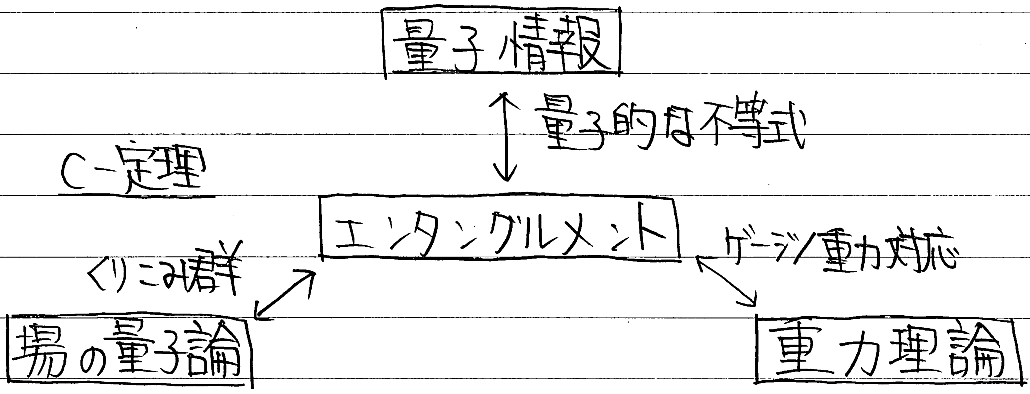
8/25 夏の学校 西岡さん

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

エンタングルメントと繰り込み群

1. 量子力学　2. 場の理論　3. 繰り込み群



1. 量子力学

1.1 量子力学の復習

- 状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$$|\psi\rangle \sim a|\psi\rangle, \quad a \in \mathbb{C}$$

- 規格化　$\langle\psi|\psi\rangle = 1$

- エルミート

$$\langle\phi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\phi|\psi\rangle, \quad A = A^\dagger$$

- スペクトル表示

$$A = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|, \quad a_i \geq 0$$

$\{|i\rangle\}$ 正規直交

- 密度行列 ρ (エルミート)

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \sum_i p_i = 1, \quad p_i \geq 0$$

- 期待値

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \mathrm{tr}(A\rho)$$

・純粋状態

$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ or $\rho^2 = \rho$

$|\psi\rangle$は確率1で出る

そうでない ⇒ 混合状態

・合成系 $|i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$

$\mathcal{H}_{A\cup B} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

A　B

$\Downarrow$

$$|\psi\rangle_{A\cup B} = \sum_{i,\mu} C_{i\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B$$

・部分トレース

$$\mathrm{tr}_B(M_{A\cup B}) = \sum_{\mu} {}_B\langle\mu|M_{A\cup B}|\mu\rangle_B$$

→ $\mathcal{H}_A$上の演算子

Ref)
Nielsen - Chuang
Preskil Quantum Information Theory Chapter 2

1.2 セパラブル, エンタングル状態

もし $|\psi\rangle_{A\cup B} = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$ ⇒ セパラブル

そうでない ⇒ エンタングル

例 2準位系

$$\mathcal{H}_{A,B} = \{|\uparrow\rangle_{A,B}, |\downarrow\rangle_{A,B}\}$$

$$|\psi^S\rangle_{A\cup B} = \frac{1}{2}\left[|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A \right)}_{|\phi\rangle_A} \otimes \underbrace{\left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B \right)}_{|\chi\rangle_B}$$

Schmidt 分解

$$|\psi\rangle_{A\cup B} = \sum_i \sqrt{p_i}\, |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \qquad \left(\sum_i p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right)$$

$$= \sum_{j,\mu} C_{j\mu} |j\rangle_A |\mu\rangle_B \quad , \quad C_{j\mu} = \underbrace{\left(\qquad \right)}_{d_A} d_B \quad , \quad d_A > d_B$$

$$= U \left(\begin{array}{ccc:c} \sqrt{p_1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sqrt{p_{d_B}} & \end{array} \right) V$$

・合成系が純粋

$$\rho_{A\cup B} = |\psi\rangle_{A\cup B}\,{}_{A\cup B}\langle\psi|$$

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(\rho_{A\cup B}\right) = \sum_i {}_B\langle i|\psi\rangle_{A\cup B}\,{}_{A\cup B}\langle\psi|i\rangle$$

どちらも純粋

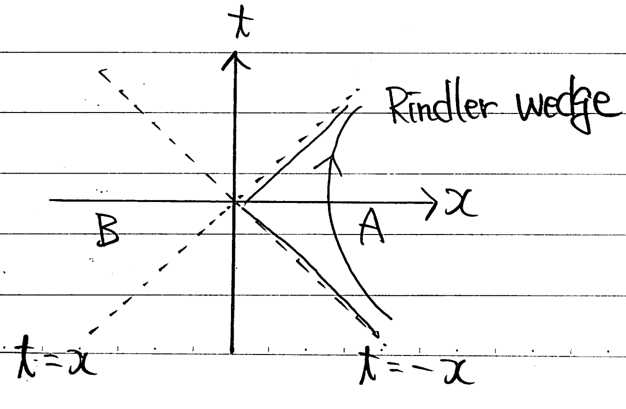
$$= \sum_i \left(\sqrt{p_i}\, |i\rangle_A \right)\left(\sqrt{p_i}\, {}_A\langle i| \right) = \sum_i p_i |i\rangle_A\,{}_A\langle i|$$

系 A の混合状態

$\boxed{|\psi\rangle_{A\cup B}}$: セパラブル $\leftrightarrow$ ρ_A : 純粋
$\boxed{|\psi\rangle_{A\cup B}}$: エンタングル $\leftrightarrow$ ρ_A : 混合

混合状態 ρ_A を合成系 $A\cup B$ の純粋状態にできる

リンドラー時空



1.3 エンタングルメントエントロピー

$$S_A = -\mathrm{tr}_A(\rho_A \log \rho_A)$$

もし Aがカノニカル分布

$$\rho_A = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_A}, \quad Z = \mathrm{tr}_A(e^{-\beta H_A})$$

$$S_A = \beta \underbrace{\langle H_A \rangle}_{\text{エネルギー}} + \underbrace{\log Z}_{-\beta F} = \beta(\langle H_A \rangle - F)$$

性質

① $A \cup B$が純粋 $\Rightarrow S_A = S_B$ (Schmidt分解でAとBは対称だから)

② $|\psi\rangle_{A\cup B}$ がセパラブル $\Rightarrow S_A = 0$

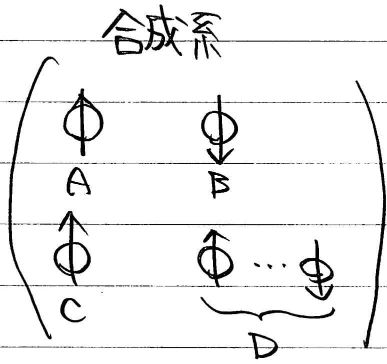
③ S_Aの最大値は $p_i = 1/d_A$ のとき

$\Rightarrow S_A^{max} = \log d_A$

④ 強劣加法性

3つの独立な部分系A,B,C

$$\boxed{S_{A\cup B\cup C} + S_B \leqq S_{A\cup B} + S_{B\cup C}}$$



[Lieb-Ruskai 73]

無限次元では成り立つか不明 → 場の理論では仮定

・相対エントロピー

$$S(\rho\|\sigma) = \mathrm{tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)]$$

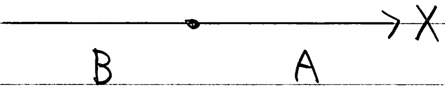
単調性

$S(\mathrm{tr}'(\rho)\|\mathrm{tr}'(\sigma)) \leqq S(\rho\|\sigma)$ 観測する領域がせばまると区別しづらくなる.

2. 場の理論(QFT)

- 実時間形式(Real time approach)
- レプリカ法(Euclidean Path Integral)
- ホログラフィック公式(Rangamani – Takayanagi. Review)

1+1次元



S_Aの計算

- $\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$を経路積分表示する
- $\mathrm{tr}_A(\rho_A^n) \to$ 分配関数

真空

$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

$Z = \langle\Psi|\Psi\rangle$

2.1 レプリカ法(Replica trick)

$$\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{\phi_{0B}} \langle \phi_{0A}, \phi_{0B} | \Psi \rangle \langle \Psi | \phi'_{0A}, \phi_{0B} \rangle$$

$$|\phi_{0A}, \phi_{0B}\rangle \equiv |\phi_{0A}\rangle \otimes |\phi_{0B}\rangle$$

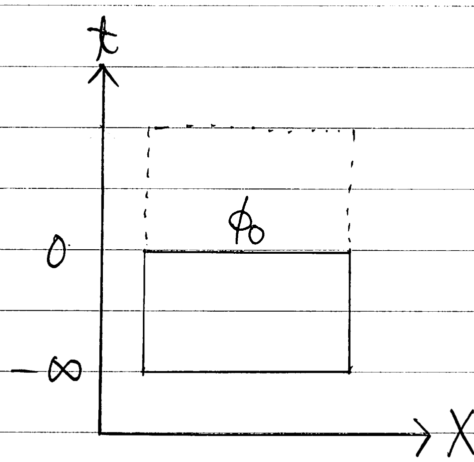
$|\phi_{0A}\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|\phi_{0B}\rangle \in \mathcal{H}_B$ $\quad |\phi_{0A}, \phi_{0B}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_{0A}(\vec{x}), & \vec{x} \in A \\ \phi_{0B}(\vec{x}), & \vec{x} \in B \end{cases}$$

$$\Psi[\phi_0] = \langle \phi_0 | \Psi \rangle$$

$t=0$

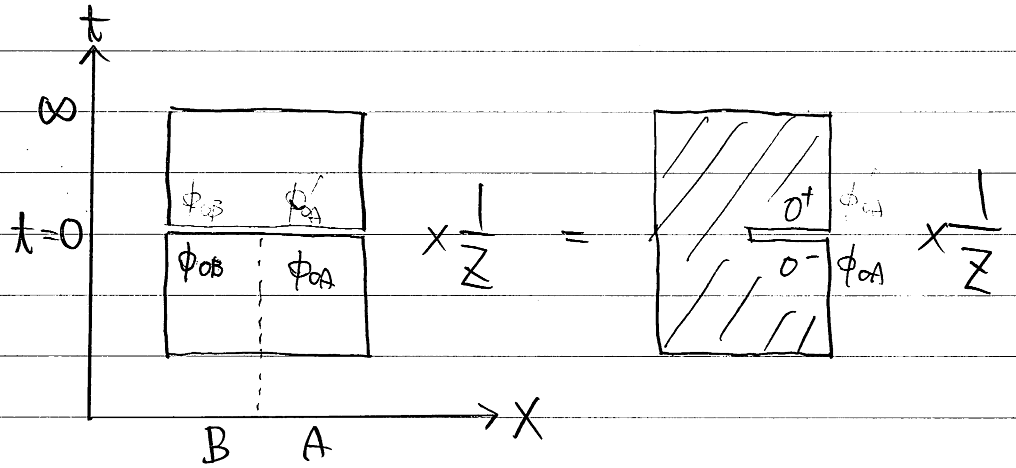
$$= \int_{t=-\infty}^{t=0,\, \phi=\phi_0} \mathcal{D}\phi\, e^{-\int d^dx\, \mathcal{L}[\phi]}$$



$\langle \phi_{0A} | \rho_A | \phi'_{0A} \rangle =$

$\downarrow$

$\mathrm{tr}_A(\rho_A^n)$



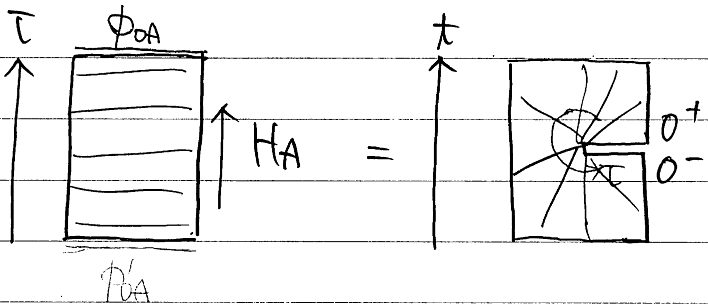
・モジュラーハミルトニアン

$$\rho_A = \frac{1}{Z} e^{-2\pi H_A}$$

← モジュラー時間

終　　　　始

$\langle \phi_{0A} | e^{-2\pi H_A} | \phi'_{0A} \rangle =$

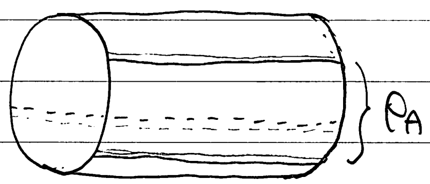


逆温度

$$\mathrm{tr}_A(\rho_A^n) = \frac{1}{Z^n} \underbrace{\mathrm{tr}_A(e^{-\boxed{2\pi n} H_A})}_{Z_n}$$

Z_n : n重被覆空間 M_n 上の分配関数

$n=3$ のとき

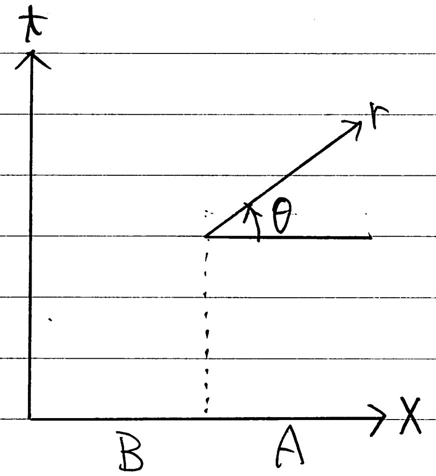


← $\mathrm{tr}_A(\rho_A) = 1$

・場のの理論のエンタングルメントエントロピー

$$\boxed{S_A = -\lim_{n\to 1} \frac{\partial}{\partial n} \log \mathrm{tr}_A(\rho_A^n) = -\lim_{n\to 1}\left(\frac{\partial}{\partial n} - 1\right)\log Z_n}$$

M_n : $\Sigma = \partial A$ が特異面



$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$
$$\theta \sim \theta + 2\pi n$$

例　2次元スカラー場 (r, θ)

$-\phi(\Box - m^2)\phi$

$$I[\phi] = \frac{1}{2}\int d^2X\left[(\partial_\mu\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$$

$$Z_n = \int_{M_n} \mathcal{D}\phi\, e^{-I[\phi]} = \left[\mathrm{Det}(\Box - m^2)\right]^{-1/2}$$

$$\log Z_n = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\log(\Box - m^2)$$

$$(\Box - m^2)\phi_{k,l}(r,\theta) = \lambda_{k,l}\phi_{k,l}(r,\theta)$$

Casini−Huerta (09) Review

$$\phi_{k,l}(r,\theta) = f_{k,l}(r)e^{i\frac{l}{n}\theta}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

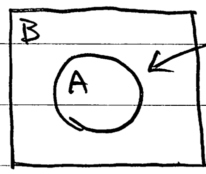
2.2 エンタングルメントエントロピーの一般形

d次元QFT

$t=0$

$$S_A = \frac{C_{d-2}}{\epsilon^{d-2}} + \frac{C_{d-4}}{\epsilon^{d-4}} + \cdots + \begin{cases} \dfrac{C_2}{\epsilon^2} + \underline{C_0}\log\dfrac{l}{\epsilon} + 定数 & d:\text{even} \\ \dfrac{C_1}{\epsilon} + (-1)^{\frac{d-1}{2}}\underline{F} & d:\text{odd} \end{cases}$$

↑ UVカットオフ



Σ
Codimension 2
dimension $d-2$

$\epsilon \to \lambda\epsilon$

λを変えても区別できる項 ⇒ 意味がある

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

- $C_{d-2} \propto \mathrm{Vol}(\Sigma)$ Area low

- ユニバーサルな項(カットオフによらない)
  - d : even ⇒ C_0, 共形場理論では中心電荷と関係
  - d : odd ⇒ F　CFTかつ $\Sigma = S^{d-2}$　$F = (-1)^{\frac{d-1}{2}} \log Z[S^d]$

共形場理論

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle = 0$$

同時に保てない

量子論の発散のくりこみと共形対称性は共存できない ⇒ アノマリー

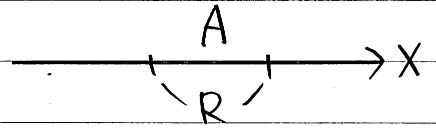
d : even では共形アノマリー

$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle = \frac{(-1)^{d/2}}{2} A E_d - \sum_i B_i I_i$$

$E_2 = \frac{R}{4\pi}$, RはRicciスカラー

オイラー密度　　中心電荷

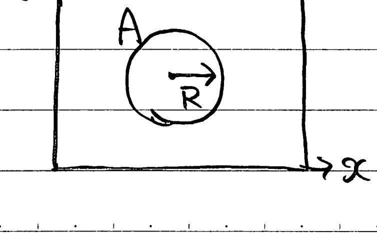
例　2d CFT



$$\langle T_\mu{}^\mu \rangle = -\frac{c}{24\pi} R$$

$$S_A = \frac{c}{3} \log \frac{R}{\epsilon}$$

例　3d CFT



境界のVolume

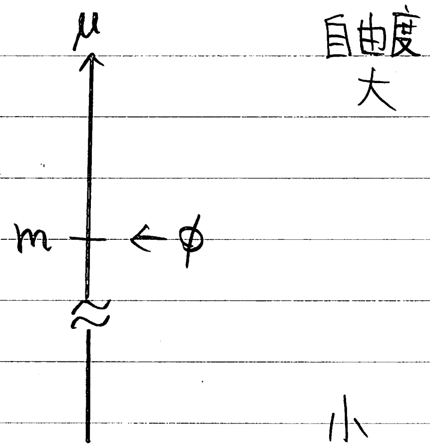
$$S_A = \alpha \frac{2\pi R}{\epsilon} - F$$

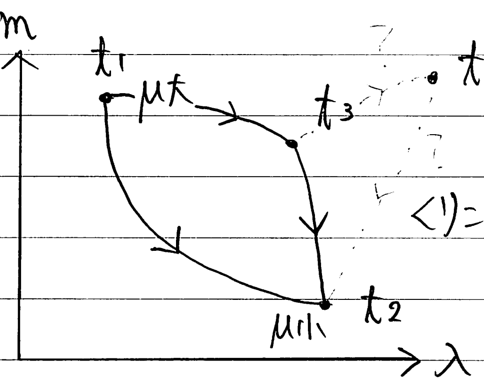
〜 : ユニバーサル

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

3.

もし、エネルギースケールμが $\mu \ll m$ ならば、質量mの場ϕは無視して良い。

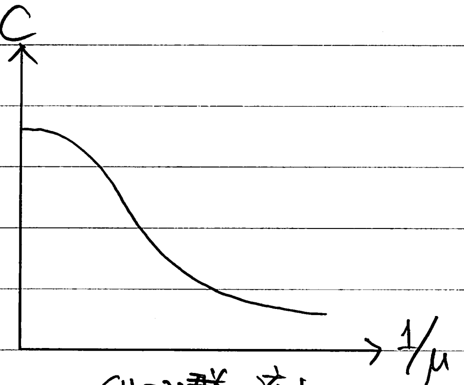




くりこみ群の流れ

固定点はスケール不変な理論
→ 経験的にCFT

理論の空間

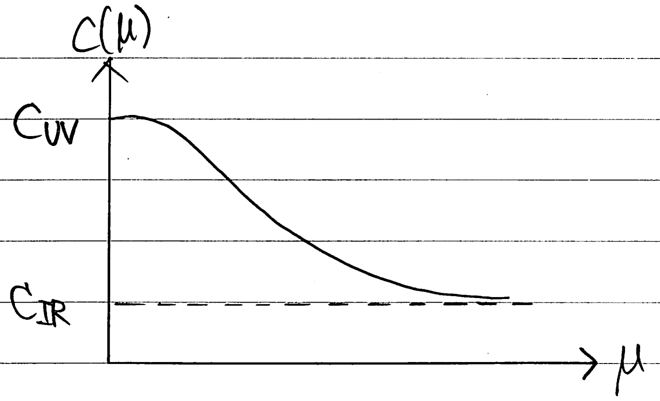


くりこみ群の流れ

Zamolodchikovのc-定理

$\exists\, C(g_i, \mu)$
↑
couplingの組

性質
1. 固定点で中心電荷と一致
$$C(g_i,\mu)\big|_{CFT} = C$$
2. 単調減少
$$\frac{dC(g,\mu)}{d\mu} \geq 0$$
3.
$$\left.\frac{\partial C(g,\mu)}{\partial g_i}\right|_{CFT} = 0$$

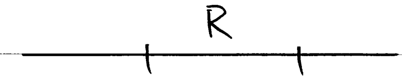


$C_{UV} \geq C_{IR}$

エントロピック C－定理

エネルギースケールは

$$\mu \sim \frac{1}{R}$$



$$S(R)\big|_{CFT} = \frac{c}{3}\log\frac{R}{\epsilon}$$

エントロピック C－関数

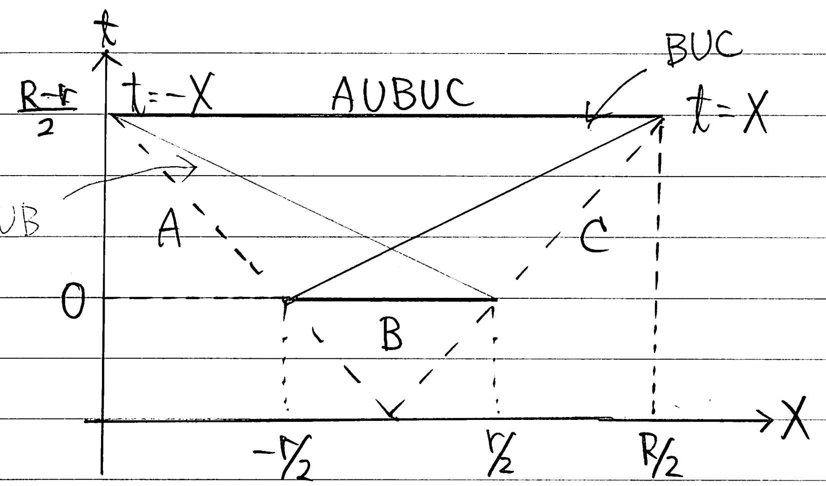
$$C_E(R) \equiv 3R\frac{dS(R)}{dR}$$

C_Eが C－関数であるためには

$$\frac{dC_E(R)}{dR} \leq 0$$

だと良い。

方針：強劣加法性とローレンツ不変 ⇒ C_Eの単調性



ローレンツ不変な長さ

$$\ell = \sqrt{-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2}$$

TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF PHYSICS

強劣加法性

$$S_{A\cup B\cup C} + S_B \leq \underbrace{S_{A\cup B} + S_{B\cup C}}_{2S(\sqrt{rR})}$$

$$S_{A\cup B\cup C} = S(R), \quad S_B = S(r)$$

$R = r + \delta$, $\delta \ll r$ として r で展開

$$\Rightarrow \frac{c_E'}{3} = S'(R) + RS''(R) \leq 0$$

3次元 F-定理

$$S(R)\big|_{CFT} = \alpha \frac{2\pi R}{\epsilon} - F, \quad F = -\log Z[S^3]$$

$F_{UV} \geq F_{IR}$ を示したい

・くりこまれたエンタングルメントエントロピー

$$F(R) \equiv R\frac{dS(R)}{dR} - S(R) \Rightarrow F' \leq 0$$

by 強劣加法性＋ローレンツ不変性

4次元 A-定理

中心電荷 A は C-関数