---

title: 粘弾性分解制御 share: false # Show social sharing links? view: ["3"] date: "2019-10-03" markup: mmark abstruct: "" draft: false

前提

タスク空間の座標 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 関節空間の座標 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times n}$で$m < n$の冗長自由度が存在する。

タスク空間のスティフネスを$K \in R$、コンプライアンスを$C (= K^{-1})$としタスク空間のスティフネスをK_{θ}、コンプライアンスを$C_{\theta} (= {K_{\theta}}^{-1})$とする。

数式の準備

微分運動学

$$ \boldsymbol{J = \frac{\partial x}{\partial \theta} } \tag{1} $$

$$ \boldsymbol{\dot{x} = J \dot{\theta} } \tag{2} $$

$\delta \boldsymbol{\theta} << 1$で微小なとき以下が成り立つ

$$ \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{\theta} \tag{3} $$

仮想仕事の原理から

$$ {\delta \boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{f} = {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau} \tag{4}$$

$$ (\boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{\theta})^T \boldsymbol{f} = {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau} $$

$$ {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{J^T} \boldsymbol{f} = {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau} $$

以上より

$$ \boldsymbol{J^T} \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\tau} \tag{5} $$

ヤコビ行列の擬似逆行列

ヤコビ行列 $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{m \times n} (m < n)$なので

$$ \boldsymbol{J^{\sharp} = J^T(J J^T)^{-1}}$$

力と粘弾性

スティフネス

$$ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{K} \delta \boldsymbol{x} \tag{6}$$

$$ \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K_{\theta}} \delta \boldsymbol{\theta} \tag{7}$$

コンプライアンス

$$ \boldsymbol{C f} = \boldsymbol{K^{-1} f} = \delta \boldsymbol{x} \tag{8}$$

$$ \boldsymbol{C_{\theta} \tau} = \boldsymbol{K_{\theta}^{-1} \tau} = \delta \boldsymbol{\theta} \tag{9}$$

粘弾性の変換

スティフネスの変換

(5)式に(6),(7)式を代入して $$ \boldsymbol{J^T K} \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{K_\theta} \delta \boldsymbol{\theta}$$

(3)式より $$ \boldsymbol{J^T K J } \delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{K_\theta} \delta \boldsymbol{\theta}$$

$$ \boldsymbol{J^T K J } = \boldsymbol{K_\theta} \tag{10}$$

冗長自由度をもつ時、$\boldsymbol{K_{\theta}}$は正則ではなくなる

コンプライアンスの変換

(3)式に(8),(9)式を代入して $$ \boldsymbol{C f} = \boldsymbol{J C_{\theta} \tau} $$

(5)式より $$ \boldsymbol{C f} = \boldsymbol{J C_{\theta} J^T f} $$

$$ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{J C_{\theta} J^T } \tag{11} $$

コンプライアンスの一般解

(11)式から$\boldsymbol{C_{\theta}}$の一般解は、目標値を$\boldsymbol{Y^{-1}}$として、以下の最小化問題を解くことで求めることができる。

$$ \rm{min} \ \frac{1}{2} \parallel \boldsymbol{Y^{-1} - C_{\theta}} \parallel ^2 \ \rm{subject\ to} \ \boldsymbol{C = J C_{\theta} J^T } \tag{12}$$

この時の解は以下で示される。

$$ \boldsymbol{C_{\theta} = J^{\sharp} C {J^{T}}^{\sharp} + (Y^{-1} - J^{\sharp}J Y^{-1} J^T {J^{T}}^{\sharp})} \tag{13}$$

動力学を考慮した粘弾性の変換

準備

Inertia-weighted pseudo inverse

運動エネルギーを最小化する一般化逆行列

$$ \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger} = (J M^{-1} J^T)^{-1}J M^{-1} } \tag{14}$$

$$ \boldsymbol{f = {J^T}^{\dagger}} \boldsymbol{\tau} \tag{15}$$

この時τの一般解は以下の最小化問題(17)式を解いて(18)式になる

$$ \rm{min} \ \frac{1}{2} \parallel \boldsymbol{y - \tau} \parallel ^2 \ \rm{subject\ to} \ \boldsymbol{f = {J^T}^{\dagger}} \boldsymbol{\tau} \tag{17}$$

$$ \boldsymbol{\tau = J^T f + (E - J^T{J^{\dagger}}^T)y} \tag{18}$$

スティフネスの変換(動力学)

(15)式に(6),(7)式を代入して $$ \boldsymbol{K} \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger} } \boldsymbol{K_{\theta}} \delta \boldsymbol{\theta} $$

(3)式より $$ \boldsymbol{K} \boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger}} \boldsymbol{K_{\theta}} \delta \boldsymbol{\theta}$$

$$ \boldsymbol{K} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger}} \boldsymbol{K_{\theta}} \tag{19}$$

スティフネスの一般解(動力学)

$$ \rm{min} \ \frac{1}{2} \parallel \boldsymbol{Y - K_{\theta}} \parallel ^2 \ \rm{subject\ to} \ \boldsymbol{K} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger}} \boldsymbol{K_{\theta}} \tag{20}$$

$$ \boldsymbol{K_{\theta} = J^T K J + (E - J^T{J^T}^{\dagger})Y} \tag{21}$$

(21)式は(18)式を$\boldsymbol{y = Y}\delta\boldsymbol{\theta}$として、(6)、(7)式を代入しても求まる。

コンプライアンスの変換(動力学)

(3)式に(8),(9)式を代入して $$ \boldsymbol{Cf = J C_{\theta} \tau} $$

(15)式より $$ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} \tau = J C_{\theta} \tau} $$

$$ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} = J C_{\theta}} \tag{22}$$

コンプライアンスの一般解(動力学)

$$ \rm{min} \ \frac{1}{2} \parallel \boldsymbol{Y^{-1} - C_{\theta}} \parallel ^2 \ \rm{subject\ to} \ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} = JC_{\theta}} \tag{23}$$

$$ \boldsymbol{C_{\theta} = J^{\sharp}C{J^T}^{\dagger} + (E - J^{\sharp}J^T) Y^{-1}} \tag{24} $$

付録

$$ \rm{min} \ \frac{1}{2} \parallel \boldsymbol{Y^{-1} - C_{\theta}} \parallel ^2 \ \rm{subject\ to} \ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} = JC_{\theta}} $$

を解く. ラグランジュの未定乗数λとしてラグランジアンLは

$$ L = \frac{1}{2} \parallel Y^{-1} - C_{\theta} \parallel ^2 + \lambda^T (J C_{\theta} - C {J^T}^{\dagger}) $$

Lの偏微分は

$$ \frac{\partial L}{\partial C_{\theta}} = - (Y^{-1} - C_{\theta}) + J^T \lambda = 0 \tag{25} $$

$$ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = J C_{\theta} - C {J^T}^{\dagger} = 0 \tag{26} $$

(25), (26)からC_{θ}を消去してλを求める

$$ J (Y^{-1} - J^T \lambda) - C {J^T}^{\dagger} = 0\ JJ^T \lambda = J Y^{-1} - C {J^T}^{\dagger} \ \lambda = (JJ^T)^{-1} (J Y^{-1} - C {J^T}^{\dagger}) $$

$$ \lambda = {J^T}^{\sharp} Y^{-1} - (JJ^T)^{-1} C {J^T}^{\dagger} \tag{27} $$

(25), (27)より

$$ \begin{align} C_{\theta} &= Y^{-1} - J^T \lambda \ C_{\theta} &= Y^{-1} - J^T {J^T}^{\sharp} Y^{-1} - J^T (JJ^T)^{-1} C {J^T}^{\dagger}\ C_{\theta} &= J^{\sharp} C {J^T}^{\dagger} (E - J^T {J^T}^{\sharp})Y^{-1} \ \end{align} $$

以下の関係式が求まる

$$ \boldsymbol{C_{\theta} = J^{\sharp}C{J^T}^{\dagger} + (E - J^{\sharp}J^T) Y^{-1}} \tag{24} $$

メモ

動力学レベルのスティフネスとコンプライアンスの比較

(21)式、(24)式から求まる$\boldsymbol{K_{\theta} , C_{\theta} (= {K_{\theta}^{-1}}) }$が一致するのは任意の行列Yを以下のようにスカラー倍にした時

$$ \boldsymbol{Y = kE}$$

動力学と運動学のつながり

$$ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} \tau = J C_{\theta} \tau} $$

に(5)式を代入すると

$$ \boldsymbol{C {J^T}^{\dagger} J^T f = J C_{\theta} J^T f} $$

また$\boldsymbol{{J^T }^{\dagger} J^T = E}$なので

$$ \boldsymbol{C f = J C_{\theta} J^T f} $$

以下のように(11)式が求まる

$$ \boldsymbol{C = J C_{\theta} J^T } $$

よって(22)式と(11)式を同時に満たす,$\boldsymbol{C, C_{\theta}}$が存在し、そこで(22)式に(11)式を代入すると

$$ \boldsymbol{J C_{\theta} J^T {J^T}^{\dagger} = J C_{\theta}} $$

この時$J^T {J^T }^{\dagger} \neq E$なので一見、両辺は等しくないように見える

これは上の式変換に(18)式ではなく(5)式を用いたことによりC_{θ}が以下を満たすように限定された

$$\boldsymbol{C_{\theta} J^T {J^T}^{\dagger} = C_{\theta}}$$

ちなみに以下の式は導くことができた

$$\boldsymbol{ J^T {J^T}^{\dagger}K_{\theta} = K_{\theta}}$$

proof)

$$ \boldsymbol{\tau =J^T f}\tag{A.1}$$

$$ \boldsymbol{f = {J^T}^{\dagger} \tau} \tag{A.2}$$

(A.1)と(A.2)を用いて$\boldsymbol{f}$を消去すると $$ \boldsymbol{\tau = J^T {J^T}^{\dagger} \tau}$$

$$(中略)$$

$$ \boldsymbol{K_{\theta} = J^T {J^T}^{\dagger} K_{\theta}}$$

$$\boldsymbol{ {C_{\theta}}^T J^T {J^T}^{\dagger} = {C_{\theta}^T}}$$

proof) $$ \boldsymbol{f = {J^T}^{\dagger} \tau} \tag{B.1}$$

仮想仕事の原理より $$ {\delta \boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{f} = {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau}$$

$$ {\delta \boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{ {J^T}^{\dagger} \tau} = {\delta \boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\tau} $$

$$ \boldsymbol{J^{\dagger}} {\delta \boldsymbol{x}} = {\delta \boldsymbol{\theta}} \tag{B.2}$$

微分運動学より $$ \delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{\theta} \tag{B.3} $$

(B.2)に(B.3)を代入すると $$ \boldsymbol{J^{\dagger}} \boldsymbol{J} \delta \boldsymbol{\theta} = {\delta \boldsymbol{\theta}} $$

$$ (中略) $$

$$ \boldsymbol{J^{\dagger}} \boldsymbol{J} \boldsymbol{C_{\theta}} = \boldsymbol{C_{\theta}} $$

転置して $$\boldsymbol{ {C_{\theta}}^T J^T {J^T}^{\dagger} = {C_{\theta}^T}} \tag{B.4}$$
