

$$R_n = S - S_n$$

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{R_n}{a_{n+1}} - \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 > 0$$

必要性得证。

(2) 充分性即为比较判别法的比值形式。

必要性

令

$$b_n = \frac{S_n}{a_n}$$

易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散

$$b_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 \le 0$$

必要性得证。

命题 1.1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = \lambda_1$，$p$ 为固定的正整数，λ 是常数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\lambda} = \frac{\lambda}{p}$$

证明： 对固定的 $i \in \mathbb{N}$，$\{a_{np+i}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+p} - a_n = \lambda$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_{(n+1)p+i} - a_{np+i} = \lambda$$

令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，由 Cauthy 命题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_1+A_2+\cdot+A_n}{n}=\lambda$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{np+i}}{np+i}=\frac{n}{np+i}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{np+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}$$

命题 1.1.7 将二项式系数 $\binom{n}{0}$，$\binom{n}{1}$，$\cdots$，$\binom{n}{n}$ 的算术平均数和几何平均数分别记作 A_n 和 G_n. 证明:

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

证明： (1) 因为

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}=2$$

(2) 因为

$$G_n=\sqrt[n]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\ln\binom{n}{k}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$

命题 1.1.8 设 $x_n=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\binom{n}{k}$，$n\in\mathbb{N}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

证明： 应用 stolz 公式，知

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n = &\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln \binom{n+1}{k} - \sum_{k=0}^{n} \ln \binom{n}{k}}{(n+1)^2 - n^2} \\ = &\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1} \\ = &\lim_{n\to\infty} \frac{\ln (1+\frac{1}{n})^{n-1}}{2} \\ = &\frac{1}{2}\end{aligned}$$

命题 1.1.9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3na_n} = 1$$

证明： 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$，则 S_n 单调增加，且 $S_n \to \infty$，否则若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n S_n = \lim_{n\to\infty} a_n S = 0$$

与题设矛盾。故 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$，又

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot S_n \cdot \frac{1}{S_n} = \lim_{n\to\infty} a_n S_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = 0$$

$$\begin{aligned}S_n^3 - S_{n-1}^3 = &(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_{n-1}S_n + S_{n-1}^2) \\ = &a_n^2(2S_n^2 - 3a_n^2 S_n + a_n^4) \\ = &2a_n^2 S_n^2 - 3a_n^4 S_n + a_n^6\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^3 - S_{n-1}^3 = \lim_{n\to\infty} \left(3(a_n S_n)^2 - 3a_n^3(a_n S_n) + a_n^6\right) = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3na_n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^3 S_n^3} \cdot \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = 1$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{3na_n} = 1$$

命题 1.1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

证明： 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，故数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 有界，$\exists M > 0$，

$$|a_n| < M, \quad |b_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}$，$n > N$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

取自然数 $N_1 > \max\left\{N,\ \frac{2M}{\varepsilon}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k - a| + \sum\limits_{k=0}^{n} (|b_k - a|) + |b|\right)\right\}$
则当 $n > N_1$ 时有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}(a_k - a) + \sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k} - b) + ab\right| \\
&= \frac{M}{N}\left|\sum_{k=0}^{N_1} |a_k - a| + \sum_{k=0}^{N_1} |b_{n-k} - b| + |b|\right| \\
&\quad + \frac{M}{n}\left|\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - a| + \sum_{k=N_1}^{n} |b_{n-k} - b|\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n}(n - N_1) - \frac{\varepsilon}{4M} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n} = ab$$

命题 1.1.11 设 $a_1 = 1$，$a_n = n(a_{n-1} + 1)$，$\quad n = 2, 3, \cdots$，且

$$x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

证明： 由 $\frac{a_{n-1} + 1}{a_n} = \frac{1}{n}$ 得

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=&\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\\
=&\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{a_2}\cdots\frac{a_n+1}{a_n}\\
=&\frac{1}{a_1}\cdot\frac{a_1+1}{a_2}\cdot\frac{a_2+1}{a_3}\cdots\frac{a_{n-1}+1}{a_n}\cdot a_{n+1}\\
=&\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}\\
=&\frac{a_{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n!}=&\frac{n(a_{n-1}+1)}{n!}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\\
=&\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}\\
&\cdots\\
=&\frac{a_1}{1!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\\
=&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

则

$$\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$$

命题 1.1.12 设 $a_1,a_2>0$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{a_n+a_{n-1}}$，证明：$\{a_n\}$ 收敛。

证明： 选取 α，使得

$$\alpha<\min\{a_0,a_1\}\le\max\{a_0,a_1\}<\frac{1}{\alpha}$$

由数学归纳法可证

$$\alpha<\min\{a_{n-1},a_n\}\le\max\{a_{n-1},a_n\}<\frac{1}{\alpha}$$

即

$$\alpha<a_n<\frac{1}{\alpha},\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

所以 $\{a_n\}$ 有界

令

$$L=\limsup_{n\to\infty}a_n,\quad l=\liminf_{n\to\infty}a_n$$

且易知 L,l 均是有限数，则 $L\le\dfrac{1}{\alpha},\quad l\ge\alpha$

$$\begin{aligned}L&=\limsup_{n\to\infty}a_n=\limsup_{n\to\infty}\frac{2}{a_{n-1}+a_{n-2}}\\&=\frac{1}{\liminf\limits_{n\to\infty}(a_{n-1}+a_{n-2})}=\frac{2}{\liminf\limits_{n\to\infty}a_{n-1}+\liminf\limits_{n\to\infty}a_{n-2}}\\&=\frac{1}{l}\end{aligned}$$

同理 $l=\dfrac{1}{L}$，则 $lL=1$

可设 $\{a_{nk+3}\}$ 收敛到 L，$\{a_{nk+2}\},\{a_{nk+1}\},\{a_{nk}\}$ 分别收敛到 a,b,c，则 $l<a,b,c<L$，又 $L=\dfrac{2}{a+b}$，则 $a+b=2l$，同理，$b=c=L$

所以 $l=L=1$，$\{a_n\}$ 收敛，极限为 1。

命题 1.1.13 证明：数列 $x_n=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}-\ln\dfrac{n}{\sqrt{2}}\quad(n=1,2,\cdots)$ 有位于 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 的极限。

证明： 设

$$f(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x^2+1}$$

则

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<1,\quad x\in[1,+\infty)$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少。

$$\begin{aligned}x_n&\ge\int_1^2\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\cdots+\int_2^3\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}\\&=\int_1^{n+1}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^{n+1}-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{(n+1)^2+1}{2}-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}\\&=\ln\sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n}}\\&\ge\ln 1=0\end{aligned}$$

$\{x_n\}$ 有下界，又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}-\ln\frac{1}{n}+1<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}=0$$

$\{x_n\}$ 单调减少，则 $\{x_n\}$ 收敛。由 $x_n\geq 0$，$x_1=\dfrac{1}{2}$ 知，$0\leq x_n\leq\dfrac{1}{2}$，所以

$$0\leq\lim_{n\to\infty}a_n\leq\frac{1}{2}$$

命题 1.1.14 设 $a_n>0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 无界。

证明： 反证法。假设 $\{a_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，$a_n\leq M$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则有

$$0<\frac{a_n}{2M}\leq\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

两边对 n 取极限，得到

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

设

$$A(n)=\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}},\quad B(n)=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}}$$

显然 $B(n)\in(0,1]$，$\forall n\in\mathbb{N}$，则

$$\begin{aligned}
0&\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}+a_{n+3}}\\
&=\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}\cdot\frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{a_{n+2}+a_{n+3}}\right)\\
&\leq\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}-\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}\\
&=0
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+2}+a_{n+3}}=0$$

同理可证，对任意 $p\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+p}+a_{n+p+1}}=0$$

则 $\forall p\in\mathbb{N}$，$\exists N_p\in\mathbb{N}$，$n>N_p$ 时

$$\frac{a_n}{a_{n+p}+a_{n+p+1}}<\frac{1}{4}$$

即 $n>N_p$ 时，$a_n<2a_{n+p}$ 和 $a_n<2a_{n+p+1}$ 中至少有一个成立。
显然我们可以选取一个子列，使其单调增加且无界。

命题 1.1.15 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq \mathrm{e}$$

对所有正数数列 $\{a_n\}$ 成立，且 e 不能再改进。

证明: 设 $s_k=\left(\frac{1+a_{k+1}}{a_k}\right)^k$，则 $s_k\geq 0$，且 $\sup\limits_{k\geq n}\{s_k\}$ 对 n 不增。则 $\sup\limits_{k\geq n}\{s_k\}$ 对 n 极限存在，设

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{a_k\}=l>\mathrm{e}$$

则对任意 $0<\varepsilon<l-\mathrm{e}$，选取 $N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时

$$l\leq\sup_{k\geq n}\{s_k\}<\mathrm{e}-\varepsilon$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

令

$$r_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

选取 $N'\in\mathbb{N}$，$n>N'$ 时

$$\mathrm{e}-\varepsilon<r_n<\mathrm{e}+\varepsilon$$

令 $M=\max\{N,N'\}$,

$$s_n\leq\sup_{k\geq n}\{s_k\}<r_n,\quad \forall n>M$$

进一步有

$$s_n\leq\sup_{k\geq n}\{a_k\}\leq r_n,\quad \forall n>M$$

则有

$$\frac{1}{n+1}<\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_{M+1}}{M+1},\quad n>M$$
$$\sum_{k=M+1}^{m-1}\frac{1}{k+1}<\frac{a_{M+1}}{M+1}-\frac{a_m}{m}<\frac{a_{M+1}}{M+1}$$

令 $m\to\infty$，则 $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ 收敛，而调和级数不收敛。所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq \mathrm{e}$$

命题 1.1.16 设

$$\lim_{n\to\infty}a_n=q,\quad |q|<1$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1}\right)=\frac{a}{1-q}$$

证明： $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbb{N}$，$n>N_1$ 时

$$|a_n-a|<\frac{1-|q|}{3(1-q)}\varepsilon$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，则存在 $N_2\in\mathbb{N}$，$n>N_2$ 时

$$|q|^n<\frac{\varepsilon}{3N_1M|1-q|},\quad |aq^n|<\frac{\varepsilon}{3}$$

因此当 $n>N=N_1+N_2+1$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|(1-q)(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1}-a)|\\
=&\left|(1-q)[(a_n-a)+(a_{n-1}-a)q+\cdots+(a_{N_1+1}-a)q^{n-N_1-1}+\cdots+(a_1-a)q^{n-1}-aq^n]\right|\\
<&|1-q|\left[\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3(1-q)}\cdot\frac{1-|q|^{n-N_1}}{1-|q|}+N_1M\frac{\varepsilon}{3N_1M|1-q|}\right]+\frac{\varepsilon}{3}\\
<&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\\
=&\varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(1-q)(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=a$$

又 $1-q\neq0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1}q+\cdots+a_1q^{n-1})=\frac{a}{1-q}$$

命题 1.1.17 设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}},\quad n=1,2,\cdots$$

证明:

(1) 当 $n\geq2$ 时,

$$a_n=\frac{n+1}{2n}a_n+1$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

证明： (1) 由 $a_n=\dfrac{n+1}{2n}a_n+1$ 知,

$$2a_n-a_{n-1}-2=\frac{a_{n-1}}{n}$$

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}}+1$$

所以

$$\begin{aligned}2a_n-a_{n-1}-2&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}\\&=\frac{k!(n-k)!}{n!}+\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}-\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!}\\&=\frac{k!(n-k-1)!}{n!}\\&=\frac{1}{n}a_{n-1}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}2(a_n-a_{n-1})&=\frac{n+1}{n}a_{n-1}-\frac{n+2}{n+1}a_n\\&=a_{n-1}-a_n+\frac{1}{n}a_{n-1}-\frac{1}{n+1}a_n\\&>(a_{n-1}-a_n)+\frac{1}{n+1}(a_{n-1}-a_n)\\&=\frac{n+2}{n+1}(a_{n-1}-a_n)\end{aligned}$$

因为 $a_1=2,a_2=\dfrac{5}{2},a_3=\dfrac{8}{3}$，所以 $n\geq 4$ 时，$b_n\geq a_{n+1}$
即 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n\geq 0$，$n\in\mathbb{N}$，所以 $\{a_n\}$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$$

得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2$$

引理 1.1.1 设集合

$$S=\{n\alpha-\lfloor n\alpha\rfloor\big|n\in\mathbb{N}\}$$

其中 $\{n\alpha\}=n\alpha-\lfloor n\alpha\rfloor$，$\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，即 α 为无理数。
证明：集合 S 在区间 $[0,1]$ 上稠密。

证明： 先证集合 S 为无穷集合。设任意 $i,j\in\mathbb{N}$

$$\{i\alpha\}\neq\{j\alpha\}$$

否则 $\exists i,\ j \in \mathbb{N}$ 使得

$$\{i\alpha\} = i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor = j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor = \{j\alpha\}$$

则有

$$\alpha = \frac{\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor}{i-j} \in \mathbb{Q}$$

与题设矛盾，所以显然集合 S 是无穷集，且 $S \subseteq [0,1]$。
由 Bolzano-Weierstrass 定理知，集合 S 至少存在一个聚点。因此易知，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists i,\ j \in \mathbb{N}$ 使得

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{n}$$

则存在 $M \in \mathbb{N}$ 使得

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \leq 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

又因为 α 是无理数，所以不存在 $M \in \mathbb{N}$, 使 $M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) = 1$，则

$$M(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) < 1 < (M+1)(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})$$

因为 $\{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \dfrac{1}{n}$，则对任意 $m \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，存在 $k \in \{1, 2, \cdots, M\}$

$$k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right]$$

$$\begin{aligned} k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\}) &= \{k(\{i\alpha\} - \{j\alpha\})\} \\ &= \{k[(i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor) - (j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor)]\} \\ &= \{k(i-j)\alpha + k(\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)\} \\ &= \{k(i-j)\alpha\} \end{aligned}$$

因此

$$\{k(i-j)\alpha\} \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right] \cap S$$

即集合 S 在区间 $[0,1]$ 上稠密。

命题 1.1.18 证明：数列 $\{\sin n\}$ 在区间 $[-1,1]$ 上稠密。

证明： $\forall v \in [-1,1]$，$\exists u \in [0, 2\pi]$

$$\sin u = v$$

由 $y = \sin x$ 的连续性可知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $|x-u| < \delta$ 时

$$|\sin u - \sin x| = |v - \sin x| < \varepsilon$$

由引理*1.1.1*知，对任意无理数 α，集合

$$\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \big| n \in \mathbb{N}\}$$

在区间 $[0,1]$ 上稠密。所以令 $\alpha = \dfrac{u}{2\pi}$，$\exists n \in \mathbb{N}$，使得

$$\left|\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} - \frac{u}{2\pi}\right| < \frac{\delta}{2\pi}$$

其中

$$\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} = \frac{n}{2\pi} - \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor$$

两边乘以 2π，得

$$\left|2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} - u\right| < \delta$$

所以

$$\left|\sin\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right) - \sin u\right| < \varepsilon$$

又因为

$$2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\} = \frac{n}{2\pi} - \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor$$

则有

$$\sin\left(2\pi\left\{\frac{n}{2\pi}\right\}\right) = \sin\left[2\pi\left(\frac{n}{2\pi} - \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor\right)\right] = \sin\left(2\pi \cdot \frac{n}{2\pi}\right) = \sin n$$

即

$$|\sin n - \sin u| = |\sin n - v| < \varepsilon$$

命题 1.1.19 求数列 $a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}$ 的极限。

证明： 由算术几何平均值不等式知

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}}} &= \sqrt[n]{\left(1 + \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}}\right) \times 1 \times \cdots \times 1} \\
&\le \frac{n - 1 + 1 + \sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}}}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{n}\sqrt[n]{2 + \cdots + \sqrt[n]{n}} \\
&\le 1 + \frac{1}{n}\sqrt[n]{2 + 3 + \cdots + n} \\
&= 1 + \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}
\end{aligned}$$

易知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

又 $a_n \le 0$，则由夹逼定理得

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

命题 1.1.20 证明：若 $p_k > 0$，$k = 1$，2，$\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1a_n + p_2a_{n-1} + \cdots + p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = a$$

证明： 由题设知，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbb{N}$，使得

$$\left|\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| < \varepsilon$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$|a_n - a|\varepsilon$$

且 $\exists M > 0$，使得

$$|a_n| < M, \quad n \in \mathbb{N}$$

则当 $n > N = N_1 + N_2$ 时有

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p_1a_n + p_2a_{n-1} + \cdots + p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n} - a\right| &= \left|\frac{p_1(a_n-a) + p_2(a_{n-1}-a) + \cdots + p_n(a_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| \\
&\le \left|\frac{p_1(a_n-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| + \cdots + \left|\frac{p_{n-N_2}(a_{N_2+1}-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| \\
&\quad + \left|\frac{p_{n-N_2+1}(a_{N_2}-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| + \cdots + \left|\frac{p_n(a_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| \\
&\le \left|\frac{(p_1+p_2+\cdots+p_{n-N_2})\varepsilon}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right| + 2MN_2\varepsilon \\
&\le (2MN_2+1)\varepsilon
\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1a_n + p_2a_{n-1} + \cdots + p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n} = a$$

命题 1.1.21 计算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

证明： 易知

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x\le\frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}=\frac{\pi}{4}$$

又有

$$\lim_{n\to\infty}n\sqrt[n]{\frac{\pi}{4}\tan^n\left(\frac{\pi}{4n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\left(\frac{\pi}{4n}\right)\cdot\sqrt[n]{\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

则由夹逼定则得

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}$$

命题 1.1.22 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，用定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(x_n+\frac{x_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{x_1}{n}\right)}{\ln n}=0$$

证明： 设 $\max|x_n|=M$, 且对任意 $\varepsilon'>0$, 存在一个 $N_1(\varepsilon')$, 使得当 $N>N_1(\varepsilon')$ 时, $|x_k|\le\varepsilon'$ 成立。则有

$$\begin{aligned}\frac{\left|x_n+\frac{x_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{x_1}{n}\right|}{\ln n}&=\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{N_1(\varepsilon')}\frac{1}{n+1-k}x_k+\sum\limits_{k=N_1(\varepsilon')+1}^{n}\frac{1}{n+1-k}x_k\right|}{\ln n}\\&\le\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{N_1(\varepsilon')}\frac{1}{n+1-k}x_k\right|+\left|\sum\limits_{k=N_1(\varepsilon')+1}^{n}\frac{1}{n+1-k}x_k\right|}{\ln n}\\&\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_1(\varepsilon')}\frac{1}{n+1-k}|x_k|+\sum\limits_{k=N_1(\varepsilon')+1}^{n}\frac{1}{n+1-k}|x_k|}{\ln n}\\&\le\frac{M\varepsilon'+\left(\sum\limits_{k=N_1(\varepsilon')+1}^{n}\frac{1}{n+1-k}\right)\varepsilon'}{\ln n}\\&<(M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

因此令 $\varepsilon=(M+1)\varepsilon'$，对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $N(\varepsilon)=N_1(\varepsilon')=N_1(\dfrac{\varepsilon}{M+1})$，使得当 $N>N(\varepsilon)$ 时

$$\frac{\left|x_n+\frac{x_{n-1}}{2}+\cdots+\frac{x_1}{n}\right|}{\ln n}<\varepsilon$$

命题 1.1.23 已知正数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}$，$n\geq 1$。证明：$\{x_n\}$ 收敛并求出该极限。

证明： (1) 如果 $0<x_1<x_2<1$，则有

$$x_3=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq x_2$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=(\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n})-(\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n-1}})=(\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n})+(\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}})\geq 0$$

所以 $\{x_n\}$ 单调增加。且由数学归纳法可证，若 $x_n\leq 4$，则

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}\leq 4$$

所以 $\{x_n\}$ 收敛，且极限为 4。

(2) 如果 $0<x_2<x_1<1$，则有

$$x_3=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq x_1$$

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_{n-1}}\geq 0$$

同上。

(3) 如果 $x_1\geq 1$ 或 $x_2\geq 1$，则

$$x_3=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 1\Longrightarrow x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}\geq 1$$

$$\begin{aligned}|x_{n+2}-4|&=|\sqrt{x_{n+1}}-2+\sqrt{x_n}-2|\\&\leq|\sqrt{x_{n+1}}-2|+|\sqrt{x_n}-2|\\&=\left|\frac{x_{n+1}-4}{\sqrt{x_{n+1}}+2}\right|+\left|\frac{x_n-4}{\sqrt{x_n}+2}\right|\\&\leq\frac{1}{3}|x_{n+1}-4|+\frac{1}{3}|x_n-4|\end{aligned}$$

由递推公式易知,

$$\lim_{n\to\infty}|x_{n+2}-4|=0$$

命题 1.1.24 设 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，定义 $x_{n+1}=\sin x_n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2$ 的值。

证明： 因为 $nx_n^2=\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$，由 Stolz 定理知

$$\lim_{n\to\infty}nx_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}=\frac{x_n^2-\sin^2 x_n}{x_n^2\sin^2 x_n}$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2-\sin^2 x_n}{x_n^2\sin^2 x_n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} nx_n^2=3$$

同时可知

$$x_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 发散。

命题 1.1.25 设 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$。证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求出该极限。

证明： 由数学归纳法易证

$$a_n\le 2,\quad n\in\mathbb{N}$$

设函数 $f(x)=\sqrt{2}^x-x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln 2\sqrt{2}^x-1,\quad f''(x)=\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)^2\sqrt{2}^x\ge 0$$

易知 $x\le 2$ 时，$f'(x)<0,$，且 $f(2)=0$. 因此

$$f(x)\ge 0,\quad 0\le x\le 2$$

即 $a_{n+1}\le a_n$。所以数列 $\{a_n\}$ 收敛，且极限 a 满足

$$\sqrt{2}^a=a$$

即 $a=2$。

命题 1.1.26 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right]$$

证明 S_n 收敛并求其值。

证明： 易知

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} S_n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right]\right] \\
&= \frac{3}{2}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right] \\
&= \frac{3}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

命题 1.1.27 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n = +\infty$$

证明: 注意到，$\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$，$\forall x \geq 0$，得到

$$
\begin{aligned}
\left(1+\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n &\geq \left(1+\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n \\
&\geq \left(1+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n \\
&\geq \left(1+\frac{5}{6\sqrt{n}}\right)^n \\
&\geq \frac{5\sqrt{n}}{6}
\end{aligned}
$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\int_0^1 \frac{\sin^n x}{x^n}\mathrm{d}x\right)^n = +\infty$$

§2 不等式

定理 1.2.1 (Bernoulli 不等式) 设 $h > -1$，$n \in \mathbb{N}$，则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

其中 $n > 1$ 时等号成立的充分必要条件时 $h = 0$.

证明: $n = 1$ 或 $h = 0$ 时不等式显然成立，下面只证明 $n > 1$ 和 $h \neq 0$ 时的情况。
将 $(1+h)^n - 1$ 作因式分解，可以得到

$$(1+h)^n - 1 = h[1+(1+h)+(1+h)^2+\cdots+(1+h)^{n-1}]$$

当 $h > 0$ 时，右边方括号内第二项起都大于 1，因此 $(1+h)^n - 1 > nh$.
当 $-1 < h < 0$ 时，右边方括号内第二项起都小于 1，则 $(1+h)^n - 1 < nh$，又因为 $h < 0$,

所以得到 $(1+h)^n-1>nh$.
下证等号成立的条件，易知 $A>0$，$A+B>0$，$n\in\mathbb{N}$ 时成立不等式

$$(A+B)^n\geq A^n+nA^{n-1}B$$

且 $n>1$ 时等号成立的充分必要条件是 $B=0$.

定理 1.2.2 (算术平均值-几何平均值不等式) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个非负实数，则成立不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1,a_2,\cdots,a_n}$$

其中等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证明： 显然，若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 0，则不等式成立，且此时等号成立的充分必要条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.
下面只证 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全为正数时的情况。$n=1$ 时不等式成立。
假设 $n=k$ 时不等式成立，则 $n=k+1$ 时有以下分解

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$$

令

$$\begin{aligned}A&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\\B&=\frac{ka_{k+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_k)}{k(k+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}\\&=(A+B)^{k+1}\\&\geq A^{k+1}+(k+1)A^kB\\&=A^k(A+(k+1)B)\\&=A^ka_{k+1}\\&\geq a_1a_2\cdots a_{k+1}\end{aligned}$$

不等式等好成立时条件也可以由数学归纳法得到。
$n=1$ 时显然成立。
假设 $n=k$ 时成立，则 $n=k+1$ 时可以由以上推导过程观察得到等号成立的充分必要条件是

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$$
$$ka_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

也就是

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$$

定理 1.2.3 (Young 不等式) $p, q \in \mathbb{R}^+$，且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p > 1)$$
$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p < 1)$$

其中 a, b 为任意实数。

证明： 设函数

$$f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$$

易证 $\alpha < 1$ 时，$f(x) \leq 0$；$\alpha \geq 1$ 时，$f(x) \geq 0$. 令 $x = \dfrac{a}{b}$，则

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha\left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 \leq 0 \quad (\alpha < 1)$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha - \alpha\left(\frac{a}{b}\right) + \alpha - 1 \geq 0 \quad (\alpha \geq 1)$$

令 $\alpha = \dfrac{1}{p}$，有

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p > 1)$$
$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b \quad (p < 1)$$

定理 1.2.4 (Hőlder 不等式) $p, q \in \mathbb{R}^+$，且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则

$$\sum x_i y_i \leq \left(\sum {x_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum {y_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

其中，$\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 均为非负数。

证明： 令 $X=\sum x_i{}^p$，$Y=\sum y_i{}^q$. 由 Young 不等式得

$$\frac{x_iy_i}{X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}}=\left(\frac{x_i{}^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{y_i{}^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}}\le\frac{1}{p}\frac{x_i{}^p}{X}+\frac{1}{q}\frac{y_i{}^q}{Y}$$

$$\sum\frac{x_iy_i}{X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}}\le\frac{1}{p}\frac{\sum x_i{}^p}{X}+\frac{1}{q}\frac{\sum y_i{}^q}{Y}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\sum x_iy_i\le X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}=(\sum x_i{}^p)^{\frac{1}{p}}(\sum y_i{}^q)^{\frac{1}{q}}$$

定理 1.2.5 (Minkowski 不等式) 设 $p\in\mathbb{R}^+$

$$\left(\sum(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum x_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum y_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中，$\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 均为非负数。

证明：

$$\sum(x_i+y_i)^p=\left(\sum(x_i+y_i)^{p-1}\right)(x_i+y_i)=x_i\sum(x_i+y_i)^{p-1}+y_i\sum(x_i+y_i)^{p-1}$$

由 Hőlder 不等式得

$$\begin{aligned}\sum(x_i+y_i)^p&\le\left(\sum x_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum(x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum y_i{}^q\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum(x_i+y_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\sum(x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum x_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum y_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\end{aligned}$$

定理 1.2.6 (1) 设 $F\in\mathbb{C}[a,b]$，处处大于 0，且单调减少，则有

$$\int_a^bF(x)\mathrm{d}x\int_a^bxF^2(x)\mathrm{d}x\le\int_a^bF^2(x)\mathrm{d}x\int_a^bxF(x)\mathrm{d}x$$

(2) 设 f,g 在区间 $[a,b]$ 上对于任何 x,y 有

$$(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\ge0$$

又设 $p\in\mathbb{R}[a,b]$，且处处大于 0. 则有

$$\int_a^bp(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^bp(x)g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^bp(x)\mathrm{d}x\int_a^bp(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明： (1) 令两边第二项积分变量替换为 y，化为二重积分，得

$$\begin{aligned}I_1&=\int_a^b\int_a^bF(x)yF^2(y)-F^(x)yF(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\int_a^byF(x)F(y)(F(y)-F(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

再令 x 与 y 交换，得

$$I_2=\int_a^b\int_a^b xF(x)F(y)(F(x)-F(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为积分区域关于 $x=y$ 对称，则

$$2I=I_1+I_2=\int_a^b\int_a^b F(x)F(y)(F(x)-F(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $F(x)$ 单调减少且处处大于 0，所以 $F(x)F(y)(F(x)-F(y))\leq 0$，即 $I\leq 0$. 则

$$\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\int_a^b xF^2(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b F^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x$$

(2) 同 (1)，先化为二重积分，再利用题设证明。

定理 1.2.7 (Bellman-Gronwall 不等式) 设当 $x\geq 0$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 为非负连续函数，且有

$$f(x)\leq A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

其中 $A>0$.
则当 $x\geq 0$ 时

$$f(x)\leq A\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$$

证明： 由题设得

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t}&\leq 1\\ \frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t}&\leq g(x)\\ \int_0^x\frac{f(x)g(x)}{A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x&\leq\ln A+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即

$$f(x)\leq A+\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t\leq A\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$$

定理 1.2.8 设 $f\in\mathbb{R}[a,b]$，且 $0<m\leq f(x)\leq M$，则有

$$\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2$$

证明： 左右两边同乘 MN，得

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{(M+m)^2}{4}(b-a)^2$$

由均值不等式得

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_a^b \frac{Mm}{f(x)}\mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} &\leq \frac{1}{2}\int_a^b \left[\frac{Mm}{f(x)} + f(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \left[\frac{(f(x)-M)(f(x)-m)}{f(x)} + (M+m)\right]\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int_a^b (M+m)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(b-a)(M+m)\end{aligned}$$

则有

$$\int_a^b \frac{Mm}{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4}(b-a)^2(M+m)^2$$

即

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2$$

§3 连续函数

命题 1.3.1 设 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}$ 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是互异实数，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不同时为 0. 证明：$f(x)$ 的零点个数小于 n。

证明： 应用数学归纳法。$n=1$ 时，$f(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 无零点，结论成立。
假设 $n=m$ 时成立，则 $n=m+1$ 时，应用反证法，假设此时零点个数大于等于 $m+1$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m+1} c_k \mathrm{e}^{\lambda_k x} = \left[c_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{e}^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x}\right]$$

令

$$g(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathrm{e}^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x} + c_{m+1}$$

则 $g(x)$ 有至少 $m+1$ 个零点，由 Rolle 中值定理得，$g'(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k(\lambda_k - \lambda_{m+1})\mathrm{e}^{(\lambda_k - \lambda_{m+1})x}$ 至少有 m 个零点
因为 $a_k = c_k(\lambda_k - \lambda_{m+1})$ 互异，且 $\lambda_k - \lambda_{m+1}$ 不同时为 0
所以 $g'(x)$ 零点个数小于 m 个，与假设矛盾。则 $n=m+1$ 时结论成立。
由数学归纳法，结论得证。

命题 1.3.2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$，且 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=O(x)\ (x\to 0)$
证明:

$$f(x)=O(x)\quad (x\to 0)$$

证明： 因为 $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=O(x)\ (x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|x|<\delta$

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

即

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=x\alpha(x),\quad |x|<\delta$$

其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|x|<\delta$，则

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{2^{k-1}}\alpha\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]$$

因为 $k\in\mathbb{N}$ 时,

$$\left|\frac{x}{2^{k-1}}\right|\le|x|$$

所以

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| &\le\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x}{2^{k-1}}\left|\alpha\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right||x|\right]\\ &\le|x|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\right)\varepsilon\\ &=|x|\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x}\right|\le\varepsilon\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]<\varepsilon$$

又

$$\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}f(x)=0$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(x)-f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{x}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$$

所以

$$f(x) = O(x) \quad (x\to 0)$$

命题 1.3.3 设 $f\in C(I)$，I 为区间。证明：若 $x_0\in I$ 是 f 的唯一极值点，则 x_0 一定是最值点；若 x_0 是极小值（极大值）点，则 x_0 是 f 的最小值（最大值）点。

证明： 不妨设 x_0 是 f 的唯一极小值点，x_1 是 f 的最小值点，应用反证法，假设 $x_0\neq x_1$，则不妨设 $x_0<x_1$

因为 x_0 是极小值点，所以存在 $x_2>x_0$，$x_2<x_1$

$$f(x_2)>f(x_0)>f(x_1)$$

由介值定理得，$\exists x_3\in(x_2,x_1)$

$$f(x_3)=f(x_0)$$

则易知 $\exists\eta\in(x_3,x_0)$

$$f'(\eta)=0$$

其中 η 为极值点，与题设矛盾。

所以 $x_0=x_1$，又若最值点不唯一，即 $\exists\alpha\in I$，$\alpha\neq x_0$

$$f(\alpha)=f(x_0)$$

同上可知与题设矛盾。

命题 1.3.4 若 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为

(1) 单调增加

(2) 单调减少

是否存在 $x\in[0,1]$，使得 $f(x)=x$

证明： (1) 存在

令 $A=\{x|x\in[0,1]\wedge f(x)>x\}$，若 $f(0)=0$，则结论显然成立。

若不然，则 A 非空，因此 A 有上确界，不妨设为 a，令 $b=f(a)$

a) $a<b$ 时

因为 f 是单调的，a 为上确界，可得

$$b=f(a)\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{a+b}{2}$$

与 $a<b$ 矛盾。

b) $a > b$ 时

因为 a 为上确界，所以存在 $\eta \in A$，$\eta > \dfrac{a+b}{2}$，则

$$b = f(a) \geq f(\eta) > \eta > \frac{a+b}{2}$$

与 $a > b$ 矛盾。

所以 $a = b$，即 $f(a) = 0$.

(2) 不一定存在

例如，令

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2}, & x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}, & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

命题 1.3.5 设 $f, g : [a, b] \to [a, b]$ 是单调增加函数，且 $f \circ g = g \circ f$，证明：f 和 g 有一个公共不动点。

证明： 设

$$A = \{x | x \in [a, b] \wedge x \leq f(x) \wedge x \leq g(x)\}$$

显然 A 非空，所以存在上确界 $u = \sup A$

易知 $u \leq f(u)$，$u \leq g(u)$，所以

$$f(u) \leq f(g(u)) = g(f(u))$$

又

$$f(f(u)) \geq f(u)$$

即 $f(u) \in A$，则

$$f(u) \leq u$$

所以

$$u = f(u) = g(u)$$

则 u 为 f 和 g 的公共不动点。

命题 1.3.6 设函数 f 在区间 I 上只有可去间断点，定义

$$g(x) = \lim_{t \to x} f(t)$$

证明：$g \in C(I)$

证明： $\forall x_0 \in I$，因为 $g(x_0)=\lim\limits_{t\to x} f(t)$，所以存在 $\delta>0$，$t\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时

$$|f(t)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是，当 $|x-x_0|<\dfrac{\delta}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}|g(x)-g(x_0)| &= \left|\lim_{t\to x} f(t)-g(x_0)\right| \\ &= \lim_{t\to x}|f(t)-g(x_0)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$$

即 g 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性可知，g 在区间 I 上连续。

命题 1.3.7 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，且有 $x_n\in[a,b]$，使得

$$g(x_n)=f(x_{n+1}),\quad n\in\mathbb{N}$$

证明：必有一点 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$

证明： 反证法。若 $F(x)=f(x)-g(x)\neq 0$，$x\in[a,b]$，不妨设 $F(x)>0$
则由 F 连续知，F 在 $[a,b]$ 上有最值，设 $\min F(x)=m$
则

$$F(x_{n+1})=f(x_{x_{n+1}})-g(x_{n+1})=f(x_{n+1})-f(x_{n+2})\ge m$$

所以

$$\begin{aligned}&f(x_n)-f(x_{n+1})\ge m \\ &\cdots \\ &f(x_1)-f(x_2)\ge m\end{aligned}$$

则

$$f(x_{n+1})\le f(x_1)-mn$$

即 f 无界，与题设矛盾。得证。

命题 1.3.8 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且有界，证明：对任意给定的 λ，存在一个数列 $\{x_n\}$ 满足

(1)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n+\lambda) - f(x_n)] = 0$$

证明： 反证法。不失一般性地，我们设 $\lambda > 0$，$\lambda = 0$ 时结论显然成立；若 $\lambda < 0$，则有

$$-[f(x_n+\lambda+|\lambda|) - f(x_n+\lambda)] = f(x_n+\lambda) - f(x_n)$$

化为 $\lambda > 0$ 的形式。
若命题不成立，则必存在 $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$, $\forall M > 0$, $x > M$ 时

$$|f(x+\lambda) - f(x)| > \varepsilon$$

由 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x+\lambda) - f(x)$ 不变号，不妨设

$$f(x+\lambda) - f(x) > \delta, \quad x > M$$

则

$$\begin{aligned} f(x_n+m\lambda) &\geq f[x_n+(m+1)\lambda] + \varepsilon \\ &\cdots \\ &\geq f(x_n) + m\lambda \end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，则

$$f(x_n+m\lambda) \to \infty$$

与 f 有界矛盾。

命题 1.3.9 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且任意 $x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} f'(x+n) = 0$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$$

证明： 因为 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[0,+\infty)$ 时

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$$

将 $[0,1]$ 等分成 $0=x_0<x_1<\cdots<x_m=1$，使每个区间的长度为 $\dfrac{1}{m}<\delta$
因为 $x-\lfloor x\rfloor$，$\forall x\geq 1$，且

$$x\to+\infty\leftrightarrow\lfloor x\rfloor\to+\infty$$

所以存在 $k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$

$$x-\lfloor x\rfloor\in[x_k,x_{k+1}]$$

即

$$0\leq x-\lfloor x\rfloor-x_k<\delta$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$，$\forall x\in[0,1]$ 成立，所以对任意 x_k，$k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$

$$\lim_{n\to\infty}f(x+n)=0$$

因此 $\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时

$$|f(x_k+n)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad k\{0,1,2,\cdots,m\}$$

当 $x>N>1$ 时，$\lfloor x\rfloor>N$，且

$$\begin{aligned}|f(x)|&=|f(x)-f(\lfloor x\rfloor+x_k)+f(x_k+\lfloor x\rfloor)|\\&=|f(x)-f(\lfloor x\rfloor+x_k)|+|f(x_k+\lfloor x\rfloor)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=0$$

命题 1.3.10 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上定义，且处处有极限，证明:
(1) 对任意 $\varepsilon>0$，在 $[a,b]$ 上使 $\left|\lim\limits_{t\to x}f(t)-f(x)\right|>\varepsilon$ 的点至多只有有限个。
(2) f 在 $[a,b]$ 中至多只有可列个间断点。

证明： (1) 反证法。若对 $\varepsilon_0>0$，在 $[a,b]$ 上使 $\left|\lim\limits_{t\to x}f(t)-f(x)\right|>\varepsilon$ 的点有无限个，
令间断点集合为点列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，由聚点定理得，存在子列 $\{x_k\}$ 收敛，即

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\alpha$$

又由题设，设 $\lim_{t\to\alpha} f(t)=\alpha$，由极限性质得知，$\exists\delta>0$，$|t-a|<\delta$

$$|f(t)-\alpha|<\frac{1}{2}\varepsilon_0$$

又由 Heine 归结定理得

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k)=\lim_{t\to\alpha} f(t)=\alpha$$

则存在 $k_0\in\mathbb{N}$，$k\geq k_0$ 时

$$|f(t)-f(x_k)|\leq|f(t)-\alpha|+|f(x_k)-\alpha|=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

其中 $|t-x_k|$ 可任意小，与题设矛盾。

(2) 设 $A=\left\{x\middle|x\in[a,b]\wedge\left|\lim\limits_{t\to x} f(t)-f(x)\right|>0\right\}$ 为间断点集合

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

其中

$$A_n=\left\{x\middle|x\in[a,b]\wedge\left|\lim_{t\to x} f(t)-f(x)\right|>\frac{1}{n}\right\}$$

由 (1) 知 A_n 为有限集，所以 A 至多可列。

命题 1.3.11 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上定义，且在其中的每个有界子区间上上有界，证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

证明: 因为 $\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>\max\{0,a\}$，$x>\delta_1$ 时

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}$$

固定 δ_1，由题设知 f 在 (δ_1,δ_1+1) 上有界，则存在 $M>0$

$$|f(x)|<M,\quad x\in(\delta_1,\delta_1+1)$$

选取 $\delta>\delta_1$，使

$$\frac{M}{\delta}<\frac{\varepsilon}{3},\quad\left|\frac{\delta_1+1}{\delta}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是，当 $x>\delta$ 时，$\exists n\in\mathbb{N}$，使 $x-n\in(\delta_1,\delta_1+1)$

又

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{x} - A\right| &= \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x-i) - f(x-i-1) + f(x-n)]}{x} - A\right| \\
&= \left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[f(x-i) - f(x-i-1) - A] + nA + f(x-n)}{x} - A\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{f(x-i) - f(x-i-1)}{x} - A\right| + \left|\frac{(x-n)A}{x}\right| + \left|\frac{f(x-n)}{x}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{n}{x} + \frac{\delta_1+1}{\delta}A + \frac{M}{\delta} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = A = \lim_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)]$$

命题 1.3.12 设 f 是 $[a,b]$ 上的可微函数，且 $f(a)=0$，$\exists A>0$，$\beta\ge 1$

$$|f'(x)| \le A|f(x)|^{\beta}, \quad \forall x\in[a,b]$$

证明：$f(x)\equiv 0$

证明： 反证法。设 $f(x)\neq 0,\ x\in[a,b]$
令 $S=\{x|x\in[a,b]\wedge f(x)=0\}$，则显然 S 非空。设 $c=\inf S$
如果 $c=b$，则 $f(x)=0,\ \forall x\in[a,b]$，由连续性可知

$$f(b) = \lim_{x\to b} f(x) = 0$$

与题设矛盾。因此 $c\neq b$，又 $c=a$，则有 $f(c)=0$，否则 $a<c<b$ 时

$$f(x)=0, \quad \forall x<c$$

则由函数连续性知 $f(c)=0$. 综上

$$f(c)=0, \quad a\le c<b$$

因为 f 在 $x=c$ 处连续且 $f(c)=0$，则存在 $d>c$，使 d 充分接近 c，且 $|f(x)|\le 1$，$A(x-c)\le\dfrac{1}{2}$，$x\in[c,d]$ 因为 f 在 $[c,d]$ 连续，所以存在最值，即令

$$|f(t)| = \max_{x\in[c,d]}|f(x)|, \quad t\in[c,d]$$

又因为 $c=\inf S$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in(m,m+\varepsilon)$，使得 $f(m)=\neq 0$
则 $f(t)\neq 0$，且 $t>c$，由 Lagrange 中值定理知

$$|f(t)|=|f(t)-f(c)|=|t-c||f'(u)|\le|t-c||f(u)|^{\beta},\quad u\in(c,t)$$

又由 $A(x-c)\le\dfrac{1}{2}$ 得

$$|t-c||f(u)|^{\beta}\frac{1}{2}|f(u)|^{\beta}\le\frac{1}{2}|f(u)|$$

即 $|f(t)|\le\dfrac{1}{2}|f(u)|$ 则

$$f(t)=f(u)=0$$

也即 $f(x)\equiv 0$，与假设矛盾。得证。

命题 1.3.13 设 $y=(1+\sqrt{x})^{2n+2}$，$n\in\mathbb{N}$，求 $y^{(n)}(1)$

证明： 设 $f(x)=(1-\sqrt{x})^{2n+2}$，易知对 $f(x)$ 求 n 次导后，每项依然会有 $(1-\sqrt{x})$，则

$$f^{(n)}(1)=0$$

所以

$$y^{(n)}(1)=\left[(1+\sqrt{x})^{2n+2}+(1-\sqrt{x})^{2n+2}\right]^{(n)}\Big|_{x=1}$$

$$(1+\sqrt{x})^{2n+2}+(1-\sqrt{x})^{2n+2}=2\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{2k}x^k$$

对右侧函数求 n 次导，易知

$$y^{(n)}(1)=4(n+1)(n+1)!$$

命题 1.3.14 设 $f\in C^2(a,b)$，$f+f'+f''\ge 0$，证明：f 有下界。

证明： 设

$$g(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

则

$$g+g''=\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)+f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)+f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)\right]\ge 0,\quad t\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

选取 s,t，使得

$$\max\{b-a,\pi\}<t<s<b$$

设

$$h_s(t)=g(t)\cos{(t-s)}-g'(t)\sin{(t-s)}$$

$$h_s'(t)=-[g(t)+g''(t)]\sin{(t-s)}\ge 0$$

其中 $\sin(t-s)<0$ 则

$$g(s)=h_s(s)\geq h_s(t)\geq -|g(t)|-|g'(t)|$$

选取任意 $t\in(\max\{b-a,\pi\},b)$，上式表明 g 在 (t,b) 上有上界。
设 $G(x)=g(a+b-x)$，则显然 $G\in C^2(a,b)$

$$G(x)+G''(x)=g(a+b-x)+g''(a+b-x)\geq 0$$

所以 G 在 (t,b) 上有下界，即 g 在 $(a,a+b-t)$ 上有下界。
若 $a+b-t>t$，即 $t<\dfrac{a+b}{2}$ 时，g 在 (a,b) 上有界。否则可在 $(a+b-t,t)$ 上重复以上操作。

命题 1.3.15 设 f 是可微实函数，且存在 $M>0$，使得

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leq Mt^2,\quad \forall x,t$$

证明:

$$|f'(x+t)-f'(x)|\leq M|t|$$

证明： 我们将证明即使没有 f 可微的条件，依然可以得出结论。
由题设得

$$-Mt^2\leq f(x+t)-2f(x)+f(x-t)\leq^2,\quad \forall x,t$$

设 $h_1(x)=f(x)-\dfrac{M}{2}x^2$，则由上式得

$$h_1(x+t)-2h_1(x)+h_1(x-t)=f(x+t)-2(x)+f(x-t)-Mt^2\leq 0$$

这表明 h_1 是 $\mathbb{R}$ 上连续的下凸函数，同理设 $h_2(x)=f(x)+\dfrac{M}{2}x^2$，$h_2$ 是 $\mathbb{R}$ 上连续的上凸函数。则

$$h_1^{(-)}(x)\leq h_1^{(+)}(x) \tag{1}$$
$$h_2^{(-)}(x)\leq h_2^{(+)}(x) \tag{2}$$

所以 $f^{(-)}$，$f^{(+)}$ 在任意点有定义，且满足

$$f^{(-)}(x)\equiv h_1^{(-)}(x)+Mx \tag{3}$$
$$f^{(+)}(x)\equiv h_1^{(+)}(x)+Mx \tag{4}$$
$$f^{(-)}(x)\equiv h_2^{(-)}(x)+Mx \tag{5}$$
$$f^{(+)}(x)\equiv h_2^{(+)}(x)+Mx \tag{6}$$

由 (1)，(3)，(4) 得 $f^{(-)} \geq f^{(+)}$，而由 (2)，(5)，(6) 得 $f^{(-)} \leq f^{(+)}$
因此 $f^{(-)} \equiv f^{(+)}$，即 f 在 $\mathbb{R}$ 上可微，且 h_1，h_2 也可微，由 h_1，h_2 凸性得，$\forall x, y$，$x \leq y$ 有

$$h_1'(y) - h_1'(x) = f'(y) - f'(x) - M(y-x) \leq 0$$
$$h_2'(y) - h_2'(x) = f'(y) - f'(x) + M(y-x) \geq 0$$

即

$$|f'(y) - f'(x)| \leq M|y-x|$$

命题 1.3.16 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是二阶可微，周期为 2π 的偶函数，证明：若

$$f''(x) + f'(x) = \frac{1}{f(x+\frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则 f 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$

证明： 由 f 的偶性得

$$f''(x) = f''(-x), \quad f(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(-x) + f(-x) = f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(-x+\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x+\frac{3\pi}{2})}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(-x + \frac{3\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

f 以 3π 为周期，又由题设知，f 周期为 2π，则 f 必以 π 为周期。
考察函数

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

因为

$$f(x+\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

则

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x+\frac{3\pi}{2})} = \frac{1}{f(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{g(x)}$$

又

$$g(-x) = f\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$$

所以 $g(x)$ 也是偶函数，

$$g'(x) = f'\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$g''(x) = f''\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

有

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{g(x)} \tag{1}$$
$$g''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{2}$$

即

$$fg'' - gf'' = (fg' - g'f)'$$

所以

$$f'g - g'f = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

同时由于 $g'(x)$，$f'(x)$ 是奇函数，则 $c = 0$
又 f，g 为 $\mathbb{R}$ 上周期函数，所以 f，g 必有界，则由 (1) 式得 $g(x) \neq 0$
故

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{c}{g^2} = 0$$

即

$$f = ag, \quad a \in \mathbb{R}$$

又因为 f 在 $\mathbb{R}$ 上连续且是周期函数，则存在最值点 x_0，x_1，其中

$$f(x_0) = \min f(x), \quad f(x_1) = \max f(x)$$

则有

$$g(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) \geq f(x_0)$$
$$g(x_1) = f\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right) \leq f(x_1)$$

则

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

即

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

命题 1.3.17 设 $f \in \mathbb{C}^n[0,1)$，满足

$$f^{(k)} \leq 1 + |f| + |f'| + \cdots + |f^{(k-1)}|, \quad k \leq n$$

证明：f 有上界

证明： 因为 $f \in \mathbb{C}^n[0,1)$，由 Taylor 公式知

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)(0)x^n}}{n!} + O(x^n)$$

由题设

$$f'(x) \leq 1 + |f(x)|$$

$$f''(x) \leq 1 + |f(x)| + |f'(x)| \leq 2(1 + |f(x)|)$$

应用数学归纳法可证

$$f^{(k)}(x) \leq 2^{k-1}(1 + |f(x)|), \quad k \leq n$$

所以

$$\begin{aligned}
f(x) &\leq f(0) + (1 + |f(0)|)\left(\frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \cdots + \frac{2^{n-1}x^n}{n!}\right) + O(x^n) \\
&= f(0) + \frac{1 + |f(0)|}{2}\left(\frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(2x)^n}{n!}\right) + O(x^n) \\
&\leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(\mathrm{e}^{2x} - 1) + O(x^n)
\end{aligned}$$

因为 f 定义在 $[0,1)$ 上，所以

$$f(x) \leq f(0) + \frac{1}{2}(1 + |f(0)|)(\mathrm{e}^2 - 1) + 1$$

即 f 有上界

命题 1.3.18 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$，常数 $h > 0$ 证明：存在 $\xi \in [h,+\infty)$，使得

$$f(\xi) = f(\xi - h)$$

证明： 反证法。令

$$g(x) = f(x) - f(x - h)$$

则 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续。则

$$g(x) \neq 0, \quad x \in [0,+\infty)$$

不妨设

$$g(x) > 0, \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} S_n &= g(h) + g(2h) + \cdots + g(nh) \\ &= [f(h) - f(0)] + [f(2h) - f(h)] + [f(3h) - f(2h)] + \cdots + [f(nh) - f((n-1)h)] \\ &= f(nh) - f(0) \end{aligned}$$

因为 $g(x) > 0$, $\forall x \in [0, +\infty)$，所以 $S_n > 0$，然而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} f(nh) - f(0) = 0$$

矛盾，得证。

命题 1.3.19 设 $f \in C(0,1)$，且

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \alpha < \beta = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

其中 x_1，x_2，x_3，$x_4 \in (0,1)$. 证明: 对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在 x_5，$x_6 \in (0,1)$，使得

$$\lambda = \frac{f(x_6) - f\ x_5}{x_6 - x_5}$$

证明： 设

$$F(t) = \frac{f((1-t)x_2 + tx_4) - f((1-t)x_1 + tx_3)}{(1-t)(x_2 - x_1) + t(x_4 - x_3)}$$

则 F 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\alpha = F(0) < \lambda < F(1) = \beta$. 根据连续函数的介值定理，存在 $t_0 \in (0,1)$，使得 $\lambda = F(t_0)$. 令

$$x_5 = (1 - t_0)x_1 + t_0 x_3$$

$$x_6 = (1 - t_0)x_2 + t_0 x_4$$

则

$$\lambda = F(t_0) = \frac{f(x_6) - f\ x_5}{x_6 - x_5}$$

命题 1.3.20 证明: $\mathrm{e}^{-x} + \cos 2x + x \sin x = 0$ 在区间 $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$ 恰有两个根 $x_{2n_1} < x_{2n}$，$\forall n \in \mathbb{N}^+$ 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n(x_n - n\pi)$$

证明： 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}+\cos 2x+x\sin x$，则 $\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{-x}-2\sin 2x+\sin x+x\cos x$.

$$\varphi((2n-1)\pi)=\mathrm{e}^{-(2n-1)\pi}+1>0$$

$$\varphi\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{-((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2})}-1-\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)>0$$

当 $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$ 时，

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}+\cos^2 x+(x-\sin x)\sin x>0$$

于是存在 $x_{2n-1}\in\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$x_{2n}\in\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{2},2n\pi\right)$. 使得

$$\varphi(x_{2n-1})=\varphi(x_{2n})=0$$

下面证明 $\varphi(x)=0$ 在区间 $((2n-1)\pi,(2n+1)\pi)$ 只有上述两个根。
当 $x\in\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4},((2n+1)+\frac{3\pi}{4})\right)$ 时，

$$\varphi(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)+1+1<0$$

所以 $\varphi(x)=0$ 的两个根分别在区间 $\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ 和 $\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4},((2n+1)+\frac{3\pi}{4})\right)$ 上。
当 $x\in\left((2n-1)\pi,(2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right)$ 时，

$$\varphi'(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}(2n-1)\pi<0$$

当 $x\in\left((2n-1)\pi+\frac{\pi}{4},((2n+1)+\frac{3\pi}{4})\right)$ 时，

$$\varphi'(x)>\frac{\sqrt{x}}{2}\left((2n-1)\pi+\frac{3\pi}{4}\right)-1>0$$

由函数单调性确定了根的个数。
因为 $\lim\limits_{x_n}=+\infty$，所以

$$1=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-x}+1=\lim_{n\to\infty}\sin x_n(2\sin x_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(x_n-n\pi)(2\sin x_n-x_n)$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-n\pi)=0$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(x_n-n\pi)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n(x_n-n\pi)}{(-1)^n\sin(x_n-n\pi)(2\sin x_n-x_n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2\sin x_n-x_n}\\&=-\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

§4 一元函数微分学

命题 1.4.1 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $\exists c\in(a,b)$, $f'(c)=0$. 证明: $\exists\xi\in(a,b)$

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

证明: 设 $F(x)=[f(x)-f(a)]\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}$ 则 $F'(x)=[f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}]\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}$

$$F'(c)=-\left(\frac{f(c)-f(a)}{b-a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{b-a}}=-\frac{F(c)}{b-a}$$

由 Lagrange 中值定理得 $\exists\eta\in(a,b)$,

$$F'(\eta)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}=\frac{F(c)}{c-a}$$

因为 $F'(\eta)$ 与 $F'(c)$ 异号，所以由达布定理知，$\exists\eta\in(a,b)$

$$F'(\eta)=0$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$$

定理 1.4.1 (Flett 中值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可微，$f'(a)=f'(b)$，证明: $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

证明: 设

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & a\le x<b\\ f'(b), & x=b\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f'(a), & x=a\\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\le b\end{cases}$$

又令 $F(X)=g(x)-h(x)$，则有

$$F(a)=g(a)-h(a)=f'(a)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}$$

$$F(b)=g(b)-h(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)$$

易见 $F(a)F(b)$ 异号，所以存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$f(\eta)=g(\eta)-h(\eta)=0$$

即

$$g(\eta)=\frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

则存在 $\xi\in(\eta,b)$ 使得

$$g'(\xi)=\frac{(\xi-a)f'(\xi)-[f(\xi)-f(a)]}{(\xi-a)^2}$$

即

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

命题 1.4.2 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$f(0)=f(1)$. 证明：$\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists\xi\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$，使得

$$f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$$

证明： 设 $F(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right),\quad\forall n\in\mathbb{N}$

若不存在 ξ_n，使得 $f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\dfrac{1}{n}\right)$

不妨设 $F(x)$ 恒大于 0，则有

$$f(1)=f(0)>f\left(\frac{1}{n}\right)>f\left(\frac{2}{n}\right)>\cdots>f(1)$$

与题设矛盾，所以存在 $\xi_n\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$

$$f(\xi_n)=f\left(\xi_n+\frac{1}{n}\right)$$

命题 1.4.3 设 f 与 g 是两个周期函数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-g(x))=0$. 证明：

$$f=g$$

证明： 设 f 与 g 的周期分别为 T 和 S，则对任意 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
f(x)-g(x)&=\lim_{n\to\infty}f(x)-g(x)\\
&=\lim_{n\to\infty}[(f(x+nT)-g(x+nT))+\\
&\quad(g(x+nT+nS)-f(x+nT+nS)+f(x+nS)-g(n+nS))]\\
&=0+0+0\\
&=0
\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=g(x)$$

命题 1.4.4 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=+\infty$，又设 f 的最小值 $f(a)<a$，证明:
$f(f(x))$ 至少有两个最小值点。

证明: 由题设知，$f(x)$ 的至于为 $[f(a),+\infty]$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$
因为 $f(a)<a$，所以存在 x_1，x_2，$x_1\neq x_2$，$f(x_1)=a=f(x_2)$
显然 $f(f(x))\geq f(a)=f(f(x_1))=f(f(x_2))$,
所以 $f(f(x))$ 至少有两个最小值点。

命题 1.4.5 (Cauthy 方程) 设 f 对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，满足方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明:
(1) 若 f 在某一点 x_0 处连续，则 $f(x)=f(1)x$
(2) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 单调，也有 $f(x)=f(1)x$

证明: (1) 因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$
因为 $f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x),\quad \forall x$，所以 $f(x)=-f(-x)$
易知 $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$，由数学归纳法易证

$$f(n)=nf(1)$$

对任意有理数 $q=\dfrac{m}{n}$，m，$n\in\mathbb{N}$，由于 $f(1)=f\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\right)$，故 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n}f(1)$，从而

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1)$$

则只需证 $f(x)=f(1)x,\quad x\notin\mathbb{Q}$
f 在 x_0 处连续，故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，也即

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

因为 $f(x+\Delta x)=f(x_0)+f(\Delta x)$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\Delta x)=0$$

对于任意 $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)&=\lim_{\Delta x\to 0}(f(x)+f(\Delta x))\\&=f(x)+0\\&=f(x)\end{aligned}$$

所以 f 在 $\mathbb{R}$ 连续。
设 p_0 为任意无理数，则存在有理数列 $\{p_n\}\to p_0(n\to\infty)$

$$f(p_0)=\lim_{n\to\infty} f(p_n)=\lim_{n\to\infty} p_nf(1)=p_0f(1)$$

(2) 不妨设 f 在 $\mathbb{R}$ 上单调增加。$\forall x\in\mathbb{R}$，取有理数列 $\{x_n'\}$，$\{x_n''\}$，
使 $x_n'f(1)<x<x_n''$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}x_n''=x$$

由 f 单调增加的条件,

$$x_n'f(1)<f(x_n')\le f(x)\le f(x_n'')=x_n''f(1)$$

令 $n\to+\infty$,

$$xf(1)\le f(x)\le xf(1)$$

即

$$f(x)=xf(1)$$

命题 1.4.6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 上可导，证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在相异的两点 ξ，η，使

$$f'(\xi)f'(\eta)=\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2$$

证明： 令 $k=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$h(x)=[f(x)=f(a)]^2-k^2(x-a)^2$

$$h'(x)=2[f(x)-f(a)]f'(x)-2k^2(x-a)$$

因为 $f(a)=f(b)=0$，由 Rolle 中值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$h'(\xi)=0$$

即

$$f'(\xi)=k^2\cdot\frac{\xi-a}{f(\xi)-f(a)}$$

又由 Lagrange 中值定理知

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(\eta),\quad \eta\in(a,\xi)$$

所以

$$f'(\xi)f'(\eta)=\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2$$

命题 1.4.7 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可微，证明：$\exists\xi$，$\eta\in(0,1)$，使

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi)$$

其中，$c\in(0,1)$

证明： 令 $F(x)=x^2f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi)$，则有

$$F(1)-F(0)=c^2f(1)+(1-c^2)f(0)$$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由介值定理得，$\exists\xi\in(0,1)$

$$f(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F(1)-F(0)$$

又由 Lagrange 中值定理知，$\exists\xi\in(0,1)$

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)$$

即

$$2\eta f(1)+(c^2-1)f'(\eta)=f(\xi)$$

命题 1.4.8 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可微，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{2}$，证明：$\exists\xi,\eta\in(0,1)$，$\xi\neq\eta$，使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

证明： 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2$，则 $F(0)=F(1)=0$

若 $F\left(\frac{1}{2}\right)=F(0)=F(1)=0$，则存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，$\xi\neq\eta$

$$F'(\xi)+F'(\eta)=0$$

即

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

若 $F\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，不妨设 $F\left(\frac{1}{2}\right)>0$

由 Lagrange 中值定理，$\exists\xi,\eta\in(0,1)$，$\xi\neq\eta$

$$\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=F'(\xi)=-2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\eta)=2F\left(\frac{1}{2}\right)$$

则

$$F'(\xi)+F'(\eta)=0$$

即

$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi+\eta$$

命题 1.4.9 设函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可微，且 $f(0)=g(0)=f(1)=0$，$g'(x)\neq 0$，证明：$\exists \xi,\eta\in(0,1)$，$\xi<\eta$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

证明： $g(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，则存在 $\alpha\in(0,1)$，使得

$$g(\alpha)=\frac{1}{2}[g(1)+g(0)]$$

由 Lagrange 中值定理得，$\exists \xi,\eta\in(0,1)$

$$\frac{f(\alpha)-f(0)}{g(\alpha)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(1)-f(\alpha)}{g(1)-g(\alpha)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

则

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$$

命题 1.4.10 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 二阶可微，且满足 $f(0)=2$，$f'(0)=-2$，$f(1)=1$，证明：$\exists \xi\in(0,1)$，使得

$$f(\xi)+f'(\xi)+f''(\xi)=0$$

证明： 定义函数 $g(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+f'(x)$，则

$$g'(x)=f(x)f'(x)+f''(x)$$

因为 $g(0)=0$，所以只需证明 $\exists \eta\in(0,1]$，使得 $g(\eta)=0$

(1) 若 f 无零点，则令

$$h(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{f(x)}$$

因为 $h(0)=h(1)=-\frac{1}{2}$，所以存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$$h'(\eta)=0$$

又由 $g(x)=f^2(x)h'(x)$，所以

$$g(\eta)=0$$

(2) 若 f 至少有一个零点, 令 z_1 为第一个零点, z_2 为最后一个零点, 由题设知, $0<z_1\leq z_2<1$ 函数 f 在区间 $[0,z_1]$，$[z_2,1]$ 上是正的，这表明

$$f'(z_1)\leq 0,\quad f'(z_2)\geq 0$$

所以

$$g(z_1) = f'(z_1) \le 0, \quad g(z_2) = f'(z_2) \ge 0$$

则存在 $\eta \in [z_1, z_2]$，使得

$$g'(\eta) = 0$$

命题 1.4.11 设函数 $f(x)$ 可导,曲线 $y = f(x)$ 上存在三点 $(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$，$(x_3, f(x_3))$ 共线，其中 $0 < x_1 < x_2 < x_3$，证明：$\exists \xi$，$\eta \in (x_1, x_3)$，使得

$$\xi f'(\eta) - f(\xi) = \eta f'(\eta) - f(\eta)$$

证明： 若 $\xi = \eta$ 则结论显然成立。
$\xi \ne \eta$ 时，问题等价于

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

因为三点共线，所以存在 α，$\beta \in (x_1, x_3)$，$\alpha \ne \beta$

$$f'(\alpha) = f'(\beta)$$

又由 Flett 中值定理得，$\exists \xi, \eta \in (x_1, x_3)$

$$f'(\eta) = \frac{f(\eta) - f(\alpha)}{\eta - \alpha} = \frac{f(\eta) - f(\xi)}{\eta - \xi}$$

命题 1.4.12 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 f 在 $(0,1)$ 上可微，$f(0) = 0, f(1) = 1$，证明: 存在点列 $\{\alpha_k\}$，使得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_k)} = n, \quad n \in \mathbb{N}$$

证明： 由介值定理知，存在 n 个实数 b_0，$b_1, \cdots, b_n$，其中

$$0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = 1$$

且

$$f(b_i) = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

由 Lagrange 中值定理知，对于任意区间 $[b_i,\ b_{i+1}]$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$\exists \alpha_i \in (b_{i-1},\ b_i)$

$$f'(\alpha_i) = \frac{f(b_i) - f(b_{i-1})}{b_i - b_{i-1}} = \frac{1}{n(b_i - b_{i-1})}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(\alpha_i)} = n \sum_{i=0}^{n} (b_i - b_{i-1}) = n(b_n - b_0) = n$$

命题 1.4.13 设 f 在 $[a,b]$ 上 $n+1$ 阶可微，$f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$，$n\in\mathbb{N}$，在 $[a,b]$ 上有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n}{n!}$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi-x_0}{x-x_0}=\frac{1}{n+1}$$

证明： 分别将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开为 $n+1$ 阶 Peano 余项的 Taylor 公式和 $n-1$ 阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}+O(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n}{n!}$$

两式相减有

$$\frac{(f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0))(x-x_0)^n}{n!}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}+O(x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(x_0)}{\xi-x_0}\frac{\xi-x_0}{x-x_0}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}+O(x-x_0)^{n+1}$$

两边对 x 取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi-x_0}{x-x_0}=\frac{1}{n+1}$$

命题 1.4.14 设 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 有任意阶导数，并且对于任意 $k\in\mathbb{N}$，存在 $C_k>0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|x|^k|f(x)|+|f^{(k)}(x)|\right)\leq C_k$$

证明：对于任意 k, $l\in\mathbb{N}$，存在 $C_{k,l}>0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^k|f^{(l)}(x)|\leq C_{k,l}$$

证明： 观察到，问题可以约化为证明：对于任意 $k\in\mathbb{N}^+$，存在 $D_k>0$，对于任意绝对值大于 2 的数 $x\in\mathbb{R}$，成立

$$|x|^k|f'(x)|\leq D_k$$

任意给定 $\varepsilon>0$，由 Taylor 定理知，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=f'(x)\varepsilon+\frac{1}{2}f''(x+\theta\varepsilon)\varepsilon^2$$

于是我们有

$$|f'(x)|\leq\frac{|f(x+\varepsilon)|+|f(x)|}{\varepsilon}+\frac{1}{2}|f''(x+\theta\varepsilon)|\varepsilon$$

将 $\varepsilon = \dfrac{1}{|x|^k}$ 代入上式，并利用已知条件，得到

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot |x|^{2k}(|f(x)| + |f(x+|x|^{-k})|) \\
&\leq \frac{C_2}{2}|x|^{-k} + C_{2k}|x|^{-k} + |x|^{-k} \cdot (2|x+|x|^{-k}|)^{2k}|f(x+|x|^{-k})| \\
&\leq \left(\frac{C_2}{2} + (2^{2k}+1)C_{2k}\right)|x|^{-k}
\end{aligned}$$

取 $D_k = \dfrac{C_2}{2} + (2^{2k}+1)C_{2k}$，即证。

§5 数项级数

命题 1.5.1 设 $\{a_n\}$ 是严格单调增加的实数列，且 $a_n \leq n^2 \ln n$，$n \in \mathbb{N}$，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$$

证明： 反证法。假设级数收敛，则由 $a_1 \leq 1^2 \ln 1 \leq 0$，得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}a_n} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(\ln 2\ k - \frac{a}{4k})} \\
&\leq +\infty
\end{aligned}$$

这意味着 $\exists k \in \mathbb{N}$，使

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < \frac{1}{4(\ln 2\ k - \frac{a}{4k})}$$

同时，由 Cauthy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right)\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} a_{n+1} - a_n\right) \\
\geq &\left(\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} 1\right)^2 = (2^k - 2^{k-1})^2 = 4^{k-1}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{4(\ln 2\ k-\frac{a}{4k})} &> \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\\ &\le \frac{4^{k-1}}{\sum\limits_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}(a_{n+1}-a_n)}\\ &= \frac{4^{k-1}}{a_{2^k}-a^{2^{k-1}}}\\ &\ge \frac{4^{k-1}}{a_{2^k}-a_1}\end{aligned}$$

其中

$$a_{2^k}-a_1>4^k\left(\ln 2\ k-\frac{a_1}{4k}\right)=4^k\ln 2^k-a_1$$

则

$$a_{2^k}>(2^k)^2\ln 2^k$$

与题设矛盾。

命题 1.5.2 设 $\{a_n\}$ 使单调减少收敛于 0 的实数列，证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}<\infty$$

当且仅当 $a_n=O\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\right)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})\ln n$

证明: 令

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n},\ T_N=\sum_{n=1}^{N}(a_n-a_{n+1})\ln n$$

因为 $\{a_n\}$ 单调减少收敛于 0，且 S_n，T_n 单调增加，则假设 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$ 收敛，S, T 分别为其极限，注意到

$$\ln n-\ln n-1=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\in\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right)$$

(1) 如果 $S_N<\infty$，$N\ge 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
a_N \ln N &\le a_N \sum_{n=2}^{\infty} [\ln n - \ln (n-1)] \\
&\le a_N \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \\
&\le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} \\
&= S_{n-1} \\
&\le S
\end{aligned}
$$

这表明 $a_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$，同时

$$
\begin{aligned}
T_N &= \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) \ln n \\
&= \sum_{n=2}^{N} a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N+1} a_n \ln (n-1) \\
&= \sum_{n=2}^{N} [a_n \big(\ln n - \ln(n-1) \big)] - a_{N+1} \ln N \\
&\le \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n-1} \\
&\le \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n-1}}{n-1} \\
&= S_{n-1} \\
&\le S
\end{aligned}
$$

即 $T < \infty$

(2) 如果 $T < \infty$，且 $a_N \ln N \le M$，$N \ge 2$ 时

$$
\begin{aligned}
S_N - a_1 &= \sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{n} \\
&\le \sum_{n=2}^{N} a_n \big(\ln n - \ln(n-1) \big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{N} a_n \ln n - \sum_{n=2}^{N-1} a_{n+1} \ln n \\
&= \sum_{n=2}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) \ln n + a_N \ln N \\
&= T_{N-1} + a_N \ln (N+1) \\
&< T + M
\end{aligned}
$$

即 $S < \infty$

命题 1.5.3 对 $N \in \mathbb{N}$，定义

$$S_n = 1 + \frac{n-1}{n+2} + \frac{n-2}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2}$$

证明: 设数列 $\{a_k\}$，其中 a_k 为 S_n 中的第 k 项，则当 $k \geq 2$ 时有

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(n+2)(n+3)\cdots(n+k)} \\
&= \frac{\dfrac{(n-1)!}{(n-k)!}}{\dfrac{(n+k)!}{(n+1)!}} = \frac{\dfrac{(2n)!(n-1)!}{(n-k)!}}{\dfrac{(2n)!(n+k)!}{(n+1)!}} = \frac{\dfrac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}}{\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}} \\
&= \frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}}
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k}}{\binom{2n}{n-1}} \\
&= \frac{2^{2n} - \binom{2n}{n}}{2\binom{2n}{n-1}} \\
&= \frac{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}{2(2n)!} - \frac{n+1}{2^n}
\end{aligned}
$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{n+1}{n} \frac{2^{2n}(n!)^2}{2(2n)!\sqrt{n}} - \frac{n+1}{2^n\sqrt{n}}$$

由 Waills 公式知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

命题 1.5.4 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}$$

证明： 令 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则有 $a_n=b_n-b_{n-1}$.

再令 $b_n=0$，于是原级数部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2a_k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}$ 有

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2(b_k-b_{k-1})}{b_k^2}\\
&\le\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2(b_k-b_{k-1})}{b_kb_{k-1}}+\frac{1}{a_1}\\
&\le\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{b_{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{b_k}\\
&=\frac{5}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k+1}{b_k}\\
&=\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{b_k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{b_k}\\
&=\frac{5}{a_1}+2\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{b_k}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}\right)^2&=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\sqrt{a_k}}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\right)^2\\
&\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a_k}{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\\
&=S_nT_n
\end{aligned}$$

其中 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$

则有

$$\begin{aligned}
S_n&\le\frac{5}{a_1}+2\sqrt{S_nT_n}+T_n\\
&\le\frac{5}{a_1}+2\sqrt{S_nT}+T
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_n - 2\sqrt{S_nT} + T &\le \frac{1}{a_1} + 2T \\
(\sqrt{S_n} - \sqrt{T})^2 &\le \frac{1}{a_1} + 2T \\
S_n - \sqrt{T} &\le \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T} \\
S_n &\le \sqrt{T} + \sqrt{\frac{1}{a_1} + 2T}
\end{aligned}
$$

所以 S_n 有上界，则原级数收敛。

命题 1.5.5 设 $a_n > 0$，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$$

收敛

证明:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\
&= \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\
&\quad \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_k)} \\
&\le \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} + \\
&\quad \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-1})} \\
&\le \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_{k-2})} \\
&\cdots \\
&\le \frac{a_1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

部分和有上界，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$ 收敛。

命题 1.5.6 $a_n > 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明:

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}$ 收敛，且和为

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

证明： (1) 设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，特别地 $S_0 = 0$，则

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k}{n} \\
&= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1})}{n} \\
&= \frac{nS_n - (S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1})}{n} \\
&= S_n - \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}
\end{aligned}$$

由 Cauthy 命题知,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$$

(2)

$$\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n + (n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}$$

设 $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，则原级数有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\
=& \sum_{k=1}^{n} b_k - b_{k+1} + a_{k+1} \\
=& \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} + b_1 + b_{n+1} \\
=& S_n - a_1 + b_1 - b_{n+1} \\
=& S_n - b_{n+1}
\end{aligned}$$

取极限 $n \to \infty$，则原级数收敛，且和为 S。

命题 1.5.7 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

收敛。

证明： (1) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增加，则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}\leq a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}\leq na_n$$

因此有不等式

$$\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}+\frac{2n1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\leq\frac{2n-1}{a_n}+\frac{2n}{na_n}\leq\frac{4}{a_n}$$

所以部分和有上界，级数收敛。

(2) 对于一般情况，将 $\{a_n\}$ 按照升序排列，重排后的数列可记为 $\{b_n\}$，收敛的正项级数重排后仍收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{b_n}$ 收敛。由 (1) 知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$ 收敛，同时可以看出，有

$$\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leq\frac{n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛。

命题 1.5.8 证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n!\pi x)$

(1) 在 $x=\mathrm{e}$ 处收敛。

(2) 在任意有理点收敛。

(3) 在任意区间内存在发散点。

证明： (1)

$$\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}+O(\frac{1}{(n+1)!})$$

$$n!\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{n-2}=\frac{n!}{k!}+(n+1)+O(\frac{1}{n+1})+\frac{1}{n+1}$$

则有

$$\begin{aligned}\sin(n!\pi x)&=\sin\left[\sum_{k=0}^{n-2}=\frac{n!}{k!}+(n+1)+O(\frac{1}{n+1})+\frac{1}{n+1}\right]\\&\sim(-1)^{n+1}\frac{\pi}{n+1}\end{aligned}$$

$\sum\limits_{n=o}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n+1}$ 显然收敛，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n!\pi x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n!\pi\mathrm{e})$$

收敛。

(2) 有理点 $x=\dfrac{p}{q}$，则当 $n\geq q$ 时，

$$n!\pi x=n!\pi\frac{p}{q}=k\pi,\quad k\in\mathrm{Z}$$

则

$$\sin(n!\pi x)=0,\ n\geq q$$

显然 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n!\pi x)$ 收敛。

(3) 注意到 $\forall x\in[0,1]$，可以被表示为如下形式

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!},\quad a_k\in\{0,1,\cdots,k-1\}$$

又由 x 的展开形式得

$$\sin(n!\pi x)=(-1)^{na_{n-1}+a_n}\sin\left(\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)$$

由观察得

$$|\sin(n!\pi x)|=\left|\sin\left(\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\right)\right|$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{n+k}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\leq\frac{a_{n+1}+1}{n+1}$$

将 a_k 看作在 $\{0,1,\cdots,k-1\}$ 上的随机变量，是 x 的函数，且 a_k 相互独立，所以由 Borel - Cantelli 定理知

$$\sum_{k=2}^{\infty}P\left(\left|\frac{a_k}{k}-\frac{1}{2}\right|\right)=+\infty$$

则 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{a_k}{k}<\dfrac{1}{4}$，对无限 $k\in\mathbb{N}$ 成立

$$\liminf_{n\to\infty}|\sin(n!\pi x)|\geq\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

对几乎所有 $x\in[0,1]$ 成立，又 $x\in M$ 不满足上式，其中 M 为收敛点集合，所以 M 为勒贝格集，不包含任何区间。

命题 1.5.9 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 满足 $f(x)>0$，$f''(x)\le 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 证明极限

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}$$

收敛并求其值。

命题 1.5.10 由 $f''(x)\le 0$ 知，$f'(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，容易看出 $f'(x)$ 恒正。事实上若存在 x_0，$f'(x_0)\le 0$，则由单调性知

$$f'(x)\le f'(x_0),\ f(x)\le f(x_0),\quad \forall x\ge x_0$$

与 $f(+\infty)=+\infty$ 矛盾。因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 严格单调增加。设

$$S_{2n}(s)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{f^{(s)}(2k)}-\frac{1}{f^{(s)}(2k-1)}\right)$$

注意和式中每个括号都是负的且级数通项收敛于 0，只需要证明对固定的 $s>0$，$S_{2n}(s)$ 有下界，则

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n}(s)$$

存在且等于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)}$$

由 Lagrange 中值定理知,

$$\frac{1}{f^{(s)}(2k)}-\frac{1}{f^{(s)}(2k-1)}=\frac{-sf'(\xi)}{f^{(s+1)}(\xi)},\quad \xi\in(2k-1,2k)$$

注意到 $f(x)$ 单调增加而 $f'(x)$ 单调减少，则有

$$\frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)(2k-1)}}\le\frac{1}{f^{(s)}(2k)}-\frac{1}{f^{(s)}(2k-1)}\le\frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{-sf'(2k-1)}{f^{(s+1)(2k-1)}}\le S_{2n}(s)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{-sf'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}$$

利用面积原理的思想来估计左右两端。由单调性知 $k\ge 2$ 时

$$\frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)}\le\frac{1}{2}\int_{2k-3}^{2k-1}\frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{f'(2k-1)}{f^{(s+1)}(2k-1)}\le\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left.\frac{-1}{sf^{(s)}(t)}\right|_{1}^{+\infty}=\frac{1}{2sf^{(s)}(1)}$$

$S_{2n}(s)$ 有下界故极限存在。再次利用面积原理知 $k\leq 1$ 时

$$\frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}\geq\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2}\frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)}\mathrm{d}t$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(2k)}{f^{(s+1)}(2k)}\geq\frac{1}{2}\int_{2}^{+\infty}\frac{f'(t)}{f^{(s+1)}(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left.\frac{-1}{sf^{(s)}(t)}\right|_{2}^{+\infty}=\frac{1}{2sf^{(s)}(2)}$$

$$-s\left(\frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)}+\frac{1}{2sf^{(s)}(1)}\right)\leq\lim_{n\to+\infty}S_{2n}(s)\leq -s\frac{1}{2sf^{(s)}(2)}$$

由前面说明就有

$$-s\left(\frac{f'(1)}{f^{(s+1)}(1)}+\frac{1}{2sf^{(s)}(1)}\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^{(s)}(n)}\leq -s\frac{1}{2sf^{(s)}(2)}$$

而上市左右两端在 $s\to 0^+$ 时的极限都是 $-\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{s\to o^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{f^s(n)}=-\frac{1}{2}$$

§6 黎曼积分

命题 1.6.1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且对任意满足 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 的连续函数 $g(x)$ 有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$$

证明：$f(x)$ 是常值函数。

证明： 设 $g(x)=f(x)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

因为

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$$

又有

$$\begin{aligned}\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b g(x)\left[f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\&=0-0\\&=0\end{aligned}$$

则知 $g(x)=0$，即

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.2 设 $f(x)\in\mathbb{C}[-1,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$$

证明： **(核函数方法)** 设 $K_n(x)=\dfrac{(1-x^2)^n}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}$，显然有

$$\int_{-1}^1 K_n(x)\mathrm{d}x=1$$

且 $x\neq 0$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}K_n(x)=0$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$n>N$ 时有

$$|K_n(x)|<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|x|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}\right|\\
=&\left|\int_{-1}^1 K_n(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^1 f(0)K_n(x)\mathrm{d}x\right|\\
\leq&\int_{-1}^1|f(x)-f(0)|K_n(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(0)|K_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{-\delta}|f(x)-f(0)|K_n(x)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1}|f(x)-f(0)|K_n(x)\mathrm{d}x\\
\leq&\varepsilon+4M\varepsilon
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-1}^1 f(x)(1-x^2)^n\mathrm{d}x}{\int_{-1}^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x}=f(0)$$

命题 1.6.3 $0<a<b$，$f:[a,b]\to[-1,1]$，满足 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，证明:

$$\int_a^b\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\leq\ln\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

证明:

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{f(x)}{x}+kf(x)\mathrm{d}x\\
=&\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{x}+k\right)\mathrm{d}x\\
\leq&\int_a^b |f(x)|\left|\frac{1}{x}+k\right|\mathrm{d}x\\
\leq&\int_a^b \left|\frac{1}{x}+k\right|\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

其中 k 为实数，显然当 $k=-\dfrac{2}{a+b}$ 时，上式积分最小，即

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x &\leq \int_a^b \left|\frac{1}{x}+k\right|\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b \left|\frac{1}{x}-\frac{2}{a+b}\right|\mathrm{d}x\\
&=\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{x}-\frac{2}{a+b}\mathrm{d}x+\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{2}{a+b}-\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\
&=\ln\frac{(a+b)^2}{4ab}
\end{aligned}
$$

命题 1.6.4 设函数 f 为 $[0,1]$ 上的单调增加函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明:

$$\int_0^1 f(f(x))\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 设 f 与 $y=x$ 的交点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$
任意区间 $[x_i,x_{i+1}]$，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 上，若 $f(x)<x$，则

$$f(f(x))\leq f(x)$$

即

$$\int_{x_i}^{x_{i+1} f(f(x))}\mathrm{d}x \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1}))\mathrm{d}x \leq 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

若 $f(x)\geq x$，则 $f(f(x))\geq f(x)\geq x$

$$2\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \geq 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\mathrm{d}x = x_{i+1}^2-x_i^2$$

$$2\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x))\mathrm{d}x \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(f(x_{i+1}))\mathrm{d}x = x_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$$

则

$$\int_0^1 f(f(x))\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.5 设 f,g 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的连续函数，且 f 单调增加，证明:

$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 设 $h(x)=f(x)-x$，$h(t)=\max\limits_{x\in[0,1]} h(x)=f(t)=t$

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\\ \le\ & f(t)-t-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\\ =\ & \int_0^1 [f(t)-f(x)]\mathrm{d}x - t\\ \le\ & t-t=0\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.6 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \ge \int_a^x g(t)\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b]$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

证明:

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$$

证明:

$$\begin{aligned}\int_a^b x(f(x)-g(x))\mathrm{d}x &= a\int_a^\eta (f(x)-g(x))\mathrm{d}x + b\int_\eta^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\\ &= a\int_a^\eta (f(x)-g(x))\mathrm{d}x - b\int_a^\eta (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\\ &= (a-b)\int_a^\eta (f(x)-g(x))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中 $\eta\in[a,b]$。由题设知，$\int_a^\eta (f(x)-g(x))\mathrm{d}x<0$，则

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.7 设 $f:[0,1]\to\mathrm{R}$ 是连续函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，证明:

$$2\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$$

证明:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \left(\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\le \left(\int_0^1 \frac{(x-1)^2}{1-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= (2\ln 2-1)\left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

所以

$$2\left(\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 (1-x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.8 设 f 是 $[-1,1]$ 上的连续函数，证明:

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明: 令 $M=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$，$g(x)=f(x)-M$，则有

$$\int_{-1}^1 \lambda g(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f^2((x))\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 (g(x)+M)^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x)+M^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 g^2(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

因为 $\int_{-1}^1 Mx\mathrm{d}x=0$，所以

$$\int_{-1}^1 g^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^1 xg(x)\mathrm{d}x\right)^2 \ge \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

则有

$$\int_{-1}^1 f^2(x)\mathrm{d}x \ge \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\int_{-1}^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

命题 1.6.9 设 $f:[0,1]\to\mathrm{R}$ 是有连续导数的可微函数，且 $f(1)=0$，证明:

$$4\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x \ge \int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x + \left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)$$

证明： 令 $c=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，不失一般性地，我们假设

$$\int_0^1 (f(x)+c)^2\mathrm{d}x>0$$

否则 $f(x)\equiv -c$，即

$$f(x)\equiv 0$$

此时不等式显然成立。应用分部积分法有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (f(x)+c)\mathrm{d}x\\ &=\left[x(f(x)+c)^2\right]\Big|_0^1-2\int_0^1 x(f(x)+c)-f'(x)\mathrm{d}x\\ &=c^2+2\int_0^1 x(f(x)+c)-f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $f(1)=0$，应用 Jensen 不等式得

$$\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x-c^2\le 2\sqrt{\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_0^1 x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x}$$

$$\sqrt{\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x}-\frac{c^2}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x}}\le 2\sqrt{\int_0^1 x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x}$$

两边平方得

$$\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x-2c^2+\frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x}}\le 4\int_0^1 x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x&=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+2c\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+c^2\\ &=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+3c^2\\ &=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x+3\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2+\frac{c^4}{\sqrt{\int_0^1 |f(x)+c|^2\mathrm{d}x}}\le 4\int_0^1 x^2\left(f'(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

由 $\int_0^1 (f(x)+c)^2\mathrm{d}x>0$ 得

$$4\int_0^1 |f'(x)|^2\mathrm{d}x\ge\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x+\left(\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x\right)$$

命题 1.6.10 设 f 是定义在 $[0,1]$ 上的连续可微函数，证明:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明: 设 $x_0 \in [0,1]$，且

$$|f(x_0)| \le |f(x)|, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

则有

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(x_0) + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = |f(x_0)| + \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x$$

由 $|f(x_0)| \le |f(x)|$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 得

$$|f(x_0)| \le 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x$$

又有

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(x)|\mathrm{d}x$$

对于 $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$，有不等式

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le 2\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

所以有

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

命题 1.6.11 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续实值函数，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，证明: $\exists c \in (0,1)$

$$c^2 f(c) = \int_0^c (x^2+x)f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 令

$$F(x) = \int_0^x [t^2 + (1-x)t]f(t)\mathrm{d}t$$

因为 f 在 $[0,1]$ 上连续，则 F 在 $[0,1]$ 上存在最大值，最小值。设

$$M = \max f(x) = f(x_M), \quad m = \min f(x) = f(x_m)$$

由题设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则不妨设 f 不恒等于 0，否则不等式显然成立。
所以

$$M>0,\quad m<0$$

令 $a=x_M$，有

$$F'(a)=Mx_M-M\int_0^{x_M}t\mathrm{d}t=Mx_M\left(1-\frac{x_M}{2}\right)>0$$

同理可知 $\exists b\in(0,1),F'(b)<0$
由介值定理知 $\exists d\in(a,b)$，使 $F'(d)=0$
又由 Rolle 中值定理知，$\exists c\in(0,d)$

$$F(c)-F(0)=cF'(c)$$

即

$$\int_0^c[t^2+(1-c)t]f(t)\mathrm{d}t=c^2f(c)-c\int_0^c tf(t)\mathrm{d}t$$

$$c^2f(c)=\int_0^c(x^2+x)f(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.12 设 f 是 $[0,1]$ 上的连续可微函数，$b>0$，且 $f(0)=0$，证明:

$$\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le 4\int_0^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

证明： 应用分部积分法，有

$$\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x=-\left(\frac{f^(x)}{x^2}\bigg|_0^b-\int_0^b\frac{2f'(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f'(x)f(x)=0$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{f^2(b)}{b}+2\int_0^b\frac{2f'(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x\\&\le 2\int_0^b\frac{2f'(x)f(x)}{x}\mathrm{d}x\\&\le 2\left(\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^b\frac{f^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x\le 4\int_0^b(f'(x))^2\mathrm{d}x$$

命题 1.6.13 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是可微函数，且对于常数 k，有

$$|f'(x)-f'(y)|\le k|x-y|$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}$，证明:

$$\left(f'(x)\right)^2<2kf(x)$$

证明： 由题设知 f' 是连续函数，因此 f' 黎曼可积，对于 $d\ge 0$，有

$$\begin{aligned}0<f(x+d)&=f(x)+\int_x^{x+d}f'(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+df'(x)+\int_x^{x+d}(f'(t)-f'(x))\mathrm{d}t\\&\le f(x)+df'(x)+\int_x^{x+d}k(t-x)\mathrm{d}t\\&=f(x)+df'(x)+\frac{1}{2}kd^2\end{aligned}$$

对于 $d<0$，有

$$\begin{aligned}\int_x^{x+d}f'(t)\mathrm{d}t&=-\int_{x+d}^{x}f'(t)\mathrm{d}t\\&\le-\int_{x+d}^{x}k(t-x)\mathrm{d}t\\&=\frac{k}{d^2}\end{aligned}$$

特别地，令 $d=-\frac{f'(x)}{k}$，有

$$0<f(x)-\frac{\left(f'(x)\right)^2}{k}+\frac{\left(f'(x)\right)^2}{2k}=f(x)-\frac{\left(f'(x)\right)^2}{2k}$$

所以

$$\left(f'(x)\right)^2<2kf(x)$$

命题 1.6.14 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续实值函数，且

$$\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$$

证明：函数

$$g(x)=f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^tf(t)\mathrm{d}t$$

满足

$$\int_0^{+\infty}g^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$$

证明： 由题设得

$$f(x)-g(x)=2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$$

则有

$$(f(x)-g(x))'=-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t+2f(x)=f(x)+g(x)$$

应用 Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-w}\left|\int_0^w \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right| &\le \mathrm{e}^{-w}\left|\int_0^{\frac{w}{2}} \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right|+\mathrm{e}^{-w}\left|\int_{\frac{w}{2}}^w \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\le \mathrm{e}^{-w}\left(\int_0^{\frac{w}{2}} \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{w}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+\mathrm{e}^{-w}\left(\int_{\frac{w}{2}}^w \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{w}{2}}^w f^2(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \mathrm{e}^{-\frac{w}{2}}\int_0^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t+\int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} f^2(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

则有

$$\lim_{w\to\infty}\mathrm{e}^{-w}\int_0^w \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t=0$$

则 $\dfrac{1}{2}(f(x)-g(x))^2$ 在 $[0,a]$ $(\forall a\in \mathrm{R}^+)$ 上必定有界连续，则

$$\begin{aligned}
\int_0^w f^2(x)-g^2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^w \left(\frac{(f(x)-g(x))^2}{2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{(f(x)-g(x))^2}{2}\right|_0^w \\
&= 2^{-2w}\left(\int_0^w \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right)^2
\end{aligned}$$

由上式可知

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to\infty}\int_0^w f^2(x)-g^2(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} f^2(x)-g^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{w\to\infty} 2^{-2w}\left(\int_0^w \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.15 设 f 是周期为 T 的连续函数，且 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$，证明:

$$\int_0^T |f(x)|^2\mathrm{d}x \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

证明： 由题设知，f 可以展开为 Fourier 级数，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

易知 $a_0=0$，又

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi}{T}b_n\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)-\frac{2n\pi}{T}a_n\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

由 Parseval 恒等式知

$$\int_0^T |f'(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2\pi^2}{T^2}(a_n^2+b_n^2)\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi^2}{T^2}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\int_0^T |f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

所以

$$\int_0^T |f(x)|^2\mathrm{d}x \le \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

命题 1.6.16 设 f 在 $[0,a](a>0)$ 上有可积的导函数，证明:

$$|f(0)|\le\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明： 对任意 $x\in[0,a]$，有

$$\begin{aligned}f(x)-f(0)&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\\ f(0)&=f(x)-\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(0)|&\le|f(x)|+\left|\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\le|f(x)|+\int_0^x|f'(t)|\mathrm{d}t\\ &\le|f(x)|+\int_0^a|f'(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

两边对 x 从 0 到 a 积分，得

$$a|f(0)| \leq \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + a\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$

即

$$|f(0)| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$

命题 1.6.17 设 f 在 $[0,1]$ 上有可积的导函数，证明:

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x,\ \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}$$

证明： 若

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

则不等式显然成立若

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| < \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一定变号，所以存在 $x_0 \in [0,1]$，$f(x_0)=0$，则

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f(x_0)| \\
&= \left|\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{x_0}^x |f'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

则

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x$$

命题 1.6.18 函数 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

证明：在 $[0,1]$ 上存在不同的两点 ξ，η，使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)(f(\eta) - f(\xi))$$

证明： 反证法。设 $\forall x, y \in [0,1]$，$x \neq y$，有

$$f'(x) \neq g'(x)(f(y) - f(x))$$

不妨设

$$f'(x) > g'(x)(f(y) - f(x))$$

否则由 Darboux 定理知，必存在不同的两点 x，y 使得

$$f'(x) = g'(x)(f(y) - f(x))$$

令 $y \to x$，有

$$\lim_{y \to x} f'(x) = f'(x) \geq \lim_{y \to x} g'(x)(f(y) - f(x)) = 0$$

由 x 的任意性知，$f'(x) \geq 0$，$\forall x \in [0,1]$，则由题设

$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

然而由于 $f'(x) \geq 0$

$$2\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\mathrm{d}x$$

与假设矛盾。得证。

命题 1.6.19 设 $f'(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，证明:

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

证明： 设 x，x_0 是 $[a,\ b]$ 上两点，则有

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\begin{aligned}
|f(x_0)| &= \left| f(x) - \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leq |f(x)| + \left| \int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t \right| \\
&\leq |f(x)| + \int_{x_0}^x |f'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq |f(x)| + \int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

两边对 x 从 a 到 b 积分得

$$(b-a)|f(x_0)| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x + (b-a)\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$$

即

$$|f(x_0)| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

由 x_0 的任意性知

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$$

定理 1.6.1 证明:

$$\oiiint_{\Omega} f(ax+by+cz)\mathrm{d}\Omega = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$$

其中，积分区域 Ω： $x^2+y^2+z^2\le 1$， $\delta=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

证明： 设平面 P_u

$$ax+by+cz=\delta u$$

与原点的距离为 u，且 $-1\le u\le 1$。
平面 $P_{u+\mathrm{d}u}$

$$ax+by+cz=u+\mathrm{d}u$$

与平面 P_u 之间所夹的体元为

$$\begin{aligned}
\int_u^{u+\mathrm{d}u} \pi(\sqrt{1-u^2})^2\mathrm{d}u &= \pi\int_u^{u+\mathrm{d}u}(1-u^2)\mathrm{d}u \\
&= \pi(u-\frac{1}{3}u^3)\Big|_u^{u+\mathrm{d}u} \\
&= \pi[\mathrm{d}u-\frac{1}{3}((u+\mathrm{d}u)^3-u^3)] \\
&= \pi(1-u^2)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

所以原积分可化为

$$\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(\delta u)\mathrm{d}u$$

定理 1.6.2 证明:

$$\oiint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\delta u)\mathrm{d}u$$

其中，积分曲面 S： $x^2+y^2+z^2=1$， $\delta=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

证明： 存在一个正交矩阵 A，将 (x, y, z) 转换为 (u, v, w)，即

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

且 A 的第一行为

$$\begin{pmatrix}\frac{a}{\delta} & \frac{b}{\delta} & \frac{c}{\delta}\end{pmatrix}$$

又因为矩阵 A 为正交矩阵，则

$$|A|=1$$

所以原积分可应用坐标变换得

$$\begin{aligned}
\oiint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S &= \oiint_S f(\delta u)\mathrm{d}S\\
&=2\iint_D f(\delta u)\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=2\iint_D f(\delta u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=2\int_{-1}^{1} f(\delta u)\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}v\\
&=2\int_{-1}^{1} f(\delta u)\mathrm{d}u\cdot 2\int_{0}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}v\\
&=2\int_{-1}^{1} f(\delta u)\mathrm{d}u\cdot 2\arcsin\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-u^2}}\\
&=2\pi\int_{-1}^{1} f(\delta u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

命题 1.6.20 证明:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

证明： 设曲面 $S:\ x^2+y^2+z^2=1$，应用球面坐标系，易知

$$\begin{aligned}
x&=\sin\theta\cos\varphi\\
y&=\sin\theta\sin\varphi\\
z&=\cos\theta
\end{aligned}$$

其中，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \varphi \leq 2\pi$。
应用定理*1.6.2*，则有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi)} \sin\theta \mathrm{d}\theta &= \oiint_S \mathrm{e}^{x-y} \mathrm{d}S \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{2}u)\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}})\end{aligned}$$

命题 1.6.21 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的恒正连续函数，且 $f(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加。
证明:

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x \leq 2\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

证明： 由 $f(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 单调增加知，$\forall m$，$n \in \mathbb{R}$，有

$$(f(m) - f(n))\left(\frac{f(m)}{g(m)} - \frac{f(n)}{g(n)}\right) \geq 0$$

对上式关于 m，n 从 0 到 x 积分，得

$$x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t \geq \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$$

其中，$x > 0$，则有

$$\frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t} \geq \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$$

由 Hőlder 不等式得

$$\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{d}t \int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)}\mathrm{d}t \geq \frac{x^4}{4}$$

所以

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t} \leq 4\frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)}\mathrm{d}t}{x^3}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 4\frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)}\mathrm{d}t}{x^3}\mathrm{d}x$$

其中

$$\int_0^1 4\frac{\int_0^x \frac{f(t)t^2}{g(t)}\mathrm{d}t}{x^3}\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_t^1 \frac{f(t)t^2}{g(t)} \frac{4}{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)\mathrm{d}t$$

则有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x &\le 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)\mathrm{d}t\\ &\le 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x \le 2\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$$

命题 1.6.22 证明:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}$$

证明: 易知

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+m+1}&=\int_0^1 x^{k+m}\mathrm{d}x\\ \frac{1}{k+n+1}&=\int_0^1 x^{k+n}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

原等式左边有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}&=\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k+n}\mathrm{d}x\right]\\ &=\int_0^1\left[x^m\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\binom{n}{k}x^k\right]\right]\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同理，原等式右边有

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$$

易证

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{k+m+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{k+n+1}$$

定理 1.6.3 (Frullani 定理) 设函数 $f(x)$ 是 $[0,\ \alpha]$ 上的连续函数,且对任意的 β,$\int_\beta^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在。则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\log\frac{b}{a}$$

证明: 对任意的 β 有

$$\begin{aligned}\int_\beta^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x&=\lim_{T\to+\infty}\int_\beta^{T}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x\\&=\lim_{T\to+\infty}\int_{a\beta}^{aT}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{a\beta}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

同理

$$\int_\beta^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{b\beta}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\int_a^{b}\frac{f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x$$

又

$$\lim_{\beta\to0}\int_a^b\frac{f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\int_a^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}$$

命题 1.6.23 计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)\mathrm{d}x$$

证明: 由

$$\lim_{x\to0}x^2\left(\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^4}\right)=\frac{2}{3}$$

知存在常数 $C>0$, 使得

$$\left|\frac{x\sin^4 nx}{\sin^4 x-\dfrac{\sin^4 nx}{x^3}}\right|\le C\frac{\sin^4 nx}{x}\le Cn,\quad\forall x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 nx}{x^3}\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^3}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2\sin^3 x\cos x}{x^2}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{6\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^4 x}{x}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由 Frullani 公式知

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)\mathrm{d}x=\ln 2$$

命题 1.6.24 设函数 $f\in C^1[0,1]$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}(f(1)-f(0))$$

证明：

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k-1}{n}}f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k-1}{n}}f'(\xi_k)\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

因为 $f\in C^1[0,1]$，所以在 $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$，$k=1$，$2$，$\cdots$，$n$ 中，存在 m_k，M_k，使得

$$m_k\le f'(x)\le M_k$$

因此有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k-1}{n}} m_k\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k-1}{n}} m_k\left(x-\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} -m_k\cdot\frac{1}{2n^2} \\
&= -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} m_k
\end{aligned}
$$

同理

$$
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k
$$

两边对 n 取极限，由黎曼积分性质可知

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2}(f(1)-f(0))
$$

命题 1.6.25 设函数 $f\in C^1[0,1]$，$\theta\in[0,1]$，证明:

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)\right] = -\left(\theta-\frac{1}{2}\right)(f(1)-f(0))
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right) &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \\
&= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\
&\quad +\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)\right] = -\frac{1}{n}(\theta-1)\sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)
$$

其中，$\xi_k\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ 对 n 取极限，由黎曼积分性质可知

$$
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)\right] = -(\theta-1)(f(1)-f(0))
$$

综上

$$
\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\theta}{n}\right)\right] = -\left(\theta-\frac{1}{2}\right)(f(1)-f(0))
$$

命题 1.6.26 设函数 $f \in C[0,1]$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(1)}{n}=M$$

其中 M 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。证明：$f(x)\equiv M$。

证明： 反证法。设 $\exists x_0\in[0,1]$，$f(x_0)=y<M$，则由函数连续性可知，$\exists\delta>0$，$|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{M-y}{2}$，又由黎曼积分性质知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(1)}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=M$$

然而

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x<2\delta\frac{M+y}{2}=\delta(M+y)<2M\delta$$

所以

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<M$$

与题设矛盾。得证。

命题 1.6.27 设非负函数 $f(x)\in C[0,1]$，且在 $[0,1]$ 上是单调递增的，记

$$s=\frac{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

(1) 证明：$s\geq\dfrac{1}{2}$；

(2) 试比较 $\int_0^s f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的大小。

证明： (1) 由题设，即证

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由积分中值定理可得,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}f(\xi_1)$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}f(\xi_2)$$

其中，$0<\xi_1<\dfrac{1}{2}<\xi_2<1$，再由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，可知

$$f(\xi_2)-f(\xi_1)\geq 0$$

即

$$s\geq\frac{1}{2}$$

(2) 因为 $f(x)\in C[0,1]$，则 $f'(x)\geq 0$，考虑变上限积分

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

显然 $F''(x)=f'(x)\geq 0$，因此 $F(x)$ 的图像是下凸的且 $F(x)\geq 0$. 不妨设

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$$

则 $F(1)=1$，$F(0)=0$. 由题设知，即证

$$F(s)=\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\leq\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(s)$$

也即 $F(s)\leq\dfrac{1}{2}$.
由几何直观，$x=s$ 处的切线（斜率 $k>0$）

$$y=k(x-s)+F(s)$$

在函数 $y=F(x)$ 的下方，即

$$F(x)\geq k(x-s)+F(s)$$

利用 $f(x)$ 的非负性得

$$F(x)f(x)\geq k(x-s)f(x)+F(s)f(x)$$

不等式两边从 0 到 1 积分得

$$\text{左边}=\int_0^1 F(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\text{右边}=\int_0^1 k(x-sf(x))\mathrm{d}x+\int_0^1 F(x)f(x)\mathrm{d}x=(ks-ks)+F(s)=F(s)$$

所以 $F(s)\leq\dfrac{1}{2}$，即

$$\int_0^s f(x)\mathrm{d}x\leq\int_s^1 f(x)\mathrm{d}x$$

命题 1.6.28 设 $f(x)\in C^2[0,1]$，且满足 $f(0)=f(1)=f'(0)=0$，$f'(1)=1$
证明：$\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\geq 4$ 并指出不等式中等号成立的条件。

证明： 显然

$$\int_0^1 (f''(x)+ax+b)^2\mathrm{d}x\geq 0$$

则有

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (f''(x)+ax+b)^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x+2a\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 (ax+b)^2\mathrm{d}x\\
=&\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x+2a\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)+2bf'(x)\Big|_0^1+\frac{a^2}{3}+ab+b^2\\
=&\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x+2axf'(x)\Big|_0^1-2a\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+2b+\frac{a^2}{3}+ab+b^2\\
=&\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x+2a-2af(x)\Big|_0^1+2b+\frac{a^2}{3}+ab+b^2\\
=&\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x+2a+2b+\frac{a^2}{3}+ab+b^2
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 (f''(x))^2\mathrm{d}x\geq \max_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left(-2a-2b-\frac{a^2}{3}-ab-b^2\right)=4$$

右端最小值在 $a=-6$，$b=2$ 时取得，因此，当 $f''(x)=6x-2$ 且满足题设时不等式取等，不难得到此时 $f(x)=x^3-x^2$。

命题 1.6.29 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶连续可微，证明

$$\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x\leq 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

证明： 设 $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$y\in\left[\frac{2}{3},1\right]$，由 Lagrange 中值定理知，$\exists z\in(x,y)$，使得

$$f'(z)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

所以

$$|f'(z)|\leq 3|f(x)|+3|f(y)|$$

对于任意的 $w\in[0,1]$，有

$$f'(w)-f'(z)=\int_0^1 f''(t)\mathrm{d}t$$

因此可得

$$|f'(w)| \leq 3|f(x)| + 3|f(y)| + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

分别对 x，y 从 0 到 1 积分，得

$$\frac{1}{9}|f'(w)| \leq \int_0^{\frac{1}{3}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{3}}^1 |f(y)|\mathrm{d}y + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{9}\int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

即

$$\max|f'(w)| \leq 9\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x$$

定理 1.6.4 设 f, g 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数,且存在 $u, v \in [a,b]$,使得 $\max f(x) = f(u)$，$\max g(x) = g(u)$，$\min f(x) = f(v)$，$\min g(x) = g(v)$.
证明：对任意 $\lambda \in (0,1)$，存在 $c \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lambda f(c)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + (1-\lambda)g(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证明： 显然，对任意 $x \in [a,b]$，有 $f(v) \leq f(x) \leq f(u)$. 因为 g 非负，所以

$$f(v)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(u)g(x)$$

因此

$$f(v)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq f(u)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 f 为常值函数或 $g \equiv 0$. 同理有

$$g(v)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq g(u)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

等号成立当且仅当 g 为常值函数或 $f \equiv 0$. 设 $\lambda \in (0,1)$，考虑函数 $h : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$h(t) = \lambda f(t)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x + (1-\lambda)g(t)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

易知 $h(u) \geq 0$，$h(v) \leq 0$. 由函数连续性知，存在 $c \in [u,v]$，使得 $h(c) = 0$.
下证 $c \in (a,b)$. 若 $c \neq u$ 且 $c \neq v$，则显然满足 $c \in (a,b)$. 否则我们不妨设 $c = u$，易知 f 和 g 为常值函数，因此任意 $t \in [a,b]$，满足 $h(t) = 0$. 若 $c = v$，同理可证。

第二章

离散数学

§1　数理逻辑

§2　集合论

§3　代数结构

2.3.1　代数系统

命题 2.3.1

$$V_1 =< \mathbb{Z}, +, \cdot >, \quad V_2 =< \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes >$$

其中，$\mathbb{Z}$ 为整数集，$+$，$\cdot$ 分别为普通加法和乘法，$\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$，$\oplus$，$\otimes$ 分别为模 n 加法和模 n 乘法，令 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$，$f(x) = x \mod n$，证明 f 为 V_1 到 V_2 的满同态映射。

证明：　$\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(x+y) = (x+y) \mod n$$

$$f(x) \oplus f(y) = [(x \mod n) + (y \mod n)] \mod n$$

由取模运算的定义知，$\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_n$

$$x = q_1 n + r_1$$

$$y = q_2 n + r_2$$

则

$$
\begin{aligned}
(x+y) \mod n &= q_1 n + r_1 + q_2 n + r_2 \\
&= (q_1+q_2)n + r_1 + r_2 \\
&= (q_1+q_2+q_3)n + r_3 \\
&= [(x \mod n) + (y \mod n)] \mod n \\
&= (r_1+r_2) \mod n
\end{aligned}
$$

其中

$$r_1 + r_2 = q_3 n + r_3, \quad q_3 \in \mathbb{Z}, r_3 \in \mathbb{Z}_n$$

即

$$f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$$

同理可证

$$f(x \cdot y) = f(x) \otimes f(y)$$

且 f 显然是满映射，得证。

2.3.2 群与环

定理 2.3.1 G 为群，则 G 中满足消去律，即对任意 $a,b,c \in G$ 有
(1) 若 $ab = ac$，则 $b = c$
(2) 若 $ba = ca$，则 $b = c$

证明： (1) 因为 $ab = ac$，且 G 是群，所以存在 $a^{-1} \in G$，两边左乘 a^{-1} 得

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac$$

即 $b = c$，得证。
(2) 同上。

命题 2.3.2 设 G 是群，$a,b \in G$ 是有限阶元，证明:
(1) $|b^{-1}ab| = |a|$
(2) $|ab| = |ba|$

证明： (1) 设 $|b^{-1}ab| = k$，$|a| = l$，则

$$[b^{-1}ab]^l = \overbrace{[b^{-1}ab\ b^{-1}ab\ \cdots\ b^{-1}ab]}^{l} = b^{-1}a^l b = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

即 $k \leq l$，同理设 $|bb^{-1}abb^{-1}| = m$，显然 $m = l$，同时

$$[bb^{-1}abb^{-1}]^k = \overbrace{[b(b^{-1}ab)b^{-1}\ b(b^{-1}ab)b^{-1}\ \cdots\ b(b^{-1}ab)b^{-1}]}^{k} = b(b^{-1}ab)^k b^{-1} = b^{-1} \circ e \circ b = e$$

因此 $l = m \leq k \leq l$，即

$$|b^{-1}ab| = |a|$$

(2) $|ba| = |b^{-1}bab| = |ba|$，得证。

命题 2.3.3 偶数阶群必含 2 阶元。

证明： 由群的性质和逆元的唯一性知，$\forall a \in G$，若 $|a| > 2$，则存在 $a^{-1} \in G$，且 $a \neq a^{-1}$ 即群中除单位元外的任何元素都和它的逆元成对存在。因此，偶数阶群必存在 2 阶元。

第三章

复分析

§1 复数

命题 3.1.1 证明：对于 $|z| \leq 1$，$|w| \leq 1$，有

$$|w-z| \leq |1-\overline{w}z|$$

证明： 设 $z = x_1 + y_1\mathrm{i}$，$w = x_2 + y_2\mathrm{i}$

$$|w-z| = |(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\mathrm{i}|$$

$$|1-\overline{w}z| = |1-(x_2-y_2\mathrm{i})(x_1-y_1\mathrm{i})| = |(1-x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2-x_2y_1)|$$

$$\begin{aligned}
&|w-z|^2-|1-\overline{w}z|^2 \\
=\ & x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-1-x_1^2x_2^2-y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2 \\
=\ & (1-x_1^2-y_1^2)(1-x_2^2-y_2^2) \\
\leq\ & 0
\end{aligned}$$

其中

$$0 \leq x_1^2+y_1^2 \leq 1, \quad 0 \leq x_2^2+y_2^2 \leq 1$$

则

$$|w-z| \leq |1-\overline{w}z|$$

命题 3.1.2 设数列 $\{a_n\}$ 由 -1，0，1 组成。证明：

$$a_0\sqrt{2+\sqrt{a_1\sqrt{2+a_2\sqrt{2+\cdots}}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0a_1\cdots a_n}{2^n}\right)$$

证明： 设

$$z_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_0a_1\cdots a_k}{2^n}\right)$$

易知

$$\mathrm{sgn} z_n = \mathrm{sgn}\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_0a_1\cdots a_k}{2^n}\right)\right) = a_0$$

对 $a_0 \neq 0$，有

$$z_n^2 - 2 = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_n\sqrt{2}}}$$

且有

$$\begin{aligned}
z_n^2 - 2 &= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_0a_1\cdots a_k}{2^k}\right)\\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_1\cdots a_k}{2^k}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1\cdots a_k}{2^{k-1}}\right)
\end{aligned}$$

得证。

§2 复积分

命题 3.2.1 证明：对任意 $\xi \in \mathbb{C}$，有

$$\mathrm{e}^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi}\mathrm{d}x$$

证明：

$$\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi x\xi} = \mathrm{e}^{-\pi(x^2+2\mathrm{i}x\xi)}$$

因为

$$-\pi(x^2 + 2\mathrm{i}x\xi) = -\pi(x^2 + 2\pi\mathrm{i}x - \xi^2 + \xi^2) = -\pi(x + \mathrm{i}\xi)^2 - \pi\xi^2$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\mathrm{d}x$$

令 $z = x + \mathrm{i}\xi, \mathrm{d}x = \mathrm{d}z$，则有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi(x+\mathrm{i}\xi)^2}\mathrm{d}x\\
=&\mathrm{e}^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi z^2}\mathrm{d}x\\
=&\mathrm{e}^{\pi\xi^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\\
=&\mathrm{e}^{\pi\xi^2}
\end{aligned}$$

命题 3.2.2 证明:

$$\left|\int_\gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2})}{4r}$$

其中 $\gamma(t)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ r\in\mathbb{R}^+$

证明:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t\right|\\
&\le \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}r^2(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)}\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

因为 $\sin 2t\ge\frac{4t}{\pi},\ t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\mathrm{e}^{-r^2\sin 2t}\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\mathrm{e}^{\frac{4r^2t}{\pi}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4r}(1-\mathrm{e}^{-r^2})$$

命题 3.2.3 设 $f(z)$ 在复平面上处处解析，并且不等式

$$\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\mathrm{d}\theta\le r^{\frac{16}{5}}$$

对所有 $r>0$ 成立，证明：$f(z)\equiv 0$

证明: 由题设 $f(z)$ 在复平面 C 内都能 Taylor 展开，则

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

应用 Cauthy 积分公式，得

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

从而 $2\pi|f(0)| \le 6\frac{16}{5}$，令 $r \to 0^+$，有 $f(0)=0$ 再由

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta$$

则可知 $f'(0)=0$，同理 $f''(0)=f^{(3)}(0)=0$
当 $n \ge 4$ 时

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{r^{\frac{16}{5}}}{r^n} \to 0 \quad (r \to +\infty)$$

从而

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

即

$$f(z) \equiv 0$$

命题 3.2.4 设函数 f 在 $z=0$ 的邻域上连续。证明:

(1)

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t = 2\pi f(0)$$

(2)

$$\lim_{r\to 0}\int_L \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(0)$$

其中 L 是圆 $|z|=r$。

证明： (1) 因为函数 f 在 $z=0$ 的邻域上连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，使得当 $r<\delta$ 时

$$|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(0| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t - 2\pi f(0)\right| &= \left|\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(0)\mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_0^{2\pi} \left|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(0)\right|\mathrm{d}t \\
&< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

(2) 设 $z=re^{\mathrm{i}t}$，$0\le t\le 2\pi$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，使得当 $r<\delta$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_L \frac{f(z)}{z}\mathrm{d}t-2\pi\mathrm{i}f(0)\right| &= \left|\int_0^{2\pi}\frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{i}-f(0)\mathrm{i}\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-f(0)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_0^{2\pi}|f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})-f(0)|\mathrm{d}t \\ &< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

§3 复级数

命题 3.3.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z^n$ 收敛，证明:

$$\lim_{r\to1,\ r<1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

证明: 记 $A_k=\sum\limits_{n=1}^{k}A_n$，$A_0=0$，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(1-r^n)a_n &= (1-r^N)A_N+\sum_{n=1}^{N}(r^n-r^{n+1})A_n \\ &= (1-r)A_N+\sum_{n=1}^{N}(r^n-r^{n+1})(A_N-A_n)\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{r\to1,\ r<1}(1-r)A_N=0$，所以只需证 $\lim\limits_{r\to1,\ r<1}(r^n-r^{n+1})(A_N-A_n)=0$
对任意 $\varepsilon>0$，$\exists N'\in\mathbb{N}$，$n>N'$ 时

$$|A_n-A|<\varepsilon$$

其中 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_N$
取 $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{N'}}<r<1$，则 $0<1-r<1-r^{N'}<\varepsilon$
由于 A_n 有界，设 $|A_n|\le M$，则 $n>N'$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1}(r^n-r^{n+1})(A_N-A_n) &\le (1-r)\sum_{n=1}^{N'}r^n|A_n-A|+\sum_{n=N'+1}^{N-1}r^n(|A_n-A|+|A_N-A|)\\ &\le (\sum_{n=1}^{N'}2r^nM+\sum_{n=N'+1}^{N-1}r^n2\varepsilon)\\ &=(1-r)\left(2M\frac{r-r^{N'+1}}{1-r}+2\varepsilon r^{N'+1}\frac{1-R^{N-N'+1}}{1-r}\right)\\ &<2M\varepsilon+2\varepsilon\\ &=2(M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$，再 $r\to 1$
即

$$\lim_{r\to1,\ r<1}\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

命题 3.3.2 设 f 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且满足对于任一点 $z_0\in\mathbb{C}$，f 在 z_0 的 Tarloy 展开式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)$$

满足至少有一个 c_n 为 0，证明 f 是多项式。

证明： 考虑开单位圆盘 $D=\Delta(0,1)$，则 D 内有不可数的点，所以存在正整数 p，使得 D 内有无穷多点 $\{z_n\}$，在这些点处的 Taylor 展开式中第 p 项系数 $c_p=0$
可以在这些点中选取一个收敛子列 $\{z_{n_k}\}$, 且该子列收敛到 $z_0\in D$, 由唯一性定理知, $f^{(p)}\equiv 0$ 在 $\mathbb{C}$ 上恒成立，故 f 为多项式。

命题 3.3.3 设

$$S_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

证明: 如果幂级数 $A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 的收敛半径 $R(A)$ 为 1，则幂级数 $C=\sum\limits_{k=0}^{\infty}S_kz^k$ 的收敛半径 $R(C)$ 也为 1。

证明： 因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_mz^m=\sum_{k=0}^{\infty}S_kz^k=C$$

则有 $R(C)\ge1$，因为左边乘积中幂级数的收敛半径都是 1，右边幂级数 C 的收敛半径 $R(C)$ 不可能大于 1，即 $R(C)\le 1$。则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时，对任意 $p\in\mathbb{N}^+$ 有

$$\varepsilon>\sum_{k=n+1}^{n+p}|S_k||z|^k\ge\sum_{k=n+1}^{n+p}(n+p-k+1)|a_k||z|^k,\quad 1<|z|<R$$

所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}(n+p-k)|a_k||z|^K \leq \sum_{k=n+1}^{n+p}(n+p-k+1)|a_k||z|^k < \varepsilon, \quad 1<|z|<R \tag{1}$$

因此

$$\varepsilon > \sum_{k=n+1}^{n+p}(n+p-k+1)|a_k||z|^k = \sum_{k=n+1}^{n+p}(n+p-k)|a_k||z|^k + \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k||z|^k$$

由 (1) 式知,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k||z|^k < \varepsilon, \quad 1<|z|<R$$

若 $R(C)<1$，则必有 $R(A)<1$，与题设矛盾。得证。

定理 3.3.1 (Tauber 定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k z^n$ 的收敛半径为 1，且 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. 证明:

(1)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} = 0$$

(2) 设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{m} a_n z^n, \quad |z|<1$$

如果存在 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = A$，那么级数 $\sum\limits_{n=0}^{n} a_n$ 收敛到 A。

证明: (1) $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，$n|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。选择 $n=n_0$ 满足上述条件。则对任意 $m>n_0$，有

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\sum\limits_{n=n_0+1}^{m} n|a_n|}{m} \\ &< \frac{\sum\limits_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{m-n_0}{2m}\varepsilon \\ &< \frac{\sum\limits_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

对足够大的 $m>M$，有

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{n_0} n|a_n|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此对 $m > \max(N, M)$

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{m} n|a_n|}{m} < \varepsilon$$

(2)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| \\
&\leq (1-x)\sum_{k=0}^{n}\left[|a_k|(1+x+\cdots+x^{k-1})\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|x^k \\
&< n(1-x)\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k|\frac{x^k}{k}
\end{aligned}$$

令 $m|a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$，由 *(a)* 知，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists M \in \mathbb{N}$，使得当 $m > M$ 时有

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k|a_k|}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

我们由上述不等式得

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - f(x)\right| &< n(1-x)\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{1-x}\right] \\
&< \frac{\varepsilon}{2}\left[n(1-x) + \frac{1}{n}\frac{1}{1-x}\right]
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = A$$

引理 3.3.1 设函数

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

的收敛半径为 R。w 是收敛圆边界上的点，z_1 是半径 $\vec{z_0w}$ 上不同于 z_0 和 w 的任意一点。证明：如果

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则 w 是 $\varphi(z)$ 的发散点。且如果

$$\Delta < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

则 w 是 $\varphi(z)$ 的收敛点。

证明： 由题设知，$\varphi(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内收敛，固定 w，选择 z_1，并将 $\varphi(z)$ 在 $z=z_1$ 展开，得到

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n, \quad |z-z_1|<r$$

其中 r 是收敛半径，且有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\varphi^{(n)}z_1}{n!} \\ &= a_n + \frac{n+1}{1}a_{n+1}(z_1-z_0) + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}a_{n+2}(z_1-z_0)^2 + \cdots \\ &= \sum_{m=n}^{\infty}\binom{m}{n}a_m(z_1-z_0)^{m-n} \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} = r$$

所以

$$\Delta = R - |z_1 - z_0| = r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

定理 3.3.2 (Pringshajm theorem) 设幂级数 $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛半径 $R=1$，且 $a_n \geq n$，$n \in \mathbb{N}$，证明：$z=1$ 是 $\varphi(z)$ 的发散点。

证明： 反证法。假设 $z_0 = 1$ 不是 $\varphi(z)$ 的发散点。设 x 是区间 $(0,1)$ 上的任意点，由引理*3.3.1*可知，

$$\Delta = R - |x - z_0| = 1 - x < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

设 w 是单位圆上的任意一点，且 z_1 是半径 $\vec{z_0 w}$ 和圆 $|z|=x$ 的交点，则有

$$R - |z_1| = 1 - x$$

且有

$$\begin{aligned}
|\varphi^{(n)}(z_1)| &= \left|a_n + \frac{n+1}{1}a_{n+1}z_1 + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}a_{n+2}z_1^2 + \cdots\right| \\
&\le a_n + \frac{n+1}{1}a_{n+1}x + \frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}a_{n+2}x^2 + \cdots \\
&= \varphi^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}} \ge \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|\varphi^{(n)}(x)|}{n!}}}$$

从最后一个不等式知

$$\Delta < \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{|\varphi^{(n)}(z_1)|}{n!}}}$$

由 w 的任意性和引理*3.3.1*可知, $\varphi(z)$ 在 $|z|=1$ 上没有发散点, 这与 $\varphi(z)$ 的收敛半径 $R=1$ 矛盾。得证。

§4 解析函数

命题 3.4.1 设 f 在一个包含单位圆盘的开集上（除去单位圆盘上的一个极点 z_0）解析，证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 表示 f 在开单位圆盘上的 Taylor 级数，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$$

证明： 考虑 $f(z_0z)$ 的相同问题，则只需证明 $z_0=1$ 的情况

设 $g(z)$ 是 $f(z)$ 在 $z=1$ 处 Taylor 级数的主要部分，即

$$g(z) = \sum_{p=1}^{k}\frac{A_p}{(1-z)^p}, \quad p\ge 1$$

因为 $h(z)=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$，则 $h(z)$ 的 $p-1$ 阶导数

$$\begin{aligned}
(1-z)^{(p-1)} &= \frac{(p-1)!}{(1-z)^p} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right)^{(p-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)z^n
\end{aligned}$$

设 $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$，有

$$b_n = \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{(p-1)!}(n+1)(n+2)\cdots(n+p+1)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n =$

命题 3.4.2 设 $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ 是解析函数,

$$d_r^* = \sup_{z\in D(0,r)} |f(z) - f(-z)|$$

证明：对于任意 $0 < r < 1$,

$$2|f'(0)| \le \frac{d_r^*}{r}$$

成立。且等号成立当且仅当

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z, \quad \forall z \in D(0,1)$$

证明： 充分性显然。

必要性。应用反证法，不妨设

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3, \quad \forall z \in D(0,1)$$

其中 $f'(0) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$f^{(3)}(0) = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \neq 0$. 则

$$d_r^* = \sup_{z\in D(0,r)} (|2f'(0)z + 2f^{(3)}(0)z^3|) = \sup_{z\in D(0,r)} (2|z||f'(0) + f^{(3)}(0)z^2|)$$

总存在 $|z| = r$，使得 $f'(0)$ 与 $f^{(3)}(0)z^2$ 同向，也即

$$\frac{d_r^*}{r} = 2|f'(0) + f^{(3)}(0)z^2| > 2|f'(0)|$$

与题设矛盾，得证。

命题 3.4.3 证明：函数 $\dfrac{d_r}{r}$ 是 r 的单调不减函数。其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| \big| z, w \in D(0,r), |z| = |w|\}$$

证明： 考虑 $0 < r < R < 1$，易知 $d_r = \sup\{|f(z) - f(zu)| \big| z \in D(0,1), |z| = 1\}$，注意到对于任意的 $|u| = 1$，$z \mapsto \dfrac{f(z) - f(zu)}{z}$ 是单位圆 $D(0,1)$ 上的解析函数，因此

$$
\begin{aligned}
\frac{d_r}{r} &= \frac{1}{r}\sup_{z\in D(0,r)}|f(z)-f(zu)| \\
&= \frac{1}{r}\sup_{|z|=r}|f(z)-f(zu)| \\
&= \sup_{|z|=r}\left|\frac{f(z)-f(zu)}{z}\right| \\
&\le \sup_{z\in\overline{D}(0,R)}\left|\frac{f(z)-f(zu)}{z}\right| \\
&= \sup_{|z|=R}\left|\frac{f(z)-f(zu)}{z}\right| \\
&= \frac{1}{R}\sup_{|z|=R}|f(z)-f(zu)| \\
&= \frac{1}{R}\sup_{z\in D(0,R)}|f(z)-f(zu)| \\
&= \frac{1}{R}d_R \le \frac{1}{R}d_1
\end{aligned}
$$

令 $R\to 1$，则有

$$\frac{d_r}{r}\le\frac{1}{R}d_R\le d_1$$

命题 3.4.4 已知 D 是单位圆盘，设 $f:D\to\mathbb{C}$ 是解析函数，证明:
函数 f 的直径 $d=\sup\limits_{z,w\in D}|f(z)-f(w)|$ 满足

$$2|f'(0)|\le d$$

证明: 由 Cauthy 公式得,

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z$$

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{-f(-z)}{z^2}\mathrm{d}z$$

其中 $0<r<1$，即

$$2f'(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)-f(-z)}{z^2}\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
2|f'(0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=r}\frac{f(z)-f(-z)}{z^2}\mathrm{d}z\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\left|\frac{f(z)-f(-z)}{z^2}\right|\mathrm{d}z \\
&\le \frac{1}{2\pi}\frac{d}{r^2}\cdot 2\pi r \\
&= \frac{d}{r}
\end{aligned}
$$

则显然有 $2|f'(0)| \le d$.

定理 3.4.1 证明：对任意的 $0 < r < 1$,

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

成立当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0,1)$$

其中

$$d_r = \sup\{|f(z) - f(w)| \big| z, w \in D(0,r), |z| = |w|\}$$

证明： 充分性显然。
必要性。易知

$$d_r^* = \sup_{z \in D(0,r)} |f(z) - f(-z)| \le d_r$$

所以 $2|f'(0)| \le \dfrac{d_r^*}{r}$，因此

$$f(z) - f(-z) = 2f'(0)z$$

假设存在 $|a| = r$，使得

$$\mathrm{Im}\{f'(a)\} \ne 0$$

函数 $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ 是单位圆上的解析函数。对 $\theta \in \mathbb{R}$，有

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= |f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(-a)|^2 \\
&= \left| f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r} a \right|^2 \\
&= \left(f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(a) + \frac{d_r^*}{r} a \right) \left(f^*(\overline{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) - f^*(\overline{a}) + \frac{d_r^*}{r} \overline{a} \right)
\end{aligned}$$

由 Cauthy 定理知,

$$\varphi'(\theta) = 2\mathrm{Re}\left\{ a\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f'(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \left(f^*(\overline{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) - f^*(\overline{a}) + \frac{d_r^*}{r} \overline{a} \right) \right\}$$

所以

$$\varphi'(0) = 2\mathrm{Re}\left\{ a\mathrm{i} f'(a) \frac{d_r^*}{r} \overline{a} \right\} = -2\frac{d_r^*}{r} |a|^2 \mathrm{Im}\{f'(a)\} \ne 0$$

因此 $\varphi(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处要么单调增加要么单调减少，所以存在 θ_0，使得 $\varphi(\theta_0) > \varphi(0)$. 也即

$$d_r \ge |f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) - f(-a)| = \sqrt{\varphi(\theta)} > \sqrt{\varphi(0)} = |f(a) - f(-a)| = \frac{d_r^*}{r} r = d_r$$

与 $d_r^* \le d_r$ 矛盾。所以

$$f'(z) = 0, \quad \forall |z| = r$$

由最大模定理知,

$$f'(z) = 0, \quad \forall z \in D(0, r)$$

因此由 Cauthy-Riemann 条件知，$f'(z)$ 是常值函数，即

$$f(z) = f'(0)z + f(0), \quad \forall z \in D(0, 1)$$

成立。

定理 3.4.2 设函数 $f(z)$ 是单位圆上的解析函数。证明:

$$2|f'(0)| = d$$

当且仅当

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

其中

$$d = \sup_{z,w \in D(0,1)} |f(z) - f(w)|$$

证明： 充分性显然。
必要性。易知

$$\frac{d_r^*}{r} \le \frac{d_r}{r} \le d$$

因此

$$2|f'(0)| = \frac{d_r}{r}$$

由定理*3.4.1*知,

$$f(z) = f'(0)z + f(0)$$

得证。

命题 3.4.5 设 f 在 $0 < |z| < R$ 解析，存在 $M > 0$，使得任意 r，$0 < r < R$，有

$$r \int_0^{2\pi} |2f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| \mathrm{d}\theta < M$$

证明：$z = 0$ 是一个可去发散点，否则是简单极点。

证明： 设 $r_2 < R$，选取 z_0，满足 $0 < z_0 < \dfrac{r_2}{2}$，再选取 r_1，使 $0 < r_1 < \dfrac{|z_0|}{2}$
由 Cauthy 积分公式得

$$
\begin{aligned}
|f(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - \int_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{C_2}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right||\mathrm{d}z| + \int_{C_1}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right||\mathrm{d}z|\right)
\end{aligned}
$$

其中 $C_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$C_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 由 $|z-z_0| \geq \frac{r_2}{2}$，$z \in C_2$ 有

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{C_2}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right||\mathrm{d}z| \leq \frac{1}{\pi r_2}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \leq \frac{M}{\pi r_2^2}
$$

由 $|z-z_0| \geq \frac{|z|}{2}$，$z \in C_1$ 有

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{C_1}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right||\mathrm{d}z| \leq \frac{1}{\pi|z|}\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \leq \frac{M}{\pi|z|}
$$

因此，我们有

$$
|f(z)| \leq \frac{M}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi|z|}, \quad 0 < |z| < \frac{r_2}{2}
$$

所以

$$
|zf(z)| \leq \frac{M|z|}{\pi r_2} + \frac{M}{\pi}
$$

则极限是有限的。
$z = 0$ 是可去极点，极限为 0.
$z = 0$ 是简单极点，极限非 0.

命题 3.4.6 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，并且 $z = 0$ 为 $f(z)$ 的 $n(n \geq 1)$ 级零点，当 $|z| < 1$ 时，$|f(z)| < 1$.
证明：当 $|z| < 1$ 时，$|f(z)| \leq |z|^n$

证明： $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，且 $z = 0$ 为 $n(n \geq 1)$ 级零点，则有

$$
f(z) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m z^m
$$

显然 $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z^{n-1}}$ 在 $|z| < 1$ 内解析，且 $\varphi(0) = 0$，有

$$
\max\varphi(z) \leq \max_{|z|=r}|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{r^{n-1}} \leq \frac{1}{r^{n-1}}
$$

令 $n \to 1$，则 $|\varphi(z)| < 1$，于是 $|\varphi(z)| \leq |z|$，即

$$
|f(z)| \leq z^n
$$

§5 共形映射

命题 3.5.1 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $\Delta(0,1)=\{z\big||z|<1\}$ 到其自身的解析映射，且有 $f(z)\neq z$ 证明：$f(z)$ 至少有一个零点。

证明： 反证法。若存在 $a,\ b\in\Delta(0,1),\quad a\neq b$，且

$$f(a)=a,\quad f(b)=b$$

则设 $\varphi(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$，$\varphi$ 将 $\Delta(0,1)$ 映射成 $\Delta(0,1)$，且 $\varphi(0)=a$
令 $F(z)=\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi(z)$，则有 $F(0)=0$,

$$F[(\varphi^{-1}(b))]=\varphi^{-1}(b)$$

由 Schwarz 引理知 $F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$,
因为

$$F[(\varphi^{-1}(b))]=\varphi^{-1}(b)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\varphi^{-1}(b)$$

所以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=1$ 则

$$\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi(z)=z$$

即 $f[\varphi(z)]=\varphi(z)$, f 为恒等映射，与题设矛盾，得证。

命题 3.5.2 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $\Delta(0,1)=\{z\big||z|<1\}$ 到其自身的映射，且为解析函数，$f(0)=0$，证明：

(1)

$$|f(z)+f(-z)|\leq 2|z|^2\quad(|z|<1)$$

(2) 如果 $\exists z_0\neq 0$，使得上面不等式中的等号在 z_0 处成立，则

$$f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2(\theta\in\mathbb{R})$$

证明： (1) $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，则可以 Taylor 展开，又因为 $f(0)=0$，所以

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$$

令 $\varphi(z)=\dfrac{1}{2}(f(z)+f(-z))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}z^{2n}$，显然 $z=0$ 是 $\varphi(z)$ 的 $k(k\geq 2)$ 级零点，所以

$$|\varphi(z)|=|z|^2$$

即

$$|f(z)+f(-z)|\leq 2|z|^2$$

(2) $|\varphi(z) = \dfrac{1}{2}|f(z)+f(-z)| \leq \dfrac{1}{2}(|f(z)|+|f(-z)|) \leq 1$ 由 (1) 知，$\left|\dfrac{\varphi(z)}{z^2}\right| \leq 1$，且 $\left|\dfrac{\varphi(z_0)}{z_0^2}\right| = 1$，$|z_0| < 1$，则由 Schwarz 引理得
$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2$，即 $f(z)+f(-z) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2$

$$f(z)+f(-z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}z^{2n}$$

设 $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 + h(z)$，其中 $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}z^{2n-1}$
显然有 $h(z) = -h(-z)$，则由 $|f(z)| \leq 1$ 得

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 + h(z)| \leq 1$$
$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 - h(z)| \leq 1$$

即有

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 + h(z))\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 + h(z))} \leq 1$$
$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 - h(z))\overline{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2 - h(z))} \leq 1$$

则

$$|z|^4 + |H(z)| \leq 1$$

由最大模定理可知 $h(z) \equiv 0$，即

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z^2$$

命题 3.5.3 函数 $f(z)$ 在可求面积得区域 D 内单叶解析，并且满足 $|f(z)| \leq 1$，证明:

$$\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \pi$$

证明： $S = \iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为 $f(z)$ 将 D 映射成的区域面积，又 $|f(z)| \leq 1$，则显然有

$$\iint_D |f'(z)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \pi$$

证明： 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$，其中 z_0，$w_0 \in \mathbb{C}$，则

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$$

命题 3.5.4 由极限定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|z-z_0|<\delta$ 时

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon$$

又 $\Big||a|-|b|\Big|\le|a-b|$，则

$$\Big||f(z)-|w|\Big|\le|f(z)-w|<\varepsilon$$

易知

$$\lim_{z\to z_0}|f(z)=|w_0|$$

命题 3.5.5 设 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内解析，在 $|z|=1$ 上有 $|f(z)|>m$，并且 $|f(0)|<m$，其中 $m>0$

证明：$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内至少有一个零点。

证明： 反证法。假设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内无零点，又 $|z|=1$ 上 $|f(0)|>m>0$

则 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 内无零点，$\dfrac{1}{f(z)}$ 在 $|z|\le 1$ 解析，由最大模定理知

$$\max_{|z|\le 1}\left|\frac{1}{f(z)}\right|=\max_{|z|=1}\left|\frac{1}{f(z)}\right|<\frac{1}{m}$$

然而 $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|>\dfrac{1}{m}$，与题设矛盾，所以 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内至少有一个零点。

命题 3.5.6 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 为单位圆盘 $D=\{z\big||z|<1\}$ 内的单叶解析函数，G 为 f 将单位圆 D 映射成的区域，A 为区域 G 的面积，证明：

$$A=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2$$

证明： 易证 $A=\iint_D|f'(z)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，又 $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$，设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则有

$$\begin{aligned}
A&=\iint_D|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D f'(z)\overline{f'(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint_D\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right)\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(r\sum_{n=1}^{\infty}na_nr^{n-1}\mathrm{e}^{(n-1)\mathrm{i}\theta}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{a_n}r^{n-1}\mathrm{e}^{-(n-1)\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^1 r\sum_{n=1}^{\infty}2n^2|a_n|^2\pi r^{2n-2}\\
&=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2
\end{aligned}$$

其中

$$\int_o^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

即

$$A = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

命题 3.5.7 设 $f: D\to\mathbb{C}$ 时解析函数，$|f(z)|\leq 1$，并且 $f(\alpha)=\beta$，α，$\beta\in D$，则

$$|f'(\alpha)|\leq\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

当且仅当等号成立时，有 $f(z)=\varphi_{-\beta}(\varphi_{\alpha(z)})$，$c\in\mathbb{C}$，且 $|c|=1$，其中

$$\varphi_\alpha=\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\ \varphi_\beta=\frac{z-\beta}{1-\overline{\beta}z}$$

证明： 令 $g=\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_{-\alpha}$，于是 g 在 D 内解析，$|g(z)|\leq 1$，并且 $g(0)=0$，由 Schwarz 引理得

$$|g'(0)|\leq 1$$

且

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_\beta(\beta)f'(\alpha)\varphi_{-\alpha}(0) \\ &= (1-|\beta|^2)^{-1}f'(\alpha(1-|\alpha|^2)) \end{aligned}$$

则有

$$|f'(\alpha)|\leq\frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

命题 3.5.8 设单叶解析函数 $f(z)$ 将 z 平面上可求面积的区域 D 映射成 w 平面上的区域 G，设区域 G 的面积为 A，证明:

$$A=\iint_D|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明： 显然 $A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，积分区域为 G，则由积分换元公式知

$$\begin{aligned} A &= \iint_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

命题 3.5.9 设 $f: D \to \mathbb{C}$ 是解析函数，$f(0)=0$，并且任意 $z \in D$，$\mathrm{Re}(f(z)) \leq A$，其中 $D=\{z \big| |z|<1\}$，A 是正实数，那么任意 $r \in (0,1)$

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1-r}$$

其中 $M(r)=\max\limits_{|z|=r}\{|f(z)|\}$

证明： $\forall r \in (0,1)$，令

$$A(r)=\max_{|z|=r}\{\mathrm{Re} f(z)\}$$

因为

$$\mathrm{e}^{A(r)}=\max_{|z|=r}\{|\mathrm{e}^{f(z)}|\}$$

由最大模原理知 $A(r)$ 是单调增加的飞赴函数，并且由假设知 $A(r) \leq A$

令

$$g(z)=\frac{f(z)}{2A-f(z)}=\frac{P+Q\mathrm{i}}{(2A-P)-Q\mathrm{i}}$$

其中

$$P=\mathrm{Re} f(z), \quad Q=\mathrm{Im} f(z)$$

那么 $f(z)$ 在 D 内解析，$\forall x \in D$

$$|g(z)|^2=\frac{P^2+Q^2}{(2A-P)^2+Q^2} \leq \frac{R^2+Q^2}{A^2+Q^2} \leq 1$$

从而 $|g(z)| \leq 1$，$g(0)=0$，于是由 Schwarz 引理得

$$|g(z)| \leq z$$

由 $g(z)$ 定义知

$$f(z)=\frac{2Ag(z)}{1+g(z)}$$

则

$$|f(z)| \leq \frac{2A(z)}{1-|z|} \leq \frac{2Ar}{1-r}$$

即

$$M(r) \leq \frac{2Ar}{1-r}$$

引理 3.5.1 (Schwarz 引理) 设 $f(z)$ 在单位圆盘 $|z|<1$ 内解析，在闭圆盘 $|z| \leq 1$ 上是连续的，并且满足 $f(0)=0$，又在 $|z|<1$ 内处处有 $|f(z)|<1$，则

(1) $|f(z)| \leq |z|$，且 $|f'(0)| \leq 1$

(2) 若在开圆盘内有一复数 $z_0 \neq 0$，是 $|f(z_0)| = |z_0|$，或者 $|f'(0)| = 1$，那么 $f(z) = e^{\mathrm{i}\alpha} z$，$\alpha$ 为一实数。

证明： 由于 $f(0) = 0$，且 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，则 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内可以 Taylor 展开，有

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots +$$

令 $\varphi(z) = c_1 + c_2 z + \cdots$，则

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

显然 $\varphi(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析，对于圆内一点 z_0，设 $|z_0| < r < 1$，则由最大模定理

$$|\varphi(z+0)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z_0)| = \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

令 $r \to 1$，则有 $|\varphi(z_0)| \leq 1$
若 $z_0 = 0$，有 $|f'(0)| = |\varphi(0)| \leq 1$
若 $z_0 \neq 0$，有 $|f'(0)| = \left| \dfrac{f(z_0)}{z_0} \right| \leq 1$，即

$$|f(z_0)| \leq |z_0|$$

由于 $f(0) = 0$，上式当 $z = 0$ 时成立，则

$$|f(z_0)| \leq |z_0|, \quad x \in \Delta(0,1)$$

若有 $z_0 \neq 0$，使 $|f(z_0)| = |z_0|$，或者 $|f'(0)| = 1$，则 $\varphi(z)$ 在 $\Delta(0,1)$ 内取得最大模，
从而 $\varphi(z) \equiv c$，又 $|c| = 1$，则 $\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，所以

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$$

定理 3.5.1 (Schwarz-Pick 定理) 设 $f : D \to \mathbb{C}$ 在 D 内解析，$|f(z)| \leq 1$，且 $f(z_0) = w_0$，$z \in D$，则

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{1 - \overline{w_0} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - z_0 z} \right|$$

等号当且仅当 $f(z)$ 是分式线性映射时成立。

证明： 设函数 $w = f(z)$，考虑分式线性映射

$$\zeta = T(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \tau = S(w) \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$$

分别 z 平面和 w 平面上的单位圆双方单值映射成 ζ 和 τ 平面上的单位元，并且把 z_0，w_0 映射成 $\zeta=0$，$\tau=0$，则

$$F(\zeta)=S(f(T^{-1}(\zeta)))$$

在 $|\zeta|<1$ 内解析，$|F(\zeta)|\leq 1$，且 $F(0)=0$，于是在 $|\zeta|<1$ 内，由 Schwarz 引理得

$$|F(\zeta)|=|S((f(T^{-1}(\zeta))))|\leq|\zeta|$$

从而在 $|z|<1$ 内

$$|S(f(z))|\leq|T(z)|$$

即

$$\left|\frac{f(z)-w_0}{1-\overline{w_0}f(z)}\right|\leq\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|$$

第四章

信号与系统

§1 信号与系统

命题 4.1.1 考虑离散时间信号

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$$

确定整数 M 和 n_0 的值，使得 $x[n]$ 能表示为

$$x[n] = u[Mn - n_0]$$

证明： 由题设知,

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k] = 1 - \sum_{k=4}^{\infty} \delta[n-k]$$

即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq 3 \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}$$

因此

$$x[n] = u[-n+3]$$

所以，$M = -1$，$n_0 = -3$.

§2 线性时不变系统

命题 4.2.1 考虑一个离散时间系统 X_1，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

(1) 求整数 A 以满足 $h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$。

(2) 利用 (a) 的结果，求 S_1 的逆系统 S_2 是线性时不变的单位脉冲响应 $g[n]$。

证明： (1) 由题设，因为

$$h[n]-Ah[n-1]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]-A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}u[n-1]$$

即

$$h[n]-Ah[n-1]=\begin{cases}\left(\frac{1}{5}\right)^n-A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, & n\geq 0\\ 1, & n=0\\ 0, & n\leq -1\end{cases}$$

所以，$A=\dfrac{1}{5}$

(2) 即求 $g[n]$，使得

$$h[n]*g[n]=\delta[n]$$

由 (a) 知，$h[n]-\dfrac{1}{5}h[n-1]=\delta[n]$，易得

$$g[n]=\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]$$

§3 连续时间傅里叶变换

引理 4.3.1 考虑连续时间信号 $x(t)$，$x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$，求连续时间信号

$$y(t)=X(\mathrm{j}t)$$

的傅里叶变换 $Y(\mathrm{j}\omega)$.

证明： 由傅里叶变换综合公式知,

$$Y(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

应用积分变量变换，令 $t=\omega$，$\omega=t$，则有

$$Y(\mathrm{j}t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=2\pi x(-t)$$

因此

$$Y(\mathrm{j}\omega)=2\pi x(-\omega)$$

命题 4.3.1 考虑下面的傅里叶变换对:

$$\mathrm{e}^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}$$

(1) 利用恰当的傅里叶变换性质求 $t\mathrm{e}^{-|t|}$ 的傅里叶变换。

(2) 根据 (a) 的结果，再结合对偶性质，求 $\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}$ 的傅里叶变换。

证明: (1) 因为

$$tx(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

所以，$t\mathrm{e}^{-|t|}$ 的傅里叶变换为

$$\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{2}{1+\omega^2}\right)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{-4\omega\mathrm{j}}{(1+\omega^2)^2}$$

(2) 设 $x(t) = t\mathrm{e}^{-|t|}$，$y(t) = \dfrac{4t}{(1+t^2)^2} = \mathrm{j}X(\mathrm{j}t)$

由引理*4.3.1*知,

$$Y(\mathrm{j}\omega) = -2\pi\mathrm{j}t\mathrm{e}^{-|t|}$$

§4 离散时间傅里叶变换

命题 4.4.1 设 $Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的逆变换是

$$y[n] = \left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)^2$$

其中 $0 < \omega_c < \pi$. 试确定 ω_c 的值，以保证

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}) = \frac{1}{2}$$

证明: 易知

$$\frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| \ge \omega_c \end{cases}$$

由傅里叶变换相乘性质得

$$\begin{aligned} Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) &= X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) * X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\omega_c}^{\omega+\omega_c} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\pi-\omega_c}^{\omega_c} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta + \int_{2\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(2\omega_c - \pi + 2\omega_c - \pi\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

即 $\omega_c = \dfrac{3\pi}{4}$.

命题 4.4.2

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}\right) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \le \pi$$

求 $x[n]$

证明： 由离散时间傅里叶变换对知

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le N \\ 0, & |n| > N \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{\sin\frac{(N+1)}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi k)$$

则

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) - 3\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi k) + 5\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \le \pi$$

由离散时间傅里叶变换卷积性质可知

$$x[n] = x_1[n] * u[n] + 1$$

即

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \le -2 \\ n+3, & |n| \le 1 \\ 4, & n \ge 2 \end{cases}$$

§5 采样

命题 4.5.1 采用离散时间滤波实现连续时间滤波，假定所用的采样周期为 T，输入 $x_c(t)$ 为带限信号，而有 $X_c(\mathrm{j}\omega)=0$，$|\omega|\geq\dfrac{\pi}{T}$。若整个系统具有

$$y_c(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_c\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

试求离散时间滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$。

证明： 由题设易得

$$Y_c(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega X_c(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}}$$
$$H_c(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y_c(\mathrm{j}\omega)}{X_c\mathrm{j}\omega)}=\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}}$$

因为

$$H_c(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}), & |\omega|\leq\dfrac{\pi}{T}\\ 0, & else\end{cases}$$

所以

$$H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T})=H_c\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{T}\right)=\mathrm{j}\frac{\omega}{T}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}},\quad |\omega|\leq\pi$$

由离散时间傅里叶逆变换公式得

$$\begin{aligned}h[n]&=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}H_d(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi}\mathrm{j}\frac{\omega}{T}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\\&=-\frac{\sin\left[\pi(n-\frac{1}{2})\right]}{\pi T\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

§6 拉普拉斯变换

命题 4.6.1 考虑有图所示 RL 电路。

(1) 当输入电流 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$ 时，确定该电路的零状态响应。

(2) 已知 $y(0^-)=1$，确定该电路在 $t>0^-$ 时的零输入响应。

(3) 当输入电流 $x(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$，初始条件同 (b) 时，确定该电路的输出。

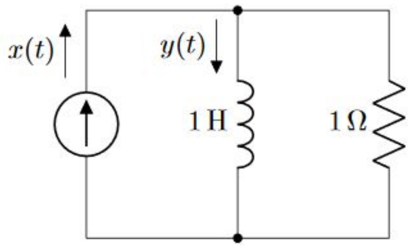

图 4.1: RL 电路图

证明： (1) 由图可知，RL 电路的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t)$$

当输入电流 $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$，且 $y(0^-) = 0$ 时，微分方程的 Laplace 变换为

$$s\mathcal{Y}(s) + \mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由变换对易知，电路的零状态响应为

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) - \mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

(2) 当输入电流 $x(t) = 0$，且 $y(0^-) = 0$ 时，微分方程的 Laplace 变换为

$$s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) + \mathcal{Y}(s) = 0$$

即

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{1}{s+1}$$

由 Laplace 变换对易知，电路的零状态响应为

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$$

(3) 当输入电流 $x(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$，初始条件同 (b) 时, 微分方程的 Laplace 变换为

$$s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) + \mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s) = \frac{1}{s+2}$$

即

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

由 Laplace 变换对易知，电路的零状态响应为

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) - 2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

命题 4.6.2 关于信号 $x(t)$，已知以下三点:

(1) $x(t)=0,\ t<0$

(2) $x\left(\dfrac{k}{80}\right)=0,\ k=1,2,3,\cdots$

(3) $x\left(\dfrac{1}{160}\right)=\mathrm{e}^{-120}$

设 $X(s)$ 为 $x(t)$ 的 Laplace 变换，则 $X(s)$ 在有限 s 平面内有几个极点。

§7　z 变换

命题 4.7.1 有一个信号 $x[n]$ 的 z 变换的代数表达式为

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(1) 假定收敛域是 $|z|>\dfrac{1}{3}$，利用长除法求 $x[0]$，$x[1]$ 和 $x[2]$ 的值。

(2) 假定收敛域是 $|z|<\dfrac{1}{3}$，利用长除法求 $x[0]$，$x[1]$ 和 $x[2]$ 的值。

证明： (1)

$$(1+z^{-1})/\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)=\left(1+\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{2}{9}z^{-2}\right)$$

(2)

$$(z^{-1}+1)/\left(\frac{1}{3}z^{-1}+1\right)=(3-6z^{1}+18z^{2})$$