IDCT-II 的计算方式

起草：季文骢，版本：4.0

引言

IDCT-II（Inverse Discrete Cosine Transform, Type II）的定义式如下（N 是偶数且 $N \geq 2$，n 是非负整数且 $0 \leq n < N$）：

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k y(k) \cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \qquad (c_k, y(k) \in \mathbb{R})$$

第一部分：IDCT-II 与 DFT 之间的关系

先将实序列 $x(n)$ 转换成复数序列 $x_c(n)$ 在实轴上的投影：

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k y(k) \cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} c_k y(k) e^{-j\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\{x_c(n)\} \end{aligned}$$

其中 $x_c(n)$ 定义如下：

$$x_c(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k y(k) e^{-j\frac{(2n+1)k\pi}{2N}} \qquad (0 \leq n < N)$$

继续对 $x_c(n)$ 进行展开：

$$\begin{aligned} x_c(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k y(k) e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk} e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(c_k y(k) e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\right) e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{2N}nk} \end{aligned}$$

$f(k)$ 及其 N 点 DFT 的定义如下：

$$f(k) = c_k y(k) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \qquad (0 \leq k < N)$$

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

$f(k)$ 与其共轭 $f^*(k)$ 之间的关系如下：

$$f(k) e^{j\frac{\pi}{N}k} = c_k y(k) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} e^{j\frac{\pi}{N}k} = c_k y(k) e^{j\frac{\pi}{2N}k} = f^*(k)$$

$$f(k) = f^*(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

对 $x_c(n)$ 按自变量的奇偶性进行分解，得到其与 $F(n)$ 之间的关联：

$$\begin{aligned} x_c(2n) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{2N}(2n)k} \qquad \left(0 \leq n < \frac{N}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= F(n) \end{aligned}$$

$$x_c(2n+1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-j\frac{2\pi}{2N}(2n+1)k} \qquad \left(0 \leq n < \frac{N}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} f^*(k) e^{-j\frac{\pi}{N}k} e^{-j\frac{2\pi}{2N}(2n+1)k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f^*(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(n+1)k} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} f^*(k) e^{j\frac{2\pi}{N}(N-(n+1))k} \\
&= F^*(N-1-n)
\end{aligned}
$$

因此 $x(n)$ 可以通过 DFT 从序列 $y(k)$ 计算出来。

第二部分：IDCT-II 的计算

2.1：序列 $Z(n)$ 的构造

根据上一部分的讨论，已经知道 $x(n)$ 可以通过取得对应的 $F(n)$ 的实部来得到，而 $F(n)$ 又是 $f(k)$ 的 N 点 DFT。但由于 $f(k) = c_k y(k) e^{-j\frac{\pi}{2N}k}$，而对于 $0 \le k < N$，旋转系数 $e^{-j\frac{\pi}{2N}k}$ 又是各不相同的，因此要构造这样的 $f(k)$，几乎需要在预处理阶段计算出所有的旋转系数（除了 $k=0$ 这种特殊情况外），但这些旋转系数中有一半是没有必要的，这是因为只有 $F(n)$ 的实部是有用的，本部分的前两小节会给出这一断言的证明。

首先，根据欧拉公式，有：

$$\mathrm{Re}\{F(n)\} = \frac{1}{2}\left(F(n) + F^*(n)\right)$$

那么就需要考察 $F^*(n)$，序列 $F^*(n)$ 间接依赖于序列 $f^*(k)$ 的值，为了方便后续论证，先考察 $f^*(N-k)$（$1 \le k \le N$），进而导出 $f^*(k)$ 的值：

$$
\begin{aligned}
f^*(N-k) &= c_{N-k} y(N-k) e^{j\frac{\pi}{2N}(N-k)} \\
&= \left(c_{N-k} y(N-k) e^{j\frac{\pi}{2}}\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \\
&= \begin{cases} \left(j \cdot c_{N-k} y(N-k)\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} & (1 \le k < N) \\ \left(c_0 y(0)\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}(0)} & (k = N) \end{cases}
\end{aligned}
$$

再来考察 $F^*(n)$ 序列（直接应用傅立叶变换对 $f^*\left((-k) \bmod N\right) \xrightarrow{\mathrm{DFT}} F^*(n)$）：

$$F^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f^*\left((-k) \bmod N\right) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

其中，$f^*\left((-k) \bmod N\right)$ 的值为：

$$f^*\left((-k) \bmod N\right) = \begin{cases} c_0 y(0) & (k = 0) \\ \left(j \cdot c_{N-k} y(N-k)\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} & (1 \le k < N) \end{cases}$$

不难发现 $F^*(n)$ 序列和 $F(n)$ 序列的对应项可以合并。为方便说明，定义辅助序列 $z(k)$ 及其 N 点 DFT 序列 $Z(n)$：

$$
\begin{aligned}
z(k) &= f(k) + f^*\left((-k) \bmod N\right) \\
&= \begin{cases} c_0 y(0) & (k = 0) \\ \frac{1}{2}\left(c_k y(k) + j \cdot c_{N-k} y(N-k)\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} & (1 \le k < N) \end{cases} \qquad (0 \le k < N)
\end{aligned}
$$

$$Z(n)=\sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

那么就有：

$$\mathrm{Re}\{F(n)\}=\frac{1}{2}\left(F(n)+F^*(n)\right)=Z(n)$$

当 $k=0$、$\frac{N}{2}$ 时 $z(k)$ 有特殊取值：

k	Re{z(k)}	Im{z(k)}
0	$c_0y(0)$	0
$\frac{N}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}c_{\frac{N}{2}}y\left(\frac{N}{2}\right)$	0

2.2：序列 Z(n) 的计算

显然 $Z(n)$ 是一个实序列，观察 $z(N-k)$ 的值，有如下规律：

$$\begin{aligned}
z(N-k)&=\left(c_{N-k}y(N-k)+j\cdot c_k y(k)\right)e^{-j\frac{\pi}{2N}(N-k)}\\
&=\left(c_{N-k}y(N-k)+j\cdot c_k y(k)\right)e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2N}k}\\
&=\left(c_k y(k)-j\cdot c_{N-k}y(N-k)\right)e^{j\frac{\pi}{2N}k}\\
&=z^*(k)
\end{aligned}$$

构造 $Z_c(n)=Z(2n)+j\cdot Z(2n+1)$（$0\le n<\frac{N}{2}$），于是就有 $Z(2n)=\mathrm{Re}\{Z_c(n)\}$，$Z(2n+1)=\mathrm{Im}\{Z_c(n)\}$。展开 $Z_c(n)$：

$$\begin{aligned}
Z_c(n)&=Z(2n)+j\cdot Z(2n+1)\\
&=\sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n)k}+j\cdot\sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k}\\
&=\sum_{k=0}^{N-1} z(k)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}+\sum_{k=0}^{N-1} j\cdot z(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}\\
&=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left(1+j\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)z(k)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}
\end{aligned}$$

按求和变量 k 的所属区间将求和范围分成两部分：

$$\begin{aligned}
Z_c(n)&=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1+j\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)z(k)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1+j\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{N}{2}\right)}\right)z\left(k+\frac{N}{2}\right)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}n\left(k+\frac{N}{2}\right)}\\
&=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1+j\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)z(k)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1-j\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}\\
&=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1+j\cdot\rho(k)\right)z(k)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(1-j\cdot\rho(k)\right)z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\left(z(k)+z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\rho(k)\left(z(k)-z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_c(k)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}$$

其中，序列 $\rho(k)$、$z_c(k)$ 为：

$$\rho(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$z_c(k) = \left(z(k)+z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\rho(k)\left(z(k)-z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right) \qquad \left(0\le k<\frac{N}{2}\right)$$

定义 $z^{(re)}(k)=\mathrm{Re}\{z(k)\}$，$z^{(im)}(k)=\mathrm{Im}\{z(k)\}$（$0\le k<\frac{N}{2}$），并将 $z_c(k)$ 拆成两部分：

$$z_c(k) = z_c^{(1)}(k)+z_c^{(2)}(k)$$

其中，序列 $z_c^{(1)}(k)$ 和 $z_c^{(2)}(k)$ 可以用 $z^{(re)}(k)$、$z^{(im)}(k)$ 和旋转系数 $\rho(k)$ 表示：

$$\begin{aligned}z_c^{(1)}(k) &= z(k)+z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\\ &= \left(z^{(re)}(k)+z^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\left(z^{(im)}(k)-z^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_c^{(2)}(k) &= j\cdot\rho(k)\left(z(k)-z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\\ &= j\cdot\rho(k)\left(\left(z^{(re)}(k)-z^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\left(z^{(im)}(k)+z^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)\\ &= \rho(k)\left(-\left(z^{(im)}(k)+z^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\left(z^{(re)}(k)-z^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)\end{aligned}$$

当 $k=0$、$\frac{N}{4}$ 时，$z_c^{(1)}(k)$、$z_c^{(2)}(k)$ 有特殊取值：

k	$z_c^{(1)}(k)$	$z_c^{(2)}(k)$
0	$c_0y(0)+\frac{\sqrt{2}}{2}c_{\frac{N}{2}}y\left(\frac{N}{2}\right)$	$j\cdot\left(c_0y(0)-\frac{\sqrt{2}}{2}c_{\frac{N}{2}}y\left(\frac{N}{2}\right)\right)$
$\frac{N}{4}$	$2z^{(re)}\left(\frac{N}{4}\right)$	$j\cdot 2z^{(im)}\left(\frac{N}{4}\right)$

$\rho\left(\frac{N}{2}-k\right)$、$z_c^{(2)}\left(\frac{N}{2}-k\right)$ 在 $\frac{N}{2}$ 点上具有负共轭对称性：

$$\rho\left(\frac{N}{2}-k\right) = e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-k\right)} = -e^{j\frac{2\pi}{N}k} = -\rho^*(k)$$

$$\begin{aligned}z_c^{(2)}\left(\frac{N}{2}-k\right) &= j\cdot\rho\left(\frac{N}{2}-k\right)\left(z\left(\frac{N}{2}-k\right)-z^*(k)\right)\\ &= j\cdot\rho^*(k)\left(z^*(k)-z\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\\ &= -\left(j\cdot\rho(k)\left(z(k)-z^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)^*\end{aligned}$$

$$= -\left(z_c^{(2)}(k)\right)^*$$

$z_c^{(1)}(k)$ 在 $\frac{N}{2}$ 点上具有共轭对称性：

$$z_c^{(1)}\left(\frac{N}{2}-k\right) = z\left(\frac{N}{2}-k\right) + z^*(k) = \left(z_c^{(1)}(k)\right)^*$$

第三部分：总结

现将计算 $x(n)$ 所需的所有公式整理如下（各公式仅保留需要的定义域）：

$$x(n) = \begin{cases} Z\left(\frac{n}{2}\right) & (n \bmod 2 = 0) \\ Z\left(N-1-\frac{n-1}{2}\right) & (n \bmod 2 = 1) \end{cases} \qquad (0 \le n < N)$$

$$Z(n) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left\{Z_c\left(\frac{n}{2}\right)\right\} & (n \bmod 2 = 0) \\ \mathrm{Im}\left\{Z_c\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\} & (n \bmod 2 = 1) \end{cases} \qquad (0 \le n < N)$$

$$Z_c(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} z_c(k) e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} \qquad \left(0 \le n < \frac{N}{2}\right)$$

$$z_c(k) = \begin{cases} z_c^{(1)}(k) + z_c^{(2)}(k) & \left(0 \le k \le \frac{N}{4}\right) \\ \left(z_c^{(1)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)^* - \left(z_c^{(2)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)^* & \left(\frac{N}{4} < k < \frac{N}{2}\right) \end{cases}$$

$$z_c^{(1)}(k) = \begin{cases} c_0 y(0) + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{\frac{N}{2}} y\left(\frac{N}{2}\right) & (k = 0) \\ \left(z^{(re)}(k) + z^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right) + j \cdot \left(z^{(im)}(k) - z^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right) & \left(0 < k < \frac{N}{4}\right) \\ 2z^{(re)}\left(\frac{N}{4}\right) & \left(k = \frac{N}{4}\right) \end{cases}$$

$$z_c^{(2)}(k) = \begin{cases} j \cdot \left(c_0 y(0) - \frac{\sqrt{2}}{2} c_{\frac{N}{2}} y\left(\frac{N}{2}\right)\right) & (k = 0) \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\left(-\left(z^{(im)}(k) + z^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right) + j \cdot \left(z^{(re)}(k) - z^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right) & \left(0 < k < \frac{N}{4}\right) \\ j \cdot 2z^{(im)}\left(\frac{N}{4}\right) & \left(k = \frac{N}{4}\right) \end{cases}$$

$$z^{(re)}(k) = \mathrm{Re}\{z(k)\} \qquad \left(0 < k < \frac{N}{2}\right)$$

$$z^{(im)}(k) = \mathrm{Im}\{z(k)\} \qquad \left(0 < k < \frac{N}{2}\right)$$

$$z(k) = \frac{1}{2}\left(c_k y(k) + j \cdot c_{N-k} y(N-k)\right) e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \qquad \left(0 < k < \frac{N}{2}\right)$$