

# Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

24 октября 2022 г.

## Содержание

<b>1. Теория меры</b>	<b>1</b>
1.1 Система множеств . . . . .	2
1.2 Объем и мера . . . . .	6
1.3 Продолжение мер . . . . .	9
1.4 Мера Лебега . . . . .	13
<b>2. Интеграл Лебега</b>	<b>19</b>
2.1 Измеримые функции . . . . .	20
2.2 Последовательности измеримых функций . . . . .	23
2.3 Определение интеграла . . . . .	26
2.4 Суммируемые функции . . . . .	29
2.5 Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	34
2.6 Произведение мер . . . . .	36

# 1. Теория меры

## 1.1. Система множеств

Полезные обозначения:  $A \sqcup B$  - объединение  $A$  и  $B$ , такие что  $A \cap B = \emptyset$

**Определение 1.1.** Набор мн-в дизъюнктивный, если мн-ва попарно не пересекаются:  $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

**Определение 1.2.**  $E$  – мн-во; если  $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$  – разбиение мн-ва  $E$ .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

**Определение 1.3.**  $\mathcal{A}$  – система подмн-в  $X$ :  $A \subset 2^X$

1.  $(\delta_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2.  $(\sigma_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3.  $(\delta)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4.  $(\sigma)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Определение 1.4.**  $\mathcal{A}$  – симметрическая система мн-в, если  $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

**Утверждение 1.1.** Если  $\mathcal{A}$  – симм., то  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$  и  $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$ .

**Доказательство.**  $A_\alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$  □

**Определение 1.5.**  $\mathcal{A}$  – алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симметр.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и  $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$  (по утв. 1.1  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ ; смотри [опр. алгебры](#)).

**Свойства.** алгебры мн-в:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Определение 1.6.**  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симм.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и свойство  $(\sigma)$  выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем  $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$ ).

**Замечание.**  $\sigma$ -алгебра  $\implies$  алгебра.

**Пример.** 1.  $2^X$  –  $\sigma$ -алгебра.

2.  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A}$  – всевозможные [огр. подмн-ва](#).  $\mathbb{R}^2$  и их дополнения. ( $\mathcal{A}$  – алгебра, но не  $\sigma$ -алгебра).

**Rem:** [огр. множество](#) – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ( $d(x, y) := ||x - y||$ ), т.е.  $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$  – ограничен.

3.  $\mathcal{A}$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра) подмн-в  $X$  и  $Y \subset X$ .  $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$  – индуцированная алгебра ( $\sigma$ -алгебра).

4. Пусть  $\mathcal{A}_\alpha$  – алгебры ( $\sigma$ -алгебры), тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра).

5.  $A, B \subset X$  ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей  $A, B$ :

$\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$

**Теорема 1.2.** Пусть  $\epsilon$  – семейство подмн-в в  $X$ , тогда существует наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра (алгебра)  $\mathcal{A}$ , такая что  $\epsilon \subset \mathcal{A}$ .

**Доказательство.**  $\mathcal{A}_\alpha$  – всевозможные  $\sigma$ -алгебры  $\supset \epsilon$ . Такие есть, так как  $2^X$  подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$ . Теперь проверим, что  $\mathcal{A}$  – наим. по вкл.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I$ .

**Определение 1.7.** 1. Такая  $\sigma$ -алгебра – борелевская оболочка  $\epsilon = (\mathcal{B}(\epsilon))$ .

2.  $X = \mathbb{R}^n$ ; такая  $\sigma$ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathcal{B}^n)$ .

**Замечание.**  $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

**Определение 1.8.**  $R$  – кольцо, если  $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$ .

**Замечание.** Кольцо +  $(X \in R) \implies$  алгебра.

**Определение 1.9.**  $P$  – полукольцо, если

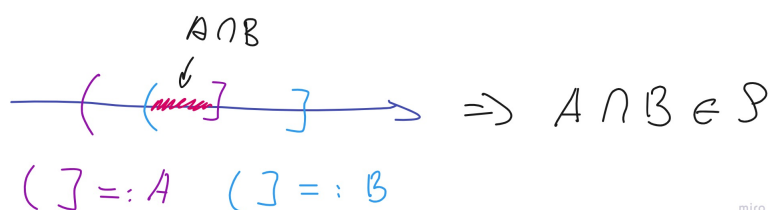
1.  $\emptyset \in P$

2.  $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$

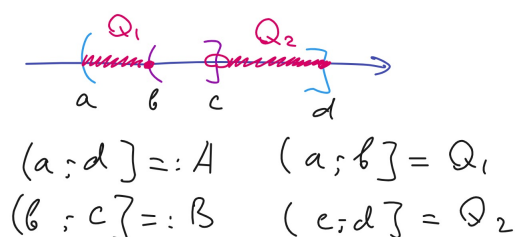
3.  $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$ , такие что  $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$ .

**Пример.**  $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$  – полукольцо.

Свойство 2:



Свойство 3:



**Лемма.**  $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left( \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

**Доказательство.**  $\supset$ : Дизъюнктивность  $B_n \subset A_n$  и при  $m > n$   $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset$ .

$\subset$ : Пусть  $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$ . Возьмем наим.  $m$ , такой что  $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$ .  $\square$

**Теорема 1.3.**  $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ . Тогда

1.  $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  – полукольцо.

2.  $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ , где  $Q_{kj} \in \mathcal{P}$  и  $Q_{kj} \subset P_k$ .

**Доказательство.** 1. индукция по  $n$ . База – опр. полукольца. Переход  $(n \rightarrow n+1)$ :

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \underbrace{\left( Q_j \setminus P_{n+1} \right)}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}}$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\left( P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j \right)}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}$$

$\square$

**Замечание.** В (2) можно писать  $n = \infty$ .

**Определение 1.10.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-ва  $X$ .

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-ва  $Y$ .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$  – декартово произведение полуколец.

**Теорема 1.4.** Декартово произведение полуколец – полукольцо.

**Доказательство.**

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

$\square$

**Замечание.** Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении:  $2^X \times 2^Y$  – полукольцо.

**Определение 1.11.** Замкнутый параллелепипед  $a, b \in \mathbb{R}^m$ .

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$$

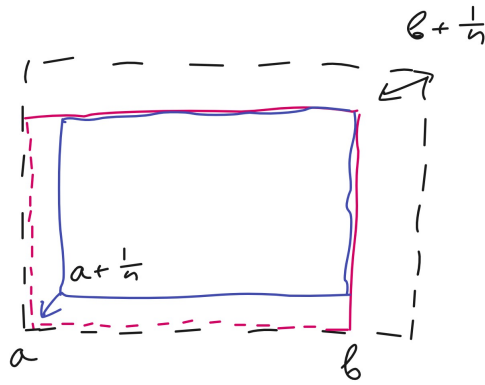
**Теорема 1.5.** Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

**Доказательство.**  $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

**Обозначения:**  $\mathcal{P}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$ .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$  с рациональными координатами вершин.

**Теорема 1.6.**  $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – полукольца.

**Доказательство.**  $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

**Теорема 1.7.**  $G \neq \emptyset$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в  $G$  (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

**Доказательство.**  $R_x$  – ячейка,  $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G, x \in R_x$ , получаем, что  $G = \bigcup_{x \in G} R_x$ .



Выкинем повторы:  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

□

**Следствие.**  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$ .

**Доказательство.** 1.  $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

$$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$$

$$G - \text{открытое} \implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$$

□

## 1.2. Объем и мера

**Определение 1.12.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо.  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ .  $\mu$  – объем, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

**Определение 1.13.**  $\mu$  – мера, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k}_{\text{счетная аддитивность}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

**Упражнение.**  $\mu$  – мера. Если  $\mu \not\equiv +\infty$ , то условия  $\mu\emptyset = 0$  выполнено автоматически.

**Пример.** 1.  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mu(a, b] := b - a$  – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – нестрого монотонная

$$(a) \mu_g(a, b] := g(b) - g(a) \text{ (упр. доказать, что объем).}$$

3.  $\mathcal{P}^m$  (m-мерные ячейки),  $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ ,  $a := (a_1, \dots, a_m)$ ,  $b := (b_1, \dots, b_m)$  – классический объем.

$$4. \mathcal{P} = 2^X, \quad x_0 \in X, \quad a \geq 0$$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$\mu$  – мера.

5.  $\mathcal{P}$  – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$\mu$  – объем, но не мера.

**Теорема 1.8.**  $\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$

$$1. \text{ Монотонность: } \mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$$

$$2. (a) \text{ Усиленная монотонность: } P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}. \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$$

(b) Пункт (a), но  $n = \infty$

3. Полуаддитивность:  $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$  и  $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ , тогда  $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

**Доказательство.** 1. Очев тип.

$$2. (a) P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$(b) \bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^\infty \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \text{ (}\mathcal{P} \text{ - полукольцо)}, \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

**Замечание.** 1. Если  $\mathcal{P}$  – кольцо и  $A, B$  ( $B \subset A$ )  $\in \mathcal{P}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

**Теорема 1.9.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-в  $X$ ,  $\mu$  – объем на  $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-в  $Y$ ,  $\nu$  – объем на  $\mathcal{Q}$

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

Тогда  $\lambda$  – объем на  $P \times Q$ .

**Следствие.** Классический объем на ячейках – действительно объем.

**Доказательство.** Простой случай.  $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□



**Пример.** 1. Классический объем на ячейках  $\lambda_m$  – мера

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда  $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$  – мера.

(Rem:  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$  – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера:  $\mu A := \#A$  – кол-во элементов.

4.  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – не более чем счетное множество,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ ,  $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$  – мера.

**Доказательство.** 4.  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

$$1. \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$$

$$2. \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***)$$

1.  $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$  – т.к.  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i, j : i \neq j)$ , то каждое слагаемое  $w_k$  не более 1 раза попадет в  $(*)$  и  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***) \geq \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) = \mu A$  – нер-во верно, так как мы можем к каждому  $w_k$  из  $(**)$  найти этот же  $w_k$  в  $(***)$ .

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

**Теорема 1.10.** (О счетной аддитивности меры).

$\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu$ -мера  $\Leftrightarrow$  если  $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P, P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$  (счетная полуаддитивность).

**Доказательство.** " $\Leftarrow$ ": Пусть  $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$ , тогда надо д-ть, что  $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$ : для " $\leq$ " – счетная полуаддитивность, для " $\geq$ " – усиленная монот. объема.

$$\begin{aligned} \text{"}\Rightarrow\text{"}: P'_n &:= P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}, \text{ где } Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n} - \text{усиленная монот. объема. } \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n. \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера на  $\sigma$ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

**Доказательство.**  $\mu A_n = 0 \implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$ .

□

**Теорема 1.11.** (О непрерывности меры снизу).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mu$  – мера  $\Leftrightarrow$  если  $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$ , то  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$  – непр. меры снизу.

**Доказательство.** " $\Rightarrow$ ":  $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ ,  $A_0 = \emptyset$ .

$B_n$  – дизъюнкты:  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left[\bigsqcup B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" $\Leftarrow$ ": Пусть  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n \quad \square$$

**Теорема 1.12.** (О непрерывности меры сверху).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  и  $\mu X < +\infty$ .

Тогда равносильны:

1.  $\mu$  – мера
2. если  $A_n \supset A_{n+1}$ , то  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , то  $\lim \mu A_n = 0$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2):  $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$ .  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$ ,  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , тогда  $\lim \mu A_n = 0$ .

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n. \quad \square$$

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера,  $A_n \supset A_{n+1}$  и существует  $m$ , такое что  $\mu A_m < +\infty$ , тогда  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

**Доказательство.** Просто берем  $X := A_m$  и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху.  $\square$

**Упражнение.** Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

### 1.3. Продолжение мер

**Определение 1.14.**  $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$  – субмера, если

1.  $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если  $A \subset B$ ,  $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

**Замечание.** 1. счетная полуаддитивность  $\Rightarrow$  конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности)  $A \subset B$ ,  $n = 1$ .

**Определение 1.15.**  $\mu$  – полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , если  $A \subset B \in \mathcal{A}$  и  $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$ .

**Замечание.** это означает, что  $\mu A = 0$ .

**Определение 1.16.**  $\nu$  – субмера, назовем  $E \subset X$   $\nu$ -измеримым, если  $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

**Замечание.** Достаточен знак " $\geq$ " (следует из счетной полуаддитивности).

**Теорема 1.13. Каратеодори.**

Пусть  $\nu$  – субмера. Тогда все  $\nu$ -измеримые мн-ва образуют  $\sigma$ -алгебру и сужение  $\nu$  на эту  $\sigma$ -алгебру – это полная мера.

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{A}$   $\nu$ -измеримые мн-ва.

1. Если  $E = \emptyset$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

$$\forall A \subset X, \underbrace{\nu A}_{?} \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$ , тогда доказали вопросик сверху.

2.  $\mathcal{A}$  – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если  $E$  и  $F \in \mathcal{A}$ , то  $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) &= \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \\ &\nu(A \setminus (E \cup F)) \end{aligned}$$

4.  $\mathcal{A}$  – алгебра.

5.  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $E_n \in \mathcal{A} \implies E \in \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) &\geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ \implies \nu A &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если  $E_n \in \mathcal{A}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

7.  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

8.  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \underbrace{\nu E}_{?} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что  $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$  (т. к.  $\leq$  уже есть из определения субмеры). Знаем, что  $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

**Определение 1.17.**  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ ,  $A \subset X$ .

$$\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

если покрытия нет, то  $+\infty$ .

– внешняя мера, порожд.  $\mu$ .

**Замечание.** 1. Можно считать, что  $P_k$  – дизъюнкты

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если  $\mu$  задана на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то  $\mu^* A = \inf \{ \mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B \}$

**Теорема 1.14.** Пусть  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu^*$  – субмера, совпадающая с мерой  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{P}$ , хотим доказать, что  $\mu A = \mu^* A$ .

” $\geq$ ”: очевидно, так как множество покрывает само себя.  $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \}$

$$\text{”}\leq\text{”}: A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \quad \mu A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf = \mu^* A$$

2.  $\mu^*$  – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \underbrace{\implies}_{?} \quad \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$$

$\mu^* A_n = \inf \dots$ , берем покрытие  $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  т.ч.  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$  и  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  – устремляем  $\epsilon$  к нулю.

□

**Определение 1.18.** Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру  $\mu_0$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .
2. Берем  $\mu_0^*$  – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех  $\mu_0^*$ -измеримых множеств.

Получилась полная мера  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$  и  $\mu P = \mu_0 P$  для  $P \in \mathcal{P}$ .

Множества, содержащиеся в  $\mathcal{A}$ , назовем  $\mu$ -измеримыми.

**Теорема 1.15.** Это действительно продолжение, то есть  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$ ,  $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$ .

Рассмотрим случаи:

1.  $A \in \mathcal{P}$ .

$$\mu_0^* A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2.  $A \notin \mathcal{P}$ .

Если  $\mu_0^* A = +\infty$ , то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что  $\mu_0^* A < +\infty$ . Возьмем  $P_k \in \mathcal{P}$ , такое что  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$ .

Знаем, что  $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0^* A \end{aligned}$$

□

**Замечание.** 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как  $\mu$ .

Если  $A$  –  $\mu$ -измеримое множество, то  $\mu A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

**Упражнение.** Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же внешнюю меру, что и  $\mu$ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую  $\sigma$ -алгебру.

4.

**Определение 1.19.**  $\nu$  –  $\sigma$ -конечная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , если  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$ .

Можно ли по-другому продолжить на  $\sigma$ -алгебру  $\mu$ -измерим. мн-в?

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на  $\mu$ -измеримых множествах.

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то обязательно.

**Теорема 1.16.**  $\mu$  – стандартное продолжение меры с полукольца  $\mathcal{P}$ ,  $\mu^*$  – соответствующая внешняя мера,  $A \subset X$ ,  $\mu^* A < +\infty$ . Тогда  $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$ , такие что  $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ ,  $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ,  $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$ .

**Доказательство.**  $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$ , берем покрытие с суммой  $< \mu^* A + \frac{1}{n}$ .

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

**Следствие.**  $\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$ .  $A$  –  $\mu$ -измеримое мн-во и  $\mu A < +\infty$ . Тогда  $A = B \sqcup e$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  и  $\mu e = 0$ .

**Доказательство.** Берем  $C \in \underbrace{\mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$  из теоремы.  $A \subset C$ , и  $\mu A = \mu C$ .

$e_1 := C \setminus A$ ,  $\mu e_1 = 0$ , теперь подставляем  $e_1$  в теорему:

$$\text{найдется } e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A.$$

$$C \setminus e_2 \subset B \subset C, \quad \mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A. \quad e = A \setminus B \implies \mu e = 0$$

□

**Теорема 1.17.** (Единственность продолжения).

$\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$ .

$\nu$  – другая мера на  $\mathcal{A}$ , совпадающая с  $\mu$  на  $\mathcal{P}$ . Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная, то  $\mu = \nu$ .

**Доказательство.** Если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$  (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{ \sum \mu P_n \} \geq \nu A.$$

Возьмем  $P \in \mathcal{P}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ :  $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если  $\mu P < +\infty$ , то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A \quad \square$$

## 1.4. Мера Лебега

**Теорема 1.18.** Классический объем  $\lambda_m$  на полукольце ячеек  $\mathcal{P}^m$  – мера.

**Доказательство.** Так как  $\lambda_m$  – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \underset{?}{\implies} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем  $\epsilon > 0$ .

Затем возьмем:

1.  $[a, b'] \subset [a, b]$  и  $\lambda_m[a, b] < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$ .
2.  $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset [a^{(n)}, b^{(n)})$  и  $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}$ .

Тогда получаем, что  $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}} \implies$  существует конечное подпокрытие, то

есть  $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$ .

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}).$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\lambda_m[a, b'] \underset{\text{кон. полуаддитивность}}{\leq} \sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать  $\lambda_m[a, b']$  с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b] - \epsilon < \lambda_m[a, b'] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Переносим  $\epsilon$  в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + 2\epsilon$$

$$\lambda_m[a, b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) - \text{получили, что хотели.} \quad \square$$

**Определение 1.20.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  (обозначение  $\lambda_m$ ) – стандартное продолжение классического объема с  $\mathcal{P}^m$ .

$\sigma$ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская  $\sigma$ -алгебра ( $\mathcal{L}^m$ ).

**Замечание.**  $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k - \text{ячейки и } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$ .

Можно вместо  $P_k \in \mathcal{P}^m$  писать  $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$ .

**Свойства.** Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого  $> 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  - открытое,  $x \in G$ ,  $B$  – шар, накрывающий  $x$  и  $B \subset G$ , вписываем ячейку в шар.  $\square$

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва  $= 0$ .

**Доказательство.** Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по  $\epsilon$ ), тогда  $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$ .  $\square$

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

**Доказательство.** Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик.  $\square$

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

**Доказательство.** Берем все  $\mathbb{R}^m$  и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда  $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$ , тогда  $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$ .  $\square$

5. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ .

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$  и  $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ , тогда  $E \in \mathcal{L}^m$

**Доказательство.**  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$  и  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ .

$A \subset E \subset B$ ,  $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$ .

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$ .

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$ .  $\square$

6. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ , такое что  $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$  и  $E \subset B_\epsilon$ .

Тогда  $E \in \mathcal{L}^m$  и  $\lambda_m E = 0$ .

**Доказательство.**  $A_\epsilon := \emptyset \xRightarrow{\text{свойство (5)}} E$  – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$ .  $\square$

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \text{Int} E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$ .  $\square$

10. Если  $\lambda e = 0$ , то существуют кубические ячейки  $Q_j$ , такие что  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \supset e$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$ , нарезаем  $P_j$  на кубические ячейки.  $\square$

11. Если  $m \geq 2$ , то гиперплоскость  $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$  имеет нулевую меру.

**Доказательство.**  $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$ ,  $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Достаточно доказать, что  $\lambda E_n = 0$ .  $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$ , так как  $n$  фиксированное, а  $\epsilon$  – произвольное  $\implies \lambda E_n = 0$ .  $\square$

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединении таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12.  $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$  – по предыдущему свойству.

**Замечание.** Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

**Замечание.** 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если  $m \geq 2$ , то пример это гиперплоскость  $H_1(c)$  подходит.

Если  $m = 1$ , то подходит [Канторово множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

$K$  – несчетно,  $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифр } 1\}$ , а у таких чисел есть биекция между  $[0, 1]$ , просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

**Теорема 1.19.** (Регулярность меры Лебега).

Если  $E$  – измеримое, то найдется  $G$  – открытое, такое что оно покрывает  $E$  и мера зазора  $< \epsilon$ , то есть  $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$ .

(1): Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем покрытие, для которого  $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$ .

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$ , хотим  $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$ .

Тогда  $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$  – открытое и  $E \subset G$ .

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть  $\lambda E = +\infty$ .  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , такие что  $\lambda E_n < +\infty$ .

Возьмем  $G_n$  – открытое  $\supset E_n$ , такое что  $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$ .



$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  – открытое  $G \supset E$ .

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}. \quad \square$$

**Следствие.** 1. Если  $E$  – измеримо, то найдется  $F \subset E$  – замкнутое, такое что  $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$ , такое что  $\lambda(\underbrace{G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G)=E \setminus F}) < \epsilon$ , где  $F := \mathbb{R}^m \setminus G$  – замкнутое и  $F \subset E$ .  $\square$

2. Если  $E$  – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

**Доказательство.**  $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем  $F$  – замкнутое из второго вывода и  $K_n := [-n, n]^m \cap F$  – компакт.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$  и  $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если  $\lambda F = +\infty$ , то есть  $K_n$  со сколь угодно большой мерой.

Если  $\lambda F < +\infty$ , то есть  $K_n$ , такие что  $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$   $\square$

3. Если  $E$  – измеримо, то существует последовательность компактов  $K_n$ , такая что компакты  $K_n \subset K_{n+1}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем  $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть  $\lambda E = +\infty$ . Берем  $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$ .

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j \quad (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет).  $\square$

**Упражнение.**  $E$  – измеримое. Д-ть, что  $\exists G_n$  – открытое  $\supset E$ ,  $G_n \supset G_{n+1}$ , т.ч.  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Теорема 1.20.** При сдвиге мн-ва на вектор  $\vec{v}$  измеримость сохраняется и мера не изменяется.

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  заданы на ячейках и на них совпадают  $\implies \mu = \lambda$  по единственности продолжения.  $\square$

**Теорема 1.21.**  $\mu$ -мера на  $\mathcal{L}^m$ , т.ч.

1.  $\mu$  – инвариантна относительно сдвигов.

2.  $\mu$  конечна на ячейках =  $\mu$  конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда  $\exists k \in [0; +\infty)$ , т.ч.  $\mu = k \cdot \lambda$  (т.е.  $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$ )

**Доказательство.**  $Q := (0, 1]^m$ ,  $k := \mu Q$ ,  $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1.  $k = 1$ . Надо доказать, что  $\mu = \lambda$ , достаточно доказать, что  $\mu = \lambda$  на  $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$  достаточно доказать на  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .  
 $Q$  можно сложить из  $n^m$  сдвигов  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .  
 $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m$ .
2.  $k > 0$ .  $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$ . Тогда  $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$ .
3.  $k = 0$ . Покажем, что  $\mu \equiv 0$ .  
 $\mu Q = 0$ ,  $\mathbb{R}^m$  – счетное объединение сдвигов  $Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0$ .

□

**Теорема 1.22.**  $G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если  $e \subset G$ , т.ч.  $\lambda e = 0$ , то  $\Phi(e)$  – мн-во нулевой меры.
2. Если  $E$  – измеримое, то  $\Phi(E)$  – измеримое.

**Замечание.** Для  $\Phi$  – непрер. или даже дифф. это неверно.

**Доказательство.** Пункт (1):

Случаи:

1.  $e \subset P \subset CLP \subset G$ ,  $P$  – ячейка  $\implies \|\Phi'\|$  непрерывно на  $G \supset Cl P$  – компакт  $\implies \|\Phi'\| \leq M$  на  $Cl P$  (норма ограничена на замыкании  $P$ ).  
 $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|$ , где  $x, y \in P$ ;  $c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\|x - y\|$   
 Существуют кубические ячейки, такие что  $Q_j$ , т.ч.  $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$   
 Рассмотрим  $\Phi(Q_j)$   
 Пусть  $a_j$  – сторона кубика  $Q_j$ .  $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$  (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка)  $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\sqrt{m}a_j$ .  
 Зафиксируем  $x$  и меняем  $y \implies \Phi(Q_j)$  содержится в шаре с центром в  $\Phi(x)$  и радиусом  $M\sqrt{m}a_j \implies \Phi(Q_j)$  содержатся в ячейке  $R_j$  со стороной  $2M\sqrt{m}a_j$ .  
 $\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$   
 $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M\sqrt{m})^m a_j^m = (2M\sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e)$  измеримо и  $\lambda(\Phi(e)) = 0$ .
2.  $e$  – произвольное  $\subset G$ ,  $\lambda e = 0$ . Представим  $G$  как  $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ , где  $P_j$  – ячейка  $Cl P_j \subset G$ .  
 $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j)$  – мн-ва нулевой меры  $\implies \lambda(\Phi(e)) = 0$ .

Пункт (2):

$E$  – измеримое  $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ ,  $\lambda e = 0$ ,  $K_n$  – компакт  $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$ .  
 $\lambda(\Phi(e)) = 0$  и  $\Phi(K_n)$  – компакт  $\implies$  измеримое. □

**Теорема 1.23.**  $\lambda$  – инвариантна относительно движения.

**Доказательство.** Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что  $\lambda$  не меняется. Проверим поворот:

пусть  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U - \text{линейное отображение}}, \mu, \lambda - \text{заданы на } \mathcal{L}^m.$

$\mu$  – инварианта относительно сдвига.  $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$ .  $\mu$  конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда  $\mu = k\lambda$ .

Хотим показать, что  $k = 1$ . Но на единичном шаре  $B$ ,  $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$ .  $\square$

**Теорема 1.24.** (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – линейное,  $E$  – измеримое. Тогда  $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T - \text{лин. отображ.}}, \mu \text{ инвариантно относительно сдвига и}$

конечно на огр. мн-вах.  $\implies \mu k \cdot \lambda$ , где  $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

$\square$

**Пример.** неизмеримое мн-во в  $\mathbb{R}$ .

$x \sim y$  если  $(x - y) \in \mathbb{Q}$  – отношение эквивалентности.

Разобьем  $\mathbb{R}$  на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку  $(0, 1]$ .

$A$  – получившееся мн-во. Докажем, что  $A$  не может быть измеримым.

От противного. Если  $\lambda A = 0$ , то  $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$ . Но тогда  $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$  – противоречие.

Если  $\lambda A > 0$ .  $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (A + r) \subset (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$  противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

## 2. Интеграл Лебега

## 2.1. Измеримые функции

**Определение 2.1.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , лебеговы мн-ва функции  $f$ :

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

**Теорема 2.1.**  $E$  – измеримое,  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , тогда равносильны:

1.  $E\{f \leq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
2.  $E\{f < a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
3.  $E\{f \geq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
4.  $E\{f > a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Доказательство.** 1.  $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

$$2. (2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$$

$$3. (1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$4. (3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$$

□

**Определение 2.2.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\forall a \in \mathbb{R}$  все ее лебеговы мн-ва измер.

**Замечание.**  $E$  – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

**Пример.** 1.  $f = \text{const}$ , лебеговы множества:  $\emptyset, X$ .

$$2. E \subset X \text{ – измеримое, } f = 1_E(x) = 1, \text{ если } x \in E, \text{ иначе } 0.$$

Лебеговы множества:  $\emptyset, X, E, X \setminus E$ .

$$3. \mathcal{L}^m \text{ – лебеговская } \sigma\text{-алгебра на } \mathbb{R}^m$$

$f \in C(\mathbb{R}^m)$  – измеримая.

$$\underbrace{f^{-1}((-\infty, a))}_{\text{измеримое}} \text{ – открытое} \implies \text{измеримое.}$$

**Свойства.** 1.  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\implies E$  – измеримое.

$$2. \text{ Если } f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ измеримая и } E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0} \text{ – измеримое.}$$

$$\text{Доказательство. } E_0\{g \leq c\} = E\{\underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}}\} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}.$$

□

$$3. \text{ Если } f \text{ – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.}$$

$$\text{Доказательство. } E\{a \leq f \leq b\} = E\{\underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}}\} \cap E\{\underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}}\}.$$

□

4. Если  $f$  – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

**Доказательство.**  $U \subset \mathbb{R}$  – открытое мн-во  $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}})$ .  $\square$

5. Если  $f$  – измеримая, то  $|f|$  и  $-f$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}$ ,  $E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}$ .  $\square$

6. Если  $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измеримы, то  $\max\{f, g\}$  и  $\min\{f, g\}$  – измеримы.

В частности,  $f_+ = \max\{f, 0\}$  и  $f_- = \max\{-f, 0\}$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$   $\square$

7. Если  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $f|_{E_n}$  – измерима  $\forall n \implies f$  – измеримая.  
 $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

**Доказательство.**  $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\{f \leq c\}$ .  $\square$

8. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измерима, то найдется  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая, такая что  $f = g|_E$

**Доказательство.**  $g(x) := 0$ , если  $x \notin E$ ,  $f(x)$ , иначе.  $\square$

**Теорема 2.2.** Пусть  $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – последовательность измеримых функций. Тогда:

1.  $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$  – измеримые.
2.  $\underline{\lim} f_n$  и  $\overline{\lim} f_n$  – измеримые.
3. Если существуют  $\lim f_n$ , то он измеримый.

**Доказательство.** 1.  $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2.  $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$  и  $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует  $\lim f_n$ , то  $\lim f_n = \underline{\lim} f_n$ .  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть  $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$  – измеримые,  $\phi \in C(H)$ , тогда  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$  – измеримая.

**Доказательство.**  $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$  – открытое в  $H \implies \exists G$  – открытое в  $\mathbb{R}^m$ , т.ч.  $U = H \cap G$   
 $\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки  $(\alpha, \beta]$ , что  $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$  – измерима,  $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$   $\square$

**Следствие.** Если в теореме  $\phi$  – поточечный предел непрерывных, то  $g$  – измерима.

**Доказательство.**  $\phi = \lim \phi_n$ ,  $\phi_n \vec{f}$  – измер. и поточечно стремится к  $\phi_0 \vec{f}$  □

Арифметические операции в  $\mathbb{R}$ :

1. Если  $x \in \mathbb{R}$ , то  $x + (+\infty) = +\infty$ ,  $x + (-\infty) = -\infty$  и т.д.
2.  $(+\infty) + (-\infty) = 0$ ,  $(+\infty) - (+\infty) = 0$ ,  $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если  $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$ , то  $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ , где знак  $\pm$ :  $\pm = +$ ,  $\pm = \mp = -$
4.  $0 \cdot \pm\infty = 0$  и  $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ ,  $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$ , т.е.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$ .
5. Делить на 0 не умеем.

**Теорема 2.4.** 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая и  $\phi \in C(\mathbb{R})$ , то  $\phi \circ f$  – измеримая.
3. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $f^p$  ( $p > 0$ ) – измеримая,  $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая,  $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$ , то  $\frac{1}{f}$  – измерима на  $\tilde{E}$ .

**Доказательство.** 1.  $f + g$ . Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$\begin{aligned} &E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\} \\ &E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}, E\{g = -\infty\}}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}} \end{aligned}$$

Для конечного случая  $(E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\})$  можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной  $\phi(f, g) = f + g$ .

На остальных случаях тоже рассматриваем  $f + g$ : измеримость будет, т.к.  $f + g = \text{const.}$

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3.  $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4.  $f|_{\tilde{E}}$  – измерима и  $\neq 0$

$$\tilde{E} \left\{ \frac{1}{f} \leq c \right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

**Следствие.** 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

**Теорема 2.5.**  $E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримое,  $f \in C(E)$ . Тогда  $f$  – измер. относительно меры Лебега.

**Доказательство.**  $U := f^{-1}(-\infty, c)$  – открытое мн-во в  $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое, т.ч.  $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$  ( $E$  измеримо по условию, а  $G$  измеримо в  $\sigma$ -алгебре) □

**Определение 2.3.** Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение  $X$  – разбиение  $X$  на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

**Следствие.** 1. Если  $X$  разбито на конечное число измер. мн-в и  $f$  постоянна (то есть сужение на каждом кусочке  $X$  это какая-то константа) на каждом из них, то  $f$  – простая.

2. Если  $f$  и  $g$  – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

**Доказательство.**  $X = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^m A_k}_{\text{допуст. для } f} = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^n B_j}_{\text{допуст. для } g} \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$  – допустимое для  $f$  и  $g$ . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.

4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.

5.  $\max$  и  $\min$  конечного числа простых функций – простая функция.

**Теорема 2.6.** (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – неотрицательная измеримая функция, тогда  $\exists$  последовательность простых функций  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , такие что  $\phi_i \leq \phi_{i+1} : \forall i$  в каждой точке и  $\lim \phi_n = f$ . Более того, если  $f$  – ограничена сверху, то можно выбрать  $\phi_n$  так, что  $\phi_n \rightrightarrows f$  на  $X$ .

**Доказательство.**  $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$  при  $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$  и  $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$ .

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$ ,  $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$  – измер. мн-во.

$\phi_n$  на  $A_k$  равно  $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \forall x$  и  $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$  при  $x \notin A_{n^2}$ .

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ :

1. если  $f(x) = +\infty$ , то  $x \in A_{n^2}^{(n)} \forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$

2. если  $f(x) \neq +\infty$ , то  $x \notin A_{n^2}^{(n)}$  при больших  $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое  $n$ , а только степени двойки, тогда нам нужно взять  $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  (тут должна быть картинка)

Равномерность: если  $f$  ограничена, начиная с некоторого момента  $A_{n^2}$  пусто  $\implies$  все  $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E \ f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$  есть равномерная сходимость. □

## 2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание.  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Поточечная сходимость:  $f_n \rightarrow f, \forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость:  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E, \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

**Определение 2.4.**  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые.

$f_n$  сходится к  $f$  **почти везде**, если  $\exists e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$



**Замечание.** Обозначение:  $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

**Определение 2.5.**  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится по мере  $\mu$  к  $f$ , если  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $f_n \rightarrow_\mu f$

**Замечание.** Зависимость: равномерная  $\implies$  (поточечная  $\implies$  почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная  $\implies$  поточечная – знаем.

Поточечная  $\implies$  почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная  $\implies$  сходимость по мере – начиная с некоторого момента  $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$  будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

**Утверждение 2.7.** 1. Если  $f_n$  сходится к  $f$  п.в. (почти везде) и  $f_n$  сходится к  $g$  п.в., то  $f = g$  (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если  $f_n \rightarrow_\mu f$  и  $f_n \rightarrow_\mu g$ , то  $f = g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** 1. Берем  $e \subset E, \mu e = 0$  и  $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$  и  $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на  $E \setminus (e \cup \tilde{e})$   $\lim f_n(x) = g(x)$  и  $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2.  $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что  $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$ .

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 \text{ ?}} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что  $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$  вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left( \mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

**Теорема 2.8. Лебега.**

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть  $\mu E < +\infty$  и  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

Тогда  $f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Найдется  $e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

Выкинем  $e$  и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что  $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$ .

1. Частный случай ( $f_n \searrow 0$ ):  $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$ .

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 \leftarrow f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$  таких  $x$  не существует.

2. Общий случай:  $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$ .  $g_n(x) \searrow$ , т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{\dots\} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

**Замечание.** 1. Условие  $\mu E < +\infty$  существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще:  $E = [0, 1)$ ,  $\mu = \lambda$

$$\mathbb{1}_{[0,1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

**Теорема 2.9. Рисса.**

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n \rightarrow_{\mu} f$ , то существует подпоследовательность  $f_{n_k}$ , т.ч.  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде.

**Доказательство.**  $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем  $n_k$  так, что  $n_k > n_{k-1}$ , и  $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=: A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\rightarrow 0} = 0, \text{ проверим, что если } x \notin B, \text{ то } f_{n_k}(x) \rightarrow f(x), \text{ где } B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$x \notin B \implies \exists m, \text{ т.ч. } x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

**Следствие.** Если  $f_n \leq g$  и  $f_n \xrightarrow[\mu]{} f$ , то  $f \leq g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** Выберем  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде. Пусть  $e$  – исключ. мн-во  $\mu e = 0$ .

$$\lim_{\substack{f_{n_k} \\ \leq g(x)}} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

**Теорема 2.10. Фреше.**

Если  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  измерима относительно  $\lambda_m$  (мера Лебега), то  $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$ , т.ч.  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

**Теорема 2.11. Егорова.**

Пусть  $\mu E < +\infty$ ,  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде, то найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f_n \Rightarrow f$  на  $E \setminus e$ .

**Теорема 2.12. Лузина.**

$E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримо,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измерима (относительно  $\lambda_m$  – мера Лебега). Тогда найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f|_{E \setminus e}$  – непрерывна.

Фреше + Егоров  $\Rightarrow$  Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримое  $\xLeftrightarrow[\text{Фреше}]{\text{Егоров}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$ ,  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде  $\xLeftrightarrow[\text{Егоров}]{\text{Фреше}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon$ , т.ч.  $f_n \xRightarrow[\mathbb{R}^m \setminus e]{} f$ , равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

**2.3. Определение интеграла**

**Лемма.** Пусть  $f \geq 0$  простая функция  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_m$  – допустимые разбиения.

$a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_m$  значения  $f$  на соответственных мн-вах.

Тогда  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$ .

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

$(1) \underset{?}{=} (2).$

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если  $A_k \cap B_j \neq \emptyset$ , то  $a_k = b_j$ , если  $A_k \cap B_j = \emptyset$ , то  $\mu(\dots) = 0$ .

Условие  $f \geq 0$  важно, т.к. в ином случае могли бы получиться  $\infty$  разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения.  $\square$

**Определение 2.6.**  $f \geq 0$  простая,  $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$ , где  $A_1, \dots, A_n$  – допустимые разбиения ( $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ ),  $a_1, \dots, a_n$  – соответст. значения.

**Свойства.** 1.  $\int_E c d\mu = c \mu E$ ,  $c \geq 0$

2. Если  $f, g$  – простые и  $0 \leq f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если  $f, g \geq 0$  – простые, то  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если  $c \geq 0$  и  $f \geq 0$  – простая, то  $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$  – общее допустимое разбиение,  $a_k, b_k$  – значения на  $A_k$ .

3.  $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2.  $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$   $\square$

**Определение 2.7.** Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ .

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

**Определение 2.8.** Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$  (если тут  $+\infty - (+\infty)$ , то интеграл не определен)

**Замечание.** Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

**Доказательство.**  $f \geq 0$  – простая  $\implies$

(1):  $\phi = f$  подходит (новое  $\geq$  старое, т.к. берем супремум).

(2):  $\phi \leq f \implies \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$  (sup  $\leq$  старое, т.к. задали  $\phi : 0 \leq \phi \leq f$ ).

(3): В определении для произвольных измеримых:  $\int_E (f)_- d\mu = 0$  □

**Свойства.** 1. Если  $0 \leq f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если  $\mu E = 0 \implies \int_E f d\mu = 0$

3.  $f$  – измеримая  $\implies \int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$

**Доказательство.** Проверим для  $f_{\pm}$ :

$\int_E f_+ d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+\} = \sup\{\int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbb{1}_E f_+\} = \int_X \mathbb{1}_E f_+ d\mu$  (в одном случае сужаем  $\phi$  на множество  $E$ , в другом – дополняем нулями на  $X \setminus E$ ) □

4. Если  $f \geq 0$  – измеримая,  $A \subset B$ , то  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .

**Доказательство.**  $\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$ . □  
т.к.  $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$

**Упражнение.** Доказать, что  $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$  не определен.

**Теорема 2.13. Беппо Леви.**

Пусть  $f_n \geq 0$  – измеримые функции,  $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , последовательность поточечно возрастающая  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$   $f(x) := \lim f_n(x)$  – поточечный предел.

Тогда  $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.** (1):  $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2):  $f_n \leq f_{n+1} \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2)  $\implies \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что  $L \geq \int_E f d\mu$  (можно считать, что  $L < +\infty$  т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая}\}$

Достаточно доказать, что  $L \geq \int_E \phi d\mu$  для  $\phi$  – простая и  $0 \leq \phi \leq f$ .

Возьмем  $0 < \theta < 1$  и докажем, что  $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$ :

$E_n := E\{f_n \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \implies E_n \subset E_{n+1}$ . Покажем, что  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Пусть  $x \in E$ :

1. если  $\phi(x) = 0$ , то  $\forall n : x \in E_n$

2. если  $\phi(x) > 0$ , то  $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} f_n(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} x \in E_n$

Посмотрим на  $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$ .

Переходим к пределу  $n \rightarrow \infty$  :  $\underbrace{L}_{\text{получили из (*)}} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для (**)}}$

Осталось понять, что  $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}$ .

Поймем, что  $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$  – непрерывность меры снизу,  $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$  и  $\bigcup_{k=1}^\infty (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$ .  $\square$

**Свойства.** Продолжаем писать свойства:

5.  $f, g \geq 0$  – измеримые  $\implies \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$  – аддитивность.

6.  $f \geq 0, \alpha \geq 0 \implies \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$  – однородность.

7.  $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$  – измеримые, тогда  $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

**Доказательство.** 5.  $f \geq 0$  измеримая  $\implies \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  – простые, причем  $\phi_n \rightarrow f$  поточечно.

$g \geq 0$  измеримая  $\implies \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$  – причем  $\psi_n \rightarrow g$  поточечно.

$\implies 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$  простые и  $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$ .

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\substack{\rightarrow \int_E f d\mu \\ \text{по Леви}}} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

 $\square$ 

**Свойства.** Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f \geq 0$  измеримая, то  $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$

**Доказательство.**  $(*) = \int_X \mathbf{1}_{A \cup B} f d\mu$

$(**) = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu$

$(*) = \int_X \mathbf{1}_B f d\mu$

$\mathbf{1}_{A \cup B} f = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f$

 $\square$ 

9. Если  $\mu E > 0$  и  $f > 0$  измерим., то  $\int_E f d\mu > 0$ .

**Доказательство.**  $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$

$\implies \lim \mu E_n = \mu E > 0 \implies \mu E_n > 0$  для больших  $n$

$\implies \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$ .

 $\square$ 

**Пример.**  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – нбчс,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ .

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$  – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$ .

Пусть  $f = \mathbf{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\mu = \int_E \mathbf{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbf{1}(t_k) w_k = (*)$ .

$\implies$  равенство есть и на простых функциях

Пусть  $f \geq 0$  измерим.  $\phi_n = f \cdot \mathbf{1}_{\{t_1, t_2, \dots, \phi_n\}}$ ,  $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$ .

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \sum_{k < n: t_k \in E} f(t_k)w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k}} \int_E \phi_n d\mu = \int_E \underbrace{\lim_{\leq f} \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что  $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$ . Берем  $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$  и проверяем, что  $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k)w_k} \leq$

$$\sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k$$

**Замечание.**  $T = \mathbb{N}$ ,  $w_n \equiv 1$ .

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

**Определение 2.9.**  $P(x)$  – св-во, зависящее от точки.  $P(x)$  выполняется **почти везде**, если на  $E$  (для **почти всех** точек из  $E$ ), если  $\exists e \subset E$ ,  $\mu e = 0$  и  $P(x)$  выполнено  $\forall x \in E \setminus e$ .

**Замечание.**  $P_1, P_2, \dots$  последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на  $E$ , то они все вместе верны почти везде на  $E$ .

**Теорема 2.14.** (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер.}, t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

**Доказательство.**  $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$ . □

**Свойства.** Свойства интеграла, связанные с понятием ”почти везде”.

1. Если  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ , то  $f$  почти везде конечна.
2. Если  $\int_E |f| d\mu = 0$ , то  $f = 0$  почти везде.
3. Если  $A \subset B$  и  $\mu(B \setminus A) = 0$ , то  $\int_A f d\mu$  и  $\int_B f d\mu$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если  $f = g$  почти везде на  $E$ , тогда  $\int_E f$  и  $\int_E g$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

**Доказательство.** 1.  $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{t} \underbrace{\rightarrow}_{t \rightarrow +\infty} 0$$

2. Если  $\mu E\{f > 0\} > 0$ , то  $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$  (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$

□

## 2.4. Суммируемые функции

**Определение 2.10.**  $f$  – суммируема на мн-ве  $E$ , если  $f$  измерима и  $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$ .

**Замечание.** В этом случае  $\int_E f d\mu$  конечен.

**Свойства.** 1.  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow \int_E |f| d\mu < +\infty$  и  $f$  – измерима.

В этом случае  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

**Доказательство.**  $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

" $\Rightarrow$ ":  $\int_E |f| d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu < +\infty$

" $\Leftarrow$ ":  $\int_E f_{\pm} d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$

Нер-во:  $-\int_E |f| d\mu = -\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu = \int_E |f| d\mu$

□

2.  $f$  суммируема на  $E \Rightarrow f$  почти везде конечна на  $E$ .

3. Если  $A \subset B$  и  $f$  суммируема на  $B$ , то  $f$  суммируема на  $A$ .

**Доказательство.**  $\int_A |f| d\mu \leq \int_B |f| d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

**Доказательство.**  $|f| \leq M \Rightarrow \int_E |f| d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если  $f$  и  $g$  суммируемы и  $f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \Rightarrow 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \Rightarrow \int_E f_+ d\mu + \int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu + \int_E g_+ d\mu$  – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд.

□

6.  $f$  и  $g$  – суммируемы  $\Rightarrow f + g$  суммируема и  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow f + g$  суммируема.

$h := f + g, h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\Rightarrow h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\Rightarrow \int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu + \int_E h_- d\mu$  – далее просто переносим нужные слагаемые через равно.

□

7.  $f$  – суммируема,  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f$  суммируема и  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \Rightarrow |\alpha f|$  – суммируема.

Если  $\alpha > 0$ , то  $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$  и  $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$  и  $\int_E (\alpha f)_{\pm} d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm} d\mu$

Если  $\alpha = -1$ , то  $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+ \Rightarrow \int_E (-f) d\mu = \int_E f_- d\mu - \int_E f_+ d\mu = -\int_E f d\mu$

□

8. Линейность.

Если  $f, g$  – суммируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g$  – суммируема и  $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$ .

9. Пусть  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ . Тогда  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow f$  – суммируема на  $E_k : \forall k = 1, \dots, n$ . А если  $f$  суммируема на  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

**Доказательство.**  $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k}|f|d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k}|f|d\mu.$

Если  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_{\pm} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_{\pm} \implies \int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_{\pm} d\mu$   $\square$

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – меры, заданные на одной  $\sigma$ -алгебре,  $\mu := \mu_1 + \mu_2$ .

Если  $f \geq 0$  измерима, то  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$ .

$f$  – суммируема относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и в этом случае есть равенство  $(*)$ .

**Доказательство.**  $(*)$  для  $f \geq 0$ :

$(*)$  есть для простых  $\phi \geq 0$ ,  $\int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2.$

$f \geq 0$  – измеримая  $\implies$  возьмем  $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$  – простые,  $\phi_n \rightarrow f$ .

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$  по т. Леви получаем (предельный переход)  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$   $\square$

**Определение 2.11.** Интеграл от комплекснозначной функции  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .

$Re(f)$  и  $Im(f)$  – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

**Замечание.** Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

**Доказательство.**  $Re(if) = -Im(f)$ ,  $Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

**Замечание.**  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

**Доказательство.**  $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0} =$

$$\int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| |f| d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

**Теорема 2.15.** (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть  $f \geq 0$  – измеримая и  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Тогда  $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$

**Доказательство.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left( \underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:=g_n} d\mu \right) =$

$$\lim \int_E g_n d\mu \underbrace{=}_{\text{т. Леви}} \int_E f d\mu$$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

**Следствие.** 1. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $\nu E := \int_E f d\mu$  – мера, заданная на той же  $\sigma$ -алгебре, что и  $\mu$ .



2. Если  $f \geq 0$  и  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
3. Если  $f$  – суммируема и  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$
4. Если  $f$  – суммируема на  $E$ ,  $\epsilon > 0$ , то  $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

**Доказательство.** 1.  $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$  + счетная аддитивность из теоремы.

2.  $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$  все конечно, поэтому можно вычитать.

3.  $\nu A := \int_A f d\mu$  – мера  $\implies \nu A$  непрерывна снизу.

$$\underbrace{\int_E f d\mu}_{\nu E} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu}_{\lim \nu E_n}$$

4.  $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$ ,  $\nu_{\pm} A$  – конечные меры  $\implies \nu_{\pm}$  – непрерывна сверху.

$$\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$$

5.  $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\mu A \underbrace{\leq}_{\text{Чебышев}} \frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}} < +\infty$$

□

**Теорема 2.16.** (Абсолютная непрерывность интеграла).

$f$  – суммируема на  $E$ , тогда  $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$ , т.ч.  $\forall e$  – измер.  $\mu e < \delta \implies \left| \int_e f d\mu \right| < \epsilon$

**Доказательство.**  $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$  – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть  $C$  – наибольшее значение  $\phi$ . Возьмем  $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ .

Если  $\mu e < \delta$ , то  $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$  – это следует из того, что  $|f| - \phi \geq 0$ ,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_E (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

**Следствие.** Если  $f$  суммируема на  $E$  и  $\mu A_n \rightarrow 0$ ,  $A_n \subset E$ , то  $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Берем  $\epsilon > 0$  и  $\delta > 0$  для него из теоремы, тогда если  $\mu A_n < \delta$ , то  $\left| \int_{A_n} f d\mu \right| < \epsilon$

□

**Определение 2.12.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  меры на одной  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Если существует измеримая функция  $w \geq 0$ , т.ч.  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $\nu A = \int_A w d\mu$ .

Тогда  $w$  плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

**Замечание.** Если  $w$  существует, то  $\nu$  обладает свойством: если  $\mu e = 0$ , то  $\nu e = 0$ .

**Определение 2.13.**  $\nu$  абс. непрер. относительно  $\mu$ , если  $\forall e$  – измер., т.ч.  $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$ .

Обозначение  $\nu \prec \mu$  или  $\nu \ll \mu$ .

**Теорема 2.17. (Радона-Никодима).**

Пусть меры  $\mu$  и  $\nu$  заданы на одной  $\sigma$ -алгебре. Тогда  $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$  существует плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$ .

**Теорема 2.18.** Пусть  $f, g$  – суммируемые функции. Если  $\forall A$  – измерим.  $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ , то  $f = g$  почти везде.

**Доказательство.**  $h := f - g$ ,  $E_+ := E\{f \geq g\}$ ,  $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.} \quad \square$$

**Теорема 2.19.**  $w$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ . Тогда

1. Если  $f \geq 0$ , то  $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2.  $f w$  – суммируема, относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\nu$ , и в этом случае есть формула  $(*)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbf{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbf{1}_A w d\mu$ . По линейности  $(*)$  верна для неотрицательных простых.

Пусть  $f \geq 0$  – измер. Тогда найдутся простые  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  ( $0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$ ) и  $\phi_n \rightarrow f$  поточечно.  $\underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu}$  – по т. Леви.

2.  $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$  – суммируема относительно  $\nu \Leftrightarrow f w$  суммируема относительно  $\mu$   
 $\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu$  и вычитаем.

□

**Свойства.** Неравенство Гельдера.

Пусть  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда  $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

**Доказательство.** Пусть  $f, g \geq 0$  (просто чтобы не писать модули),  $A^p := \int_E f^p d\mu$ ,  $B^q := \int_E g^q d\mu$ .

Случай  $A = 0$ .  $\implies f^p = 0$  почти везде  $\implies f = 0$  почти везде  $\implies fg = 0$  почти везде  $\implies \int_E fg d\mu = 0$ .

Можно считать, что  $A, B > 0$ .

Случай  $A = +\infty$ . Очевидно.

Можно считать  $0 < A, B < +\infty$ .

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$ ,  $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$  верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

Интегрируем полученное нер-во:  $\frac{1}{AB} \int_E fg d\mu = \int_E uv d\mu \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_E u^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$

**Свойства.** Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } \left(\int_E |f + g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Доказательство.** Можно считать, что  $f, g \geq 0$ , также можно считать, что  $\int_E f^p d\mu$  и  $\int_E g^p d\mu < +\infty$ .

Проверим, что  $\int_E (f + g)^p d\mu < +\infty$ :

$$f + g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f + g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f + g)^p d\mu}_{=: C^p} \leq 2^p (\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu) < +\infty - \text{показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что  $0 < C < +\infty$ :

$$C^p = \int_E (f + g)^p d\mu = \int_E (f + g)(f + g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f + g)^{p-1} d\mu$$

Пусть  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $(p-1)q = p$ , тогда:

$$\int_E f \cdot (f + g)^{p-1} d\mu \leq \underbrace{\left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E ((f + g)^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{нер-во Гельдера}} = \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=: C^{p-1}} \leq \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$\left( \int_E g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} - \text{сокращаем на } C^{p-1}.$$

□

## 2.5. Предельный переход под знаком интеграла

**Теорема 2.20. Леви.**

$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$  и  $f = \lim f_n$ , тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ .

**Следствие.** Пусть  $u_n \geq 0$ . Тогда  $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

**Доказательство.**  $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$  и  $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

$$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu$$

□

**Следствие.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится при почти всех  $x \in E$ .

**Доказательство.**  $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  — суммир.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  почти везде конечна  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  абс. сходится при почти всех  $x \in E \implies$  сходится при почти всех  $x \in E$ .

□

**Лемма. Фату.**

Если  $f_n \geq 0$ , то  $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.**  $\liminf f_n = \lim \underbrace{\inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=: g_n}$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \text{ и } g_n \rightarrow \liminf f_n$$

$$\underbrace{\implies}_{\text{теорема Леви}} \lim_{\substack{\int_E g_n d\mu \\ = \lim \int_E g_n d\mu \leq \lim \int_E f_n d\mu}} = \int_E \liminf f_n d\mu$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \liminf \int_E g_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$$

□

**Замечание.** Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, \quad E = \mathbb{R}, \quad f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

Из этих двух условие следует, что  $\int_E \liminf f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$

**Следствие.** (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть  $0 \leq f_n \leq f$  и  $f = \lim f_n$ . Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

$\implies \underline{\lim} = \overline{\lim} = \int_E f d\mu \implies \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$  □

**Теорема 2.21.** Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть  $f = \lim f_n$  и  $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$  – суммируема на  $E$ .

Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ , более того  $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

**Доказательство.**  $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$  и  $g_n \rightarrow 2F$ .

$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0$ .

Тогда предел  $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$

Из двух строчек выше делаем вывод, что  $\underbrace{\int_E |f_n - f| d\mu}_{\geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu|} \rightarrow 0$  □

**Замечание.** 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

**Теорема 2.22.** Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$ .

**Доказательство.**  $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления  $\rightarrow 0$ , то  $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$ .

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$  почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f \quad \square$$

**Замечание.** На самом деле это верно для любой функции, интегрир. по Риману на  $[a, b]$ .

**Теорема 2.23.** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  – интегрируема по Риману  $\Leftrightarrow$  множество точек разрыва  $f$  имеет нулевую меру Лебега.

**Пример.** Возьмем  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ .

$f = 0$  почти везде  $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$ , но точки разрыва – весь отрезок  $[0, 1]$ .

## 2.6. Произведение мер

**Определение 2.14.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty$ ,  $A \times B$  – измеримый прямоугольник.

**Теорема 2.24.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо, а  $m_0$  –  $\sigma$ -конечная мера на нем.

**Доказательство.**  $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$  и  $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$  – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

$\mathcal{P}$  – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (эта по теореме, которая была выше).

Проверяем, что  $m_0$  – мера. Пусть  $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ .

$$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(x) \times \mathbb{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbb{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbb{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

$$\sigma\text{-конечность } m_0: X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j, Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j, \mu X_j < +\infty, \nu Y_k < +\infty$$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty. \quad \square$$

**Определение 2.15.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами. Произведения мер  $\mu$  и  $\nu$  – стандартное продолжение меры  $m_0$ .

Обозначение:  $\mu \times \nu$ ,  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  –  $\sigma$ -алгебра, на которую продолжили.  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

**Следствие.** 1. Декартово произведение измер мн-в – измеримо.

2. Если  $\mu e = 0$ , то  $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

2.  $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ ,  $\nu Y_k < +\infty$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0 \quad \square$$

**Замечание.** Обозначения:  $C \subset X \times Y$ ,  $x \in X$ .

$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$  – сечения мн-ва  $C$ .

$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$

**Следствие.** 1.  $(\bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha)_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$

2.  $(\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha)_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_\alpha)_x$

**Определение 2.16.** Пусть функция  $f$  задана на мн-ве  $E$ , за исключением некоторого мн-ва  $e$ ,  $\mu e = 0$ . Если  $f$  измерима на  $E \setminus e$ , то  $f$  измерима на  $E$  в **широком смысле**.

**Определение 2.17.** Система множеств – монотонный класс, если

1.  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

2.  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$

**Теорема 2.25.** Если монотонный класс содержит алгебру  $\mathcal{A}$ , то он содержит и  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ .

**Доказательство.** Докажем, что минимальный монотонный класс  $\mathcal{M}$ , содержащий  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

Рассмотрим  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$ .

Если  $B \in \mathcal{A}$ , то  $B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  и  $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$

$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$

Следовательно  $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \setminus B \in \mathcal{M}$

$\implies \mathcal{M}$  – симметричная структура.

Рассмотрим  $B \in \mathcal{M}$ :  $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$  (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M}$  – алгебра.

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$

$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}$ , так как  $\mathcal{M}$  – монотонный класс. □

**Теорема 2.26. Принцип Кавальери.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, m = \mu \times \nu$ . Тогда

1.  $C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$ .

2.  $\phi(x) := \nu C_x$  измерима в широком смысле.

3.  $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

**Доказательство.** Меры конечны и  $C \in \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}} (\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

$\mathcal{E}$  – система мн-в, в  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , такая что, если  $E \in \mathcal{E}$ , то  $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$  и  $\phi(x) = \nu E_x$  – измеримая функция.

**Шаг 1.**  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

**а.**  $\mathcal{E}$  – измеримая система.

$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}, \nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x)$  – измеримая.

**б.**  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$ .

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x$  – измеримая функция.

в.  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$  (можно переходить к дополнениям).

г. (б) + (в)  $\implies \mathcal{E}$  – монотонный класс.

д.  $\mathcal{E} \supset$  измеримый прямоугольник  $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$ ,

$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases}$  – измеримая функция.

е. Если  $E$  и  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ , то  $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$ .

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x$  – сумма измеримых функций.

ж.  $\mathcal{E}$  содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников  $\implies \mathcal{E}$  содержит кольцо  $\implies \mathcal{E}$  содержит алгебру  $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой же упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

**Шаг 2.** Формула (3) для  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Рассмотрим  $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$  – хотим сказать, что это мера на  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Пусть  $E_n$  – дизъюнкты  $\implies \tilde{m}(\bigcup E_n) = \int_X \nu(\bigcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$ .

$m = \tilde{m}$  на измеримых прямоугольниках  $\implies$  они совпадают. Получили, что хотели.

**Шаг 3.**  $mC = 0$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$  найдется  $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , т.ч.  $C \subset \tilde{C}$  и  $m\tilde{C} = 0$ .

$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0$  при почти всех  $x \in X$ .

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$  и  $\nu C_x = 0$  при почти всех  $x \in X$ .

$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x)$ .

**Шаг 4.**  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e$ ,  $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ,  $me = 0$ .

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \quad \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x)$ .

**Шаг 5.**  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ ,  $\mu X_n < +\infty$ .

$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$  удовлетворяет теореме.

$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$

$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu(C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \dots = \int_X \nu C_x d\mu.$  □

**Замечание.** 1. Нужна лишь полнота  $\nu$ .

2. Измеримость всех  $C_x$  не гарантирует измеримость  $C$ .

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое,  $E \times [0, 1]$  □

3. Среди  $C_x$  могут попадаться неизмеримые.

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримые,  $\{0\} \times E$  □

4. Хочется интегрировать не по  $X$ , а по проекции, то есть  $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$ . Но  $P$  может быть неизмеримо.

**Доказательство.**  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое, решение проблемы, это взять  $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$  – измеримое. □

**Определение 2.18.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пр-во с  $\sigma$ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f \geq 0, E \in \mathcal{A}, m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом  $E$ :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

$$\mathcal{P}_f(x) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

**Лемма.** (Лемма 1).

Если  $f$  – измеримая, то  $m\Gamma_f = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu X < +\infty$ . Возьмем  $\epsilon > 0$  и  $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X - \text{сколь угодно маленькое.}$$

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечна.  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $\mu X_n < +\infty$ ,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) - \text{нулевой меры.}$$
 □

**Лемма.** (Лемма 2).

$f \geq 0$  – измерима в широком смысле  $\implies \mathcal{P}_f$  – измеримое мн-во.

**Доказательство.** 1. Пусть  $f$  – простая  $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$  – измеримое.

2. Пусть  $f$  – измеримая  $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$  – простые  $\phi_i$ ,  $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$ .

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем  $x \in X$ .

Если

(а)  $f(x) = +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$ , над точкой  $x$ ,  $[0, \phi_n(x)]$  их объединение будет луч.

(б)  $f(x) < +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

**Теорема 2.27.** (О мере подграфика).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f \geq 0$ ,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $m = \mu \times \lambda_1$ .

Тогда  $f$  – измеримая в широком смысле  $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$  – измер. и в этом случае  $\int_X f d\mu = m\mathcal{P}_f$ .



**Доказательство.** "⇒": Лемма 2.

"⇐": принцип Кавальери для  $\mathcal{P}_f$ :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1(\mathcal{P}_f)_x = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m\mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) - \text{получили, что хотели.} \quad \square$$

**Теорема 2.28. Тонелли.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измеримая,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – измерима, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – измерима относительно  $\mu$ .
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbb{1}_C$  (характеристическая функция мн-ва  $C$ ), тогда  $f_x(y) = \mathbb{1}_{C_x}(y)$ .

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть  $f \geq 0$  – простая, тогда  $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$

3. Пусть  $f \geq 0$  – измеримая, тогда берем последовательность простых функций  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots, \lim f_n = f$ .

$(f_n)_x(y)$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$(f_n)_x \nearrow f_x$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$  – измерим. и  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$

$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x)$  – измерим.

$$\int_{X \times Y} f dm \underbrace{\leftarrow}_{\text{т. Леви}} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

**Теорема 2.29. Фубини.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , суммируема,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – суммируема, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – суммируема относительно  $\mu$ .
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

**Доказательство.**  $(*) : \int_{X \times Y} |f| d\mu < +\infty$  – следует из суммируемости  $f$ .

$$(*) \underbrace{\quad}_{\text{т. Тонелли}} = \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x)$$

$$\implies \alpha(x) = \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\implies f_x - \text{суммируема при почти всех } x \in X} - \text{конечна при почти всех } x \in X.$$

$$\int_X |\phi| d\mu = \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d\mu < +\infty$$

$$\implies \phi - \text{суммируема.}$$

$$\int_{X \times Y} f_{\pm} d\mu = \int_X \left( \int_Y f_{\pm}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

**Следствие.** Если  $f \geq 0$  и измеримая или  $f$  – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Следствие.**  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\mu$ ,  $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\nu$ .

Тогда  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  суммируема по  $m = \mu \times \nu$  и  $\int_{X \times Y} h d\mu = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$ .

$$\text{Доказательство. } \int_{X \times Y} |h| d\mu \underbrace{\quad}_{\text{т. Тонелли}} = \int_X \left( \int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \implies h - \text{суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

**Замечание.** 1. Суммируемости  $f_x(y) = f(x, y)$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$ ,  $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$ ,  $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$  не хватает для суммируемости  $f$  по мере  $m$ .

2. Без суммируемости  $f$  по  $m$  равенства **(\*\*)** может не быть.

$$\text{Пример. } \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2 + 1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dx dy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2 + 1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dy dx = \pi - \text{не совпали из-за отсутствия суммируемости.}$$

$$2. \int_{[-1,1]} g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

**Теорема 2.30.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измерим.

$$\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ (с кобках это функция распределения).}$$

**Доказательство.**  $m = \mu \times \lambda_1$ .

$$\int_X |f| d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left( \underbrace{\int_X \mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x, t) d\mu(x)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\} d\lambda_1(t).$$

□

**Следствие.** 1. В условии теоремы  $\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\} dt$

**Доказательство.**  $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$  – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} \quad \square$$

2.  $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt$  при  $p > 0$ .

**Доказательство.**  $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt =$   
 $\int_0^{+\infty} p s^{p-1} g(s) ds$

Где  $t = s^p$ ,  $s = t^{\frac{1}{p}}$ ,  $dt = p s^{p-1} ds$ . □