Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

24 октября 2022 г.

Содержание

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B, такие что $A \cap B = \varnothing$

***Определение* 1.1.** Набор мн-в дизъюнктный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

***Определение* 1.2.** E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E.

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup X \setminus A_\alpha$$

***Определение* 1.3.** $\mathcal{A}$ – система подмн-в X: $A \subset 2^X$

1. (δ_0): если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0): если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ): если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ): если $A_n \in \mathcal{A},\ \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.4.** $\mathcal{A}$ – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если $\mathcal{A}$ – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_{\alpha \in I} \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ $\square$

***Определение* 1.5.** $\mathcal{A}$ – алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симметр., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и $\forall A,\ B \in \mathcal{A}:\ A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри опр. алгебры).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

***Определение* 1.6.** $\mathcal{A}$ - σ-алгебра мн-в, если $\mathcal{A}$ – симм., $\varnothing \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множетсв; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

Замечание. σ-алгебра $\implies$ алгебра.

Пример.

1. 2^X - σ-алгебра.
2. $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}$ - всевозможные огр. подмн-ва. $\mathbb{R}^2$ и их дополнения. ($\mathcal{A}$ – алгебра, но не σ-алгебра).

   Rem: огр. множество - в метрич. пр-ве это множетсво ограниченного диаметра ($d(x,\ y) := ||x - y||$), т.е. $sup\{d(x,\ y)\ |x,\ y \in X\}$ - ограничен.
3. $\mathcal{A}$ - алгебра (σ-алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ-алгебра).

4. Пусть $\mathcal{A}_\alpha$ – алгебры (σ-алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ-алгебра).

5. $A, B \subset X$ ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей A, B:
$\varnothing, X, A, B, A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A, X\setminus A, X\setminus B, X\setminus(A\cup B), X\setminus(A\cap B), A\triangle B, X\setminus(A\triangle B), X\setminus(A\setminus B), X\setminus(B\setminus A)$.

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X, тогда существует наименьшая по включению σ-алгебра (алгебра) $\mathcal{A}$, такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. $\mathcal{A}_\alpha$ – всевозможные σ-алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что $\mathcal{A}$ – наим. по вкл. $\mathcal{A}\subset A_\alpha\ \forall\alpha\in I$.

***Определение* 1.7.** 1. Такая σ-алгебра – борелевская оболочка ϵ – ($\mathcal{B}(\epsilon)$).

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ-алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ-алгебра ($\mathcal{B}^n$).

Замечание. $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

$\square$

***Определение* 1.8.** R – кольцо, если $\forall A, B\in R \implies A\cup B, A\cap B, A\setminus B\in R$.

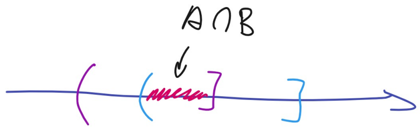
Замечание. Кольцо + $(X\in R) \implies$ алгебра.

***Определение* 1.9.** P – полукольцо, если

1. $\varnothing \in P$
2. $\forall A, B\in P \implies A\cap B\in P$
3. $\forall A, B\in P \implies \exists Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\in P$, такие что $A\setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b\in X\}$ – полукольцо.

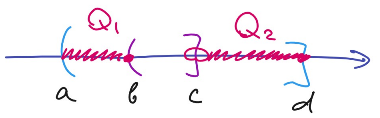
Свойство 2:



$\Rightarrow A\cap B \in P$

$(\ ] =: A$ $(\ ] =: B$

Свойство 3:



$(a;d] =: A$ $(a;b] = Q_1$

$(b;c] =: B$ $(c;d] = Q_2$

Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N \underbrace{A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k\right)}_{B_n}$.

Доказательство. $\supset$: Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \varnothing \implies B_n \cap B_m = \varnothing$.

$\subset$: Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m, такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. □

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.
2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n. База – опр. полукольца. Переход $(n \to n+1)$:

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{k+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}}\right)$$

2. $$\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}\right)$$

□

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

***Определение* 1.10.** $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-ва X.

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-ва Y.

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

□

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

***Определение* 1.11.** Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$

Открытый параллелепипед:

$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$

Ячейка:

$(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$

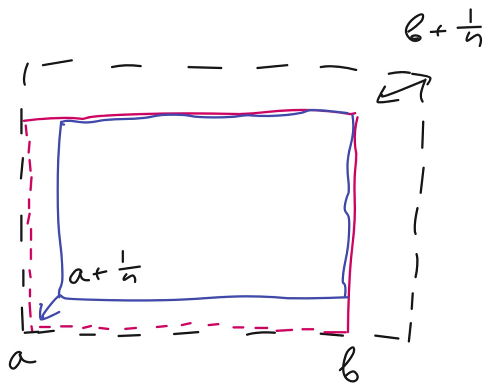
Теорема 1.5. Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \dots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$

$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \dots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$

$Q_n \subset Q_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$



□

Обозначения: $\mathcal{P}^m$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$.

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – сем-во ячеек из $\mathbb{R}^m$ с рациональными координатами вершин.

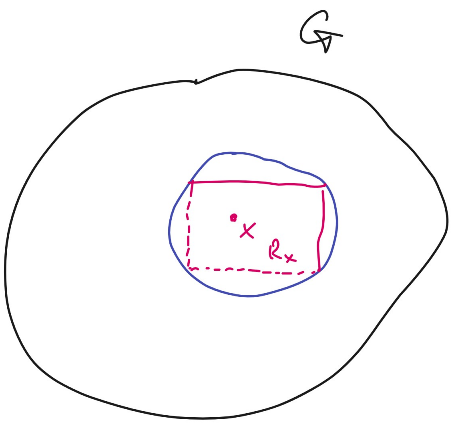
Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} = \mathcal{P}^{m-1}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{P}^1_{\mathbb{Q}}$ □

Теорема 1.7. $G \neq \varnothing$ – открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объелинение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G$, $x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$ □

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}})$

$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$

G – открытое $\implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}}) \supset \mathcal{B}^m$ □

1.2. Объем и мера

***Определение* 1.12.** $\mathcal{P}$ – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n P_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

***Определение* 1.13.** μ – мера, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu \underbrace{\left(\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k\right)}_{\text{счетная аддитивность}} = \sum_{k=1}^\infty \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\varnothing = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. $\mathcal{P}^1$, $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – нестрого монотонная
   (a) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).
3. $\mathcal{P}^m$ (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_m - a_m)$, $a := (a_1,\ ...,\ a_m)$, $b := (b_1,\ ...,\ b_m)$ – классический объем.
4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} \text{a},\ if\ x_0 \in A \\ 0,\ otherwise \end{cases} \tag{1}$$

   μ - мера.
5. $\mathcal{P}$ – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1,\ if\ x_0 \in A \\ 0,\ otherwise \end{cases} \tag{2}$$

   μ - объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ - объем на полукольце $\mathcal{P}$

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu\tilde{P}$
2. (a) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
   (b) Пункт (a), но $n = \infty$

3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \le \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев типо.

2. (a) $P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \ge \sum_{k=1}^n \mu P_k$

   (b) $\bigsqcup_{k=1}^\infty P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \to \sum_{k=1}^\infty \mu P_k \le \mu P$

3. $P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ - полукольцо), $\quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\le \mu P'_k \le \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \le \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если $\mathcal{P}$ – кольцо и A, B $(B \subset A) \in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$

Если $\mu B \ne +\infty$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$

Теорема 1.9. $\mathcal{P}$ – полукольцо подмн-в X, μ – объем на $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$ – полукольцо подмн-в Y, ν – объем на $\mathcal{Q}$

$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q$, где $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$

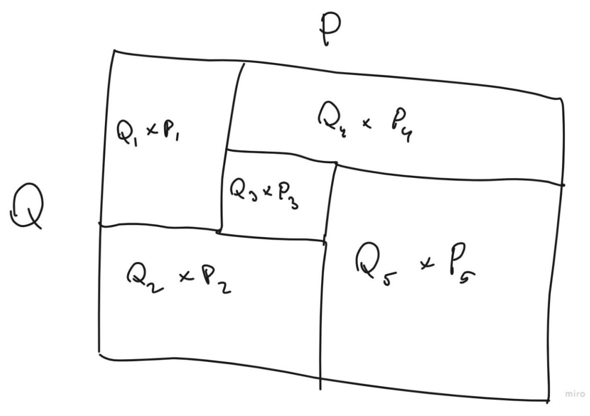
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, тогда:

$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j$, докажем, что $\underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$

Общий случай.



$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$

$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$

$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

   (Rem: $lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множетсво, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \to \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

1. $\sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (*)$.
2. $\sum_{k:\ t_k \in A} w_k\ (**)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (***)$.

1. $\mu A = \sum_{k:\ t_k \in A} w_k\ (**) \geq \sum_{n=1}^{N} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(\forall i,\ j:\ i \neq j)$, то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k\ (***) \geq \sum_{k:\ t_k \in A}$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

   Итого имеем равенство:

   $(**) = (***):\ \sum_{k:\ t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:\ t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$, чтд.

   (От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

Теорема 1.10. (О счетной аддитивности меры).

μ – объем на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ-мера $\Leftrightarrow$ если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ $P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. "$\Leftarrow$": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда нажо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для "$\leq$" – счетная полуаддитивность, для "$\geq$" – усиленная монот. объема.

"$\Rightarrow$": $P'_n := P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}$, где $Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n}$ – усиленная монот. объема. $\bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n$. □

Следствие. Если μ – мера на σ-алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$. □

Теорема 1.11. (О непрерывности меры снизу).

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда μ – мера $\Leftrightarrow$ если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. "$\Rightarrow$": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1},\ A_0 = \varnothing$.

B_n – дизъюнктны: $\bigsqcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu \bigsqcup B_n = \sum_{n=1}^\infty \mu B_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n$.

"$\Leftarrow$": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^\infty \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k,\ A_n \subset A_{n+1},\ \bigcup_{n=1}^\infty A_n = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)}_{=\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty C_n\right)} = \lim \mu A_n = \lim \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^\infty \mu C_n$$ $\square$

Теорема 1.12. (О непрерывности меры сверху).

μ – объем на σ-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ – мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \varnothing$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) $\implies$ (2): $A_n \supset A_{n+1} \implies B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty A_n$.

$$\implies \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right)}_{\mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) $\implies$ (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^\infty C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^\infty \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^\infty C_k,\ A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \varnothing$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \implies \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n$. $\square$

Следствие. Если μ – мера, $A_n \supset A_{n+1}$ и существует m, такое что $\mu A_m < +\infty$, тогда $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu A_n$.

Доказательство. Просто берем $X := A_m$ и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху. $\square$

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

***Определение* 1.14.** $\nu : 2^X \to [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu\varnothing = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^\infty \nu A_n$

Замечание.

1. счетная полуаддитивность $\implies$ конечная.
2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B,\ n = 1$.

***Определение* 1.15.** μ – полная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$, если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

Замечание. это означает, что $\mu A = 0$.

***Определение* 1.16.** ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν-измеримым, если $\forall A \subset X$ $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Замечание. Достаточен знак "$\geq$" (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратеодори.

Пусть ν – субмера. Тогда все ν-измеримые мн-ва образуют σ-алгебру и сужение ν на эту σ-алгебру – это полная мера.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{A}$ ν-измеримые мн-ва.

1. Если $E = 0$, то $E \in \mathcal{A}$.
   $\forall A \subset X,\ \nu A \underbrace{\geq}_{?} \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$
   $A \cap E \subset E,\ \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.
2. $\mathcal{A}$ – симметричное семейство мн-в.
   $E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$
   $A \cap E = A \setminus (X \setminus X)$
   $A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$
3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$
   $\nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) = \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) +$
   $\nu(A \setminus (E \cup F))$
4. $\mathcal{A}$ – алгебра.
5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \underbrace{\implies}_{?} E \in \mathcal{A}$.
   $$\nu A = \nu(A \cap \textstyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) \geq \underbrace{\nu(A \cap \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies$$
   $$\implies \nu A \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E).$$
6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $E \in \mathcal{A}$.
7. $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.
8. ν – мера на $\mathcal{A}$.
   $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \underbrace{\implies}_{?} \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n$.
   Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$ (т. к. $\leq$ уже есть из определения субмеры). Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \nu E_k$

$\square$

***Определение* 1.17.** μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$, $A \subset X$.

$\mu^* A := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \ P_k \in \mathcal{P} \ \wedge \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\}$

если покрытия нет, то $+\infty$.

– внешняя мера, порожд. μ.

Замечание. 1. Можно считать, что P_k – дизъюнктны

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n=m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$

2. Если μ задана на σ-алгебре $\mathcal{A}$, то $\mu^* A = \inf\{\mu B \ : \ B \in \mathcal{A} \ \wedge \ A \subset B\}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце $\mathcal{P}$. Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце $\mathcal{P}$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^* A$.

"$\geq$": очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$

"$\leq$": $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \mu A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf = \mu^* A$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\implies}_{?} \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A + \epsilon$

$\mu^* A_n = \inf \ldots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

$\square$

***Определение* 1.18.** Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру μ_0 на полукольце $\mathcal{P}$.
2. Берем μ_0^* – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех μ_0^*-измеримых множеств.

Получилась полная мера μ на σ-алгебре $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Множества, содержащиеся в $\mathcal{A}$, назовем μ-измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P} \ \wedge \ A \subset X$, $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

$\mu_0^* A = \mu_0 A, \ \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$

$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^{n} Q_k, \ Q_k \in \mathcal{P}$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n} Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

   Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

   Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

   Знаем, что $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

   $$\mu_0^* A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)}$$

□

Замечание. 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как μ.

   Если A – μ-измеримое множество, то $\mu A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \wedge \ P_k \in \mathcal{P}\}$

2. Стандартное продолжение, примененое к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

   Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же врешнюю меру, что и μ.

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ-алгебру.

4.

   ***Определение* 1.19.** ν – σ-конечная мера на полукольце $\mathcal{P}$, если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n, \ P_n \in \mathcal{P} \ \wedge \ \mu P_n < +\infty$.

   Можно ли по-другому продолжить на σ-алгебру μ-измерим. мн-в?

   Если μ – σ-конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ-измеримых множествах.

   Если μ – σ-конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ – стандартное продолжение меры с полукольца $\mathcal{P}$, μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}, \ C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A \ \wedge \ \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \ : \ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \ \wedge \ P_k \in \mathcal{P}\}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \ C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A$.

$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$ □

Следствие. μ – стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$. A – μ-измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \underbrace{\in \mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.

$e_1 := C \setminus A, \ \mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

найдется $e_2 : \ e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \ \wedge \ e_2 \supset e_1 \ \wedge \ \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A$.

$C \setminus e_2 \subset B \subset C$, $\mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \nu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A$. $e = A \setminus B \implies \mu e = 0$

□

Теорема 1.17. (Единственность продолжения).

μ – стандартное продолжение с полукольца $\mathcal{P}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}$.

ν – другая мера на $\mathcal{A}$, совпадающая с μ на $\mathcal{P}$. Если μ – σ-конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n,\ \ P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$\mu A = \inf\{\sum \mu P_n\} \geq \nu A$.

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$

$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k$, т.ч. $\mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$

$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A$ □

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ – мера.

Доказательство. Так как λ_m – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(a^{(n)}; b^{(n)}] \underbrace{\implies}_{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}]$.

Берем $\epsilon > 0$.

Затем возьмем:

1. $[a, b'] \subset [a, b)$ и $\lambda_m[a, b) < \lambda_m[a, b') + \epsilon$.
2. $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset [a^{(n)}, b^{(n)})$ и $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}$.

Тогда получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}} \implies$ существует конечное подпокрытие, то есть $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^{N}(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$.

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$[a, b') \subset \bigcup_{n=1}^{N}[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$.

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$\lambda_m[a, b') \underbrace{\leq}_{\text{кон. полуаддитивность}} \sum_{n=1}^{N} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon$.

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать $\lambda_m[a, b')$ с двух сторон:

$\lambda_m[a, b) - \epsilon < \lambda_m[a, b') < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon$.

Переносим ϵ в другую сторону и устремляем к 0:

$\lambda_m[a, b) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + 2\epsilon$

$\lambda_m[a, b) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)})$ – получили, что хотели. □

***Определение* 1.20.** Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ (обозначение λ_m) – стандартное продолжение классического объема с $\mathcal{P}^m$.

σ-алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская σ-алгебра ($\mathscr{L}^m$).

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k \ : \ P_k -$ ячейки и $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$.

Можно вместо $P_k \in \mathcal{P}^m$ писать $P_k \in \mathcal{P}^m_Q$.

Свойства. Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого > 0.

   Доказательство. Пусть G - открытое, $x \in G$, B – шар, накрывающий x и $B \subset G$, вписываем ячейку в шар. □

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва $= 0$.

   Доказательство. Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по ϵ), тогда $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$. □

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

   Доказательство. Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик. □

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

   Доказательство. Берем все $\mathbb{R}^m$ и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$, тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$. □

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \ \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathscr{L}^m$.

   $A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$ и $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, тогда $E \in \mathscr{L}^m$

   Доказательство. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathscr{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathscr{L}^m$.

   $A \subset E \subset B$, $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$.

   $\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$.

   $E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathscr{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathscr{L}^m$. □

6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \ \exists B_\epsilon \in \mathscr{L}^m$, такое что $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$ и $E \subset B_\epsilon$.

   Тогда $E \in \mathscr{L}^m$ и $\lambda_m E = 0$.

   Доказательство. $A_\epsilon := \varnothing \underbrace{\implies}_{\text{свойство (5)}}$ E – измеримое.

   $\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$. □

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

   Доказательство. Пусть $x \in IntE \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E.$ □

10. Если $\lambda e = 0$, то существуют кубические ячейки Q_j, такие что $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$.

    Доказательство. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : \ P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \ \wedge \ \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$, нарезаем P_j на кубические ячейки. □

11. Если $m \geq 2$, то гиперплоскость $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : \ x_k = c\}$ имеет нулевую меру.

    Доказательство. $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$, $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Достаточно доказать, что $\lambda E_n = 0$. $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$.

    $\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$, так как n фиксированное, а ϵ – произвольное $\implies \lambda E_n = 0$. □

    Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединение таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12. $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$ – по предыдущему свойству.

Замечание. Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

Замечание. 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то пример это гиперплоскость $H_1(c)$ подходит.

Если $m = 1$, то подходит Канторого множество.

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0,1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

K – несчетно, $K = \{x \in [0, 1] : \ \text{в троичной записи нет цифр } 1\}$, а у таких чисел есть биекция между $[0, 1]$, просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

Теорема 1.19. (Регулярность меры Лебега).

Если E – измеримое, то найдется G – открытое, такое что оно накрывает E и мера зазора $< \epsilon$, то есть $E \subset G \ \wedge \ \lambda(G \setminus E) < \epsilon$.

Доказательство. $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : \ P_j$ – ячейка и $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$.

(1): Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем покрытие, для которого $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$.

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$, хотим $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Тогда $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$ – открытое и $E \subset G$.

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \left(\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}\right) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть $\lambda E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, такие что $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое $\supset E_n$, такое что $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое $G \supset E$.

$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}$. □

Следствие. 1. Если E – измеримо, то найдется $F \subset E$ – замкнутое, такое что $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$.

Доказательство. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$, такое что $\lambda \underbrace{(G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E))}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G) = E \setminus F} < \epsilon$, где $F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое и $F \subset E$. □

2. Если E – измеримо, то

$\lambda E = \inf\{\lambda G : \ G$ – открытое и $G \supset E\}$.

$\lambda E = \sup\{\lambda F : \ F$ – замкнуто и $F \subset E\}$

$\lambda E = \sup\{\lambda K : \ K$ – компакт и $K \subset E\}$

Доказательство. $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$

Возьмем F – замкнутое из второго вывода и $K_n := [-n, n]^m \cap F$ – компакт. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$ и $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если $\lambda F = +\infty$, то есть K_n со сколь угодно большой мерой.

Если $\lambda F < +\infty$, то есть K_n, такие что $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$ □

3. Если E – измеримо, то сузествует последовательность компактов K_n, такая что компакты $K_n \subset K_{n+1}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, где $\lambda e = 0$.

Доказательство. (1) Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем $\tilde{K_n} \subset E \ \wedge \ \lambda E < \lambda \tilde{K_n} + \frac{1}{n}$

$K_n := \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{K_j} \subset E$, $\lambda E < \lambda \tilde{K_n} + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}$.

$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $\lambda e = \lambda E - \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0$.

(2) Пусть $\lambda E = +\infty$. Берем $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \ \lambda E_j < +\infty$.

$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j \ (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e$, где $e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \ \wedge \ \lambda e = 0$.

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). □

Упражнение. E – измеримое. Д-ть, что $\exists G_n$ – открытое $\supset E$, $G_n \supset G_{n+1}$, т.ч. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$, где $\lambda e = 0$.

Теорема 1.20. При сдвиге мн-ва на верктор $\vec{v}$ измеримость сохраняется и мера не изменяется.

Доказательство. $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$, $\mu, \ \lambda$ заданы на ячейках и на них совпадают $\implies \mu = \lambda$ по елдинственности продолжения. □

Теорема 1.21. μ-мера на $\mathscr{L}^m$, т.ч.

1. μ – инвариантна относительно сдвигов.

2. μ конечна на ячейках $=$ μ конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда $\exists k \in [0;+\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E\ \forall E\ \in \mathscr{L}^m$)

Доказательство. $Q := (0,1]^m,\ k := \mu Q,\ k \in [0,+\infty)$

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$. Надо доказать, что $\mu = \lambda$, достаточно доказать, что $\mu = \lambda$ на $\mathcal{P}^m_{\mathbb{Q}} \implies$ достаточно доказать на $(0, \frac{1}{n}]^m$.

   Q можно сложить из n^m сдвигов $(0, \frac{1}{n}]^m$.

   $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m}\mu Q = \frac{1}{n^m}\lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m$.

2. $k > 0$. $\nu E := \frac{1}{k}\mu E$. Тогда $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$.

3. $k = 0$. Покажем, что $\mu \equiv 0$.

   $\mu Q = 0,\ \mathbb{R}^m$ – счетное объединение сдвигов $Q \implies \mu\mathbb{R}^m = 0$.

□

Теорема 1.22. $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, $\Phi : G \to \mathbb{R}^m$ непрерыно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\Phi(e)$ – мн-во нулевой меры.

2. Если E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое.

   Замечание. Для Φ – непрер. или даже дифф. это неверно.

Доказательство. Пункт (1):

Случаи:

1. $e \subset P \subset CLP \subset G$, P – ячейка $\implies ||\Phi'||$ непрерывно на $G \supset Cl\ P$ – компакт $\implies ||\Phi'|| \le M$ на $Cl\ P$ (норма ограничена на замыкании P).

   $||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le ||\Phi'(c)|| \cdot ||x-y||$, где $x, y \in P$; $c \in P \implies ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le M||x-y||$

   Существуют кубические ячейки, такие что Q_j, т.ч. $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$

   Рассмотрим $\Phi(Q_j)$

   Пусть a_j – стороная кубика Q_j. $x, y \in Q_j \implies ||x-y|| < \sqrt{m} \cdot a_j$ (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка) $\implies ||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le M\sqrt{m}a_j$.

   Зафиксируем x и меняем $y \implies \Phi(Q_j)$ содержится в шаре с центром в $\Phi(x)$ и радиусом $M\sqrt{m}a_j \implies \Phi(Q_j)$ содержатся в ячейке R_j со стороной $2M\sqrt{m}a_j$.

   $\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$

   $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty}(2M\sqrt{m})^m a_j^m = (2M\sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e)$ измеримо и $\lambda(\Phi(e)) = 0$.

2. e – произвольное $\subset G,\ \lambda e = 0$. Представим G как $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейка $Cl\ P_j \subset G$.

   $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}(e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j)$ – мн-ва нулевой меры $\implies \lambda(\Phi(e)) = 0$.

Пункт (2):

E – измеримое $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e,\ \lambda e = 0,\ K_n$ – компакт $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$.

$\lambda(\Phi(e)) = 0$ и $\Phi(K_n)$ – компакт $\implies$ измеримое. □

Теорема 1.23. λ – инвариантна относительно движения.

Доказательство. Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что λ не меняется. Проверим поворот:

пусть $U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U \text{ – линейное отображение}}$, μ, λ – заданы на $\mathscr{L}^m$.

μ – инварианта относительно сдвига. $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$. μ конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда $\mu = k\lambda$.

Хотим показать, что $k = 1$. Но на единичном шаре B, $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$. □

Теорема 1.24. (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(TE) = |detT| \cdot \lambda E$

Доказательство. $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как T – лин. отображ.}}$, μ инвариантно относительно сдвига и конечно на огр. мн-вах. $\implies \mu k \cdot \lambda$, где $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |detT|$

□

Пример. неизмеримое мн-во в $\mathbb{R}$.

$x \sim y$ если $(x - y) \in \mathbb{Q}$ – отношение эквивалентности.

Разобьем $\mathbb{R}$ на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку $(0, 1]$.

A – получившееся мн-во. Докажем, что A не может быть измеримым.

От противного. Если $\lambda A = 0$, то $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}}(A + r) = \mathbb{R}$. Но тогда $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda\mathbb{R} = 0$ – противоречие.

Если $\lambda A > 0$. $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q},\ 0 \le r \le 1} \subset (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q},\ 0 \le r \le 1} \lambda(A + r) \le 2 \implies$ противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

2. Интеграл Лебега

2.1. Измеримые функции

***Определение* 2.1.** $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, лебеговы мн-ва функции f:

$E\{f \le a\} := \{x \in E: \ f(x) \le a\} = f^{-1}([-\infty, a])$
$E\{f < a\} := \{x \in E: \ f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$
$E\{f \ge a\} := \{x \in E: \ f(x) \ge a\}$
$E\{f > a\} := \{x \in E: \ f(x) > a\}$

Теорема 2.1. E – измеримое, $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$, тогда равносильны:

1. $E\{f \le a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f < a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f \ge a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f > a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство.
1. $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \le a\}$
2. $(2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \ge a\}$
3. $(1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \le a - \frac{1}{n}\}$
4. $(3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \ge a + \frac{1}{n}\}$

□

***Определение* 2.2.** $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\forall a \in \mathbb{R}$ все ее лебеговы мн-ва измер.

Замечание. E – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

Пример.
1. $f = const$, лебеговы множества: $\varnothing, \ X$.
2. $E \subset X$ – измеримое, $f = \mathbb{1}_E(x) = 1$, если $x \in E$, иначе 0.
   Лебеговы множества: $\varnothing, X, E, X \setminus E$.
3. $\mathscr{L}^m$ – лебеговская σ-алгебра на $\mathbb{R}^m$
   $f \in C(\mathbb{R}^m)$ – измеримая.
   $f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{измеримое}})$ – открытое $\implies$ измеримое.

Свойства.
1. $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\implies$ E – измеримое.
2. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измеримая и $E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0}$ – измеримое.

   Доказательство. $E_0\{g \le c\} = E\{\underbrace{f \le c}_{\text{измеримое}}\} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}$. □

3. Если f – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.

   Доказательство. $E\{a \le f \le b\} = E\{\underbrace{a \le f}_{\text{измеримое}}\} \cap E\{\underbrace{f \le b}_{\text{измеримое}}\}$. □

4. Если f – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

   Доказательство. $U \subset \mathbb{R}$ – открытое мн-во $\implies$ $U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$ $\implies$ $f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}}$. ☐

5. Если f – измеримая, то $|f|$ и $-f$ – измеримы.

   Доказательство. $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\},\ E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}$. ☐

6. Если $f, g : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измеримы, то $max\{f, g\}$ и $min\{f, g\}$ – измеримы.
   В частности, $f_+ = max\{f, 0\}$ и $f_- = max\{-f, 0\}$ – измеримы.

   Доказательство. $E\{max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$ ☐

7. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ f|_{E_n}$ – измерима $\forall n \implies f$ – измеримая.
   $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$.

   Доказательство. $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\{f \leq c\}$. ☐

8. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, такая что $f = g|_E$

   Доказательство. $g(x) := 0$, если $x \notin E,\ f(x)$, иначе. ☐

Теорема 2.2. Пусть $f_n : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда:

1. $\sup f_n,\ \inf f_n$ – измеримые.
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримые.
3. Если существуют $\lim f_n$, то он измеримый.

Доказательство.

1. $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$
2. $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ и $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$
3. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n = \underline{\lim} f_n$.

☐

Теорема 2.3. Пусть $f_1, \ldots, f_m :\ E \to H \subset \mathbb{R}$ – измеримые, $\phi \in C(H)$, тогда $g : E \to \mathbb{R},\ g(x) := \phi(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ – измеримая.

Доказательство. $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$ – открытое в $H \implies \exists G$ – открытое в $\mathbb{R}^m$, т.ч. $U = H \cap G$

$\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки $(\alpha, \beta]$, что $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$ – измерима, $\bigcup_{k=1}^{n} E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$

☐

Следствие. Если в теореме ϕ – поточечный предел непрерывных, то g – измерима.

Доказательство. $\phi = \lim \phi_n,\ \phi_n \vec{f}$ – измер. и поточечно стремится к $\phi_0 \vec{f}$ □

Арифметические операции в $\mathbb{R}$:

1. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и т.д.
2. $(+\infty) + (-\infty) = 0,\ (+\infty) - (+\infty) = 0,\ (-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$, то $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, где знак $\pm : \pm = +,\ \pm : \mp = -$
4. $0 \cdot \pm\infty = 0$ и $\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in \bar{\mathbb{R}}$, т.е. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$.
5. Делить на 0 не умеем.

Теорема 2.4. 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если $f : E \to \mathbb{R}$ – измеримая и $\phi \in C(\mathbb{R})$, то $\phi \circ f$ – измеримая.
3. Если $f \geq 0$ – измеримая, то f^p $(p > 0)$ – измеримая, $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$, то $\frac{1}{f}$ – измерима на $\tilde{E}$.

Доказательство. 1. $f + g$. Для каждой функции рассмотрим три множества:

$E\{f \neq \pm\infty\},\ E\{f = +\infty\},\ E\{f = -\infty\}$

$E\{g \neq \pm\infty\},\ \underbrace{E\{g = +\infty\}}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}},\ E\{g = -\infty\}$

Для конечного случая $(E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\})$ можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной $\phi(f, g) = f + g$.

На остальных случаях тоже рассматриваем $f + g$: измеримость будет, т.к. $f + g = const$.

2. Частный случай предыдущей теоремы.
3. $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4. $f|_{\tilde{E}}$ – измерима и $\neq 0$

$$\tilde{E}\left\{\frac{1}{f} \leq c\right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, \text{ при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, \text{ при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, \text{ при } c < 0 \end{cases} \tag{3}$$

□

Следствие. 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

Теорема 2.5. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $f \in C(E)$. Тогда f – измер. относительно меры Лебега.

Доказательство. $U := f^{-1}(-\infty, c)$ – открытое мн-во в $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, т.ч. $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$ (E измеримо по условию, а G измеримо в σ-алгебре) □

***Определение* 2.3.** Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение X – разбиение X на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

Следствие.

1. Если X разбито на конечное число измер. мн-в и f постоянна (то есть сужение на каждом кусочке X это какая-та константа) на каждом из них, то f – простая.
2. Если f и g – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

   Доказательство. $X = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{m} A_k}_{\text{допуст. для } f} = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{n} B_j}_{\text{допуст. для } g} \implies X = \bigsqcup_{k=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{n} (A_k \cap B_j)$ – допустимое для f и g. □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.
4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.
5. max и min конечного числа простых функций – простая функция.

Теорема 2.6. (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая функция, тогда $\exists$ последовательность простых функций $\phi_1, \phi_2 \ldots$, такие что $\phi_i \le \phi_{i+1} : \ \forall i$ в каждой точке и $\lim \phi_n = f$. Более того, если f – ограничена сверху, то можно выбрать ϕ_n так, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на X.

Доказательство. $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ при $k = 0, \ldots, (n^2 - 1)$ и $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$.

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k, \ A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$ – измер. мн-во.

ϕ_n на A_k равно $\frac{k}{n} \implies 0 \le \phi_n(x) \le f(x) \ \forall x$ и $f(x) \le \phi_n(x) + \frac{1}{n}$ при $x \notin A_{n^2}$.

$\phi_n(x) \to f(x)$:

1. если $f(x) = +\infty$, то $x \in A_{n^2}^{(n)} \ \forall n \implies \phi_n(x) = n \to +\infty = f(x)$
2. если $f(x) \neq +\infty$, то $x \notin A_{n^2}^{(n)}$ при больших $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \le \phi_n(x) \le f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое n, а только степени двойки, тогда нам нужно взять $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ (тут должна быть картинка)

Равномерность: если f ограничена, начиная с некоторого момента A_{n^2} пусто $\implies$ все $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E \ f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leqslant f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$ есть равномерная сходимость. □

2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание. $f_n, f : E \to \mathbb{R}$.

Поточечная сходимость: $f_n \to f$, $\forall x \in E : f_n(x) \to f(x)$

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на E, $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$

***Определение* 2.4.** $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ – измеримые.

f_n сходится к f **почти везде**, если $\exists e \subset E, \ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, \ f_n(x) \to f(x)$

Замечание. Обозначение: $\mathscr{L}(E,\mu) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} -$ измеримые, $\mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть $f_n, f \in \mathscr{L}(E,\mu)$, f_n сходится к f почти везде.

$\exists e \subset E,\ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus x,\ f_n(x) \to f(x)$

Определение 2.5. $f_n, f \in \mathscr{L}(E,\mu)$, f_n сходится по мере μ к f, если $\forall \varepsilon > 0$, $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \to_{n\to\infty} 0,\ f_n \to_\mu f$

Замечание. Зависимость: равномерная $\implies$ (поточечная $\implies$ почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная $\implies$ поточечная – знаем.

Поточечная $\implies$ почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для ‘‘почти везде’’ ничего не надо выкидывать.

Равномерная $\implies$ сходимость по мере – начиная с некоторого момента $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

Утверждение 2.7.

1. Если f_n сходится к f п.в. (почти везде) и f_n сходится к g п.в., то $f = g$ (за исключением мн-ва нулевой меры)
2. Если $f_n \to_\mu f$ и $f_n \to_\mu g$, то $f = g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство.

1. Берем $e \subset E,\ \mu e = 0$ и $\lim f_n(x) = f(x),\ \forall x \in E \setminus e$

   $\tilde{e} \subset E, \mu\tilde{e} = 0$ и $\lim f_n(x) = g(x),\ \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

   Тогда на $E \setminus (e \cup \tilde{e}) \lim f_n(x) = g(x)$ и $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2. $\mu E\{f \neq g\} \underbrace{=}_{?} 0,\ E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^\infty E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}$.

   Достаточно доказать, что $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$.

   $E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

   $$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0\ ?} \cup \bigcap_{n=1}^\infty E\{|f_n - g| \geq \tfrac{\epsilon}{2}\}$$

   Знаем, что $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \to 0$

   $\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ вложены по убыванию

   $\implies \bigcap_{n=1}^\infty \dots = \lim_N \left(\mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}\right) \leq \lim_N \left(\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}\right) = 0$

□

Теорема 2.8. Лебега.

$f_n, f \in \mathscr{L}(E,\mu)$

Пусть $\mu E < +\infty$ и f_n сходится к f почти везде.

Тогда f_n сходится к f по мере μ.

Доказательство. Найдется $e \subset E,\ \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in\subset E \setminus e,\ f_n(x) \to f(x)$.

Выкинем e и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\},\ \mu A_n \to 0$.

1. Частный случай ($f_n \searrow 0$): $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$.
   $\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu\varnothing = 0$.
   Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 \leftarrow f_n(x) > \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N} \implies$ таких x не существует.
2. Общий случай: $g_n(x) := \sup_{k\geq n}\{|f_k(x) - f(x)|\}$. $g_n(x) \searrow$, т.к. множество уменьшается.
   $\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k\geq n}\{\dots\} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$
   $\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\to 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$
   $E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$

$\square$

Замечание. 1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.
$E = \mathbb{R},\ \mu = \lambda,\ f_n = \mathbb{1}_{[n,+\infty)} \underbrace{\to}_{\text{поточечно}} f \equiv 0$
$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\to 0$.

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще: $E = [0, 1),\ \mu = \lambda$
   $\mathbb{1}_{[0,1)}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{3})}\ \mathbb{1}_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3})}\ \mathbb{1}_{[\frac{2}{3},1)}$ – ни для какого аргумента нет предела: $[0, \frac{1}{n})\ [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$

Теорема 2.9. Рисса.

$f, f_n \in \mathscr{L}(E, \mu)$. Если $f_n \to_\mu f$, то существует подпоследовательность f_{n_k}, т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$

Выберем n_k так, что $n_k > n_{k-1}$, и $\mu \underbrace{E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=:A_k} < \frac{1}{2^k}$

$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\ \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$
$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B}_{\mu B_n \to 0} = 0$, проверим, что если $x \notin B$, то $f_{n_k}(x) \to f(x)$, где $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$
$x \notin B \implies \exists m$, т.ч. $x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$
$\implies x \notin A_k\ \forall k \geq m \implies \forall k \geq m\ \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\to_{k\to 0} 0} \leq \frac{1}{k}$ $\square$

Следствие. Если $f_n \leq g$ и $f_n \underbrace{\to}_{\mu} f$, то $f \leq g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. Выберем f_{n_k} сходится к f почти везде. Пусть e – исключ. мн-во $\mu e = 0$.
$\lim \underbrace{f_{n_k}}_{\leq g(x)} = f(x) :\ \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x)$ при $x \in E \setminus e$ $\square$

Теорема 2.10. Фреше.

Если $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ измерима относительно λ_m (мера Лебега), то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. f_n сходится к f почти везде.

Теорема 2.11. Егорова.

Пусть $\mu E < +\infty,\ f_n, f \in \mathscr{L}(E, \mu)$. Если f_n сходится к f почти везде, то найдется $e \subset E,\ \mu e < \epsilon$, т.ч. $f_n \rightrightarrows f$ на $E \setminus e$.

Теорема 2.12. Лузина.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо, $f : E \to \mathbb{R}$ – измерима (относительно λ_m – мера Лебега). Тогда найдется $e \subset E,\ \mu e < \epsilon$, т.ч. $f|_{E \setminus e}$ – непрерывна.

Фреше + Егоров $\implies$ Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – измеримое $\underbrace{\implies}_{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m),\ f_n$ сходится к f почти везде $\underbrace{\implies}_{\text{Егоров}} \exists e :\ \lambda_m e < \epsilon$, т.ч. $f_n \underbrace{\rightrightarrows}_{\mathbb{R}^m \setminus e} f$, равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

2.3. Определение интеграла

Лемма. Пусть $f \geq 0$ простая функция $A_1, \dots, A_n$ и $B_1, \dots, B_m$ – допустимые разбиения.

$a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ значения f на соответственных мн-вах.

Тогда $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

$(1) \underbrace{=}_{?} (2)$.

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если $A_k \cap B_j \neq \varnothing$, то $a_k = b_j$, если $A_k \cap B_j = \varnothing$, то $\mu(\dots) = 0$.

Условие $f \geq 0$ важно, т.к. в ином случае могли бы получится ∞ разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения. □

***Определение* 2.6.** $f \geq 0$ простая, $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$, где $A_1, \dots, A_n$ – допустимые разбиения ($\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$), $a_1, \dots, a_n$ – соответст. значения.

Свойства. 1. $\int_E c d\mu = c \mu E,\ c \geq 0$

2. Если f, g – простые и $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$
3. Если $f, g \geq 0$ – простые, то $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$
4. Если $c \geq 0$ и $f \geq 0$ – простая, то $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

Доказательство. $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ – общее допустимиое разбиение, a_k, b_k – значения на A_k.

3. $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E df\mu + \int_E g d\mu$

2. $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$ □

***Определение* 2.7.** Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции $f : E \to \overline{R}, f \geq 0$.

$\int_E f d\mu := \sup\{\int_E \phi d\mu :\ \phi$ – простая и $0 \leq \phi \leq f\}$

***Определение* 2.8.** Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$ (если тут $+\infty - (+\infty)$, то интеграл не определен)

Замечание. Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

Доказательство. $f \geq 0$ – простая $\implies$

(1): $\phi = f$ подходит (новое $\geq$ старое, т.к. берем супремум).

(2): $\phi \leq f \implies \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$ (sup $\leq$ старое, т.к. задали $\phi : 0 \leqslant \phi \leqslant f$).

(3): В определении для произвольных измеримых: $\int_E (f)_- d\mu = 0$ □

Свойства.

1. Если $0 \leq f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$
2. Если $\mu E = 0 \implies \int_E f d\mu = 0$
3. f – измеримая $\implies \int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$

   Доказательство. Проверим для $f_\pm$:

   $\int_E f_+ d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : \phi$ – простая $0 \leq \phi \leq f_+\} = \sup\{\int_X \phi d\mu : \phi$ – простая $0 \leq \phi \leq \mathbb{1}_E f_+\} = \int_X \mathbb{1}_E f_+ d\mu$ (в одном случае сужаем ϕ на множество E, в другом – дополняем нулями на $X \setminus E$) □

4. Если $f \geq 0$ – измеримая, $A \subset B$, то $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

   Доказательство. $\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu \underbrace{\leq}_{\text{т.к. } \mathbb{1}_A f \,\leq\, \mathbb{1}_B f} \int_X \mathbb{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$. □

Упражнение. Доказать, что $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$ не определен.

Теорема 2.13. Беппо Леви.

Пусть $f_n \geq 0$ – измеримые функции, $f_n : E \to \overline{R}$, последовательность поточечно возрастающая $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. $f(x) := \lim f_n(x)$ – поточечный предел.

Тогда $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. (1): $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2): $f_n \leq f_{n+1} \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2) $\implies \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что $L \geq \int_E f d\mu$ (можно считать, что $L < +\infty$ т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : \ 0 \leq \phi \leq f, \ \phi$ – простая$\}$

Достаточно доказать, что $L \geq \int_E \phi d\mu$ для ϕ – простая и $0 \leq \phi \leq f$.

Возьмем $0 < \theta < 1$ и докажем, что $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$:

$E_n := E\{f_n \geq \theta\phi\}, f_n \nearrow \implies E_n \subset E_{n+1}$. Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

Пусть $x \in E$:

1. если $\phi(x) = 0$, то $\forall n : \ x \in E_n$
2. если $\phi(x) > 0$, то $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta\phi(x) \underbrace{\implies}_{\text{при больших } n} f_n(x) > \theta\phi(x) \underbrace{\implies}_{\text{при больших } n} x \in E_n$

Посмотрим на $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta\phi d\mu}_{(**)}$.

Переходим к пределу $n \to \infty$: $\underbrace{L}_{\text{получили из } (*)} \geq \underbrace{\int_E \theta\phi d\mu}_{\text{это нужно понять для } (**)}$

Осталось понять, что $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m a_k\mu(E_n\cap A_k)} \to \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E\cap A_k)}$.

Поймем, что $\mu(E_n \cap A_k) \to \mu(E \cap A_k)$ – непрерывность меры снизу, $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$ и $\bigcup_{k=1}^\infty (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$. □

Свойства. Продолжаем писать свойства:

5. $f, g \geq 0$ – измеримые $\implies \int_E (f+g)d\mu = \int_E fd\mu + \int_E gd\mu$ – аддитивность.
6. $f \geq 0, \alpha \geq 0 \implies \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E fd\mu$ – однородность.
7. $\alpha, \beta \geq 0,\ f, g \geq 0$ – измеримые, тогда $\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int_E fd\mu + \beta \int_E gd\mu$

Доказательство. 5. $f \geq 0$ измеримая $\implies \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ – простые, причем $\phi_n \to f$ поточечно.

$g \geq 0$ измеримая $\implies \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$ – причем $\psi_n \to g$ поточечно.

$\implies 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$ простые и $\phi_n + \psi_n \to f + g$.

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n)d\mu}_{\to \int_E (f+g)d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\underbrace{\to}_{\text{по Леви}} \int_E d\mu} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\to \int_E gd\mu}$$ □

Свойства. Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если $A \cap B = \varnothing,\ f \geq 0$ измеримая, то $\underbrace{\int_{A\cup B} fd\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A fd\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B fd\mu}_{(***)}$

Доказательство. $(*) = \int_X \mathbb{1}_{A\cup B} fd\mu$

$(**) = \int_X \mathbb{1}_A fd\mu$

$(*) = \int_X \mathbb{1}_B fd\mu$

$\mathbb{1}_{A\cup B} f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f$ □

9. Если $\mu E > 0$ и $f > 0$ измери., то $\int_E fd\mu > 0$.

Доказательство. $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\},\ E_n \subset E_{n+1},\ E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$

$\implies \lim \mu E_n = \mu E > 0 \implies \mu E_n > 0$ для больших n

$\implies \int_E fd\mu \geq \int_{E_n} fd\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$. □

Пример. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ - нбчс, $w_1, w_2, \dots \geq 0$.

$\mu A := \sum_{k:\ t_k \in A} w_k$ – мера.

$\int_E fd\mu = \sum_{k:\ t_k\in E} w_k = (*)$.

Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E fd\mu = \int_E \mathbb{1}_A d\mu = \mu(E\cap A) = \sum_{k:\ t_k\in E\cap A} = \sum_{k:\ t_k \in E} \mathbb{1}(t_k)w_k = (*)$.

$\implies$ равенство есть и на простых функциях

Пусть $f \geq 0$ измерим. $\phi_n = f \cdot \mathbb{1}_{\{t_1, t_2, \dots, \phi_n\}}$, $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$.

$$\underbrace{\lim \int_E \phi_n d\mu}_{=\lim \sum_{k<n:\ t_k\in E} f(t_k)w_k = \sum_{k:\ t_k\in E} f(t_k)w_k} = \int_E \underbrace{\lim \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$. Берем $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$ и проверяем, что $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k:\ t_k\in E} \phi(t_k)w_k} \leq \sum_{k:\ t_k\in E} f(t_k)w_k$

Замечание. $T = \mathbb{N},\ w_n \equiv 1.$

$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$

$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Определение 2.9. $P(x)$ – св-во, зависящее от точки. $P(x)$ выполняется **почти везде**, если на E (для **почти всех** точек из E), если $\exists e \subset E,\ \mu e = 0$ и $P(x)$ выполнено $\forall x \in E \setminus e$.

Замечание. $P_1, P_2, \dots$ последовательность св-в, каждое из котороых верно почти везде на E, то они все вместе верны почти везде на E.

Теорема 2.14. (Неравенство Чебышева).

$f \geq 0$ измер., $t, p > 0$. Тогда $\mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu$.

Доказательство. $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f\geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f\geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$. □

Свойства. Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде".

1. Если $\int_E |f| d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна.
2. Если $\int_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде.
3. Если $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int_A f d\mu$ и $\int_B f d\mu$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если $f = g$ почти везде на E, тогда $\int_E f$ и $\int_E g$ либо определены, либо не одновременно. И Если определены, то равны.

Доказательство.

1. $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

   $\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{t} \underbrace{\to}_{t\to+\infty} 0$
2. Если $\mu E\{f > 0\} > 0$, то $\int_E f d\mu = \int_{E\{f>0\}} f d\mu > 0$ (св-во. 9 из уже доказанных выше).
3. $\int_B f_\pm d\mu = \int_{B\setminus A} f_\pm d\mu + \int_A f_\pm d\mu = \int_A f_\pm d\mu$
4. $A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0\ \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$

□

2.4. Суммируемые функции

Определение 2.10. f – суммируема на мн-ве E, если f измерима и $\int_E f_\pm d\mu < +\infty$.

Замечание. В этом случае $\int_E f d\mu$ конечен.

Свойства. 1. f – суммируема на $E \Leftrightarrow \int_E |f| d\mu < +\infty$ и f – измерима.

В этом случае $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $0 \leq f_\pm \leq |f| = f_+ + f_-$

"$\Rightarrow$": $\int_E |f| d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu < +\infty$

"$\Leftarrow$": $\int_E f_\pm d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$

Нер-во: $-\int_E |f| d\mu = -\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu = \int_E |f| d\mu$

□

2. f суммируема на $E \implies f$ почти везде конечна на E.

3. Если $A \subset B$ и f суммируема на B, то f суммируема на A.

   Доказательство. $\int_A |f| d\mu \leq \int_B |f| d\mu < +\infty$ □

4. Ограниченная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

   Доказательство. $|f| \leq M \implies \int_E |f| d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$ □

5. Если f и g суммируемы и $f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

   Доказательство. $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \implies 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \implies \int_E f_+ d\mu + \int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu + \int_E g_+ d\mu$ – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд. □

6. f и g – суммируемы $\implies f + g$ суммируема и $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

   Доказательство. $|f+g| \leq |f| = |g| \implies f + g$ суммируема.

   $h := f + g,\ h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

   $\implies h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

   $\implies \int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu + \int_E h_- d\mu$ – далее просто переносим нужные слогаемые через равно. □

7. f – суммируема, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f$ суммируема и $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

   Доказательство. $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \implies |\alpha f|$ – суммируема.

   Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$ и $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$ и $\int_E (\alpha f)_\pm d\mu = \alpha \cdot \int_E f_\pm d\mu$

   Если $\alpha = -1$, то $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+ \implies \int_E (-f) d\mu = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f d\mu$ □

8. Линейность.

   Если f, g – суммируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – суммируема и $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$.

9. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. Тогда f – суммируема на $E \Leftrightarrow f$ – суммируема на $E_k:\ \forall k = 1, \ldots, n$. А если f суммируема на $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

Доказательство. $\mathbb{1}_{E_k}|f| \le \mathbb{1}_E|f| \le \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k}|f|d\mu \le \sum_{k=1}^n \int_{E_k}|f|d\mu$.

Если $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_\pm = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_\pm \implies \int_E f_\pm d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_\pm d\mu$ □

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть μ_1 и μ_2 – меры, заданные на одной σ-алгебре, $\mu := \mu_1 + \mu_2$.

    Если $f \ge 0$ измерима, то $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$.

    f – суммируема относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно μ_1 и μ_2 и в этом случае есть равенство $(*)$.

    Доказательство. $(*)$ для $f \ge 0$:

    $(*)$ есть для простых $\phi \ge 0$, $\int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E\cap A_k)+\mu_2(E\cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2$.

    $f \ge 0$ – измеримая $\implies$ возьмем $0 \le \phi \le \dots \le \phi_n$ – простые, $\phi_n \to f$.

    $\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$ по т. Леви получаем (предельнй переход) $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$ □

***Определение* 2.11.** Интеграл от комплекснозначной функции $f : E \to \mathbb{C}$.

$Re(f)$ и $Im(f)$ – измеримые функции.

$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$

Замечание. Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

Доказательство. $Re(if) = -Im(f),\ Im(if) = Re(f)$

$\int_E i f d\mu = i \int_E f d\mu$ □

Замечание. $\left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $\left|\int_E f d\mu\right| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0} =$

$\int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \le \int_E |Re(e^{i\alpha} f) d\mu| \le \int_E |e^{i\alpha}| \, d\mu = \int_E |f| d\mu$.

$|Re(f)|, |Im(f)| \le |f|$

$|f| \le |Re(f)| + |Im(f)|$ □

Теорема 2.15. (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть $f \ge 0$ – измеримая и $E = \bigsqcup_{n=1}^\infty E_n$.

Тогда $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu$

Доказательство. $\sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left(\underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:=g_n} d\mu \right) =$

$\lim \int_E g_n d\mu \underbrace{=}_{\text{т. Леви}} \int_E f d\mu$

$0 \le g_1 \le g_2 \le \dots,\ \lim g_n = f,\ g_n(x) = f(x)$ если $x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k$. □

Следствие. 1. Если $f \ge 0$ – измеримая, то $\nu E := \int_E f d\mu$ – мера, заданная на той же σ-алгебре, что и μ.

2. Если $f \geq 0$ и $E_1 \subset E_2 \subset \ldots,\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

3. Если f – суммируема и $E_1 \supset E_2 \supset \ldots,\ E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

4. Если f – суммируема на $E,\ \epsilon > 0$, то $\exists A \subset E:\ \mu A < +\infty \wedge \int_{E\setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

Доказательство. 1. $\nu\varnothing = \int_\varnothing f d\mu = 0$ + счетная аддитивность из теоремы.

2. $\int_E f_\pm d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_\pm d\mu$ все конечно, поэтому можно вычитать.

3. $\nu A := \int_A f d\mu$ – мера $\implies \nu A$ непрерывна снизу.
$\underbrace{\nu E}_{\int_E f d\mu} = \underbrace{\lim \nu E_n}_{\lim \int_{E_n} f d\mu}$

4. $\nu_\pm A := \int_A f_\pm d\mu$, $\nu_\pm A$ – конечные меры $\implies \nu_\pm$ – непрерывна сверху.
$\implies \int_E f_\pm d\mu = \nu_\pm E = \lim \nu_\pm E_n = \lim \int_{E_n} f_\pm d\mu$

5. $E_n := E\{|f| \leq frac1n\} \implies E_n \supset E_{n+1}$
$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n:\ \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left|\int_{E_n} f d\mu\right|$
$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$
$\mu A \underbrace{\leq}_{\text{Чебышев}} \frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}} < +\infty$

□

Теорема 2.16. (Абсолютная непрерывность интеграла).

f – суммируема на E, тогда $\forall \epsilon:\ \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall e$ – измер. $\mu e < \delta \implies |\int_e f d\mu| < \epsilon$

Доказательство. $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$ – неотрицательная простая, т.ч.
$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon$.

Пусть C – наибольшее значение ϕ. Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Если $\mu e < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$ – это следует из того, что $|f| - \phi \geq 0$,
$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_E (|f| - \phi) d\mu < \epsilon$. □

Следствие. Если f суммируема на E и $\mu A_n \to 0,\ A_n \subset E$, то $\int_{A_n} f d\mu \to 0$.

Доказательство. Берем $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ для него из теоремы, тогда если $\mu A_n < \delta$, то $|\int_{A_n} f d\mu| < \epsilon$ □

Определение 2.12. Пусть μ и ν меры на одной σ-алгебре $\mathcal{A}$. Если существует измеримая функция $w \geq 0$, т.ч. $\forall A \in \mathcal{A},\ \nu A = \int_A w d\mu$.

Тогда w плотность меры ν относительно меры μ.

Замечание. Если w существует, то ν обладает свойством: если $\mu e = 0$, то $\nu e = 0$.

Определение 2.13. ν абс. непрер. относительно μ, если $\forall e$ – измер., т.ч. $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$.

Обозначение $\nu \prec \mu$ или $\nu \ll \mu$.

Теорема 2.17. (**Радона-Никодима**).

Пусть меры μ и ν заданы на одной σ-алгебре. Тогда $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$ существует плотность меры ν относительно μ.

Теорема 2.18. Пусть f, g – суммируемые функции. Если $\forall A$ – измерим. $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g,\ E_+ := E\{f \geq g\},\ E_- := E\{f < g\}$

$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0$ почти везде. □

Теорема 2.19. w – плотность ν относительно μ. Тогда

1. Если $f \geq 0$, то $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu\ : (*)$
2. fw – суммируема, относительно $\mu \Leftrightarrow$ f – суммируема относительно ν, и в этом случае есть формула $(*)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$. По линейности $(*)$ верна для неотрицательный простых.

Пусть $f \geq 0$ – измер. Тогда найдутся простые $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ $(0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots)$ и $\phi_n \to f$ поточечно. $\underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\to \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\to \int_E f w d\mu}$ – по т. Леви.

2. $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$ – суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow fw$ суммируема относительно μ

   $\int_E f_\pm d\nu = \int_E f_\pm w d\mu$ и вычитаем.

□

Свойства. Неравенство Гельдера.

Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

Доказательство. Пусть $f, g \geq 0$ (просто чтобы не писать модули), $A^p := \int_E f^p d\mu,\ B^q := \int_E g^q d\mu$.

Случай $A = 0$. $\implies f^p = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде $\implies fg = 0$ почти везде $\implies \int_E fg d\mu = 0$.

Можно считать, что $A, B > 0$.

Случай $A = +\infty$. Очевидно.

Можно считать $0 < A, B < +\infty$.

$u := \frac{f}{A},\ v := \frac{g}{B}$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu,\ uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

Интегрируем полученное нер-во: $\frac{1}{AB} \int_E fg d\mu = \int_E uv d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int_E u^p d\mu}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ □

Свойства. Неравенство Минковского.

$p \geq 1$, тогда $\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq (|f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (|g|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

Доказательство. Можно считать, что $f, g \geq 0$, также можно считать, что $\int_E f^p d\mu$ и $\int_E g^p d\mu < +\infty$.

Проверим, что $\int_E (f+g)^p d\mu < +\infty$:

$f + g \leq 2\max\{f, g\} \implies (f+g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p(f^p + g^p)$

$\underbrace{\int_E (f+g)^p d\mu}_{=:C^p} \leq 2^p \left(\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu\right) < +\infty$ – показали, что левая часть конечна.

Можем считать, что $0 < C < +\infty$:

$C^p = \int_E (f+g)^p d\mu = \int_E (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f+g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f+g)^{p-1} d\mu$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ q = \frac{p}{p-1},\ (p-1)q = p$, тогда:

$\int_E f \cdot (f+g)^{p-1} d\mu \underbrace{\leq}_{\text{нер-во Гельдера}} \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E ((f+g)^{p-1})^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=C^{p-1}} \leq \left(\int_E f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} + \left(\int_E g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1}$ – сокращаем на C^{p-1}. ☐

2.5. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 2.20. Леви.

$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ и $f = \lim f_n$, тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

Следствие. Пусть $u_n \geq 0$. Тогда $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

Доказательство. $s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k,\ 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots$ и $s_n \to s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^{n} u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu$ ☐

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при почти всех $x \in E$.

Доказательство. $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ – суммир.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ почти везде конечна $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абс. сходится при почти всех $x \in E \implies$ сходится при почти всех $x \in E$. ☐

Лемма. Фату.

Если $f_n \geq 0$, то $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. $\underline{\lim} f_n = \lim \underbrace{\inf\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}}_{=:g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ и $g_n \to \underline{\lim} f_n$

$\underbrace{\implies}_{\text{теорема Леви}} \underbrace{\lim \int_E g_n d\mu}_{=\underline{\lim}\int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim}\int_E f_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu$

$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$ ☐

Замечание. Равенства может и не быть:

$\mu = \lambda,\ E = \mathbb{R},\ f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$

$\int_E f_n d\mu = +\infty$, но $f_n \to 0$

Из этих двух условие следует, что $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$

Следствие. (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть $0 \le f_n \le f$ и $f = \lim f_n$. Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. $f_n \le f \implies \int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \le \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \le \overline{\lim} \int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu$

$\implies \underline{\lim} = \overline{\lim} = \int_E f d\mu \implies \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ □

Теорема 2.21. Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть $f = \lim f_n$ и $|f_n| \le \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$ – суммируема на E.

Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, более того $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

Доказательство. $g_n := 2F - |f_n - f| \le 2F$ и $g_n \to 2F$.

$g_n \ge 2F - |f_n| - |f| \ge 0$.

Тогда предел $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$

Из двух строчек выше делаем вывод, что $\underbrace{\int_E |f_n - f| d\mu}_{\ge |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu|} \to 0$ □

Замечание. 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \to f = \begin{cases} +\infty, \text{ в точке } 0 \\ 0, otherwise \end{cases} \tag{4}$$

$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0,\ \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1,\ F := \sup f_n,\ F(x) = n$ при $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

Теорема 2.22. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Доказательство. $a = x_0$

$b = x_n$

$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1},\ x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$

$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1},\ x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$

Если мелкость дробления $\to 0$, то $S_*, S^* \to \int_a^b f$.

$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1},\ x_k]} f(t)$ при $x \in [x_{k-1},\ x_k]$

$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1},\ x_k]} f(t)$ при $x \in [x_{k-1},\ x_k]$

$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*,\ \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$

$g_* \le f \le g^*$ почти везде.

$\underbrace{S_*}_{\to \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \le \int_{[a,b]} f d\lambda \le \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\to \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f$ □

Замечание. На самом деле это верно для любой функции, интегрир. по Риману на $[a, b]$.

Теорема 2.23. (Критерий Лебега интегрированности по Риману).

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, тогда f – интегрируема по Риману $\Leftrightarrow$ множество точек разрыва f имеет нулевую меру Лебега.

Пример. Возьмем $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f = \mathbb{1}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$.

$f = 0$ почти везде $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$, но точки разрыва – весь отрезок $[0, 1]$.

2.6. Произведение мер

***Определение* 2.14.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – простарнства с σ-конечными мерами.

$\mathcal{P} = \{A \times B :\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B},\ \mu A < +\infty\ \wedge\ \nu B < +\infty\}$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty,\ A \times B$ – измеримый прямоугольник.

Теорема 2.24. $\mathcal{P}$ – полукольцо, а m_0 – σ-конечная мера на нем.

Доказательство. $\{A \in \mathcal{A} :\ \ \mu A < +\infty\}$ и $\{B \in \mathcal{B} :\ \ \nu B < +\infty\}$ – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

$\mathcal{P}$ – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (эта по теореме, которая была выше).

Проверяем, что m_0 – мера. Пусть $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$.

$\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k\times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(x) \times \mathbb{1}_{B_k}(y)$

$\int_Y \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(Y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbb{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$

$\int_X \mathbb{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbb{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$

σ-конечность m_0: $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j,\ Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j,\ \mu X_j < +\infty,\ \ \nu Y_k < +\infty$

$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$

$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty.$ □

***Определение* 2.15.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с σ-конечными мерами. Произведения мер μ и ν – стандратное продолжение меры m_0.

Обозначение: $\mu \times \nu,\ \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – σ-алгебра, на которую продолжили. $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

Следствие.

1. Декартово произвдедение измер мн-в – измеримо.
2. Если $\mu e = 0$, то $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$.

Доказательство.

1. $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \ \mu A_n < +\infty$

   $B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,\ \nu B_n < +\infty$

   $A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in\mathcal{P}}$ – измер.

2. $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k,\ \ \nu Y_k < +\infty$

   $e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k,\ \ (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$

□

Замечание. Обозначения: $C \subset X \times Y,\ \ x \in X$.

$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\}$ – сечения мн-ва C.

$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$

Следствие. 1. $\left(\bigcup_{\alpha\in I} C_\alpha\right)_x = \bigcup_{\alpha\in I}(C_\alpha)_x$

2. $\left(\bigcap_{\alpha\in I} C_\alpha\right)_x = \bigcap_{\alpha\in I}(C_\alpha)_x$

***Определение* 2.16.** Пусть функция f задана на мн-ве E, за исключением некоторого мн-ва e, $\mu e = 0$. Если f измерима на $E \setminus e$, то f измерима на E в **широком смысле**.

***Определение* 2.17.** Система мнжеств – монотонный класс, если

1. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots,\ E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \epsilon$
2. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots,\ E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^\infty E_n \in \epsilon$

Теорема 2.25. Если монотонный класс содержит алгебру $\mathcal{A}$, то он содержит и $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем, что минимальный монотонный класс $\mathcal{M}$, содержащий $\mathcal{A}$ – σ-алгебра.

Рассмотрим $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M}:\ A \cap B \in \mathcal{M}\ \wedge\ A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$.

Если $B \in \mathcal{A}$, то $B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ и $A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$

$E_1 \subset E_2 \subset \ldots,\ E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{E_n} \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$

Следовательно $\mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M},\ A \cap B \in \mathcal{M}\ \wedge\ A \setminus B \in \mathcal{M}$

$\implies \mathcal{M}$ – симметричная структура.

Рассмотрим $B \in \mathcal{M}$: $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M}:\ B \cap C \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$ (проверка по аналогии с предыдщуим случаем).

$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M},\ B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M}$ – алгебра.

$A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n,\ E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M},\ E_1 \subset E_2 \subset \ldots$

$\implies \underbrace{\bigcup E_n}_{=A} \in \mathcal{M}$, так как $\mathcal{M}$ – монотонный класс. □

Теорема 2.26. Принцип Кавальери.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ - пространства с полными σ-конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},\ m = \mu \times \nu$. Тогда

1. $C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \nu C_x$ измеримая в широком смысле.
3. $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

Доказательство. Меры конечны и $C \in \underbrace{\mathscr{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

$\mathcal{E}$ – система мн-в, в $\mathscr{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, такая что, если $E \in \mathcal{E}$, то $E_x \in \mathcal{B}$ $\forall x \in X$ и $\phi(x) = \nu E_x$ – измеримая функция.

Шаг 1. $\mathcal{E} = \mathscr{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

а. $\mathcal{E}$ – измеримая система.

$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B},\ \nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x)$ – измеримая.

б. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$.

$(\bigcup_{n=1}^\infty E_n)_x = \bigcup_{n=1}^\infty \underbrace{(E_n)_x}_{\in\mathcal{B}}$

$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (E_n)_x\right) = \lim \nu(E_n)_x$ – измеримая функция.

в. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{E}$ (можно переходить к дополнениям).

г. (б) + (в) $\implies \mathcal{E}$ – монотонный класс.

д. $\mathcal{E} \supset$ измеримый прямоугольник $E = \mathcal{A}\times\mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} B, \text{ если } x \in \mathcal{A} \\ \varnothing, \text{ иначе} \end{cases}$,

$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu\mathcal{B} \end{cases}$ – измеримая функция.

е. Если E и $\tilde{E} \in \mathcal{E}$, то $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$.

$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in\mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$

$\nu\left((E \sqcup \tilde{E})_x\right) = \nu E_x + \nu\tilde{E}_x$ – сумма измеримых функций.

ж. $\mathcal{E}$ содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников $\implies \mathcal{E}$ содержит кольцо $\implies \mathcal{E}$ содержит алгебру $\underbrace{\implies}_{\text{по т. о монотонном классе}}$ $\mathcal{E} \supset \mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$.

Мы сейчас проверили, что если $C \in \mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$, то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой эе упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

Шаг 2. Формула (3) для $C \in \mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$.

Рассмотрим $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$ – хотим сказать, что это мера на $\mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$.

Пусть E_n – дизъюнктны $\implies$ $\tilde{m}(\bigsqcup E_n) = \int_X \nu\left(\bigsqcup (E_n)_x\right) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^\infty \tilde{m}E_n$.

$m = \tilde{m}$ на измеримых прямоугольниках $\implies$ они совпадают. Получили, что хотели.

Шаг 3. $mC = 0,\ C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \implies$ найдется $\tilde{C} \in \mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$, т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $m\tilde{C} = 0$.

$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu\tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu\tilde{C}_x = 0$ при почти всех $x \in X$.

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$ и $\nu C_x = 0$ при потчи всех $x \in X$.

$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x)$.

Шаг 4. $C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e,\ \tilde{C} \in \mathscr{B}(\mathcal{A}\times\mathcal{B}),\ me = 0$.

$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x\in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}$, $\nu C_x = \nu\tilde{C}_x + \nu e_x = \nu\tilde{C}_x$.

$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu\tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x)$.

Шаг 5. $X = \bigsqcup_{n=1}^\infty X_n,\ Y = \bigsqcup_{k=1}^\infty Y_k,\ \mu X_n < +\infty$.

$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^\infty X_n \times Y_k$

$C \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\ C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$ удовлетворяет теореме.

$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^\infty (C_{nk})_x$

$mC = \sum_{n,k=1}^\infty mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^\infty \int_X \nu(C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \dots = \int_X \nu C_x d\mu$. □

Замечание. 1. Нужна лишь полнота ν.

2. Измеримость всех C_x не гарантирует измеримость C.

Доказательство. $\mathbb{R}^2,\ E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, $E \times [0,1]$ □

3. Среди C_x могут попадаться неизмеримые.

   Доказательство. $\mathbb{R}^2,\ E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримые, $\{0\} \times E$ $\square$

4. Хочется интегрировать не по X, а по проекции, то есть $P := \{x \in X :\ C_x \neq \varnothing\}$. Но P может быть неизмеримо.

   Доказательство. $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, решение проблемы, это взять $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$ – измеримое. $\square$

***Определение* 2.18.** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пр-во с σ-конечной мерой.

$f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ f \geq 0,\ E \in \mathcal{A},\ m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$

График функции над мн-вом E:

$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

$\mathcal{P}_f(x) := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$

Лемма. (Лемма 1).

Если f – измеримая, то $m\Gamma_f = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu X < +\infty$. Возьмем $\epsilon > 0$ и $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A$.

$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m\left(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]\right) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X$ – сколь угодно маленькое.

Пусть μ – σ-конечна. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n,\ \mu X_n < +\infty$,

$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n)$ – нулевой меры. $\square$

Лемма. (Лемма 2).

$f \geq 0$ – измерима в широком смысле $\implies \mathcal{P}_f$ – измеримое мн-во.

Доказательство.

1. Пусть f – простая $\implies f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \times [0, a_k]$ – измеримое.

2. Пусть f – измеримая $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \to f$ – простые ϕ_i, $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$.

   $\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$.

   Берем $x \in X$.

   Если

   (a) $f(x) = +\infty$, то $\phi_n(x) \to +\infty$, над точкой x, $[0, \phi_n(x)]$ их объединие будет луч.

   (b) $f(x) < +\infty$, то $\phi_n(x) \to f(x)$, $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

$\square$

Теорема 2.27. (О мере подграфика).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ – пространство с σ-конечной мерой, $f \geq 0,\ f : X \to \overline{\mathbb{R}},\ m = \mu \times \lambda_1$.

Тогда f – измеримая в широком смыслке $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$ – измер. и в этом случае $\int_X f d\mu = m\mathcal{P}_f$.

Доказательство. "$\Rightarrow$": Лемма 2.

"$\Leftarrow$": принцип Кавальери для $\mathcal{P}_f$:

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), \text{ при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), \text{ при } f(x) < +\infty \end{cases} \tag{5}$$

$\phi(x) := \lambda_1(\mathcal{P}_f)_x = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$

$m\mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda\left((\mathcal{P}_f)_x\right)}_{=f(x)} d\mu(x)$ – получили, что хотели. □

Теорема 2.28. Тонелли.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$f:\ X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримая, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – измерима, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – измерима относительно ν.
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_C$ (характеристическая функция мн-ва C), тогда $f_x(y) = \mathbb{1}_{C_x}(y)$.

$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$

$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu$.

2. Пусть $f \geq 0$ – простая, тогда $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$
3. Пусть $f \geq 0$ – измеримая, тогда берем последовательность простых функций $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\lim f_n = f$.

   $(f_n)_x(y)$ – измерим. при почти всех x.

   $(f_n)_x \nearrow f_x$ – измерим. при почти всех x.

   $\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y)$ – измерим. и $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$.

   $\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x)$ – измерим.

   $\int_{X \times Y} f dm \underbrace{\leftarrow}_{\text{т. Леви}} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \to \int_X \phi d\mu$.

□

Теорема 2.29. Фубини.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$f:\ X \times Y \to \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, суммируема, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – суммируема, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – суммируема относительно ν.
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y)\right) d\mu(x)$

Доказательство. $(*): \int_{X\times Y}|f|dm<+\infty$ – следует из суммируемости f.

$$(*) \underbrace{=}_{\text{т. Тонелли}} = \int_X \underbrace{\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x)$$

$$\implies \alpha(x) = \underbrace{\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)}_{\implies f_x \text{ – суммируема при почти всех } x\in X} \text{ – конечна при почти всех } x\in X.$$

$\int_X |\phi|d\mu = \int_X \left|\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right| d\mu(x) \le \int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)d\mu(x) = \int_{X\times Y}|f|dm<+\infty$

$\implies \phi$ – суммируема.

$\int_{X\times Y} f_\pm dm = \int_X \left(\int_Y f_\pm(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x)$ и вычтем $f=f_+-f_-$. ☐

Следствие. Если $f\ge 0$ и измеримая или f – суммируемая, то

(**): $\int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$.

Следствие. $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ – пространства с полными σ-конечными мерами.

$f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по μ, $g: Y\to\overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по ν.

Тогда $h(x,y)=f(x)\cdot g(y)$ суммируема по $m=\mu\times\nu$ и $\int_{X\times Y} hdm = \int_X fd\mu\cdot\int_Y gd\nu$.

Доказательство. $\int_{X\times Y}|h|dm \underbrace{=}_{\text{т. Тонелли}} = \int_X \left(\int_Y |f(x)||g(y)|d\nu(x)\right) d\mu(x) =$

$= \int_X |f(x)|\cdot\int_Y |g(y)|d\nu(y)d\mu(x) = \int_Y |g|d\nu\cdot\int_X|f|d\mu<+\infty \implies h$ – суммируема.

По Фубини пишем все без модулей. ☐

Замечание.
1. Суммируемости $f_x(y)=f(x,y)$, $f^y(x)=f(x,y)$, $\phi(x)=\int_X f_x d\nu$, $\psi(y)=\int_X f^y d\mu$ не хватает для суммируемости f по мере m.
2. Без суммируемости f по m равенства **(**)** может не быть.

   Пример. $\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $g(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

   Первообразные:

   1. $\int f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2}$
   2. $\int g(x,y)dx = -\frac{y}{x^2+y^2}$

   Подставляем:

   1. $\int_{[-1,1]} f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$

   $\int_{[-1,1]}\int_{[-1,1]} f(x,y)dxdy = -2\int_{[-1,1]}\frac{dy}{y^2+1} = -2\cdot\arctan(y)|_{-1}^{1} = -\pi$

   $\int_{[-1,1]}\int_{[-1,1]} f(x,y)dydx = \pi$ – не совпали из-за отсутствия суммируемости.

   2. $\int_{[-1,1]} g(x,y)dx = -\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$

Теорема 2.30. $(X,\mathcal{A},\mu)$ – пространство с σ-конечной мерой, $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ – измерим.

$\int_X |f|d\mu = \int_0^{+\infty}\mu X\{|f|\ge t\}dt$ (с кобках это функция распределения).

Доказательство. $m=\mu\times\lambda_1$.

$$\int_X |f|d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]}\left(\int_X \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x,t)}_{=1\Leftrightarrow|f(x)|\ge t} d\mu(x)\right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]}\mu X\{|f|\ge t\}d\lambda_1(t).$$

$\square$

Следствие. 1. В условии теоремы $\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\} dt$

Доказательство. $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$ – монотонно возраст., не более чем счтеное число точек разрыва.

$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n\to\infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s\to t+} g(s) = g(t)$ при почти всех t.

$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$ $\square$

2. $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt$ при $p > 0$.

Доказательство. $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} ps^{p-1} g(s) ds$

Где $t = s^p$, $s = t^{\frac{1}{p}}$, $dt = ps^{p-1} ds$. $\square$