DCT-II 的计算方式

起草：季文骢，版本：4.0

引言

DCT-II（Discrete Cosine Transform, Type II）的定义式如下（N 是偶数且 $N \geq 2$，k 是非负整数且 $0 \leq k < N$）：

$$y(k) = c_k \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N} \qquad (c_k, x(n) \in \mathbb{R})$$

第一部分：DCT-II 与 DFT 之间的关系

将序列 $x(n)$ 重排为 $x_p(n)$ 并计算其 N 点 DFT：

$$x_p(n) = \begin{cases} x(2n) & \left(0 \leq n < \frac{N}{2}\right) \\ x(2N-1-2n) & \left(\frac{N}{2} \leq n < N\right) \end{cases}$$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

由于 $x(n)$ 是实序列，因此 $x_p(n)$ 也是实序列，于是 $X_p(k)$ 序列具有共轭对称性：

$$X_p(N-k) = X_p^*(k)$$

令 $X_w(k) = e^{-j\frac{\pi}{2N}k} X_p(k)$（$k \in \mathbb{Z}$），那么就有：

$$X_w(N-k) = e^{-j\frac{\pi}{2N}(N-k)} X_p(N-k) = e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(e^{j\frac{\pi}{2N}k} X_p^*(k)\right) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot X_w^*(k)$$

继续展开 $X_w(k)$：

$$\begin{aligned} X_w(k) &= e^{-j\frac{\pi}{2N}k} \cdot X_p(k) \\ &= e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right) \\ &= e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right) \\ &= e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(2N-1-2n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right) \end{aligned}$$

作变量代换，令 $m = N-1-n$，于是 $2N-1-2n = 2m+1$，那么就有：

$$X_w(k) = e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1-m)k}\right)$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) e^{-j\frac{\pi}{N}(2n)k} + e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1) e^{j\frac{\pi}{N}(2m+2)k} e^{-j\frac{\pi}{N}k}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)e^{-j\frac{\pi}{N}(2n)k} + e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1)e^{j\frac{\pi}{N}(2m+1)k}$$

$$X_w^*(k) = e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)e^{j\frac{\pi}{N}(2n)k} + e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1)e^{-j\frac{\pi}{N}(2m+1)k}$$

取 $X_w(k)$ 的实部：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{X_w(k)\} &= \frac{1}{2}\left(X_w(k) + X_w^*(k)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)e^{j\frac{\pi}{N}(2n)k} + e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2m+1)e^{j\frac{\pi}{N}(2m+1)k}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{j\frac{\pi}{2N}k}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{\pi}{N}nk}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j\frac{(2n+1)k\pi}{2N}}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N}
\end{aligned}$$

取 $X_w(N-k)$ 的实部，不难发现其与 $X_w(k)$ 的虚部呈相反关系：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{X_w(N-k)\} &= \frac{1}{2}\left(X_w(N-k) + X_w^*(N-k)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot X_w^*(k) + e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot X_w(k)\right) \\
&= -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(X_w(k) - X_w^*(k)\right) \\
&= -\mathrm{Im}\{X_w(k)\}
\end{aligned}$$

那么就有：

$$y(k) = c_k\cdot\mathrm{Re}\{X_w(k)\} = \begin{cases} c_k\cdot\mathrm{Re}\{X_w(k)\} & \left(0\le k\le\frac{N}{2}\right) \\ -c_k\cdot\mathrm{Im}\{X_w(N-k)\} & \left(\frac{N}{2}<k<N\right)\end{cases}$$

由此便得到了 $y(k)$ 与 $X_w(k)$ 的关系，并进而可以推知它与 $x(n)$ 的重排序列 $x_p(n)$ 的 DFT 序列 $X_p(k)$ 之间的关系。

第二部分：总结

将所有计算 $y(k)$ 序列所需的公式整理如下（各公式仅保留需要的定义域）：

$$x_p(n) = \begin{cases} x(2n) & \left(0\le n<\frac{N}{2}\right) \\ x(2N-1-2n) & \left(\frac{N}{2}\le n<N\right)\end{cases}$$

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad \left(0\le k\le\frac{N}{2}\right)$$

$$X_w(k) = e^{-j\frac{\pi}{2N}k}\cdot X_p(k) \qquad \left(0\le k\le\frac{N}{2}\right)$$

$$y(k)=\begin{cases} c_k\cdot \mathrm{Re}\{X_w(k)\} & \left(0\le k\le \dfrac{N}{2}\right)\\ -c_k\cdot \mathrm{Im}\{X_w(N-k)\} & \left(\dfrac{N}{2}<k<N\right)\end{cases}$$

附录 1：实序列 DFT 序列 $X_p(k)$ 的计算的若干注记

由于 $X_p(k)$ 是实序列 $x_p(n)$ 的 DFT，因此可以将实序列 DFT 算法应用在 $X_p(k)$ 的计算上。

先按 $X_p(k)$ 的自变量的奇偶性进行分解：

$$\begin{aligned} X_p(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n)k} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(2n+1)e^{-j\frac{2\pi}{N}(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(2n+1)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} \\ &= X_p^{(0)}(k)+\rho(k)\cdot X_p^{(1)}(k) \end{aligned}$$

其中 $X_p^{(0)}(k)$、$X_p^{(1)}(k)$、$\rho(k)$ 定义为：

$$X_p^{(0)}(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$X_p^{(1)}(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_p(2n+1)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\rho(k)=e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

由于 $X_p^{(0)}(k)$、$X_p^{(1)}(k)$ 均为 $\frac{N}{2}$ 点实序列 DFT，因此它们都具有共轭对称性：

$$X_p^{(0)}\left(\frac{N}{2}-k\right)=\left(X_p^{(0)}(k)\right)^*$$

$$X_p^{(1)}\left(\frac{N}{2}-k\right)=\left(X_p^{(1)}(k)\right)^*$$

$\rho(k)$ 与 $\rho\left(\frac{N}{2}-k\right)$ 成相反共轭关系：

$$\rho\left(\frac{N}{2}-k\right)=e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{N}{2}-k\right)}=-e^{j\frac{2\pi}{N}k}=-\rho^*(k)$$

这也就意味着复数乘积 $\rho(k)\cdot X_p^{(1)}(k)$ 在 $\frac{N}{2}$ 点上也具有相反共轭关系：

$$\rho\left(\frac{N}{2}-k\right)\cdot X_p^{(1)}\left(\frac{N}{2}-k\right)=-\left(\rho(k)\cdot X_p^{(1)}(k)\right)^*$$

定义序列 $x_c(n)$ 及其 $\frac{N}{2}$ 点 DFT 序列 $X_c(k)$：

$$x_c(n)=x_p(2n)+j\cdot x_p(2n+1) \qquad \left(0\le n<\frac{N}{2}\right)$$

$$X_c(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_c(n)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

于是就有：

$$\begin{aligned}X_c(k)&=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(x_p(2n)+j\cdot x_p(2n+1)\right)e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk}\\&=X_p^{(0)}(k)+j\cdot X_p^{(1)}(k)\end{aligned}$$

考察 $X_c^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$ 的值，有：

$$\begin{aligned}X_c^*\left(\frac{N}{2}-k\right)&=\left(X_p^{(0)}\left(\frac{N}{2}-k\right)+j\cdot X_p^{(1)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)^*\\&=\left(\left(X_p^{(0)}(k)\right)^*+j\cdot\left(X_p^{(1)}(k)\right)^*\right)^*\\&=X_p^{(0)}(k)-j\cdot X_p^{(1)}(k)\end{aligned}$$

根据 $X_c(k)$ 的定义及 $X_c^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$ 的值，可以得到 $X_p^{(0)}(k)$、$X_p^{(1)}(k)$ 的值：

$$X_p^{(0)}(k)=\frac{1}{2}\left(X_c(k)+X_c^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)$$

$$X_p^{(1)}(k)=-\frac{1}{2}j\cdot\left(X_c(k)-X_c^*\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)$$

定义 $X_c^{(re)}(k)=\mathrm{Re}\{X_c(k)\}$、$X_c^{(im)}(k)=\mathrm{Im}\{X_c(k)\}$（$k\in\mathbb{Z}$），并将 $X_p^{(0)}(k)$、$X_p^{(1)}(k)$ 用 $X_c^{(re)}(k)$、$X_c^{(im)}(k)$ 表示：

$$X_p^{(0)}(k)=\frac{1}{2}\left(\left(X_c^{(re)}(k)+X_c^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\left(X_c^{(im)}(k)-X_c^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}X_p^{(1)}(k)&=-\frac{1}{2}j\cdot\left(\left(X_c^{(re)}(k)-X_c^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)+j\cdot\left(X_c^{(im)}(k)+X_c^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)\right)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(X_c^{(im)}\left(\frac{N}{2}-k\right)+X_c^{(im)}(k)\right)+j\cdot\left(X_c^{(re)}\left(\frac{N}{2}-k\right)-X_c^{(re)}(k)\right)\right)\end{aligned}$$

在 $k=0$、$\frac{N}{4}$ 和 $\frac{N}{2}$ 时，$X_p^{(0)}(k)$、$X_p^{(1)}(k)$ 有特殊取值（用到了 $X_c(k)$ 的周期性，这一性质是显然的，因此不再赘述）：

k	$X_p^{(0)}(k)$	$X_p^{(1)}(k)$
0	$X_c^{(re)}(0)$	$X_c^{(im)}(0)$
$\frac{N}{2}$	$X_c^{(re)}(0)$	$X_c^{(im)}(0)$
$\frac{N}{4}$	$X_c^{(re)}\left(\frac{N}{4}\right)$	$X_c^{(im)}\left(\frac{N}{4}\right)$

最后，将计算 $X_p(k)$ 所需的过程（公式）整理如下（各公式仅保留需要的定义域，$\rho(k)$ 在 $k=0$、$\frac{N}{4}$、$\frac{N}{2}$ 等特殊点上的值已被代入）：

$$x_c(n) = x_p(2n) + j \cdot x_p(2n+1) \qquad \left(0 \le n < \frac{N}{2}\right)$$

$$X_c(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_c(n) e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}nk} \qquad \left(0 \le k < \frac{N}{2}\right)$$

$$X_p(k) = \begin{cases} X_p^{(0)}(0) + X_p^{(1)}(0) & (k = 0) \\ X_p^{(0)}(k) + \rho(k) \cdot X_p^{(1)}(k) & \left(0 < k < \frac{N}{4}\right) \\ X_p^{(0)}\left(\frac{N}{4}\right) - X_p^{(1)}\left(\frac{N}{4}\right) & \left(k = \frac{N}{4}\right) \\ \left(X_p^{(0)}\left(\frac{N}{2} - k\right)\right)^* - \left(\rho\left(\frac{N}{2} - k\right) \cdot X_p^{(1)}\left(\frac{N}{2} - k\right)\right)^* & \left(\frac{N}{4} < k < \frac{N}{2}\right) \\ X_p^{(0)}(0) - X_p^{(1)}(0) & \left(k = \frac{N}{2}\right) \end{cases}$$

$$X_p^{(0)}(k) = \begin{cases} X_c^{(re)}(0) & (k = 0) \\ \frac{1}{2}\left(\left(X_c^{(re)}(k) + X_c^{(re)}\left(\frac{N}{2} - k\right)\right) + j \cdot \left(X_c^{(im)}(k) - X_c^{(im)}\left(\frac{N}{2} - k\right)\right)\right) & \left(0 < k < \frac{N}{4}\right) \\ X_c^{(re)}\left(\frac{N}{4}\right) & \left(k = \frac{N}{4}\right) \end{cases}$$

$$X_p^{(1)}(k) = \begin{cases} X_c^{(im)}(0) & (k = 0) \\ \frac{1}{2}\left(\left(X_c^{(im)}\left(\frac{N}{2} - k\right) + X_c^{(im)}(k)\right) + j \cdot \left(X_c^{(re)}\left(\frac{N}{2} - k\right) - X_c^{(re)}(k)\right)\right) & \left(0 < k < \frac{N}{4}\right) \\ X_c^{(im)}\left(\frac{N}{4}\right) & \left(k = \frac{N}{4}\right) \end{cases}$$

$$X_c^{(re)}(k) = \mathrm{Re}\{X_c(k)\} \qquad \left(0 \le k < \frac{N}{2}\right)$$

$$X_c^{(im)}(k) = \mathrm{Im}\{X_c(k)\} \qquad \left(0 \le k < \frac{N}{2}\right)$$

$$\rho(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \qquad \left(0 < k < \frac{N}{4}\right)$$