

C++ によるデリバティブ・プライシング SABR モデル

高田勝己*

2016 年 11 月 24 日

1 Short Maturity Expansion

次のモデルを考える。

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t C(F_t) dW_t \\ d\sigma_t = D(\sigma_t) dZ_t \\ dW_t dZ_t = \rho dt \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 W と Z はブラウン運動。 $\{F_t\}$ はフォワードレートのプロセス、 $\{\sigma_t\}$ は確率的なボラティリティのプロセスである。

1.1 Implied normal volatility

時点 t のヨーロピアンコールオプションの満期 T のフォワード価格 C_t は

$$C_t = E_t \left[(F_T - K)^+ \right] = h(t, F_t, v_t) \quad (2)$$

と表現できる。ここで、 h は Bachelier call option formula でこのフォーミュラから逆算される Implied normal vol が v_t である。 h は

$$h(t, F, v) = (F - K) \Phi \left(\frac{F - K}{v\sqrt{\tau}} \right) + v\sqrt{\tau} \varphi \left(\frac{F - K}{v\sqrt{\tau}} \right), \quad \tau = T - t \quad (3)$$

で与えられる。ここで $\varphi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 (PDF)

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

であり、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数 (CDF) である。

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz$$

練習 1 Bachelier のコールオプション価格の公式 (3) を導け。

* 株式会社 Diva Analytics, ktakada@divainvest.jp

Ito の定理を (3) に使って

$$dC_t = -h_\tau dt + h_f dF_t + \frac{1}{2} h_{ff} dF_t^2 + h_v dv_t + \frac{1}{2} h_{vv} dv_t^2 + h_{fv} dF_t dv_t \quad (4)$$

ここで subscripts は偏微分を表す。

$$x = \frac{F - K}{v} \quad (5)$$

として Ito を (5) に使って、

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{v_t} dF_t - \frac{F_t - K}{v_t^2} dv_t - \frac{1}{v_t^2} dF_t dv_t + \frac{F_t - K}{v_t^3} dv_t^2 \\ &= \frac{1}{v_t} (dF_t - x_t dv_t) + O(dt) \end{aligned}$$

よって、

$$dx_t^2 = \frac{1}{v_t^2} (dF_t^2 + x_t^2 dv_t^2 - 2x_t dF_t dv_t) \quad (6)$$

$$y = \frac{F - K}{v\sqrt{\tau}} \quad (7)$$

とおくと

$$\frac{h}{v\sqrt{\tau}} = y\Phi(y) + \varphi(y) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{v\sqrt{\tau}} \right)_y &= \Phi(y) + y\varphi(y) + \varphi'(y) \\ &= \Phi(y) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{v\sqrt{\tau}} \right)_f &= \left(\frac{h}{v\sqrt{\tau}} \right)_y \frac{dy}{dF} \\ h_f &= \Phi(y) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\varphi'(y) = -y\varphi(y)$ を使った。

$$\begin{aligned} h_{ff} &= \Phi'(y) \frac{\partial y}{\partial F} \\ &= \frac{\varphi(y)}{v\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

$$v\sqrt{\tau}h_{ss} = \varphi(y) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{v\sqrt{\tau}} \right)_v &= \left(\frac{h}{v\sqrt{\tau}} \right)_y \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= -\Phi(y) \frac{y}{v} \\ \frac{h_v}{\sqrt{\tau}} - \frac{h}{v\sqrt{\tau}} &= -\Phi(y) y \end{aligned}$$

(8) を代入して、

$$\frac{h_v}{\sqrt{\tau}} = \varphi(y) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{vv}}{\sqrt{\tau}} &= -y\varphi(y) \frac{dy}{dv} \\ &= y\varphi(y) \frac{y}{v} \end{aligned} \quad (13)$$

$$h_{vv} = y^2\varphi(y) \frac{\sqrt{\tau}}{v} \quad (14)$$

(11) と (12) より

$$h_v = v\tau h_{ff} \quad (15)$$

(11) と (14) から

$$\begin{aligned} h_{vv} &= h_{ff}y^2\tau \\ &= x^2h_{ff} \end{aligned} \quad (16)$$

(10) から

$$\begin{aligned} h_{fv} &= \varphi(y) \frac{\partial y}{\partial v} \\ h_{ff} &= \varphi(y) \frac{\partial y}{\partial f} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} h_{fv} &= \frac{\partial y / \partial v}{\partial y / \partial f} h_{ff} \\ &= -x h_{ff} \end{aligned}$$

(8) より、

$$h = v\sqrt{\tau}(y\Phi(y) + \varphi(y))$$

これより

$$\begin{aligned} h_\tau &= v\sqrt{\tau} \left(\Phi(y) \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) + \frac{v}{2\sqrt{\tau}} (y\Phi(y) + \varphi(y)) \\ &= -v\sqrt{\tau}\Phi(y) \frac{y}{2\tau} + \frac{v}{2\sqrt{\tau}} (y\Phi(y) + \varphi(y)) \\ &= \frac{v\varphi(y)}{2\sqrt{\tau}} = \frac{v^2}{2} h_{ff} \end{aligned} \quad (17)$$

(15)、(16) 及び (17) を使かうと (4) は

$$dC_t = -h_\tau dt + h_f dF_t + \frac{1}{2} h_{ff} dF_t^2 + h_v dv_t + \frac{1}{2} h_{vv} dv_t^2 + h_{fv} dF_t dv_t \quad (18)$$

$$= -\frac{1}{2} v^2 h_{ff} dt + h_f dF_t + \frac{1}{2} h_{ff} dF_t^2 + v\tau h_{ff} dv + \frac{1}{2} x^2 h_{ff} dv^2 - x h_{ff} dF dv \quad (19)$$

これに期待値をとると

$$\begin{aligned} 0 &= E_t[dC_t] = -\frac{1}{2}v^2 h_{ff} dt + \frac{1}{2} h_{ff} dF_t^2 + v\tau h_{ff} E_t[dv] + \frac{1}{2} x^2 h_{ff} dv^2 - x h_{ff} dF dv \\ &= -v^2 dt + dF_t^2 + 2v\tau E_t[dv] + x^2 dv^2 - 2x dF dv \end{aligned}$$

(6) より、

$$v^2 (dx^2 - dt) + 2v\tau E_t[dv] = 0$$

short maturity、 $\tau \rightarrow 0$ になると

$$\sigma_x^2 \equiv \frac{dx^2}{dt} = 1 \quad (20)$$

ここで、 σ_x はブラウン運動 B に対して

$$\begin{aligned} dx &= \sigma_x dB_t \\ dx^2 &= \sigma_x^2 dt \end{aligned}$$

を満たす。(20) はデリバティブ理論ででてくる通常ドリフトに関する条件ではなく、ボラティリティーに係る条件である。

x を状態変数をつかって

$$x = x(F, \sigma)$$

と表す。それぞれの偏微分を x_F, x_σ すると、

$$\begin{aligned} dx &= (\dots) dt + x_F dF + x_\sigma d\sigma \\ 1 &= \sigma_x^2 = \frac{(x_F dF + x_\sigma d\sigma)^2}{dt} = \sigma^2 C(F)^2 x_F^2 + D(\sigma)^2 x_\sigma^2 + 2\rho\sigma C(F) D(\sigma) x_F x_\sigma \end{aligned} \quad (21)$$

(5) の x の定義より $x(F, \sigma)$ の境界条件は

$$x(K, \sigma) = 0 \quad (22)$$

である。(21) を (22) のもとで $x(F, \sigma)$ について解いて、(5) より imp normal vol は

$$v_t = \frac{F_t - K}{x(F_t, \sigma_t)}$$

と計算される。imp normal vol の誤差は $O(\tau)$ である。

(21) の non-linear first order PDE は Eikonal equation と呼ばれ、その解は $(dF, d\sigma)$ の local covariance で定義される metric を持つ球上で、点 (F, σ) から線 $F = K$ までの最短な geodesic distance を表すことができる。

1.2 Implied (lognormal, Black) volatility

時点 t のヨーロピアンコールオプションの満期 T のフォワード価格 C_t を今度は Black model を用いて表す。

$$C_t = E_t \left[(F_T - K)^+ \right] = \bar{h}(t, F_t, I_t) \quad (23)$$

と表現できる。ここで、 \bar{h} は Black call option formula でこのフォーミュラから逆算される Implied vol が I_t である。 \bar{h} は

$$\bar{h}(t, F, I) = F\Phi(d_+) - K\Phi(d_-), \quad \tau = T - t \quad (24)$$

ここに

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{F}{K}}{I\sqrt{\tau}} \pm \frac{I\sqrt{\tau}}{2}$$

Ito の定理を (3) に使って

$$dC_t = -\bar{h}_{\tau}dt + \bar{h}_f dF_t + \frac{1}{2}\bar{h}_{ff}dF_t^2 + \bar{h}_I dI_t + \frac{1}{2}\bar{h}_{II}dI_t^2 + \bar{h}_{fI}dF_t dI_t \quad (25)$$

Black model からのリスクパラメータはみなさんご存じのように

$$\begin{aligned} \bar{h}_f &= \Phi(d_+) \\ \bar{h}_{ff} &= \varphi(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial F} = \frac{\varphi(d_+)}{FI\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{K\varphi(d_-)}{F^2 I\sqrt{\tau}} \\ \bar{h}_I &= K\varphi(d_-)\sqrt{T} \\ &= F\varphi(d_+)\sqrt{T} \\ \bar{h}_{II} &= K\varphi(d_-)d_+d_- \frac{\sqrt{T}}{I} \\ &= F\varphi(d_+)d_+d_- \frac{\sqrt{T}}{I} \\ \bar{h}_{fI} &= \varphi(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial I} = -\frac{\varphi(d_+)d_-}{I} \\ \bar{h}_{\tau} &= F\varphi(d_+) \frac{\partial d_+}{\partial \tau} - K\varphi(d_-) \frac{\partial d_-}{\partial \tau} \\ &= F\varphi(d_+) \frac{I}{2\sqrt{\tau}} \\ &= K\varphi(d_-) \frac{I}{2\sqrt{\tau}} \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} \bar{h}_I &= F^2\tau\bar{h}_{ff} \\ \bar{h}_{II} &= F^2\tau d_+d_- \bar{h}_{ff} = \left(\bar{x} + \frac{\sigma\tau}{2}\right) \left(\bar{x} - \frac{\sigma\tau}{2}\right) F^2\bar{h}_{ff} \\ \bar{h}_{fI} &= -Fd_- \sqrt{\tau}\bar{h}_{ff} = -\left(\bar{x} - \frac{\sigma\tau}{2}\right) F\bar{h}_{ff} \\ \bar{h}_{\tau} &= \frac{1}{2}F^2I^2\bar{h}_{ff} \end{aligned}$$

これらを (25) に代入して、今度は

$$\bar{x}(F, I) = \frac{\log \frac{F}{K}}{I} \quad (26)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
dC_t &= -\bar{h}_\tau dt + \bar{h}_f dF_t + \frac{1}{2} \bar{h}_{ff} (dF_t)^2 + \bar{h}_I dI_t + \frac{1}{2} \bar{h}_{II} dI_t^2 + \bar{h}_{fI} dF_t dI_t \\
&= -\frac{1}{2} F^2 I^2 \bar{h}_{ff} dt + \bar{h}_f dF_t + \frac{1}{2} \bar{h}_{ff} (dF_t)^2 + F^2 \tau \bar{h}_{ff} dI_t \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{x} + \frac{\sigma\tau}{2} \right) \left(\bar{x} - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F^2 \bar{h}_{ff} dI_t^2 - \left(\bar{x}_t - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F_t \bar{h}_{ff} dF_t dI_t
\end{aligned} \tag{27}$$

(27) に期待値をとると

$$\begin{aligned}
0 &= E_t [dC_t] = -\frac{1}{2} F^2 I^2 \bar{h}_{ff} dt + \frac{1}{2} h_{ff} dF_t^2 + F^2 \tau \bar{h}_{ff} E_t [dI_t] + \frac{1}{2} \left(\bar{x} + \frac{\sigma\tau}{2} \right) \left(\bar{x} - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F^2 \bar{h}_{ff} dI_t^2 - \left(\bar{x}_t - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F_t \bar{h}_{ff} dF_t dI_t \\
&= -F_t^2 I_t^2 dt + dF_t^2 + 2F^2 \tau E_t [dI_t] \\
&\quad + \left(\bar{x}_t + \frac{\sigma\tau}{2} \right) \left(\bar{x}_t - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F^2 dI_t^2 - 2 \left(\bar{x}_t - \frac{\sigma\tau}{2} \right) F_t dF_t dI_t
\end{aligned} \tag{28}$$

$\bar{x}(F, I)$ に Ito を使う。 $\bar{F} = \log \frac{F}{K}$ とおけば

$$\frac{d\bar{x}_t}{\bar{x}_t} = \frac{d\bar{F}}{\bar{F}} - \frac{dI}{I} + O(dt)$$

$d\bar{F} = dF / F$ だから

$$\frac{d\bar{x}_t}{\bar{x}_t} = \frac{dF}{F \log \frac{F}{K}} - \frac{dI}{I} + O(dt)$$

よって

$$\begin{aligned}
d\bar{x}_t &= \frac{dF_t}{F_t I_t} - \bar{x}_t \frac{dI}{I} + O(dt) \\
d\bar{x}_t^2 &= \left(\frac{dF_t}{F_t} \right)^2 \frac{1}{I_t^2} + \bar{x}_t^2 \left(\frac{dI}{I} \right)^2 - 2\bar{x}_t \frac{dF_t}{F_t} \frac{dI}{I^2}
\end{aligned}$$

(28) で $\tau \rightarrow 0$ とすれば、

$$\begin{aligned}
-F_t^2 I_t^2 dt + dF_t^2 + \bar{x}_t^2 F^2 dI_t^2 - 2\bar{x}_t F_t dF_t dI_t &= 0 \\
\left(\left(\frac{dF}{F} \right)^2 + \bar{x}_t^2 dI^2 - 2\bar{x}_t \frac{dF}{F} dI - I_t^2 dt \right) &= 0 \\
I_t^2 (d\bar{x}_t^2 - dt) &= 0
\end{aligned} \tag{29}$$

よって、(29) は (20) と同じ diffusion 条件となる。よって、

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x \\
\iff \frac{\log \frac{F}{K}}{I} &= \frac{F - K}{v} \\
\iff \frac{I}{v} &= \frac{\log \frac{F}{K}}{F - K}
\end{aligned} \tag{30}$$

(30) は short maturity における imp normal vol と imp (Lognormal) vol の関係を示している。

2 SABR

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t C(F_t) dW_t \\ d\sigma_t = \nu \sigma_t dZ_t \\ dW_t dZ_t = \rho dt \end{cases} \quad (31)$$

J を次のように定義する。

$$J_t \equiv J(F_t, \sigma_t) = \frac{1}{\sigma_t} \int_K^{F_t} \frac{1}{C(u)} du \quad (32)$$

伊藤のレンマより

$$\begin{aligned} dJ_t &= \frac{dF_t}{\sigma_t C(F_t)} - \frac{J_t}{\sigma_t} d\sigma_t \\ &= dW_t - \nu J_t dZ_t + O(dt) \\ &= (1 - 2\rho\nu J_t + \nu^2 J_t^2)^{1/2} dB_t + O(dt) \\ &\equiv \sqrt{q(J_t)} dB_t + O(dt) \end{aligned}$$

ここで

$$q(J) = 1 - 2\rho\nu J + \nu^2 J^2$$

であり、 B は新しい BM。

$$x_t = x(J(F_t, \sigma_t)) = x(F_t, \sigma_t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{dx}{dJ} dJ_t + O(dt) \\ &= \frac{dx}{dJ} \sqrt{q(J_t)} dB_t + O(dt) \end{aligned}$$

Diffusion Condition より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dJ} \sqrt{q(J_t)} &= 1 \\ \frac{dx_t}{dJ} &= \frac{1}{\sqrt{q(J_t)}} \end{aligned} \quad (33)$$

(32) より

$$J_t(K, \sigma_t) = 0$$

x の境界条件は (22) より

$$x(K, \sigma_t) = 0$$

だから、

$$\begin{aligned} x(J_t(K, \sigma_t)) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(0) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

(33) と (34) より

$$x(J) = \int_0^J \frac{1}{\sqrt{q(u)}} du \quad (35)$$

$$= \frac{1}{\nu} \log \frac{\sqrt{q(J)} - \rho + \nu J}{1 - \rho} \quad (36)$$

練習 2 (35) から (36) を計算せよ。

x の定義より

$$v_0 = \frac{F_0 - K}{x_0} \quad (37)$$

$$I_0 = \frac{\log(F_0 / K)}{x_0} \quad (38)$$

ここで、

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\nu} \log \frac{\sqrt{q(J_0)} - \rho + \nu J_0}{1 - \rho} \\ J_0 &= \frac{1}{\sigma_0} \int_K^{F_0} \frac{1}{C(u)} du \end{aligned} \quad (39)$$

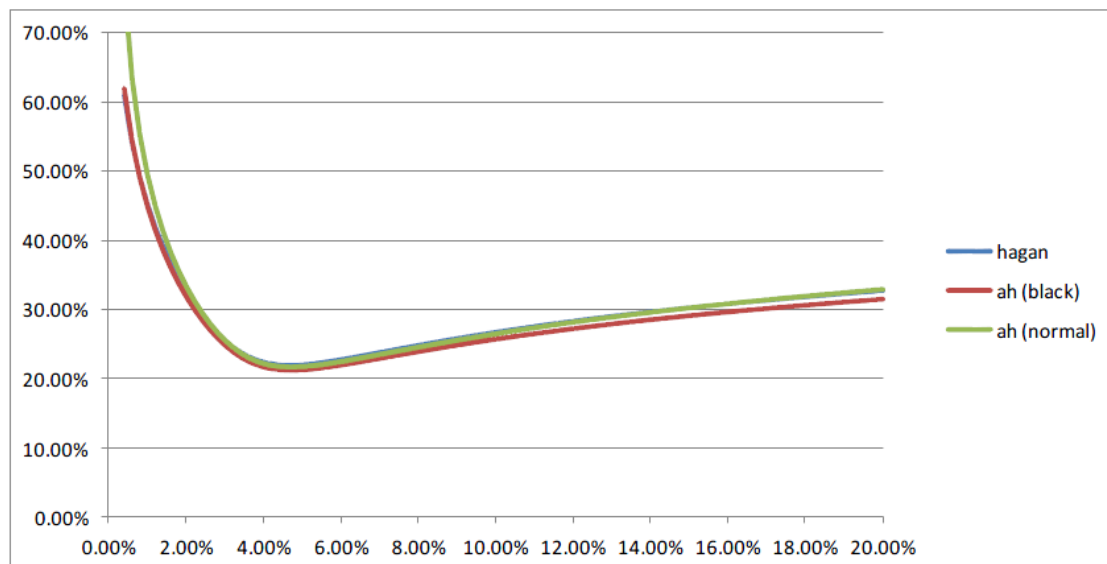
(39) で $C(F) = F^\beta$ とおくと

$$J_0 = \frac{F_0^{1-\beta} - K^{1-\beta}}{\sigma_0 (1 - \beta)}$$

であり、これに対して、Black vol と Normal vol はそれぞれ、

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\nu \log(F_0 / K)}{\log \frac{\sqrt{q(J_0)} - \rho + \nu J_0}{1 - \rho}} \\ v_0 &= \frac{\nu (F_0 - K)}{\log \frac{\sqrt{q(J_0)} - \rho + \nu J_0}{1 - \rho}} \end{aligned}$$

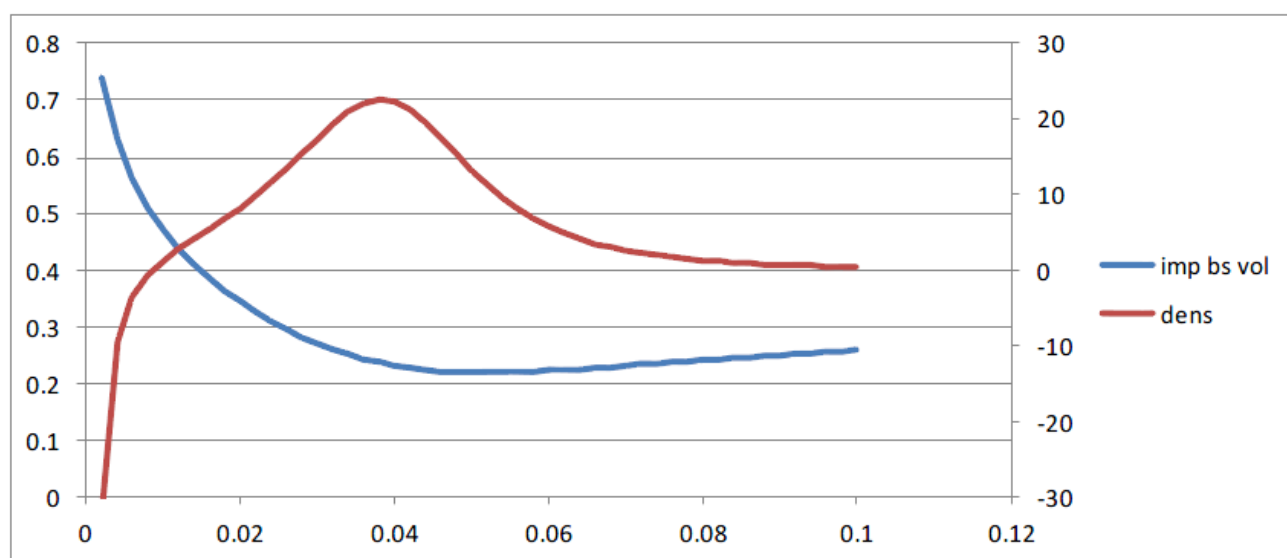
3 数値例



(Figure 1) Implied vol from short maturity expansions vs Hagan expansion.

SABR パラメータは $F_0 = 4\%$, $T = 10$, $\beta = 0.7$, $\sigma_0 = 0.0873$, $\rho = -0.48$, $\nu = 0.47$ を使っている。上の図は、青線は Hagan 近似 (前回の資料の (2) 式)、赤線は (38)、また緑線は (37) を (30) をつかって Black vol に変換している。実は Hagan 近似は 0 次オーダーとほとんど同じといってよい。

次に imp normal vol と SABR density をプロットする。



(Figure 2) SABR imp vol and SABR density

SABR パラメータは (Figure 1) と同じものを使っている。金利が 0.1% ぐらいの低いところで density は

負の値をとっていることがわかる。

注意事項

- 当資料（本文及びデータ等）の著作権を含む知的所有権は（株）Diva Analytics に帰属し、事前に（株）Diva Analytics への書面による承諾を得ることなく、本資料およびその複製物に修正・加工することは強く禁じられています。また、本資料およびその複製物を送信および配布・譲渡することは強く禁じられています。
- 当資料（本文及びデータ等）は主として（株）Diva Analytics が入手したデータ、もしくは信頼できると判断した情報に基づき作成されていますが、情報の正確性、完全性、適宜性、将来性およびパフォーマンスについて（株）Diva Analytics）は保証を行っておらず、またいかなる責任を持つものではありません。