O-5

エンタングルメント・エントロピーとホログラフィックな対応
Entanglement Entropy and Holographic Correspondence

○秋田遼平[1]，三輪光嗣[2]
*Ryouhei Akita[1], Akitsugu Miwa[2]

Abstract : We review a method for calculating entanglement entropy in quantum field theories by the replica trick and refer to its area law. In the context of the AdS/CFT correspondence, entanglement entropy is computed geometrically and the area law can be derived. We also review another holographic correspondence between entanglement entropy with Klein-Gordon equation in de Sitter space.

1．導入

ブラックホールのエントロピーは，プランク面積を単位として測ったホライズンの面積によって与えられる．

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{\text{ホライズンの面積}}{4G_N} \tag{1}$$

ここで，G_N は重力定数であり，自然単位系ではプランク長の 2 乗である．この関係式は Bekenstein-Hawking の公式と呼ばれており，重力を考慮しない場合エントロピーが系の体積に比例することとは異る興味深い性質である．

’t Hooft と Susskind はこの振る舞いを重力が持つ本質的な性質ととらえ，$d+2$ 次元の重力理論は一次元低い $d+1$ 次元の重力を含まない理論によって記述できると提唱した [1, 2]．こうした考え方はホログラフィー原理と呼ばれており，Maldacena がその具体例として Anti de-Sitter 時空とその境界上の共形場理論（CFT）との対応 (AdS/CFT 対応) を提唱したことで盛んに研究されてきた [3].

AdS/CFT 対応において，CFT 上のエンタングルメント・エントロピー（以下 EE）が，AdS 時空内に張られる極小曲面の面積と対応することが Ryu と Takayanagi により提唱された [4]．これはホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー（以下 HEE）と呼ばれる．

ここでは，場の理論における EE の面積則やそのホログラフィックな対応を紹介する [5]．また，最後に CFT と de Sitter 時空の間の新しいホログラフィックな対応を紹介する．

2．EE の定義と基本性質

Hilbert 空間 H によって記述される量子多体系を考え，この系の密度行列 ρ を導入する．

$$\rho = \sum_i \omega_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad , \quad \mathrm{Tr}[\rho] = 1 \tag{2}$$

ω_i は各状態の重みを表しており，特に状態が純粋状態の場合には，$\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$ となる．また，物理量の期待値 $\langle O\rangle$ はそれに対応する演算子 $\hat{O}$ を用いて $\langle O\rangle = \mathrm{Tr}[\rho\,\hat{O}]$ と表される．

次に，Hilbert 空間が $\mathrm{H} = \mathrm{H}_A \otimes \mathrm{H}_B$ のように二つに分解されるように系全体を二つの部分系 A と B に分け，部分系 A の密度行列 ρ_A を以下のように定義する．

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B[\rho] \tag{3}$$

そして，密度行列 ρ_A に対する von Neumann エントロピー

$$S_A = -\mathrm{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] \tag{4}$$

を，A と B の量子的もつれの度合を表す量である EE として定義する．

全体が純粋状態であり部分系が A, B の二つのみの場合，S_A と S_B は互いとの量子的なもつれの度合いを表すものなので，$S_A = S_B$ となり示量的なものではないことがわかる．特に，量子的なもつれがない場合は $S_A = S_B = 0$ となる．

3．レプリカ法を用いた場の理論における EE

ここでは場の量子論において，空間を A と B 二つの領域に分けた場合の領域 A における EE の計算方法を紹介する．

簡単な領域の分け方の例として，x を空間の一方向とし，$x > 0$（A）と $x < 0$（B）の半分に分けた場合を考える．波動関数 Ψ とその複素共役 Ψ^* によって，空間を分ける前の系全体の密度行列 ρ は次のようになる．

$$[\rho]_{\phi\phi'} = \Psi[\phi]\Psi^*[\phi'] \tag{5}$$

ここで，ϕ，ϕ' は場の配位を表しており，行列としての ρ のラベルに対応する．さらに式 (3) から領域 A に対する密度行列 ρ_A は領域 B に関してのみ場の配位 ϕ，ϕ' を揃え経路積分を行ったものとなる．

$$[\rho_A]_{\phi\phi'} = \frac{1}{Z}\int_{\phi=\phi'(x\in B)} D\phi\, e^{iS[\phi]} \tag{6}$$

ここで，Z は分配関数，S は作用である．

式 (4) には行列の対数が含まれておりそのままの形では計算が困難なため，以下のように書き換えを行いレプリカ法を用いることで計算を行う．

$$S_A = -\mathrm{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] = -\frac{\partial}{\partial n}[\log \mathrm{Tr}_A \rho_A^n]\Big|_{n=1} \tag{7}$$

式 (6) の経路積分は $t = 0$，$x > 0$ に境界を持つ $d+1$ 次元空間上で定義されており，ϕ および ϕ' はその境界上での場の配位を表す．$\mathrm{Tr}_A \rho_A^n$ の計算を行う際は，このような $d+1$

[1] 日大理工・院（前）・物理　[2] 日大理工・教員・物理

次元空間を n 個並べて，隣り合う境界における場の配位を揃えて経路積分を行う．

場の理論は一般に無限個の自由度を持っており，EE は発散している．したがって，経路積分を行う際に運動量に対してカットオフを設定することで EE を導出する．$d+1(d>2)$ 次元の場の理論における EE を計算すると，S_A は A の境界 (∂A) の面積に比例することが知られており，面積則と呼ばれる [6]．

$$S_A = \frac{\gamma \times [\partial A \text{ の面積}]}{\epsilon^{d-1}} \tag{8}$$

ここで，ϵ はカットオフに対応した値であり，γ は理論に依存する定数である．

4．AdS/CFT 対応と面積則のホログラフィックな対応

$d+2$ 次元の AdS 時空を半径 L として Poincaré 座標で表すと，計量は $ds^2 = L^2 \frac{dz^2 - dx_0^2 + d\vec{x}^2}{z^2}$ である．$z \to 0$ で計量は無限大となり，この極限が無限遠の境界に対応する．この時空は $SO(2, d+1)$ の対称性をもつが，対応する境界上の $d+1$ 次元理論の Lorentz 対称性は $SO(1,d)$ であり，これらは一致しない．しかし理論が共形場理論の場合，共形対称性に拡張され対称性は $SO(2, d+1)$ となる．したがって，$d+2$ 次元の AdS 時空にホログラフィックに対応する 1 次元低い理論は $d+1$ 次元の共形場理論となる [3]．

境界の CFT 上の空間的なある領域 A における EE を AdS 時空側で表す方法として，以下の式が知られている．

$$S_A = \frac{\gamma_A \text{の面積}}{4G_N} \tag{9}$$

これはホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーの公式と呼ばれ，2006 年に Ryu と Takayanagi により提唱された [4]．ここで G_N は $d+2$ 次元の重力定数である．γ_A は，CFT 上の領域 A と同じ境界を持ち AdS 時空内に張られる空間的な極小曲面である．

式 (9) を用いて，場の理論における EE の面積則のホログラフィックな対応を見ることができる．上述したように，AdS 時空の境界 $z=0$ は無限遠方にあるため，境界上の ∂A に端を持つ曲面 γ_A の面積は無限大となる．このことは Poincaré 座標では $z=0$ で計量が発散していることに対応する．この無限大は上述したような場の理論側の紫外発散に対応し，場の理論側で導入したカットオフ ϵ を用いて z 座標を $z>\epsilon$ のように制限することで正則化する．面積を計算すると，$z=\epsilon$ 付近から最も大きな寄与があるので，γ_A の面積は

$$\gamma_A \text{の面積} \approx L^d \int_\epsilon \frac{dz}{z^d} \times [\partial A \text{ の面積}] \tag{10}$$

である．したがって S_A は

$$S_A \approx \frac{L^d \times [\partial A \text{ の面積}]}{4(d-1)G_N \epsilon^{d-1}} \tag{11}$$

となり，面積則を導出することができる．

5．EE と de Sitter 時空内の Klein-Gordon 方程式

$d+1$ 次元 CFT における時間一定面内の領域 A を考え，EE は同様に式 (4) で表されるとする．このとき，領域 A に対する密度行列 ρ_A を

$$\rho_A = \frac{e^{-H_A}}{\mathrm{Tr}_A e^{-H_A}} \tag{12}$$

と表し，ハミルトニアン H_A を定義する．領域 A を中心が原点にある d 次元のボールとして考えると H_A は

$$H_A = 2\pi \int_{|\vec{x}|<R} d^d x \ \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{2R} T_{tt}(\vec{x}) \tag{13}$$

となる [7]．ここで，$T_{tt}(\vec{x})$ はエネルギー密度，R はボールの半径である．基底状態から僅かに励起した状態を考えた場合，EE の基底状態との差 δS_A はエネルギー期待値 $\langle H_A \rangle = \mathrm{Tr}_A[\rho_A H_A]$ を用いて $\delta S_A = \delta \langle H_A \rangle$ と表される [8]．したがって，

$$\delta S_A = 2\pi \int_{|\vec{x}|<R} d^d x \ \frac{R^2 - |\vec{x}|^2}{2R} \langle T_{tt}(\vec{x}) \rangle \tag{14}$$

となる．ここで，CFT での半径 R を座標として導入した $d+1$ 次元 de Sitter 時空 $ds^2 = L^2 \frac{-dR^2 + d\vec{x}^2}{R^2}$ を考えると，この δS_A はこの時空での Klein-Gordon 方程式を満たしており，EE のホログラフィックな対応となっている [9]．

$$(\nabla^a \nabla_a - m^2)\delta S_A = 0 \tag{15}$$

質量は $m^2 L^2 = -(d+1)$ で与えられる．

6．まとめと今後の課題

ここでは場の理論における EE の面積則がホログラフィックに対応していることを確認し，AdS/CFT 対応を用いた HEE の正当性が示せる例を紹介した．この HEE は強結合量子系や有限温度系への応用が期待ため，そのような HEE の応用や上述した新しいホログラフィックな対応への理解を深めることが今後の課題である．

参考文献

[1] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **61**, 455 (1973).

[2] L. Susskind, J. Math. Phys. **36**, 6377 (1995).

[3] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)].

[4] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006); JHEP **0608**, 045 (2006).

[5] 高柳 匡, サイエンス社, SGC ライブラリ 10 (2014).

[6] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee and R. D. Sorkin, Phys. Rev. D **34**, 373 (1986); M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. **71**, 666 (1993).

[7] H. Casini, M. Huerta and R. C. Myers, JHEP **1105**, 036 (2011).

[8] D. D. Blanco, H. Casini, L. Y. Hung and R. C. Myers, JHEP **1308**, 060 (2013).

[9] J. de Boer, M. P. Heller, R. C. Myers and Y. Neiman, arXiv:1509.00113 (2015).