LC3 LD-MDCT 模块开发注记

起草：季文骢，版本：3

注记 1：式 (8) 与标准 MDCT 之间的关系

式 (8) 的定义为：

$$X_1(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

标准 MDCT 的定义为：

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

显然有：

$$X_1(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}X_2(k)$$

注记 2：式 (125) 与标准 IMDCT 之间的关系

式 (125) 的定义为：

$$\widehat{x_1}(n)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}(k)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

标准 IMDCT 的定义为：

$$\widehat{x_2}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}(k)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

显然有：

$$\widehat{x_1}(n)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cdot N\cdot\widehat{x_2}(n)=\sqrt{2N}\cdot\widehat{x_2}(n)$$

注记 3：标准 MDCT 的计算方法

基于 N 点 DFT/FFT 的算法参见专利 WO2001033411。

如在实际商业应用中需要规避专利风险，可考虑采用下面的时间复杂度稍高的基于 2N 点 DFT/FFT 的算法。

直接根据标准 MDCT 的定义式进行推导：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2N-1}x(n)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{n=0}^{2N-1}\left(x(n) e^{-j\frac{\pi}{2N}n}\right) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}\right\}$$

观察上式：

$$X(k) = \mathrm{Re}\left\{\overbrace{e^{-j\frac{\pi}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}}^{\mathrm{PSTW_{MDCT}}(k)} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{2N-1}\left(x(n) \overbrace{e^{-j\frac{\pi}{2N}n}}^{\mathrm{PRETW_{MDCT}}(n)}\right) e^{-j\frac{2\pi}{2N}kn}}_{\mathrm{DFT}}\right\}$$

定义 MDCT 预旋转因子（Pre-twiddle factor）序列 $\mathrm{PRETW_{MDCT}}(n)$ 和 MDCT 后旋转因子（Post-twiddle factor）序列 $\mathrm{PSTW_{MDCT}}(k)$：

$$\mathrm{PRETW_{MDCT}}(n) = e^{-j\frac{\pi}{2N}n}$$

$$\mathrm{PSTW_{MDCT}}(k) = e^{-j\frac{\pi}{N}\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

那么便可按如下过程计算 MDCT 输出序列 $X(k)$ 的值：

第 1 步：输入序列 $x(n)$ 中的每一项都乘以 $\mathrm{PRETW_{MDCT}}(n)$，得到 $x'(n)$（$0 \le n < 2N$）；

第 2 步：对序列 $x'(n)$ 进行 2N 点 IDFT（可采用 IFFT 来实现），得到 $X'(k)$（$0 \le k < 2N$），所得序列只保留前 N 项。

第 3 步：序列 $X'(k)$ 中的每一项都乘以 $\mathrm{PSTW_{MDCT}}(k)$ 并只保留实部，得到输出序列 $X(k)$（$0 \le k < N$）。

伪代码如下（输入为 x[0...2N-1]，输出为 X[0...N-1]：

```
//  Pre-twiddle.
for (i = 0; i < 2N; ++i) {
    x[i] *= PRETW_MDCT[i];
}

//  DFT.
X = DFT(x);

//  Preserve N points only.
X = X[0...N - 1];

//  Post-twiddle and extract real part.
for (i = 0; i < N; ++i) {
    X[i] = (X[i] * PSTW_MDCT[i]).real;
}
```

<u>注记 4：标准 IMDCT 的计算方法</u>

下面给出一种基于 2N 点 IDFT/IFFT 的 IMDCT 计算方法及其证明。为方便起见，定义 $\gamma(k)$ 如下：

$$\gamma(k) = \cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$$

先证明一个引理。

引理 1: 对于 $0 \le k < 2N$，有 $\gamma(k) = (-1)^{N+1}\cdot\gamma(2N-1-k)$。

证：

$$\gamma(k)=\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)=\mathrm{Re}\left\{e^{\pm j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

将 k、$2N-1-k$ 依次代入上式，自然底数 e 的指数部分的正负号依次取 $-$ 和 $+$，则有：

$$\gamma(k)=\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$\gamma(2N-1-k)=\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(2N-k-\frac{1}{2}\right)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(-k-\frac{1}{2}\right)}e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot 2N}\right\}$$

比较二式，不难发现二者的区别在于 $e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot 2N}$ 这一部分，那么单独考察该部分：

$$e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot 2N}=e^{j2\pi n}e^{j\pi(N+1)}=\left(e^{j2\pi}\right)^n\left(e^{j\pi}\right)^{N+1}=(1)^n(-1)^{N+1}=(-1)^{N+1}$$

由此推出 $\gamma(k)$、$\gamma(2N-1-k)$ 之间的关系：

$$\gamma(2N-1-k)=\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\cdot(-1)^{N+1}\right\}$$

$$=(-1)^{N+1}\cdot\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(-k-\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$=(-1)^{N+1}\cdot\gamma(k)$$

证毕。□

最后考察标准 IMDCT 公式：

$$\hat{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{X}(k)\cos\left(\frac{\pi}{N}\cdot\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{X}(k)\gamma(k)$$

构造 $\hat{X}(k)$ 的延扩序列 $\widehat{X_p}(k)$：

$$\widehat{X_p}(k)=\begin{cases}\hat{X}(k) & (0\le k<N)\\ (-1)^{N+1}\cdot\hat{X}(2N-1-k) & (N\le k<2N)\end{cases}$$

构造 $\hat{s}(n)$：

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1}\widehat{X_p}(k)\gamma(k)$$

那么根据引理 1 则有：

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1}(-1)^{N+1}\cdot\hat{X}(2N-1-k)\cdot(-1)^{N+1}\cdot\gamma(2N-1-k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1}\hat{X}(2N-1-k)\gamma(2N-1-k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{X}(k)\gamma(k)$$

于是：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1}\widehat{X_p}(k)\gamma(k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X_p}(k)\gamma(k)+\frac{1}{N}\sum_{k=N}^{2N-1}\widehat{X_p}(k)\gamma(k)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{X}(k)\gamma(k)+\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{X}(k)\gamma(k)=2\hat{x}(n)$$

据此便可基于延扩序列 $\widehat{X_p}(k)$ 修改 $\hat{x}(n)$ 的求和区间：

$$\hat{x}(n)=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}\widehat{X_p}(k)\gamma(k)$$

根据欧拉公式继续展开，有：

$$\hat{x}(n)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}\widehat{X_p}(k)e^{j\frac{2\pi}{2N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{2\pi}{4N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}\left(\widehat{X_p}(k)e^{j\frac{2\pi}{2N}k\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}\right)e^{j\frac{2\pi}{2N}kn}\right\}$$

观察上式：

$$\hat{x}(n)=\mathrm{Re}\left\{\overbrace{e^{j\frac{2\pi}{4N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}}^{\mathrm{PSTW_{IMDCT}}(n)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}\left(\widehat{X_p}(k)\overbrace{e^{j\frac{2\pi}{2N}k\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}}^{\mathrm{PRETW_{IMDCT}}(k)}\right)e^{j\frac{2\pi}{2N}kn}}_{\mathrm{IDFT}}\right\}$$

定义 IMDCT 预旋转因子（Pre-twiddle factor）序列 $\mathrm{PRETW_{IMDCT}}(k)$ 和 IMDCT 后旋转因子（Post-twiddle factor）序列 $\mathrm{PSTW_{IMDCT}}(n)$：

$$\mathrm{PRETW_{IMDCT}}(k)=e^{j\frac{2\pi}{2N}k\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}=e^{j\frac{\pi}{N}k\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}$$

$$\mathrm{PSTW_{IMDCT}}(n)=e^{j\frac{2\pi}{4N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}=e^{j\frac{\pi}{2N}\left(n+\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}$$

那么便可按如下过程计算 IMDCT 输出序列 $\hat{x}(n)$ 的值：

第 1 步：构造延扩序列 $\widehat{X_p}(k)$（$0\le k<2N$）；

第 2 步：延扩序列 $\widehat{X_p}(k)$ 中的每一项都乘以 $\mathrm{PRETW_{IMDCT}}(k)$，得到 $\widehat{X_p'}(k)$（$0\le k<2N$）；

第 3 步：对序列 $\widehat{X_p'}(k)$ 进行 2N 点 IDFT（可采用 IFFT 来实现），得到 $\widehat{x'}(n)$（$0\le n<2N$）；

第 4 步：序列 $\widehat{x'}(n)$ 中的每一项都乘以 $\mathrm{PSTW_{IMDCT}}(n)$ 并只保留实部，得到输出序列 $\hat{x}(n)$（$0\le n<2N$）。

伪代码如下（输入为 X[0...N-1]，输出为 x[0...2N-1]：

```
//  Xp[0...2N - 1]:
for (i = 0; i < N; ++i) {
    Xp[i] = X[i];
    if (N is even) {
        Xp[2N - 1 - i] = -X[i];
    } else {
        Xp[2N - 1 - i] = X[i];
    }
}

//  Pre-twiddle.
for (i = 0; i < 2N; ++i) {
    Xp[i] *= PRETW_IMDCT[i];
}

//  IDFT.
x = IDFT(Xp);

//  Post-twiddle and extract real part.
for (i = 0; i < 2N; ++i) {
    x[i] = (x[i] * PSTW_IMDCT[i]).real;
}
```