Índice general

5. Integrales

Desde hace miles de años el cálculo de áreas ha sido un tema de gran interés, sin embargo los avances del último siglo son revolucionarios. Sabemos que el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de la base y la altura. Sin embargo, ¿cómo se define el área de una región en un plano si dicha región está acotada por una curva?. La respuesta a esta pregunta está relacionada al concepto de integral.

La integral es de importancia fundamental en estadística, ciencias e ingeniería. La utilizamos para calcular cantidades que van desde probabilidades y promedios, hasta el consumo de energía o las fuerzas ejercidas por el agua contra los muros de una represa.

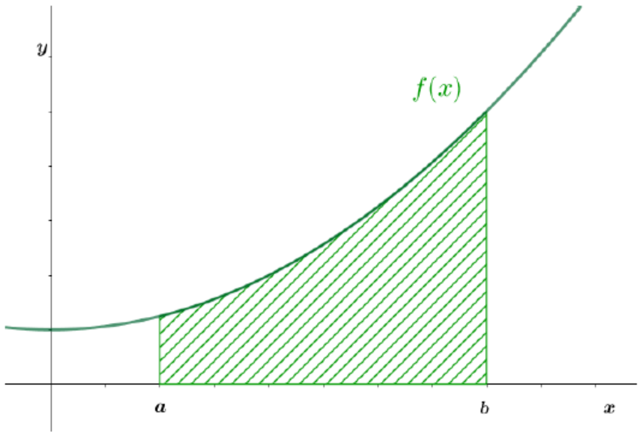
En este capítulo nos centraremos en el concepto de la integral, en algunos métodos de integración y en su uso para el cálculo de áreas de varias regiones que se forman con curvas.

5.1. Hacia el Concepto de Integral Definida

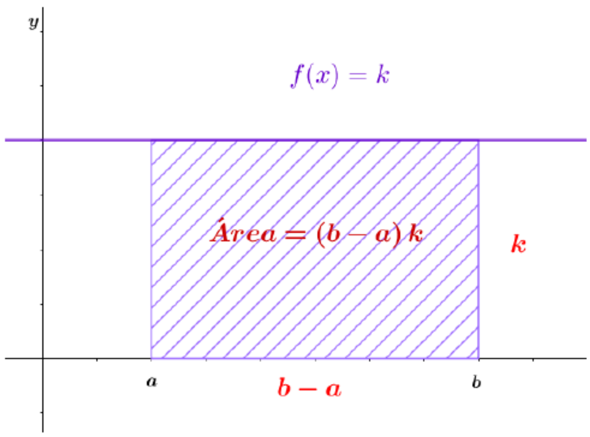
La integral definida es la herramienta clave en cálculo para definir y calcular importantes cantidades en matemáticas y ciencias, tales como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias curvas, probabilidades y pesos de diversos objetos, por sólo mencionar algunas. La idea detrás de la integral es que es posible calcular dichas cantidades si las dividimos en pequeñas partes y sumamos las contribuciones de cada una.

Uno de los problemas que dio origen al concepto de integral definida fue:

Hallar el área de una región plana limitada por la gráfica de una función $f(x)$ positiva y continua, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Ejemplo 5.1 Comencemos con un ejemplo sencillo. Calcular el área bajo la gráfica de una función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la siguiente figura:

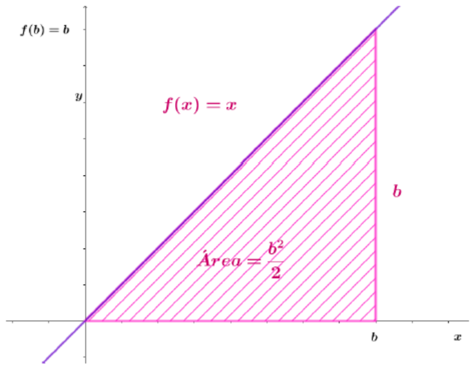


Es fácil ver que se trata del área de un rectángulo de lados $b - a$ y k. Por lo tanto el área bajo la curva es

$$A = (b - a)k$$

■

Ejemplo 5.2 Ahora consideremos el caso de la función lineal $f(x) = x$ en el intervalo $[0, b]$.



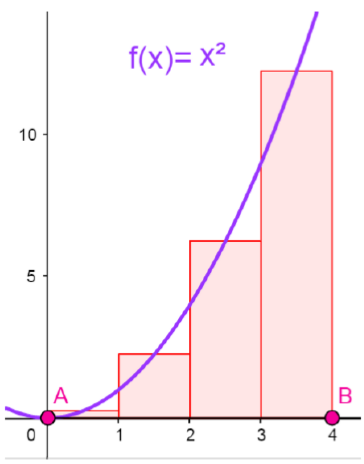
Este ejemplo también es un área conocida, ya que se trata de un triángulo de base b y altura $f(b) = b$. Así el área bajo la gráfica de una función lineal es

$$A = \frac{b^2}{2}.$$

Ahora nos preguntamos ¿cómo calculamos el área debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 4]$?

Una respuesta geométrica al problema es aproximar el valor del área con la suma de las áreas de un número finito de rectángulos.

Para hacer esto procedamos de la siguiente manera: dividamos el intervalo $[0, 4]$ en subintervalos de longitud 1. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



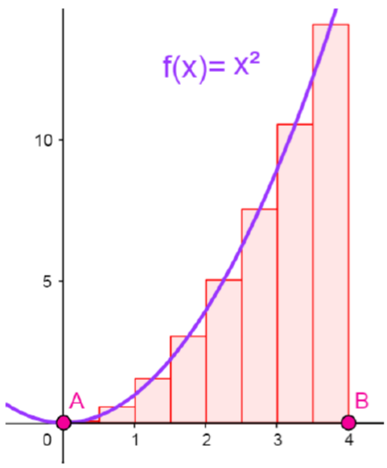
$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}\right)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k^*)\Delta x =$$

Donde Δx es el medida de la base del rectángulo y x_k^* es el punto medio del subintervalo. Lo anterior queda:

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} = \frac{84}{4} = 21$$

Puede observarse en la gráfica que el valor que encontramos no representa el valor exacto del área debajo de la gráfica de la función. Sin embargo es una primera aproximación.

Si quisiéramos ser más exactos, podríamos subdividir el intervalo en mayor cantidad de partes. Pues, hagámoslo, dividamos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{11}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{15}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{8} f(x_k^*)\Delta x.$$

Notar que, en esta subdivisión que hicimos, el valor de Δx es más pequeño pues el intervalo $[0,4]$ fue dividido en mayor cantidad de partes que en el caso anterior.

Por último, podrá el lector chequear que la suma anterior resulta:

$$\sum_{k=1}^{8} f(x_k^*)\Delta x = 21{,}25$$

Comparando el valor obtenido en el primer paso con este valor podemos intuir que este último es más aproximado al área debajo de la gráfica de f.

Si quisiéramos mejorar aún más la aproximación, podemos aumentar la cantidad de subintervalos, de modo que la longitud de la base de cada uno de los rectángulos será cada vez menor. Pero entonces, ¿cuál es el valor exacto del área que buscamos?

Si procedemos de esta manera, dividiendo el intervalo $[0,4]$ en subintervalos cada vez más pequeños, estaremos ajustando nuestro cálculo cada vez más al valor exacto del área buscada. Ya hemos desarrollado una herramienta que nos permite pensar en estos sucesivos cálculos en el que hay una cantidad que está cambiando. Sí, el concepto de límite será nuestro apoyo para poder dar respuesta a nuestra pregunta.

■

Lo que decimos es que con la idea de límite podemos estudiar cómo progresan las sucesivas aproximaciones del área que nos interesa conocer. Es decir que podremos considerar la suma de las áreas de rectángulos con base cada vez más pequeña, cuya longitud tiende a cero, y luego calcular el límite de esa expresión para poder conseguir el área exacta de la región que estamos considerando:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x = \text{Área}.$$

5.2. Integral definida

Definición 5.1

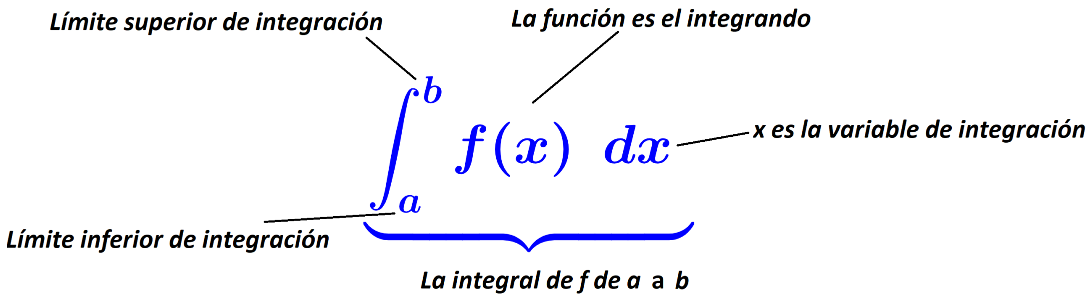
En general si se tiene una función f, continua y definida en un intervalo $[a,b]$. Si se divide el intervalo en subintervalos de igual longitud Δx, luego se toman los puntos medios de esos intervalos, $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$. Entonces **la integral definida de f, desde a hasta b** es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

Si este límite existe decimos que su valor es **la integral de f entre a y b**, en cuyo caso solemos decir que f es **integrable**.

<u>Observaciones:</u>

- Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama signo de integral. Se parece a una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas.
- La suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$ se llama **suma de Riemann**.
- Sabemos, por el ejemplo introductorio, que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos.



Teorema 5.2.1
Si f es continua en $[a,b]$, o si f tiene una cantidad finita (no infinita) de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a,b]$. Es decir, la integral definida existe.

Veamos algunas propiedades básicas de las integrales que ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad.

5.2.1. Propiedades de la integral definida

Teorema 5.2.2
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a,b]$ y sea k una constante, entonces:

1. Intervalo de ancho cero: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. Orden de integración: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. Linealidad: $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
4. Aditividad en el intervalo : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
5. Comparación : Si para todo $x \in [a,b]$ $\quad f(x) \le g(x),\quad$ entonces
$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$
6. Acotamiento: Si $M = \text{máx}[f]$ en $[a,b]$ y $m = \text{mín}[f]$ en $[a,b]$ entonces
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Ejemplo 5.3 Supongamos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5, \qquad \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2 \quad \text{y} \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7.$

Calcular las siguientes integrales definidas utilizando propiedades:

1. $\int_{4}^{1} f(x)\,dx$
2. $\int_{-1}^{1} (3\,h(x) + 2\,f(x))\,dx$
3. $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

Para el inciso 1. podemos usar la propiedad 2 : $\int_{4}^{1} f(x)\,dx = -\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 2$.

2. En este caso usaremos las propiedades de linealidad de la integral:

$$\int_{-1}^{1} (3\,h(x) + 2\,f(x))\,dx = \int_{-1}^{1} 3\,h(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,f(x)\,dx =$$
$$= 3\int_{-1}^{1} h(x)\,dx + 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 3(7) + 2(5) = 31$$

3. Usando la propiedad 4. (aditividad en el intervalo) podemos 'repartir' la integral en dos intervalos:

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = 5 + (-2) = 3$$

■

Actividad 5.1

1. Si $\int_{0}^{9} f(x)\,dx = 37$, $\int_{0}^{9} g(x)\,dx = 16$ encontrar el valor de $\int_{0}^{9} \left[2\,f(x) - \frac{1}{4}\,g(x)\right] dx$
2. Si $\int_{-2}^{3} h(x)\,dx = 12$ y $\int_{0}^{3} h(x)\,dx = 3$, hallar el valor de $\int_{-2}^{0} h(x)\,dx$
3. Si $\int_{-1}^{3} f(t)\,dt = 3$ y $\int_{-1}^{4} f(t)\,dt = 7$, determinar el valor de a) $\int_{3}^{4} f(t)\,dt$ y b) $\int_{-1}^{4} f(z)\,dz$

5.3. ¿Cómo se calculan las integrales?

Nos preguntamos ahora, si cada vez que tengamos que calcular una integral definida deberemos calcular el límite de las sumas de Riemann. La respuesta es que *no siempre*. Para obtener un modo de calcular las integrales definidas de manera más directa, vamos a utilizar el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona la integración y la derivación, y nos permite calcular la integral definida de f mediante otra función F cuya derivada sea f.

Definición 5.2

Si f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$, sea $g(x)$ una nueva función que a cada $x \in [a,b]$ le asigna la integral de f desde a hasta x, es decir

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

A ésta función g la llamamos **función integral de** f en $[a,b]$

En el siguiente teorema podremos definir la derivada de $g(x)$ y ello nos conducirá a resolver el problema del cálculo de la integral definida.

Teorema 5.3.1 Teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y

$$g'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Definición 5.3

Una función F se llama **primitiva** de una función f en $[a,b]$, si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo valor} \quad x \in [a,b].$$

También suele nombrarse a la primitiva como *antiderivada* de la función f, ya que el razonamiento involucrado en la búsqueda de una primitiva involucra el cálculo de una derivada.

La definición de función integral y el teorema fundamental del cálculo explican esta sencilla forma de calcular una integral, mediante la antiderivada.

Ejemplo 5.4 Si quisiéramos conocer la primitiva de la función $f(x) = 2x$, quizá nos resulte sencillo reconocer que se trata de $F(x) = x^2$, ya que la derivada de F es f.

■

En forma similar podemos pensar otras primitivas que no sean tan inmediatas, si recuperamos el razonamiento de las reglas de derivación e intentamos revertir su procedimiento.

Ejemplo 5.5 Si consideramos la función $g(x) = x^2$, podemos reconocer que se trata de una función polinómica de grado 2. Recordemos que cuando derivamos funciones polinómicas procedemos a bajar el exponente como factor y restar 1 en el exponente. Así, la derivada de una expresión polinómica es otra expresión polinómica con un grado menos. En forma inversa, la primitiva de una expresión polinómica es también polinómica y de un grado mayor. Podríamos entonces arriesgar una primitiva de $g(x) = x^2$ teniendo en cuenta que debe ser una expresión cúbica. Concretamente, si pensamos en $G(x) = x^3$, notemos que $G'(x) = 3 \cdot x^2$. Sin embargo, aunque $G'(x)$ tiene el mismo grado que $g(x)$, no es igual a la función g pues hay un factor 3 multiplicando. ¿Cómo podríamos proceder para ajustar nuestra elección de primitiva de g?

■

En cambio, chequear que una función dada es primitiva de otra es tan sencillo como derivar la primitiva.

Ejemplo 5.6 $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x) = 1$, ya que $F'(x) = f(x)$.

■

Ejemplo 5.7 La función $F(x) = \operatorname{sen}(x)$ es una primitiva de $f(x) = \cos(x)$. Mientras que la función $H(x) = -\cos(x)$ es la primitiva de $F(x)$.

■

5.3.1. Regla de Barrow

El siguiente procedimiento describe cómo calcular integrales definidas una vez que se haya calculado su primitiva. Se evalúa la primitiva hallada en los límites de integración superior e inferior, para finalmente calcular una diferencia.

Definición 5.4 Regla de Barrow
Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y F es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 5.8 Calcular las siguientes integrales definidas utilizando la regla de Barrow.

- $\displaystyle\int_{-1}^{3} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{3} = (3) - (-1) = 3 + 1 = 4$
- $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\,dx = sen(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = sen(\frac{\pi}{2}) - sen(0) = 1 - 0 = 1.$

■

5.4. Integral indefinida

En esta sección se presenta una notación para la primitiva, algunas expresiones de primitivas conocidas y un ejemplo en las que éstas se usan para evaluar luego integrales definidas.

Definición 5.5

Se denomina **integral indefinida** a

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

y significa que $F'(x) = f(x)$.

Debemos observar que el resultado de la integral indefinida es una primitiva de la función. Pero no es la única, pues si a ella le sumamos una constante obtenemos una nueva primitiva.

En efecto, como $F'(x) = f(x)$, es inmediato observar que $(F(x)+c)' = f(x)$, ya que la derivada de una constante es cero. Así, $F(x)+c$ también es una primitiva de $f(x)$. Es decir que la integral indefinida no es una única función, sino una familia de funciones.

Por lo anterior, solemos escribir:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

donde c es llamada **constante de integración**

Presentamos ahora una lista de integrales de funciones elementales que serán útiles para el cálculo de integrales de funciones más complejas.

Teorema 5.4.1

Sea c una constante cualquiera:

- $\displaystyle\int 1\,dx = x+c.$
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, con $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$.
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = ln(|x|)+c.$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x+c.$
- $\displaystyle\int sen(x)\,dx = -\cos(x)+c.$
- $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = sen(x)+c.$

Importante Las propiedades de linealidad enunciadas para la integrales definidas en el teorema 5.2.2 (inciso 3) también valen para las integrales indefinidas.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.9 Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (\sqrt{x} + x^{2/3})\,dx$. Usando linealidad de la integral, tenemos:

$$\int (\sqrt{x} + x^{2/3})\,dx = \int x^{1/2}\,dx + \int x^{2/3}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{5}x^{5/3} + c.$$

b) $\int (x^2+2\,e^x)\,dx$. También usaremos linealidad en este caso, lo cual nos permite realizar el cálculo de la primitiva del siguiente modo:

$$\int (x^2 + 2\,e^x)\,dx = \int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\,e^x + c$$

c)

$$\int \left(\pi\, sen(x) - \frac{5}{x}\right) dx = \pi \int sen(x)\,dx - 5\int \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\pi\cos(x) - 5\ln(|x|) + c$$

Donde también usamos la propiedad de linealidad de la integral.

■

Ejemplo 5.10 Calcular las primitivas que sean necesarias para evaluar las siguientes integrales definidas usando regla de Barrow:

a)

$$\int_0^3 (x^3 - 6\,x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 6\,\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 3\,(3)^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 3\,(0)^2\right) =$$
$$= \left(\frac{81}{4} - 27\right) - (0 - 0) = \frac{-27}{4}$$

b)

$$\int_{-\pi}^0 (e^x - \cos(x))\,dx = (e^x - sen(x))\Bigg|_{-\pi}^0 = \left(e^0 - sen(0)\right) - (e^{-\pi} - sen(-\pi)) =$$
$$= (1 - 0) - (e^{-\pi} - 0) = 1 - e^{-\pi}$$

■

5.5. Técnicas de Integración

A continuación estudiaremos algunas técnicas de integración que nos permitirán encontrar las primitivas de una amplia gama de funciones.

Todas las técnicas tienen como objetivo reducir la integral buscada a una integral ya conocida, inmediata, o más sencilla.

5.5.1. Integración por partes

Recordemos que la idea de integral indefinida es encontrar una función primitiva. Hemos dicho que en muchas ocasiones hallar una primitiva requiere pensar el mecanismo de derivar de manera inversa. De ese modo, podemos entender la búsqueda de primitiva como el proceso inverso, o proceso que desarma, a la derivación.

Como hemos visto en el capítulo anterior, al derivar un producto de funciones $f(x)\cdot g(x)$, obtenemos:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Si ahora, en cada lado de la igualdad, tomamos la integral:

$$\begin{aligned}\int (f(x)\cdot g(x))'\,dx &= \int (f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x))\,dx = \\ &= \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx\end{aligned}$$

y si recuperamos la idea de que la integral y la derivada son procesos inversos:

$$\begin{aligned}f(x)\cdot g(x) &= \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \\ f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx &= \int f'(x)\cdot g(x)\,dx\end{aligned}$$

Enunciaremos un método que recoge lo anterior y nos permitirá resolver integrales de funciones que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra.

Teorema 5.5.1 Método de Integración por partes

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) \;-\; \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Si llamamos $u = f(x)$, $v = g(x)$, de donde $du = f'(x)dx$, y $dv = g'(x)dx$:

podemos escribir el método de integración por partes en términos de u y v

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

Para hallar el valor de una integral definida usando el método de integración por partes, la expresión anterior se adapta de la siguiente manera:

$$\int_a^b u\cdot dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$

Recordemos que siempre que se quiera calcular una integral indefinida debemos obtener una función que sea primitiva, con lo cual tendremos que sumar una constante c para dar como resultado las infinitas soluciones.

Ejemplo 5.11 Calcular $\int x \cdot e^x dx$

si elegimos de esta forma:

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = 1dx \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Luego aplicando la fórmula nos queda:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

■

Ejemplo 5.12 Calcular $\int x \cdot ln(x) dx$

Observemos la elección de u y dv ya que si elegimos al revés el método no resuelve la integral.

si elegimos de esta forma:

$$u = ln(x) \quad dv = xdx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Aplicando la fórmula tenemos que:

$$\int x \cdot ln(x) dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx =$$
$$= ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int xdx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

■

5.5.2. Integración por sustitución

Así como en el método anterior, pensaremos en el proceso inverso a la derivación, pero en este caso partiendo de la derivación de una función compuesta, es decir la regla de la cadena.

Sabemos que si tenemos dos funciones F y g derivables podemos calcular la derivada de la composición de funciones con la regla de la cadena:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Si aplicamos integral a cada lado de la igualdad tenemos que

$$\int [F(g(x))]' dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Luego recordando que la integral y la derivada son procesos inversos obtenemos lo siguiente

$$F(g(x)) = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Suponiedo que F es una primitiva de f, $F'(x) = f(x)$ con lo cual

$$F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Veremos entonces un método para calcular la integral del producto de una función compuesta por la derivada de su argumento.

Teorema 5.5.2 Método de integración por sustitución

Si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y $g(x)$ es una función derivable entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Como indica su nombre, este método de integración consiste en la aplicación de un cambio de variable para simplificar la expresión a integrar.

Lo importante del método es escoger un cambio útil, ya que, en caso contrario, la integral resultante puede ser de mayor dificultad.

Si sabemos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y tenemos que calcular $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$, debemos identificar a la función $g(x)$ y su derivada para hacer un cambio de variables.

La sustitución elegida será $u = g(x)$.

Sabemos que calcular el diferencial de una función es igual al producto de su derivada por el diferencial de la variable, es decir que $du = g'(x)dx$ con lo cual la integral original podrá escribirse de una forma más simple

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Además será una expresión mucho más sencilla de integrar recordando que la primitiva de f es F

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

Con lo que la integral ya estará resuelta, pero quedará expresada en la variable u que es nuestra variable de sustitución. Para obtener el resultado final volveremos a reemplazar la variable u por $g(x)$ con lo cual obtendremos

$$F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Ejemplo 5.13 Calcular $\int (x^4 + x^2)^4 \cdot (4x^3 + 2x) dx$.

Si elegimos correctamente $u = x^4 + x^2$ veremos que $du = (4x^3 + 2x)\, dx$. Con lo cual la sustitución nos lleva a una integral de una expresión mucho más sencilla

$$\int (x^4 + x^2)^4 \cdot (4x^3 + 2x) dx = \int u^4 du$$

Que puede calcularse más fácilmente

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c$$

Si luego volvemos a reemplazar la variable u por su expresión original obtenemos el resultado final

$$\frac{u^5}{5} + c = \frac{(x^4 + x^2)^5}{5} + c$$

■

Ejemplo 5.14 Si en cambio tenemos que calcular una integral por sustitución definida en un intervalo, lo mejor es proceder como el ejemplo anterior y en el último paso calculamos el valor de la integral aplicando la regla de Barrow.

Calcular $\displaystyle\int_2^5 e^{2x^2+x} \cdot (4x+1)\, dx$.

Elegimos a $u = (2x^2+x)$ y luego vemos que $du = (4x+1)dx$. Entonces podemos reescribir la integral anterior en términos de la nueva variable:

$$\int e^{2x^2+x} \cdot (4x+1) dx = \int e^u du$$

La integral obtenida es sencilla de calcular

$$\int e^u du = e^u + c$$

Si luego volvemos a reemplazar u por su expresión original obtenemos el resultado de la primitiva

$$e^u + c = e^{2x^2+x} + c$$

Finalmente como estamos calculando una integral definida aplicamos la regla de Barrow con la primitiva hallada

$$\int_2^5 e^{2x^2+x} \cdot (4x+1)\, dx = (e^{2x^2+x} + c)\Big|_2^5 = (e^{2(5)^2+(5)} + c) - (e^{2(2)^2+(2)} + c) =$$
$$= e^{55} + c - e^{10} - c = e^{55} - e^{10}.$$

Notemos que al usar la regla de Barrow se cancela la constante de integración de la primitiva hallada anteriormente. En adelante cuando calculemos una integral definida no añadiremos la constante de integración.

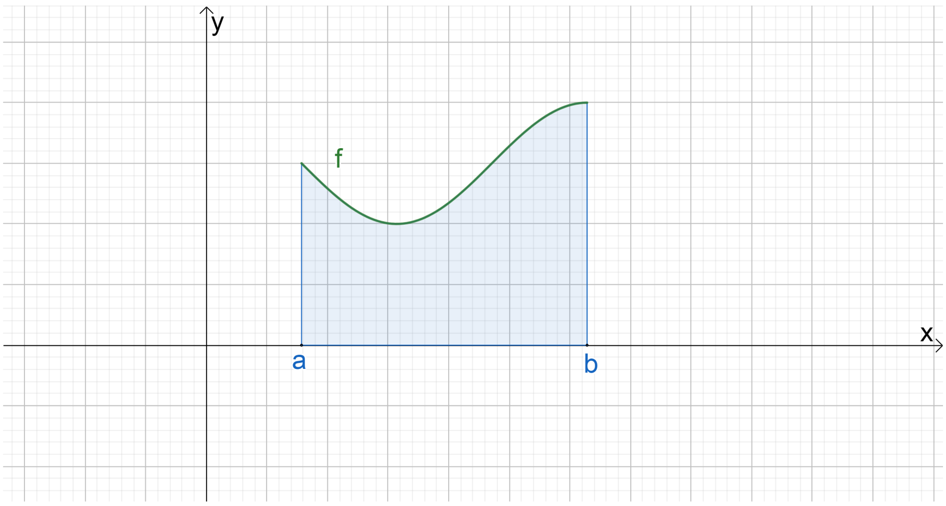
5.6. Área entre curvas

Una de las aplicaciones del cálculo de integrales definidas, como fue mencionado, es el cálculo de áreas de regiones plano delimitadas por gráficos de funciones.

5.6.1. Área entre el gráfico de una función y el eje x

Si la función está por encima del eje x:

Nos interesa calcular el área comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, sabiendo que f es integrable en $[a; b]$



Tal como vimos al inicio de este capítulo, en este caso donde la función es positiva[1], podemos decir que calcular el área que buscamos es hallar el valor de la integral definida entre a y b de la función f.

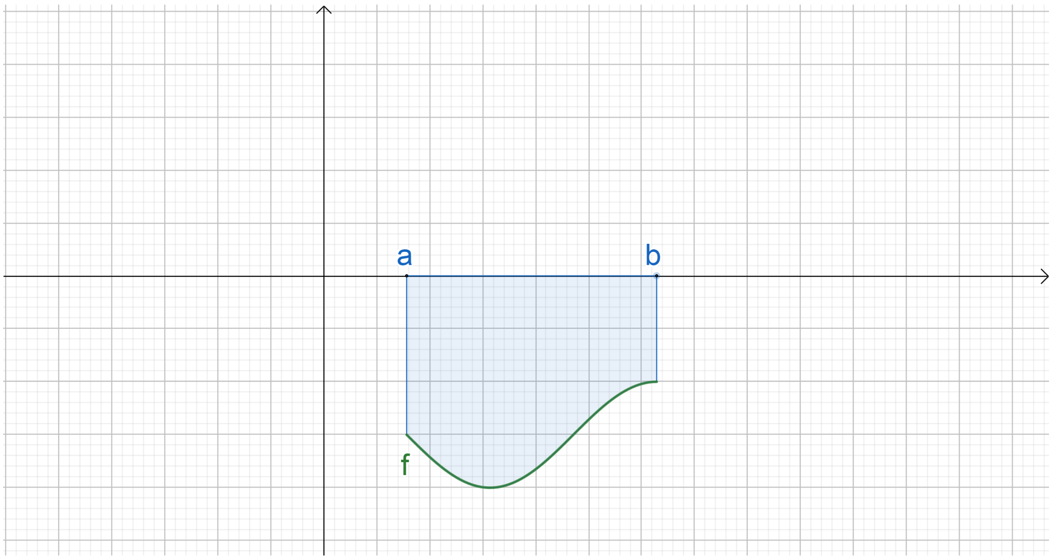
[1]Decimos que la función es positiva cuando sus imágenes son todas positivas, vemos en el gráfico que la curva está por encima del eje x

Definición 5.6

Si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a, b]$, el área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f, que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Si la función está por debajo del eje x:



En esta situación decimos que la función es negativa[2]. Recordemos que al comienzo del capítulo la integral se definió como el límite de una suma grande de áreas de rectángulos. Esos rectángulos tienen una altura determinada por la imagen de un punto en cada intervalo. En el caso que estamos considerando, todas las imágenes son negativas, con lo cual el resultado final de la integral será un valor negativo.

Es decir que en este caso la integral definida nos dará el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f en el intervalo $[a, b]$, pero con el signo negativo. Por lo tanto, para calcular el área debemos cambiar el signo de la integral.

Definición 5.7

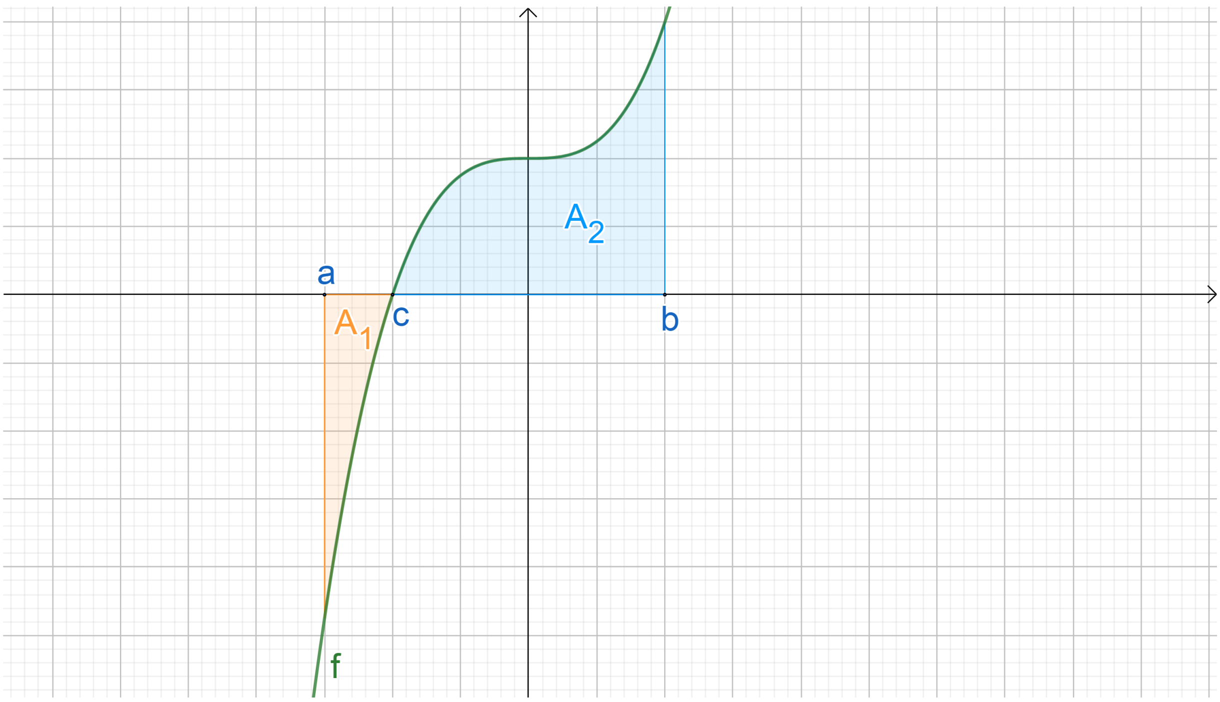
Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a, b]$, el área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f, que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Si la función está en parte por encima del eje x y en parte por debajo del eje x:

[2] es decir que todas las imágenes que estamos considerando son negativas, podemos ver esto en el gráfico ya que la curva está enteramente por debajo del eje x

En esta situación se combinan las dos situaciones anteriores, se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado. Debemos descomponer la región en dos áreas que ya sabemos calcular.
El procedimiento es sencillo, en primer lugar debemos identificar los ceros de la función. A modo de ejemplo, en el siguiente gráfico observamos que c es el punto del intervalo $[a;b]$ donde la función vale 0, además en la región A_1 sombreada en color naranja la función es negativa, es decir que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,c]$, y en la región A_2 sombreada en color azul la función es positiva con lo que decimos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [c,b]$.

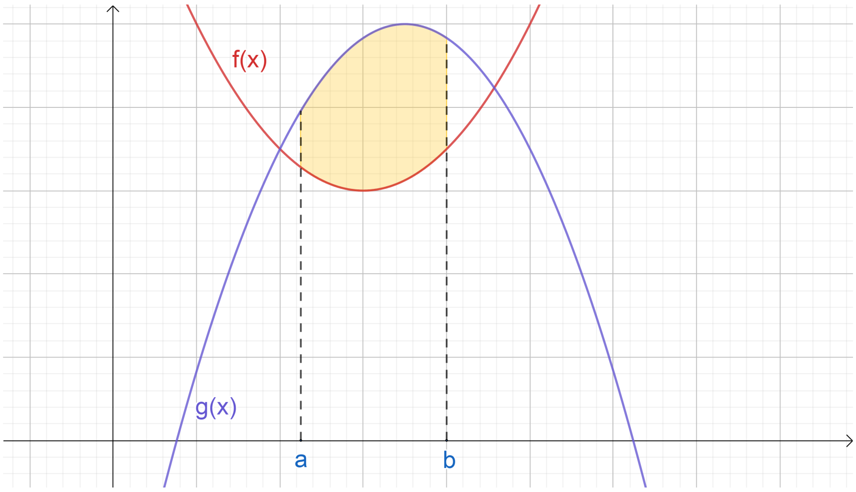


Definición 5.8
Si la función f es negativa en $[a,c]$ y positiva en $[c,b]$, el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f que además está acotada por las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es la suma de las áreas A_1 y A_2:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5.6.2. Área entre los gráficos de dos funciones

Nos interesa ahora calcular el área de una región comprendida entre los gráficos de dos funciones integrables f y g con $x \in [a,b]$.



El área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ puede calcularse con la integral $\int_a^b f(x)\,dx$. Similarmente el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función g que además está acotada por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ puede calcularse con la integral $\int_a^b g(x)\,dx$.

Pero dado que nos interesa hallar el valor del área comprendida entre ambas funciones, podemos pensarla como la diferencia entre las áreas que se calcularon en el párrafo anterior.

Definición 5.9

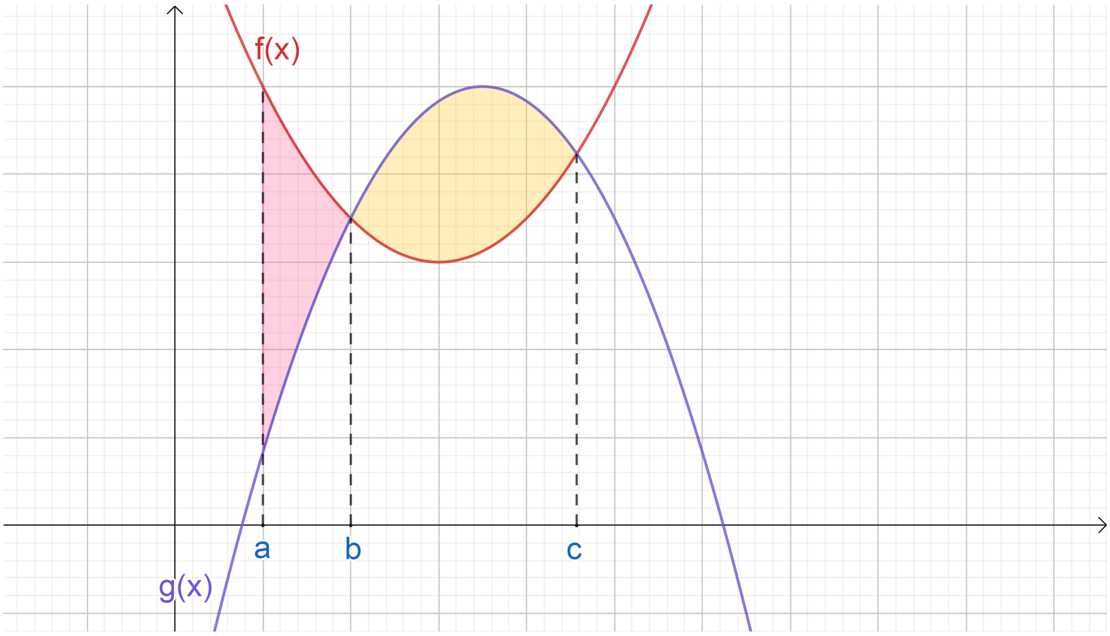
Si las funciones f y g cumplen que $g(x) \geq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos es:

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

En la práctica nos permitimos identificar coloquialmente a las funciones involucradas en este cálculo de área. Llamaremos *Techo* a la función que se encuentra arriba y *Piso* a la que se encuentra debajo. Por lo tanto lo que debemos hacer es identificar en cada intervalo cuál es la función techo y cuál la función piso para calcular:

$$A = \int_a^b (TECHO - PISO)\,dx$$

Si en el intervalo que debemos calcular el área entre los gráficos de dos funciones, éstas se intersecan, tenemos que partir el intervalo tantas veces como intersecciones haya entre las funciones.



Definición 5.10
Si las funciones f y g cumplen que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [b,c]$ el área de la región comprendida entre f y g en $[a,c]$ es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_b^c (g(x) - f(x))dx$$

Ejemplo 5.15 Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

Lo que debemos hacer en primer lugar es identificar el intervalo en el cual se requiere calcular el área. Para esto hallamos el los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones, es decir que buscamos los valores de x en los que $f(x) = g(x)$.

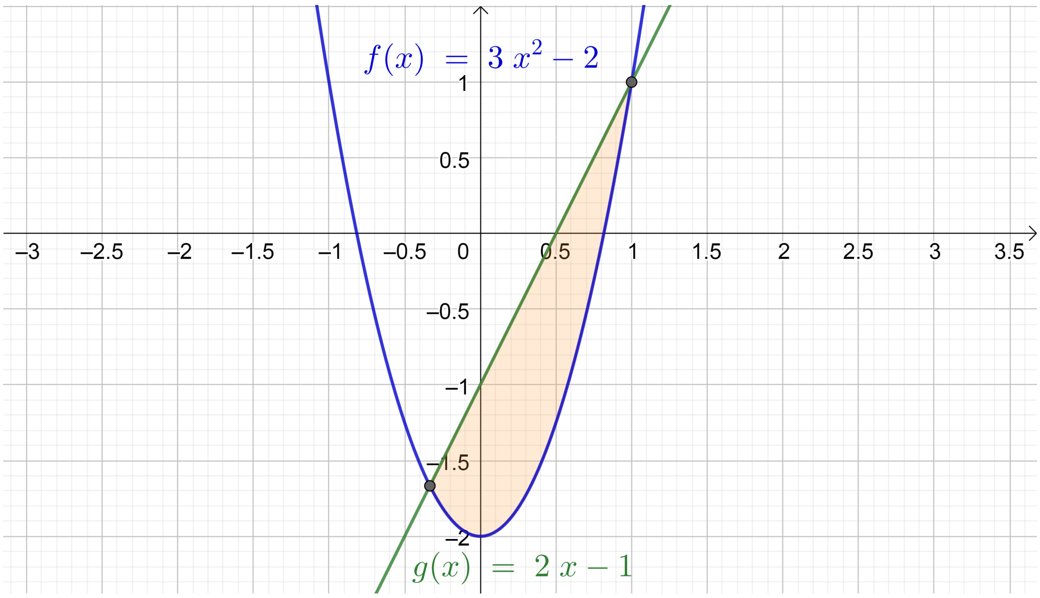
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3x^2 - 2 &= 2x - 1 \\ 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{3} \text{ ó } x = 1 \end{aligned}$$

Con lo cual debemos calcular el área en el intervalo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

Ahora bien, ¿qué función debemos considerar como techo y cuál como piso en ese intervalo?. Para eso tomamos un valor de prueba (VP) del intervalo y vemos qué función está por encima para identificar el techo y el piso.

$$
\begin{aligned}
VP &: x = 0\\
f(0) &= -2\\
g(0) &= -1
\end{aligned}
$$

Con lo cual, la función *Techo* es $g(x)$ y la función *Piso* es $f(x)$.



Con esto ya podemos calcular el valor del área en el intervalo $[-\frac{1}{3}, 1]$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [TECHO - PISO]\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [g(x) - f(x)]\, dx =\\
&= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [(2x-1) - (3x^2-2)] dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [2x - 1 - 3x^2 + 2] dx =\\
&= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} [-3x^2 + 2x + 1] dx = \left(-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}}^{1} =\\
&= \left(-x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(-1^3 + 1^2 + 1\right) - \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{32}{27}
\end{aligned}
$$

Con lo cual el área de la región es $A = \dfrac{32}{27}$.

■

Ejemplo 5.16 Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

Para iniciar, igualamos las funciones para encontrar el o los intervalos de integración:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
4x^3 &= 4x\\
4x^3 - 4x &= 0\\
4x(x^2-1) &= 0\\
x = 0 &\text{ ó } x^2 = 1\\
x = 0 &\text{ ó } x = -1 \text{ ó } x = 1
\end{aligned}
$$

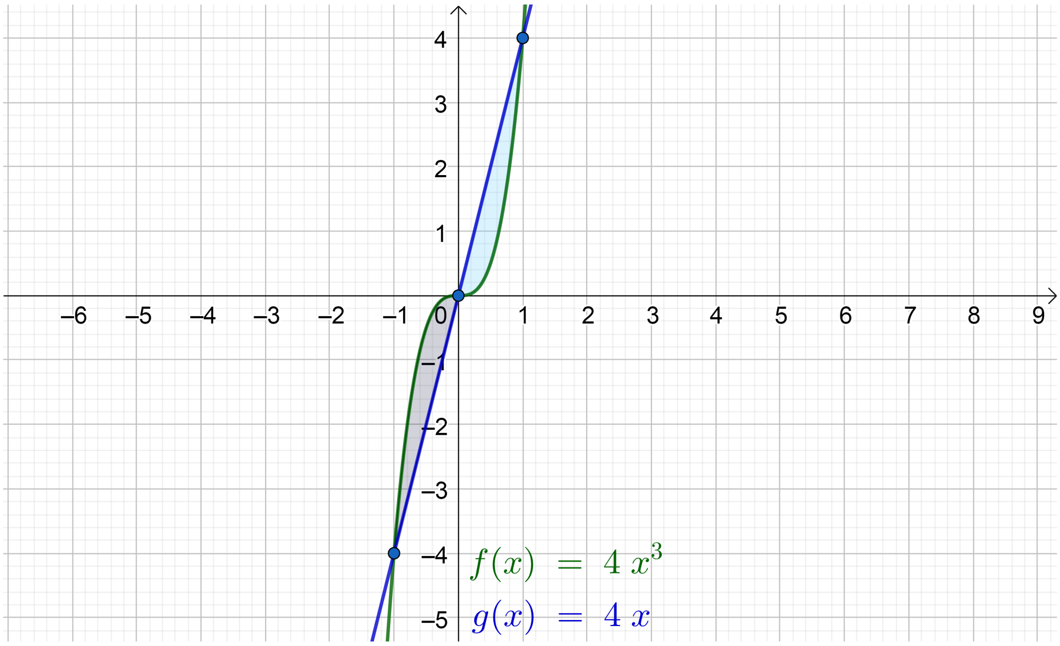
Con lo cual los intervalos en los que debemos integrar son $[-1,0]$ y $[0,1]$.

Seleccionamos un valor de prueba (VP) en cada uno de los intervalos para identificar las funciones techo y piso.

	$[-1,0]$	$[0,1]$
VP	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f(VP)	$-\frac{1}{2}$	-2
g(VP)	-2	2

Con lo que concluimos que en el intervalo $[-1,0]$ la función techo es $f(x)$ y la función $g(x)$ es el piso. Mientras que en el intervalo $[0,1]$ la función $g(x)$ es el techo y $f(x)$ es la función piso.

Observemos lo analizado en la siguiente figura.



Para finalizar, calculamos el valor del área como la suma de las integrales correspondientes en cada uno de los intervalos.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (TECHO - PISO)\, dx + \int_{0}^{1} (TECHO - PISO)\, dx = \\
&= \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x)) dx = \\
&= \int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)\, dx + \int_{0}^{1} (4x - 4x^3) dx = \\
&= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = \\
&= -((-1)^4 - 2(-1)^2) + (2(1)^2 - (1)^4) = 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área de la región encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$ es $A = A_1 + A_2 = 2$.

5.7. Ejercicios de Integrales

1. Calcular las siguientes integrales utilizando las propiedades y en caso de ser posible usando la regla de Barrow.

   a) $\int_{-2}^{3} 2x - 1\ dx$

   b) $\int x^2 + 2x + 8\ dx$

   c) $\int_{0}^{2\pi} \sin(x) + x\ dx$

   d) $\int_{0}^{4} 2e^x + 3x^4\ dx$

   e) $\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\ dx$

   f) $\int \cos(x) + \mathrm{sen}(x) + 2x^{\frac{3}{5}}\ dx$

   g) $\int_{-5}^{1} x^2 + 2x + 8\ dx$

   h) $\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos(x)\ dx$

2. Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos vistos.

   a) $\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4 \cdot (12x^3 + 10x)dx$

   b) $\int x \cdot cos(x)dx$

   c) $\int x^3 \cdot ln(x)dx$

   d) $\int cos(5x) \cdot 5dx$

   e) $\int \frac{2 + e^x}{e^x + 2x}dx$

   f) $\int x \cdot \sqrt{x - 1}dx$

   g) $\int_{0}^{8} \frac{1}{\sqrt{x + 1}}dx$

   h) $\int_{0}^{2\pi} x \cdot sen(x)dx$

3. Hallar el área comprendida entre las gráficas de las siguientes pares de funciones:

   a) $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 4$.

   b) $f(x) = x^4$ y $g(x) = x$.

   c) $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$.

4. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ entre $-2 \leq x \leq 1$.

5. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ entre $-1 \leq x \leq 2$.

6. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

6. Problemas de Optimización

Un problema de optimización consiste en obtener máximos mínimos una función que modela algún problema de la vida real. Por ejemplo, una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades o saber cuántos artículos deben fabricarse para que la producción sea lo más rentable posible.

En la solución de esos problemas, el desafío más grande suele ser, convertir el problema en palabras en un problema matemático de optimización, es decir, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. Comprender problema. Leer el problema con cuidado hasta que lo comprenda. ¿Qué datos se dan? ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas?
2. Elaborar un dibujo o diagrama. Identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. Introducir notación. Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar. Asimismo, seleccione símbolos para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, h para altura y t para el tiempo.
4. Escribir una ecuación para la cantidad desconocida. Si puede, exprese la incógnita como una función de una sola variable o con dos ecuaciones con dos incógnitas. En este paso se obtiene la función a optimizar. Escribir su dominio teniendo en cuenta el contexto del problema.
5. Derivar y hallar los puntos críticos. Aplique los métodos para hallar el valor máximo o el mínimo absolutos de f. Aprendidos en las aplicaciones de las derivadas. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado.

6.1. Ejercicios de Optimización

Resolver los siguientes problemas.

1. Se dispone de 240 metros de alambre para construir un corral rectángular. ¿Cuáles son las dimensiones del corral de área máxima que puede construirse con todo el alambre disponible?.
2. Entre todos los rectángulos de área 9. ¿ Cuál es el de menor perímetro?
3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12. ¿ Cuál es el de área máxima?
4. Se va a construir un corral doble que forma dos rectángulos idénticos adyacentes. Si se dispone de 120 metros de alambre, ¿qué dimensiones harán que el área del corral sea máxima?.
5. ¿Existirán dos números positivos tal que su suma es 4 y la suma del cuadrado del primero y del cubo del segundo sea lo mas pequeños posible?
6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.
7. Encuentren el punto sobre la recta $y = 2x - 3$ más próximos al origen.