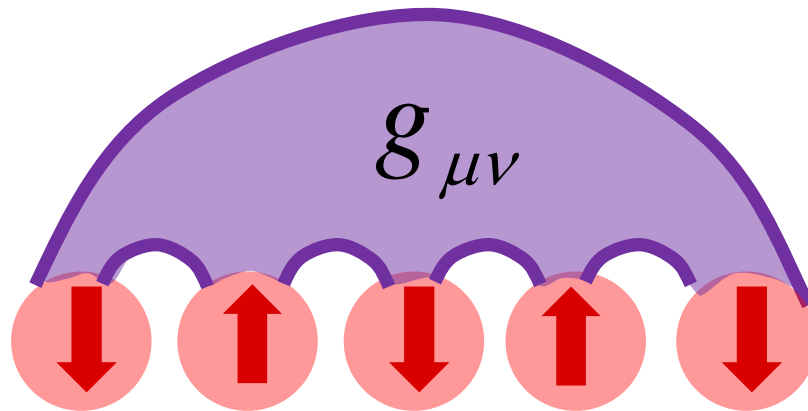


量子エンタングルメント と 重力理論における時空のダイナミクス

高柳 匡(京大基研)



① はじめに

素粒子理論の物性理論との関わり

1960-

自発的対称性の破れ
(南部-Goldstone)



超流動

Higgs現象



超伝導

1980-

2次元共形場理論
ビラソロ対称性

臨界現象 (Isingモデルなど)
ユニバーサリティークラス

⇒高次元の量子臨界点(共形場理論)に便利な記述はあるか？

1997 AdS/CFT対応の発見 [Maldacena] (SでもTでもない新しい双対性！)

AdS/CFT対応

(d+2)次元反ドジッター(AdS)
空間上の(量子)重力理論 = (d+1)次元空間上の
共形場理論(CFT)

古典重力解
(ブラックブレンなど)



ラージN、強結合の
量子臨界点

ユニバーサル？(無毛定理など)

何が予言できるか？

有名な例: QGPの粘性
 $\eta/s=1/4\pi$



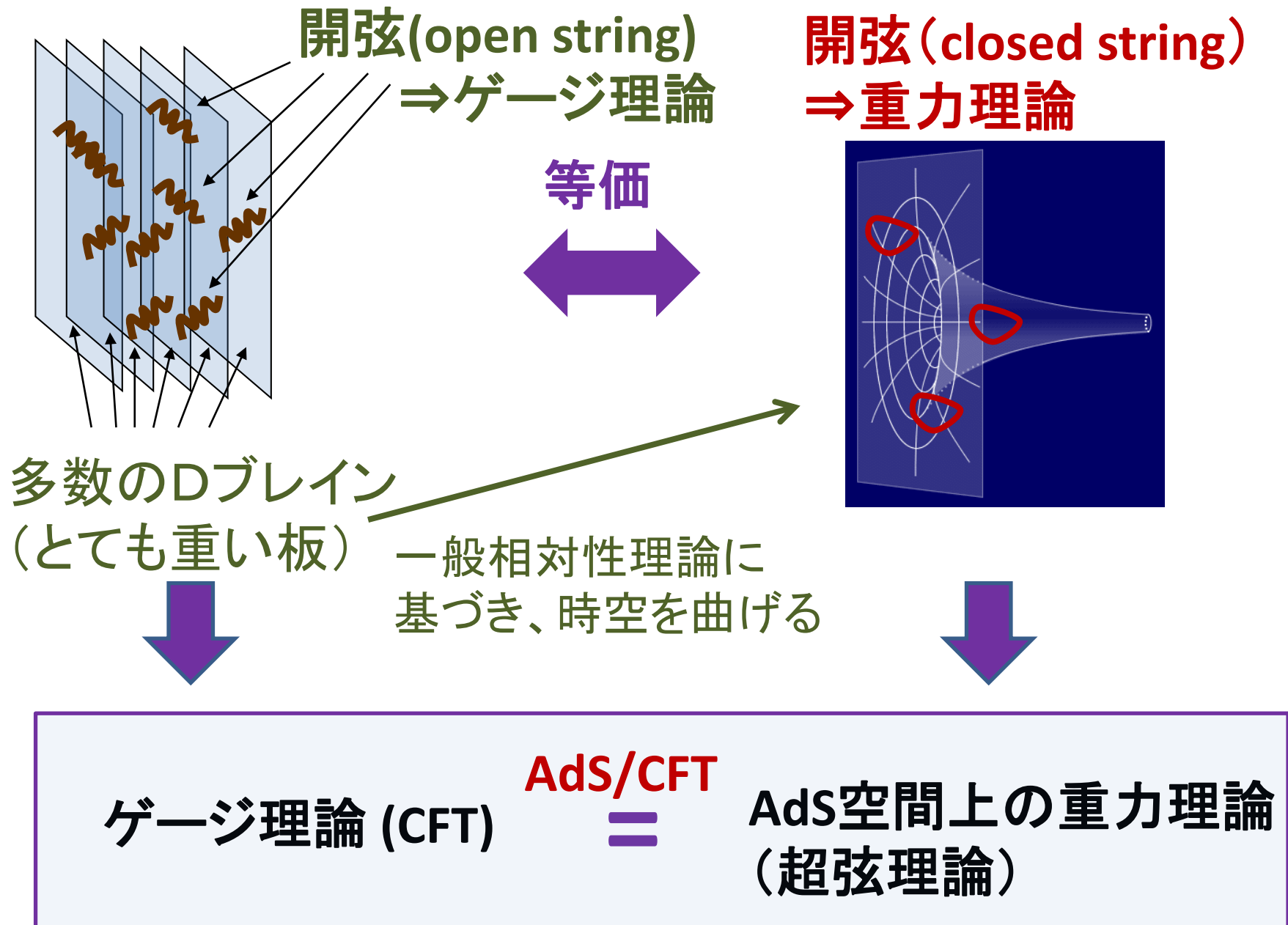
物性物理でも同様の例？

「物性系のトイ模型？」

「ユニバーサルな性質に着目する？」

超弦理論からのAdS/CFTの発見

[Maldacena 1997]



7,8年前からAdS/CFTの物性物理への応用が盛んに議論されるようになってきた。(AdS/CMP、AdS/CMTとも呼ばれる)

(2001 粘性の計算 (\Rightarrow QGP/Cold atom) [Policastro-Son-Starinets])

2006 エンタングルメント・エントロピーの計算 [笠-高柳]

2007 2次元量子臨界点の電気伝導 [Herzog-Kovtun-Sachdev-Son]

2008 ホログラフィック超伝導 [Gubser, Hartnoll-Herzog-Horowitz]

2008 非相対論的スケール不変な臨界点 [Son, McGreevy, Kachru et.al.]

2008 非フェルミ液体の記述 [S. Lee, Liu-McGreevy-Vegh, Zaanen et.al.]

2011 ハイパースケーリングの破れと非フェルミ液体

[小川-宇賀神-高柳, Huijse-Sachdev-Swingle, Senthil-Swingle,...]

ここ数年、逆に物性物理や量子情報理論の知識を用いて、ホログラフィー原理のメカニズムを理解しようという研究も始まってきている。

2009- エンタングルメント繰り込み(MERA)を用いた AdS/CFTの再解釈

[Swingle 2009, Evenbly-Vidal 2011, Molina-Vilaplana 2011,
笠-野崎-高柳 2012, 松枝-石原-橋爪 2012, 沼澤-野崎-高柳 2013,
Hartman-Maldacena 2013,]

2009- エンタングルメントを用いた量子重力の解釈

[Raamsdonk 2009, Czech-Karczmarek-Nogueira-Raamsdonk 2012,
Hubeny-Rangamani 2012, Bianchi-Myers 2012, ...]

素粒子論(超弦理論)と量子エンタングルメント？

素粒子論の目標: 物質の最小単位の解明

物質⇒素粒子の集合体(⇒弦の振動モード)

時空⇒ もともと与えられていると仮定するのではなく、
その最小単位はあるのだろうか？ ``時空の素粒子？''

⇒ 量子エンタングルメント? [AdS/CFTの予言?]

(重力理論の時空の場合)

「時空の面積～エンタングルメント・エントロピー」

そこで、本講演では、

(A) 「重力理論から量子多体系へ」

何がユニバーサルか？

(B) 「量子多体系から量子重力へ」

時空はどのように創発するのか？

の研究に関して最近の成果をいくつか紹介したい。

⇒ 両者において、量子エンタングルメントが、理論を
統一的に扱う手掛かりになる。

内容

- ① はじめに
- ② エンタングルメント・エントロピーの基礎
- ③ 重力理論から量子多体系へ (ユニバーサリティ) :
 - (3-1) ホログラフィック・エンタングルメント・エントロピー
 - (3-2) 非フェルミ液体とエンタングルメント・エントロピー
- ④ 量子多体系から量子重力へ (時空の創発) :
 - エンタングルメント繰りこみ と AdS/CFT
- ⑤ おわりに

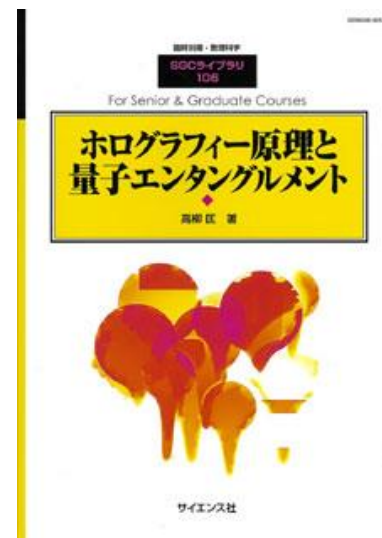
参考文献

[解説本]

高柳匡著

「ホログラフィー原理と量子エンタングルメント」

SGCライブラリ106 臨時別冊・数理科学



[日本物理学会誌]

西岡辰磨(プリンストン高等研究所)、笠真生(イリノイ大)、高柳匡

「AdS/CFT対応とエンタングルメント」(2014年6月号)

[専門的レビュー]

西岡-笠-高柳, arXiv:0905.0932, J.Phys.A42:504008,2009.

高柳, arXiv:1204.2450, Class.Quant.Grav. 29 (2012) 153001.

② エンタングルメント・エントロピー(EE)の基礎

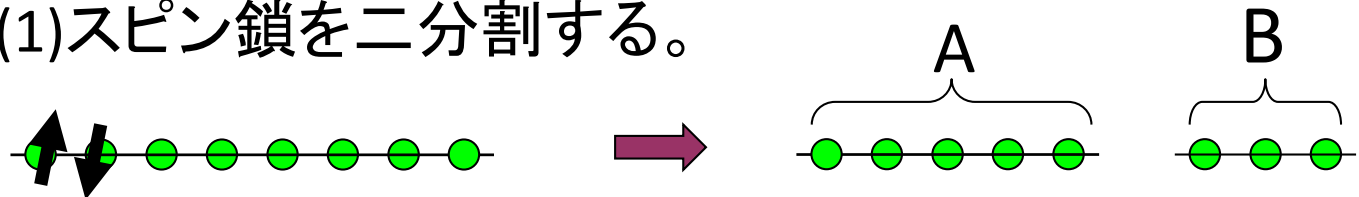
- エンタングルメント・エントロピー(EE)とは、
量子エンタングルメントの度合いを測定する量
➡ 基底状態の“アクティブな自由度”をあらわす。
- 量子的なオーダーパラメーターとして盛んに活用されている。
➡ いわば、量子多体系の数値実験における“観測量”
 - *複雑なハミルトニアンが与えられた時に臨界点の
セントラルチャージ(c)を数値的に求めるために利用。
 - *トポロジカルエントロピーを用いたスピン液体相の同定。
[Jiang-Wang-Balents 12]
 - *c定理やF定理の強劣加法性を用いた証明。[Casini-Huerta 04,12]

エンタングルメント・エントロピーの定義

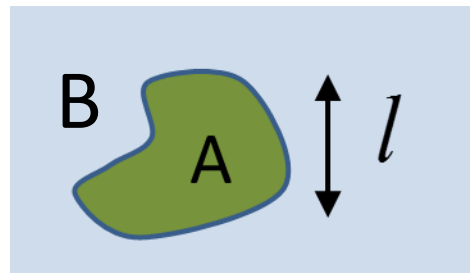
多体系の量子力学において、全体系を部分系AとBに二分割する。それに応じて、Hilbert空間は、二つの直積に分かれる

$$H_{tot} = H_A \otimes H_B \quad .$$

具体例： (1) スピン鎖を二分割する。



(2) 場の理論の空間を二分割する。



全体系の密度行列を ρ_{tot} とする。

例えば絶対零度(純粋状態)では、 $\rho_{tot} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ 。

このときBを観測しない(Bをトレースアウトする)と仮定した場合の密度行列は、

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{tot} \quad ,$$

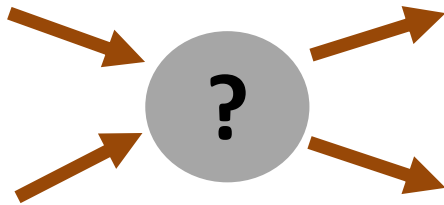
と書け、これをAに制限した密度行列と呼ぶ。

この設定で、「Aに関するエンタングルメント・エントロピー」 S_A を ρ_A に対するフォン・ノイマンエントロピーとして定義する:

$$S_A = -\text{Tr}_A \rho_A \log \rho_A \quad .$$

場の理論とEE

通常の方： ハミルトニアン(ラグランジアン)や演算子の構造に着目。相関関数やS行列の計算。



⇒局所的、代数的な手法

(大域的な情報はブラックボックス)

- * 熱的な純粋状態と混合状態を区別できない。
- * トポロジカルな自由度(非局所的)を扱いにくい。
- * 演算子を指定する必要があるので、普遍的な議論がしにくい。

量子エンタングルメントを用いる手法の長所

量子状態 $|\Psi\rangle$ に着目し、その性質をEEなどを用いて調べる。

(EE = ヒルベルト空間の任意の部分空間に対する関数)

⇒非局所的、幾何学的な手法

* 様々な場の理論の性質が**幾何学的**に捉えられる:

(1) 場の理論の局所性 \Rightarrow 面積則

(2) c定理、F定理 \Rightarrow 強劣加法性(\sim 三角不等式)

* EEは非局所的な量なので**トポロジカルな性質**を検知できる。

* **余次元の存在**を示唆する \Rightarrow AdS/CFT対応と相性が良い。

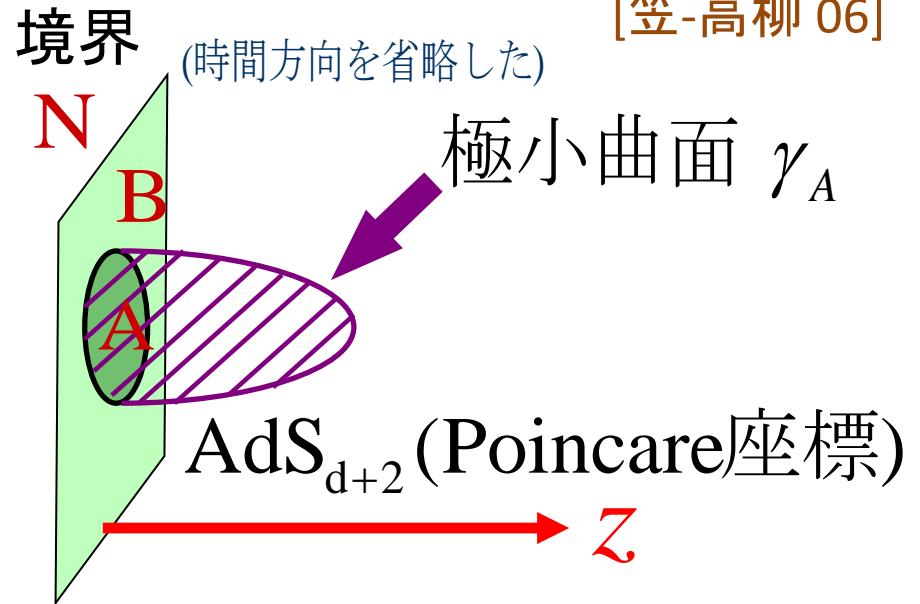
例: 1+1次元場の理論 $S_A = S(x, y, t) \rightarrow 2+1$ 次元?

③ 重力理論から量子多体系へ

(3-1) ホログラフィック・エンタングルメントエントロピー(HEE)

[笠-高柳 06]

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+2)}}.$$



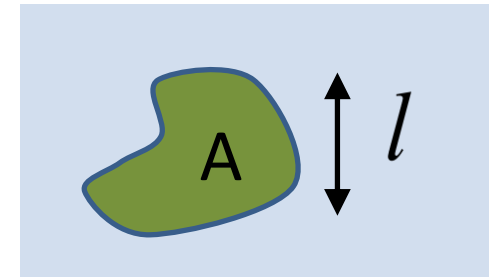
ここで、 γ_A は、 $d+2$ 次元時空中の d 次元の**最小面積曲面** (極小曲面)であり、境界が部分系Aの境界と一致するもの。

コメント: このHEE公式は、最近 [Lewkowycz-Maldacena 13]によって
ほぼ証明に近い導出が与えられた。

HEEの一般的な振る舞い

[Ryu-TT 2006]

$$S_A = \frac{\pi^{d/2} R^d}{2G_N^{(d+2)} \Gamma(d/2)} \left[p_1 \left(\frac{l}{a} \right)^{d-1} + p_3 \left(\frac{l}{a} \right)^{d-3} + \dots \right]$$



$$\dots + \begin{cases} p_{d-1} \left(\frac{l}{a} \right) + p_d & (\text{if } d = \text{even}) \\ p_{d-2} \left(\frac{l}{a} \right)^2 + q \log \left(\frac{l}{a} \right) & (\text{if } d = \text{odd}) \end{cases}$$

面積則の紫外発散

where $p_1 = (d-1)^{-1}$, $p_3 = -(d-2)/[2(d-3)]$,

$$\dots q = (-1)^{(d-1)/2} (d-2)!! / (d-1)!!$$

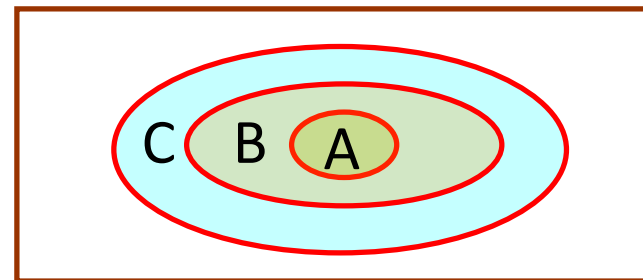
奇数次元のCFTの自由度特徴づける量。3次元のQFTでは、繰り込み群で単調減少。

共形アノマリー(中心電荷)に比例

[Casini-Huerta 2012, Liu-Mezzei 2012, Myers-Singh 2012, ...]

強劣加法性の幾何学的証明 [Headrick-TT 2007]

エンタングルメント・エントロピーが満たす最も基本的な性質の1つである強劣加法性(Strong Subadditivity)[Lieb-Ruskai 73] を以下のように簡単に幾何学的に証明できる。



$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Red} \\ \text{Blue} \\ \text{Blue} \end{array} \right. = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Green} \\ \text{Red} \\ \text{Green} \end{array} \right. \geq \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Green} \\ \text{Red} \\ \text{Green} \end{array} \right. \Rightarrow S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \geq S_{A \cup B \cup C} + S_B$$

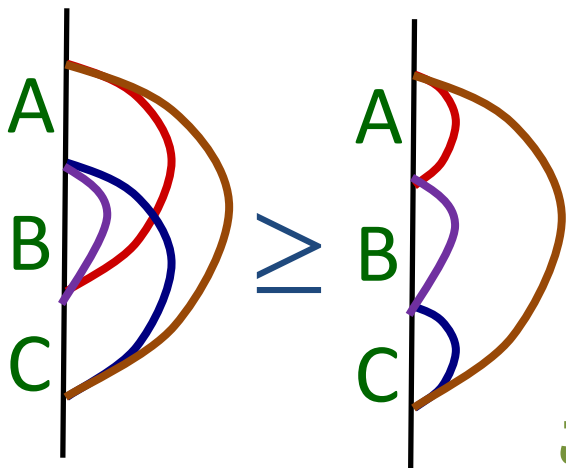
$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Red} \\ \text{Blue} \\ \text{Blue} \end{array} \right. = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Green} \\ \text{Green} \\ \text{Orange} \end{array} \right. \geq \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Green} \\ \text{Green} \\ \text{Orange} \end{array} \right. \Rightarrow S_{A \cup B} + S_{B \cup C} \geq S_A + S_C$$

3者間の情報相関 [Hayden-Headrick-Maloney 2011]

AdS/CFT対応の古典重力近似を用いると、以下のような、量子系の一般論からは導かれない不等式を満たしている。

(“相互情報量のモノガミー”)

$$S_{A \cup B} + S_{B \cup C} + S_{A \cup C} \geq S_A + S_B + S_C + S_{A \cup B \cup C}$$
$$\Leftrightarrow I(A:B) + I(A:C) \leq I(A:B \cup C)$$



相互情報量：

$$I(A:B) \equiv S_A + S_B - S_{A+B}$$

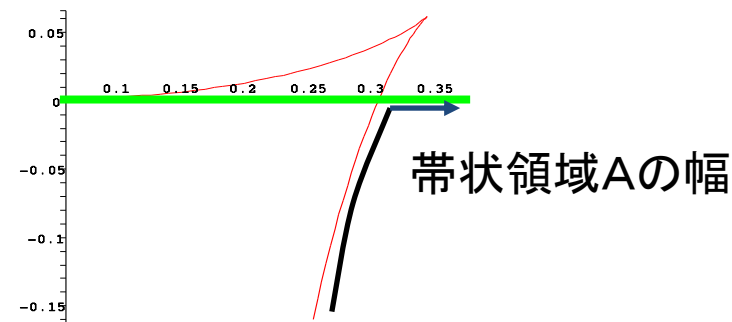
この性質はラージN極限によると解釈できる。

閉じ込め・非閉じ込め相転移への応用

HEEの解析 [Nishioka-TT 06, Klebanov-Kutasov-Murugan 07, Ogawa-TT 12]

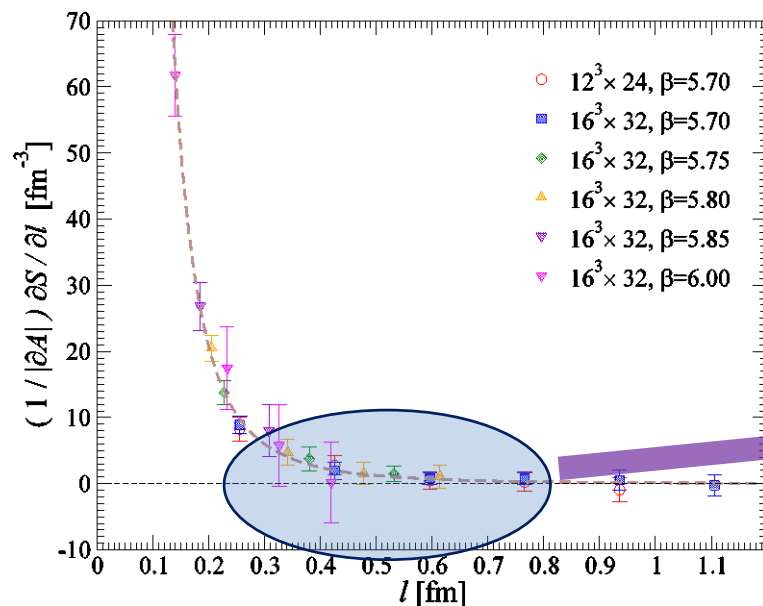
⇒ 部分系の長さを変えたときに、EEの微分が飛ぶ“相転移”。

S_A

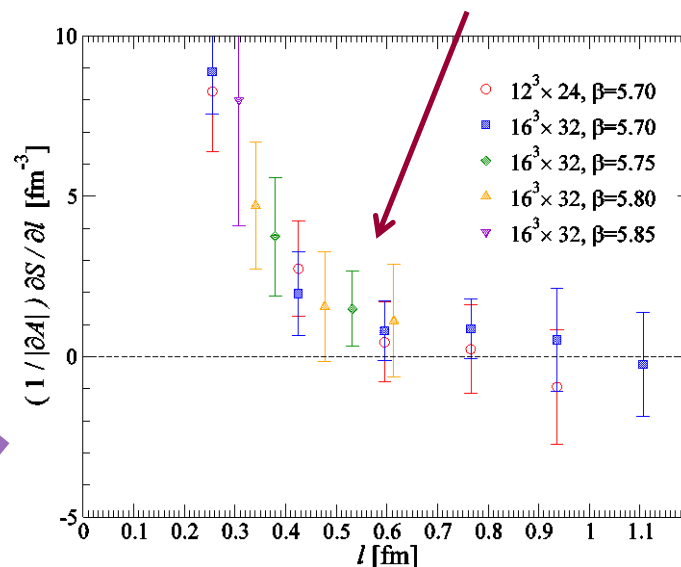


格子ゲージ理論(4D SU(3) pure YM)の結果

[Nakagawa-Nakamura-Motoki-Zakharov 09]



Milder Phase transition ?



(3-2)フェルミ面とAdS/CFT対応 [小川-宇賀神-高柳 11]

フェルミ面とエンタングルメント・エントロピー(EE)

d次元空間におけるフェルミオン系では、フェルミ面(~金属)が存在すると、以下のようにlog的な項がEEに現れる。[Wolf 05, Gioev-Klich 05]

$$S_A^{\text{Finite}} \sim l^{d-1} \log l + \dots, \quad (l = \text{部分系Aのサイズ}).$$

[コメント]

- (i) フェルミ面近傍の励起は、動径方向には‘相対論的’になり、2次元CFTで近似できる。logの振る舞いはそれに起因する。
- (ii) 最近の研究で、相互作用でこの振る舞いは変わらないことが分かってきている。[Zhang-Grover-Vishwanath 11, Swingle-Senthil 11]

AdS/CFTに基づく重力双対の解析(特にAdS4/CFT3を考える)

対称性より以下の計量を仮定する:

$$ds^2 = \frac{R_{AdS}^2}{z^2} \left(-f(z)dt^2 + g(z)dz^2 + dx^2 + dy^2 \right).$$

$$\text{漸近的 AdS} \Rightarrow f(0) = g(0) = 1.$$

前述の EEのlog的な振る舞いを実現するには、

$$g(z) \rightarrow \left(\frac{z}{z_F} \right)^2 \quad (z \rightarrow \infty).$$

となることが必要。 z_F^{-1} は、フェルミエネルギーと解釈できる。

ヌル・エネルギー条件

重力理論に矛盾がないようにヌル・エネルギー条件を課す：

任意のヌルベクトル N^μ に対して、 $T_{\mu\nu} N^\mu N^\nu \geq 0$.

これから、 z が大きい赤外領域で、次の振る舞いが要求される：

$$g(z) \propto z^2, \quad f(z) \propto z^{-2m} \Rightarrow m \geq 1.$$

2+1次元系の比熱の振る舞いは、

$$C \propto T^\alpha \quad \text{with} \quad \alpha \leq \frac{2}{3}.$$

Hyper scaling violationの
臨界点に対する重力解
[Huijse-Sachdev-Swingle 11]

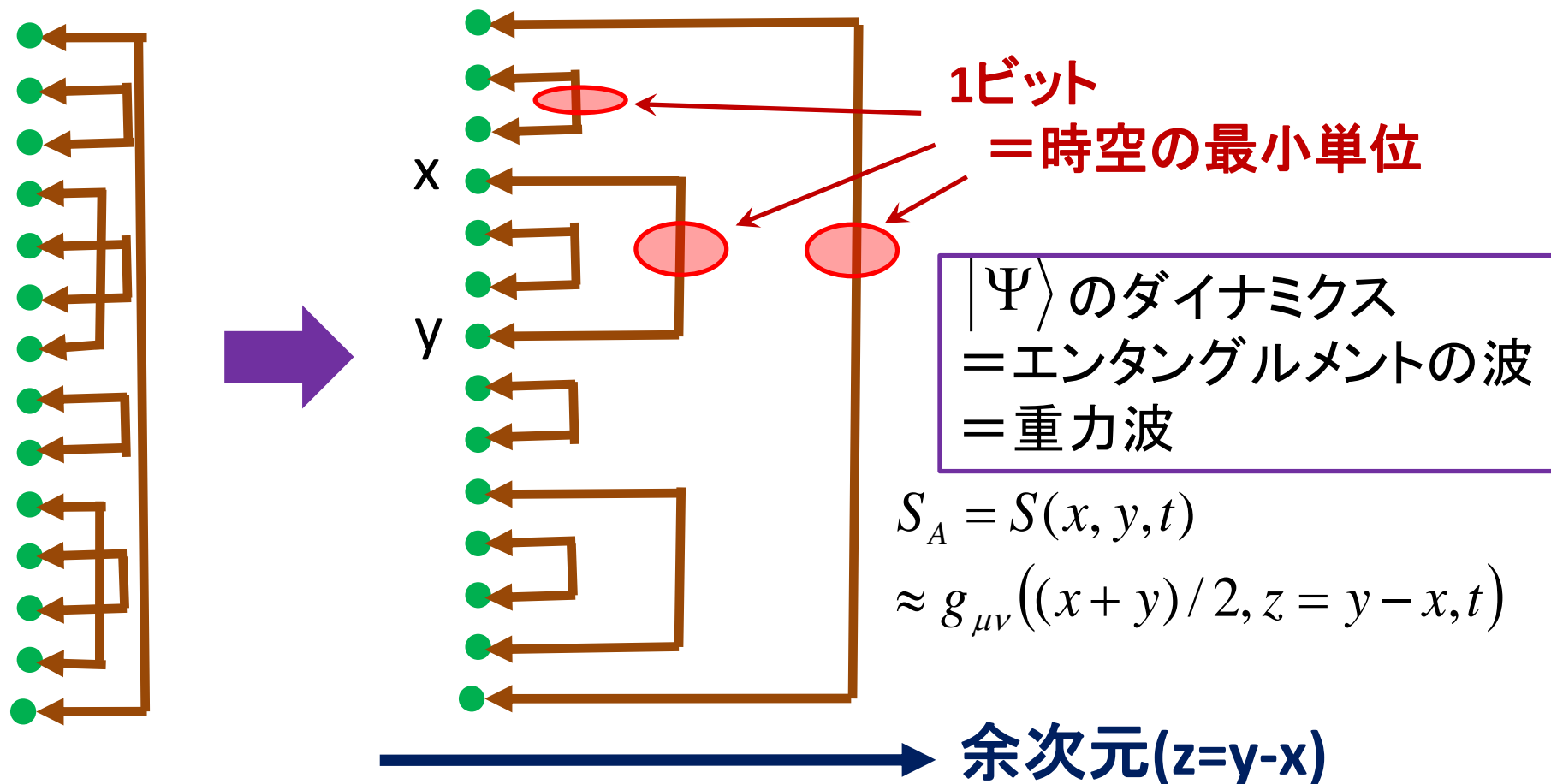
このことから、ランダウのフェルミ液体 ($\alpha=1$) は、AdS/CFTの
古典重力近似の範囲では実現できないことが分かった！

(つまり、必ず非フェルミ液体となる！)

④エンタングルメント繰り込みとAdS/CFT対応

(4-1) アイデア

各スピン対間のエンタングルメントを、スピン間の距離で分類。



(4-2) テンソルネットワーク

最近、テンソル積状態と呼ばれるグラフィカルな方法で波動関数を記述し、量子多体系の基底状態を変分法により数値計算を行う手法が成功を収めており、盛んに計算されている。

基底状態の良い近似 \Leftrightarrow エンタングルメントを正しく再現

例：行列積状態 (MPS, Matrix Product States)

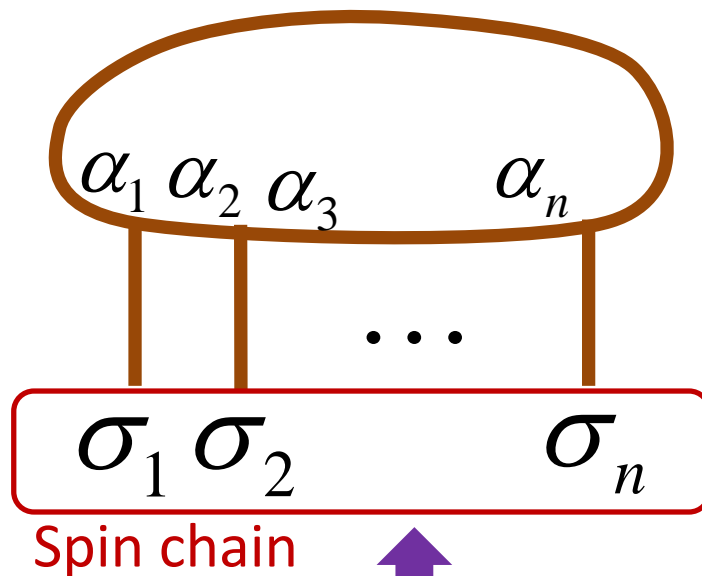
[DMRG: White 92, Ostlund-Rommer 95...]

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} \text{Tr}[M(\sigma_1)M(\sigma_2)\cdots M(\sigma_n)] \left| \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \right\rangle_{n \text{ Spins}}$$

$M : \chi \times \chi$ の行列 $(\chi \rightarrow \infty$ で厳密解)

$$\begin{array}{c} \alpha \text{ --- } \beta \\ | \\ \sigma \end{array} \longleftrightarrow M_{\alpha\beta}(\sigma)$$

行列積状態の図示



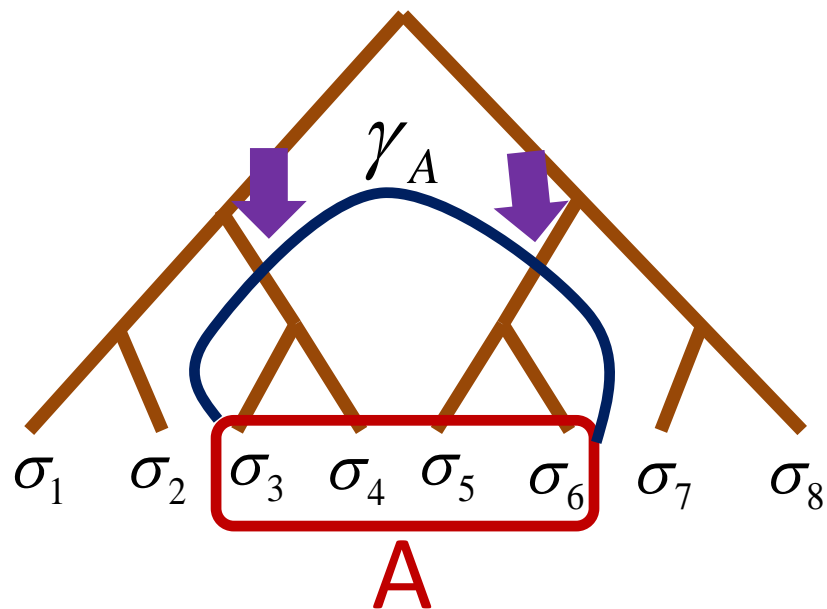
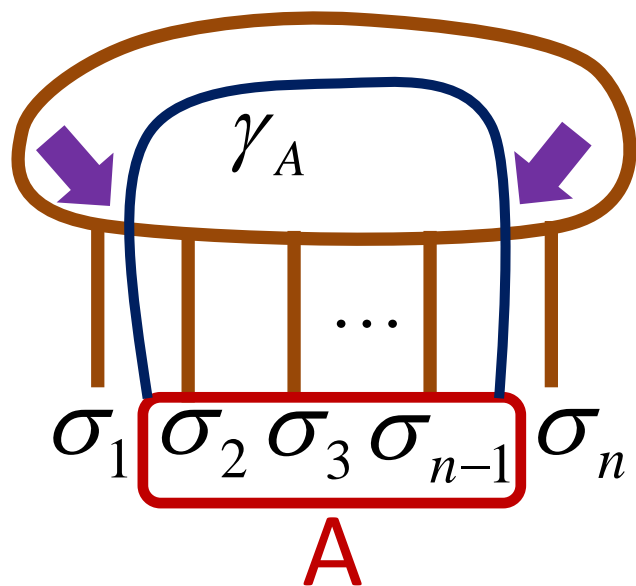
$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1, 2, \dots, \chi, \\ \sigma_i &= \uparrow \text{ or } \downarrow. \end{aligned}$$

$$|\Psi\rangle = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} \text{Tr}[M(\sigma_1)M(\sigma_2)\cdots M(\sigma_n)] \left| \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \right\rangle$$

n Spins

行列積状態やツリー状態のEEは、以下のようにバウンドされるので、CFTに対しては理想的な記述とは言えない。

$$S_A \leq 2 \log \chi \quad (<< \log L \sim S_A^{CFT}).$$



$$S_A \sim N_{\text{交差}} \cdot \log \chi,$$

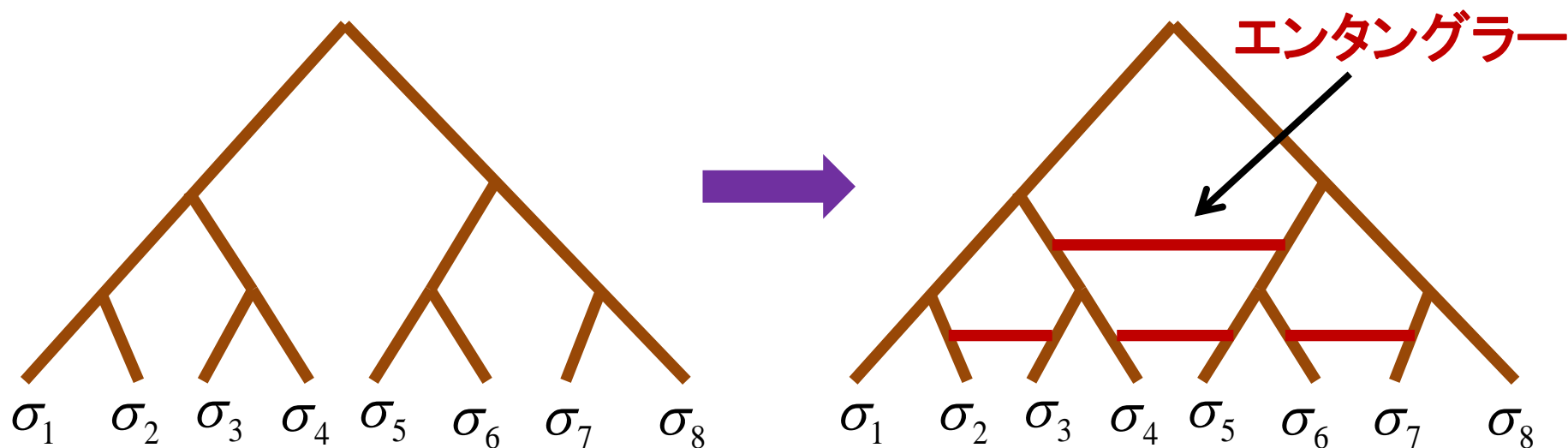
$$N_{\text{交差}} \equiv \min[\gamma_A \text{ と ネットワーク の 交差数 }].$$

(4-3) AdS/CFT対応とエンタングルメント繰り込み

MERA (**M**ultiscale **E**ntanglement **R**enormalization **A**nsatz):

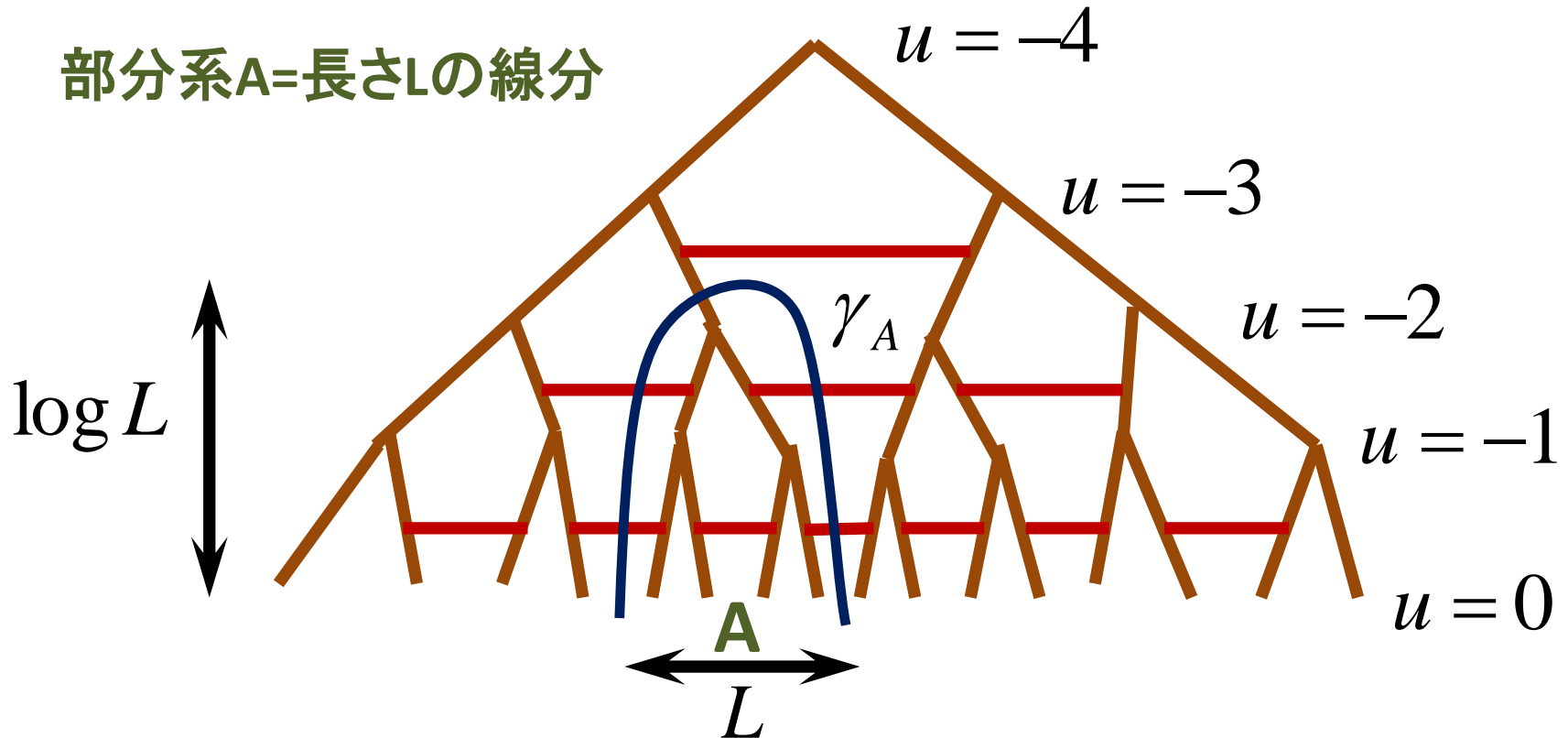
CFTの基底状態の波動関数を求める手法 [Vidal 05]

CFTの持つ大きなエンタングルメントを実現するために、
エンタングラー(entangler)と呼ばれるユニタリー変換を追加する。



1+1 次元のCFTに対する MERAにおけるEEの計算

部分系A=長さLの線分

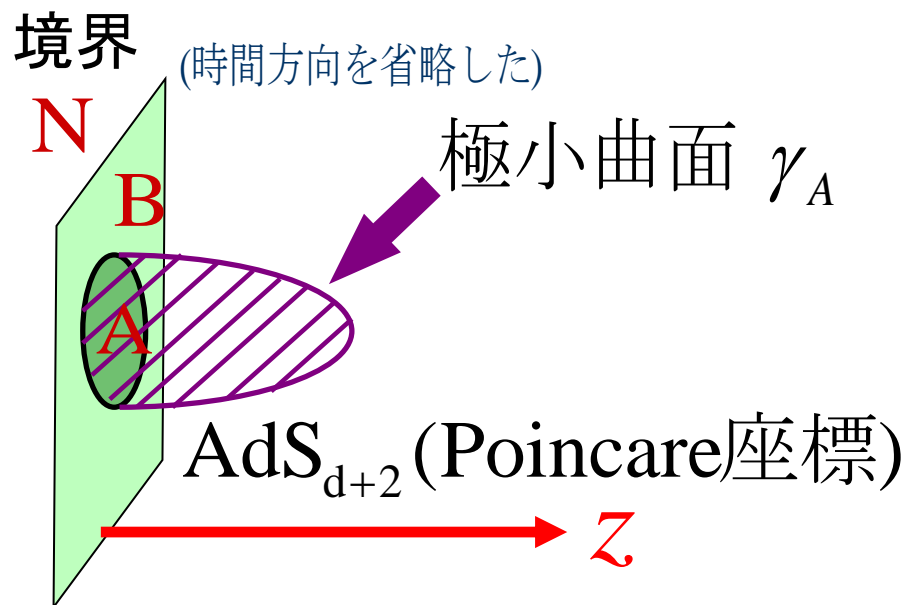


$$S_A \propto \text{Min}[\# \text{ Bonds}] \propto \log L$$

\Rightarrow 2次元CFTの結果と一致

ここでAdS/CFT対応とホログラフィックなEEを思い出す。

$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N^{(d+2)}}.$$

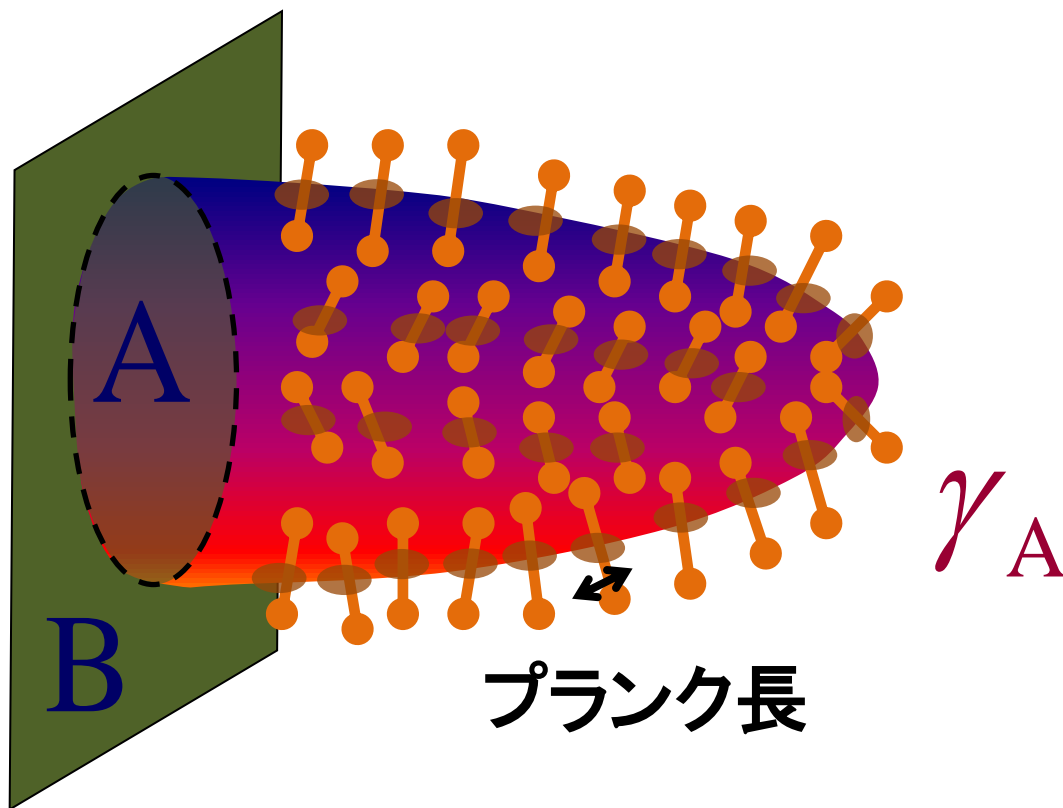


ここで、 γ_A は、 $d+2$ 次元時空中の d 次元の最小面積曲面（極小曲面）であり、境界が部分系Aの境界と一致するもの。

さて、このHEE公式から、

「重力理論の時空＝エンタングルメントの集合体」

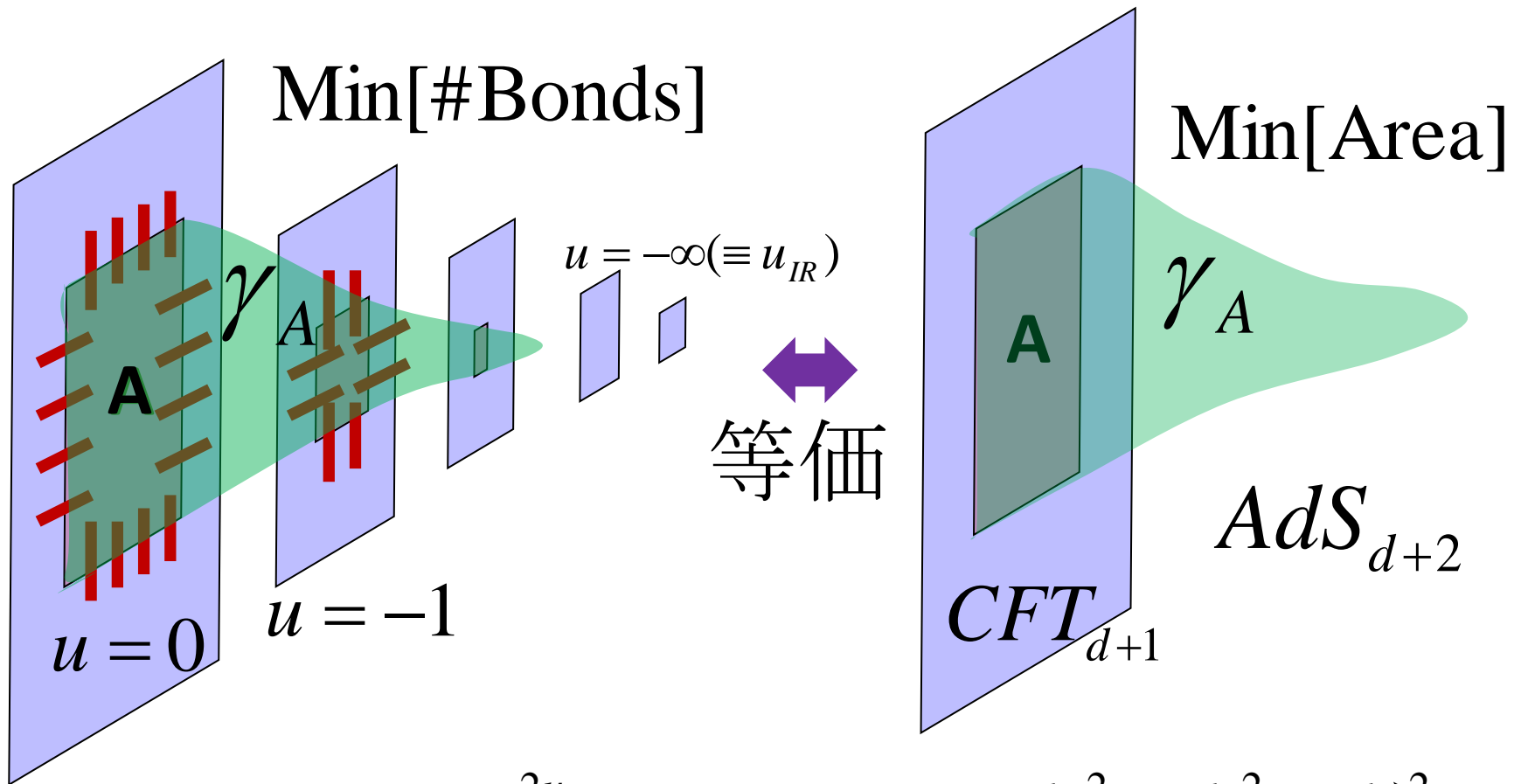
であることが予想される。⇒まさにそれがMERA!?



$$S_A = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$
$$\approx \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{l_{pl}^2}.$$

MERAとしてのAdS/CFTの解釈

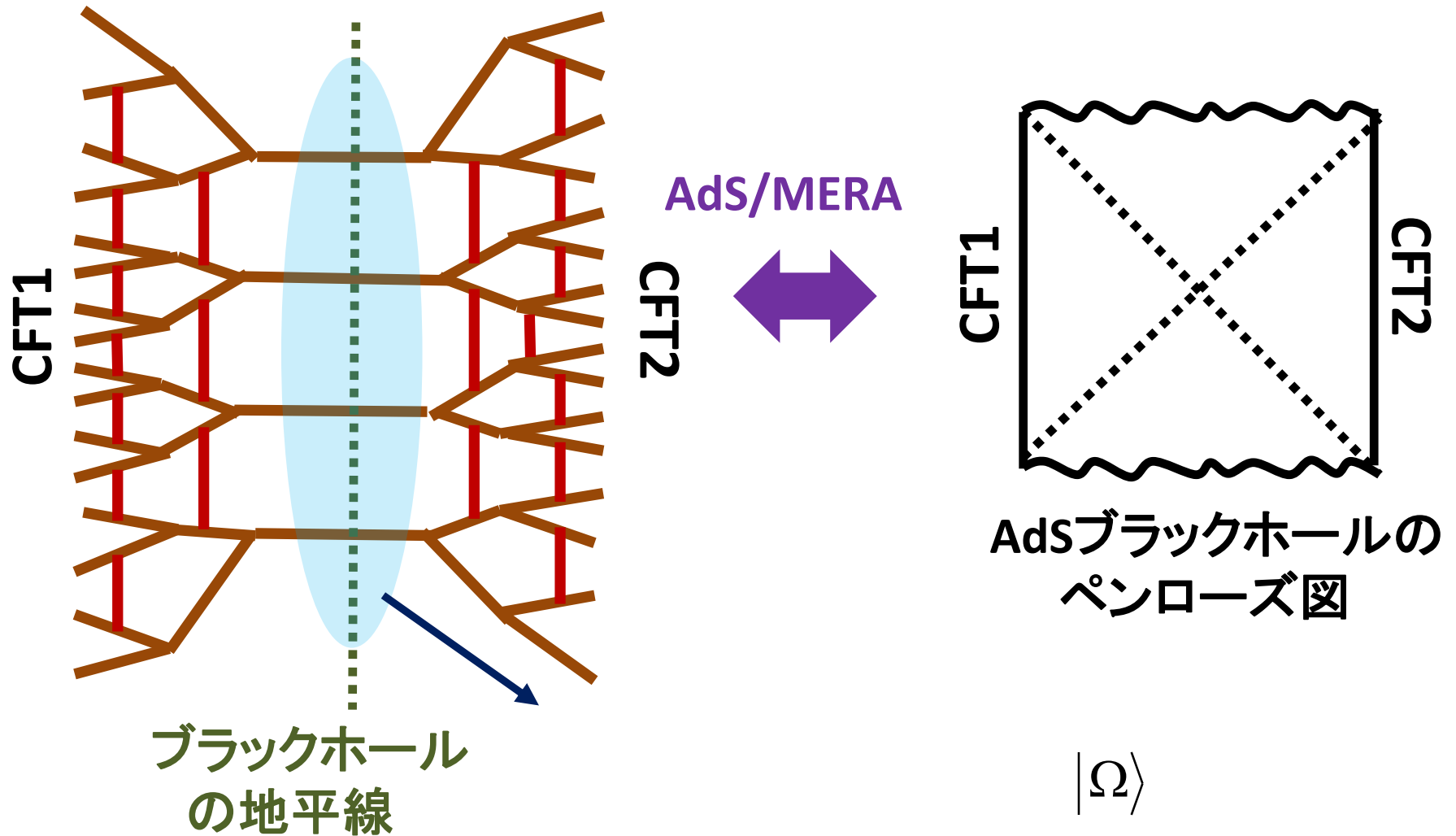
[Swingle 09]



$$\text{計量} = du^2 + \frac{e^{2u}}{\varepsilon^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) = \frac{dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2}{z^2},$$

但し $z = \varepsilon \cdot e^{-u}$. $(\varepsilon = \text{格子間隔})$

有限温度のMERA [Based on Thermofield dynamics, 松枝-石原-橋爪12]



(4-4) AdS/CFT対応とcMERA [笠-野崎-高柳 12]

場の理論の結果と比較するには、連続極限をとったエンタングルメント繰りこみの方が分かりやすい(\Rightarrow これがcMERA):

Continuous MERA (cMERA) [Haegeman-Osborne-Verschelde-Verstraete 11]

$$\underbrace{|\Psi(u)\rangle}_{\text{基底状態をスケール}u\text{まで粗視化}(u=0\text{は基底状態自体})} = P \cdot \exp\left(-i \int_{u_{IR}}^u ds [\underbrace{K(s)}_{\text{エンタングラー}} + \underbrace{L}_{\text{スケール変換}}]\right) \cdot \underbrace{|\Omega\rangle}_{\text{IR状態(エンタングルメントは皆無)}}$$

\Rightarrow 実空間の繰りこみ: 長さのスケール $\sim \varepsilon \cdot e^{-u}$.

ヒルベルト空間の次元は変えず、空間各点が独立のIR状態からスタートして、少しずつエンタングルメントを織り込み、基底状態を作る。

cMERAにおける余次元方向の計量

簡単のため、並進不変な量子状態を考える。

このとき、余次元方向の計量 g_{uu}

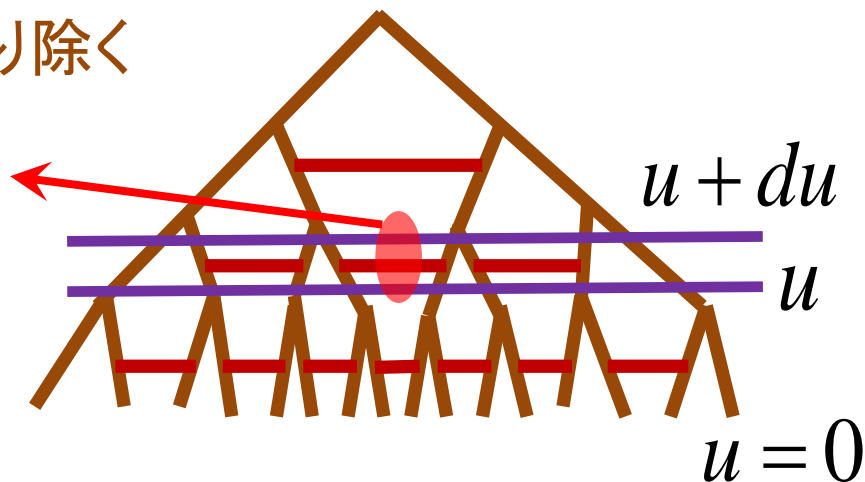
$$ds_{Gravity}^2 = g_{uu} du^2 + \frac{e^{2u}}{\varepsilon^2} \cdot d\vec{x}^2 - g_{tt} dt^2$$

は以下のようにcMERAで計算されると予想される:

$$g_{uu} du^2 = N \cdot \left(1 - \left| \langle \Psi(u) | e^{iLdu} | \Psi(u+du) \rangle \right|^2 \right) \propto \text{エンタングラーの密度}^2.$$

スケール変換の効果を取り除く

$$\text{面積要素} = \sqrt{g_{uu}} du$$



情報理論的計量

2つの量子状態間のブレス(Bures)距離は以下で定義される:

$$D(\psi_1, \psi_2) = 1 - \left| \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \right|^2.$$

より一般に二つの密度行列間のブレス距離は、

$$D(\rho_1, \rho_2) = 1 - \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}.$$

さて、状態がパラメーター $\{\xi_i\}$ に依存する場合に
ブレス計量(フィッシャー計量)は、

$$D[\psi(\xi), \psi(\xi + d\xi)] = g_{ij} d\xi^i d\xi^j.$$

と定義される。⇒cMERAのguuの定義

(4-5) 具体例：自由スカラー場理論

ハミルトニアン:
$$H = \frac{1}{2} \int dk^d [\pi(k)\pi(-k) + (k^2 + m^2)\phi(k)\phi(-k)].$$

基底状態 : $|\Psi\rangle \quad s.t. \quad a_k |\Psi\rangle = 0.$

IR 状態 $|\Omega\rangle$ とエンタングラー $\hat{K}(u)$ は次で与えられる:

$$a_x = \sqrt{M} \phi(x) + \frac{i}{\sqrt{M}} \pi(x), \quad (M \equiv \sqrt{\Lambda^2 + m^2}),$$

$$a_x |\Omega\rangle = 0, \quad |\Omega\rangle = \prod_x |0\rangle_x \Rightarrow S_A(\Omega) = 0 \text{ for any } A.$$

$$\hat{K}(u) = \frac{i}{2} \int dk^d \left[\chi(u) \Gamma(k e^{-u} / \Lambda) a_k^+ a_{-k}^+ + (h.c.) \right] \quad (\Gamma(x) \equiv \theta(1 - |x|)).$$

cMERAの計量

$$ds_{\text{Gravity}}^2 = g_{uu} du^2 + \frac{e^{2u}}{\varepsilon^2} \cdot d\vec{x}^2 - g_{tt} dt^2$$

(i) Massless スカラー場 (E=k)

$$g_{uu} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{AdS時空}$$



(ii) Massive スカラー場

$$g_{uu} = \frac{e^{4u}}{4(e^{2u} + m^2 / \Lambda^2)^2}.$$

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{dz^2}{z^2} + \left(\frac{1}{\Lambda^2 z^2} - \frac{m^2}{\Lambda^2} \right) (d\vec{x}^2 - dt^2).$$



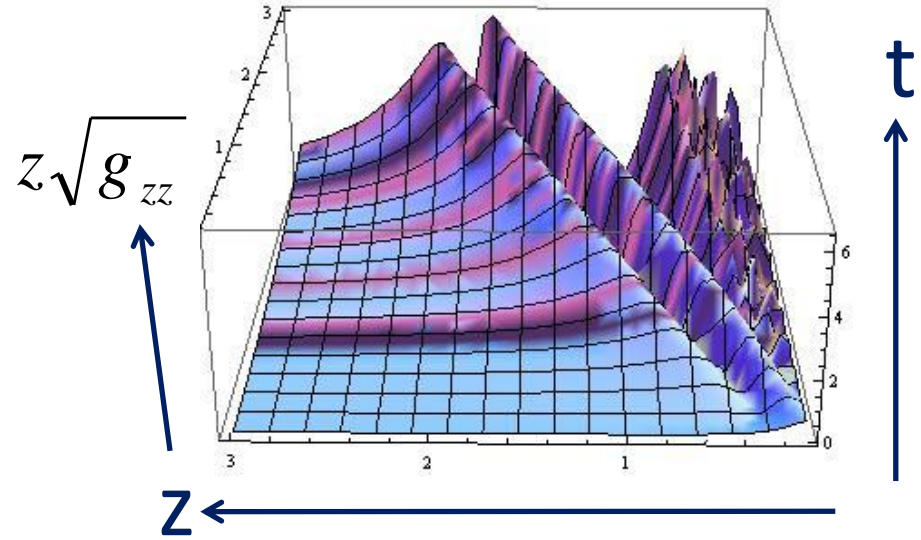
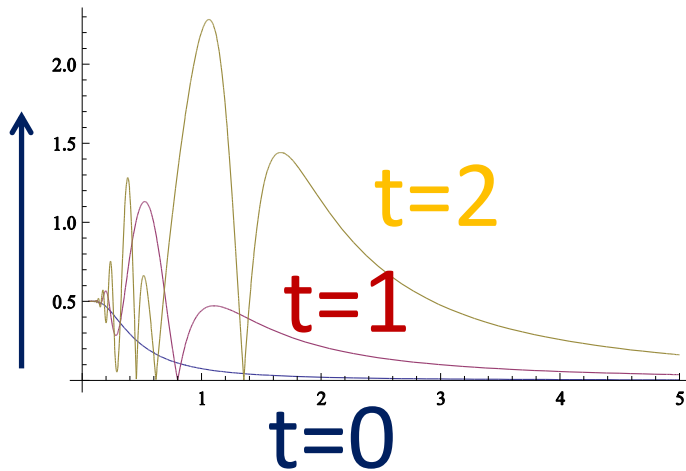
IR $z < 1/m$ が消えてなくなっている。
定性的にはAdS/CFTの予想と合う。

(4-6) 量子クエンチの励起状態に対する計量(guu)

[Mollabashi-野崎-笠-高柳 13]

重力波の伝播のように見える

$$z\sqrt{g_{zz}} = g(u)$$



cMERAにおいて $|g(u)| \propto t$ であることから、EEが時間に比例して増加する($SA \propto t$)ことが分かる。

これは2次元共形場理論の結果[Calabrese-Cardy 05]を再現し、高次元のホログラフィックな結果[Hartman-Maldacena 13]とも合う。

⑤ おわりに

本講演では、**量子多体系(量子物理)**、**量子情報理論(情報)**、**重力理論(幾何)**の3つの分野の深いかわり合いを説明した。しかし、このような流れが本格的に始まってから間もなく、現在の知見は氷山の一角に過ぎないかもしれない。

今後の一つの大きな方向性は、量子重力理論・超弦理論の基本的なダイナミクス(アインシュタイン方程式など)を量子エンタングルメントの考え方を用いて、表現することであろう。

[部分的な成果: EEの第一法則＝真空Einstein方程式の摂動

Lashkari-McDermott-Raamsdonk 13]

また、励起状態のEEの性質、ゲージ理論におけるEEの定義、など、場の理論のEEに関しても今後の研究が待たれるテーマも多い。

量子多体系の物理
(場の理論、物性理論、統計力学, 可解系)

AdS/CFT
(ホログラフィー)



重力理論
(超弦理論)

量子エンタングルメント
テンソルネットワーク

量子情報理論
(情報幾何)

HEE



BH情報問題