# Feuille 1 : Calculs algébriques

**Exercice 1.**

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{6x+5} > 1$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $|2 - x| \leq 3 - x$.
4. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{3x+2}$.

**Exercice 2.**

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. À l'aide de la question 1., montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)(n!)^2}$.

**Exercice 3.** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

**Exercice 4.**

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle(1 - x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$.

   b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
2. Montrer à l'aide de la question 1.a) que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer à l'aide du binôme de Newton les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

**Exercice 6.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

**Exercice 7.**

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

**Exercice 8.**

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0, n]\!]$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$.

2. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$$

**Exercice 9.** Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$.

1. Trouver des réels $a, b, c$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - 2x + 4 \geq 3$.
3. En déduire les solutions réelles de l'équation $P(x) > |x+1|$.

**Exercice 10.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$.

**Exercice 11.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1}$. En déduire que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
3. Montrer que $\binom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n}}{2n+1}$. (*Indication : on pourra commencer en majorant* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$).

**Exercice 12.** Soient $x, y$ deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$, $g = \sqrt{xy}$ et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$. On appelle $m, g$, et $h$ respectivement la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique, et la moyenne harmonique de $x$ et de $y$. L'objectif de cet exercice est de montrer que

$$x \leq h \leq g \leq m \leq y$$

1. Montrer les ingalités
   a) $x \leq m \leq y$.
   b) $x \leq g \leq y$.
   c) $x \leq h \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$. (*Indication : Montrer que* $m - g = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$).
3. Utiliser la question 2. pour montrer que $h \leq g$. (*Indication : Remarquer que* $\frac{1}{h}$ *est la moyenne arithmétique de* $\frac{1}{x}$ *et de* $\frac{1}{y}$).
4. Conclure.

# Feuille 1 : Calculs algébriques – Correction

**Exercice 1.**

1. $-3x+4 \geq x-3 \Leftrightarrow 4+3 \geq x+3x \Leftrightarrow \dfrac{7}{4} \geq x \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \dfrac{7}{4}\right]$.
2. $\dfrac{-2}{6x+5} > 1$ et $x \neq -\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \dfrac{6x+7}{6x+5} < 0$ et $x \neq -\dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{5}{6}; -\dfrac{7}{6}\right[$.
3. $|2-x| \leq 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \leq 3-x \\ x \leq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-2 \leq 3-x \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+x \leq 3+2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2$ ou $2 \leq x \leq \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \dfrac{5}{2}\right]$.
4. $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{3x+2}$ et $x \notin \left\{2; -\dfrac{2}{3}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{3x+2} < 0$ et $x \notin \left\{2; -\dfrac{2}{3}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{(x-2)(3x+2)} < 0$ et $x \notin \left\{2; -\dfrac{2}{3}\right\}$.

   On dresse un tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $-\dfrac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $(x-2)(3x+2)$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{x+6}{(x-2)(3x+2)}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | \|\| | $+$ | |

   L'ensemble cherché est $]+\infty; -6[ \cup \left]-\dfrac{2}{3}; 2\right[$.

**Exercice 2.**

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{k+1-k}{k(k+1)} = \dfrac{k+1}{k(k+1)} - \dfrac{k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

   On obtient $a = 1$ et $b = -1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\prod_{k=2}^{n+1} k} = \frac{1}{n!} \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{n} k\right)(n+1)} = \frac{1}{(n!)^2(n+1)}.$$

**Exercice 3.** Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 \geq 0$, soit $x^2+y^2+2xy \geq 0$, soit $-xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

De même, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x-y)^2 \geq 0$, soit $x^2+y^2-2xy \geq 0$, soit $xy \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Si $x$ et $y$ sont de même signe, $|xy| = xy$ et donc $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Sinon, $|xy| = -xy$ et donc $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.

**Exercice 4.**

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = 1 - x^{n+1}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{sinon.} \end{cases}$

2. D'après 1.a), pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, $|1-x^4| = 1-x^4 = (1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{3} x^k = (1-x)(1+x+x^2+x^3)$.
   L'étude de la fonction $x \mapsto 1+x+x^2+x^3$ montre que pour tout $x \in [-1;1]$, $0 \leq 1+x+x^2+x^3 \leq 4$.
   Donc, pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, $|1-x^4| = 1-x^4 \leq 4(1-x) \leq 4|1-x|$.
   Enfin, pour tout $x=0$, $|1-x^4| = 0$ et $4|1-x| = 4$, donc $|1-x^4| \leq 4|1-x|$.

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0.$$

**Exercice 6.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n\sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1)$, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$.

**Exercice 7.**

1. Le trinôme $x^2-4x-2$ a pour discriminant $\Delta = 8$ et donc pour racines $x_1 = 2-2\sqrt{2}$ et $x_2 = 2+\sqrt{2}$.
   Comme $a = 1 > 0$, $x^2-4x-2 \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty; 2-\sqrt{2}\right] \cup [2+\sqrt{2};+\infty[$.
2. $(x+2)^2 < -x \Leftrightarrow x^2+5x+4 < 0$.
   Le trinôme $x^2+5x+4$ a pour discriminant $\Delta = 9$ et donc pour racines $x_1 = -4$ et $x_2 = -1$.
   Comme $a = 1 > 0$, $x^2+5x+4 < 0$ pour $x \in ]-4;-1[$.
3. $x^3-6x \geq x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-x-6) \geq 0$.
   Le trinôme $x^2-x-6$ a pour discriminant $\Delta = 25$ et donc pour racines $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$.
   Comme $a = 1 > 0$, on obtient le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2-x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^3-x^2-6x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   L'ensemble des réels $x$ tels que $x^3-6x \geq x^2$ est : $[-2;0] \cup [3;+\infty[$.

**Exercice 8.**

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [\![0,n]\!]$,
   $$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} =$$
   $n\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = n2^{n-1}$ d'après l'exercice 5.

2. Pour tout $(p,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k} &= \binom{p}{0}+\binom{p+1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{p+k}{k}\\
&= \underbrace{\binom{p+1}{0}+\binom{p+1}{1}}+\sum_{k=2}^{n}\binom{p+k}{k}\\
&= \underbrace{\binom{p+2}{1}\qquad+\binom{p+2}{2}}+\sum_{k=3}^{n}\binom{p+k}{k}\\
&= \underbrace{\binom{p+3}{2}\qquad+\binom{p+3}{3}}+\sum_{k=4}^{n}\binom{p+k}{k}\\
&= \dots\\
&= \binom{p+n+1}{n}
\end{aligned}$$

**Exercice 9.**

1. On cherche des réels $a,b,c$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$.
   Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c=x^3-x^2+2x+4$, ce qui n'est possible que si : $\begin{cases}a=1\\a+b=-1\\b+c=2\\c=4\end{cases}$ soit $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=4\end{cases}$.
2. $x^2-2x+4\geq 3 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$, ce qui est vrai pour tout $x$ réel.
3. D'après 2., pour tout $x$ réel $P(x)\geq 3(x+1)$.
   En particulier, pour tout réel $x>-1$, $P(x)>(x+1)$, soit $P(x)>|x+1|$.
   D'autre part, pour tout réel $x\leq -1$, $P(x)\leq 0$ et $|x+1|\geq 0$.
   Donc l'inéquation $P(x)>|x+1|$ a pour solutions $]-1;+\infty[$.

**Exercice 10.** Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$.
   Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)$
   soit, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3-\sum_{k=0}^{n}k^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$
   soit, $\displaystyle(n+1)^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\right)=\frac{(n+1)\left(2(n+1)^2-3n-2\right)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$.
   Donc, $\displaystyle(n+1)^4=4\sum_{k=0}^{n}k^3+6\sum_{k=0}^{n}k^2+4\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1$.
   soit,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k^3 &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4-6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right)\\
&= \frac{(n+1)(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1)}{4}\\
&= \frac{(n+1)(n^3+n^2)}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} ij\right) &= \sum_{i=0}^{n}\left(i\sum_{j=0}^{i} j\right) = \sum_{i=0}^{n} i\,\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(i^3+i^2)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24}\\
&= \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}
\end{aligned}$$

**<u>Exercice 11.</u>** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$.
2. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\binom{2n}{k+1} = \dfrac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} = \dfrac{2n-k}{k+1}\,\dfrac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \dfrac{2n-k}{k+1}\binom{2n}{k}$.

   Or, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $k \leq n-1$ et $2n-k \geq n+1$, soit $2n-k > k+1$ et $\binom{2n}{k+1} > \binom{2n}{k}$.

   On déduit de cette inégalité, que pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{k+1} < \binom{2n}{k+2} < \cdots < \binom{2n}{n}$.

   De plus, d'après 1., pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\binom{2n}{2n-k} = \binom{2n}{k} < \binom{2n}{n}$.

   Comme pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $2n-k \in [\![n+1,2n]\!]$, pour tout $k \in [\![n+1,2n]\!]$, $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{n}$.

   Finalement, pour tout $k \in [\![0,2n]\!]$, $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$.
3. D'après 2., $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n}$.

   Or, d'une part, d'après l'exercice 5., $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = 2^{2n}$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{2n}1 = \binom{2n}{n}(2n+1)$.

   Donc, $2^{2n} \leq (2n+1)\binom{2n}{n}$ et $\binom{2n}{n} \geq \dfrac{2^{2n}}{2n+1}$.

**<u>Exercice 12.</u>** Soient $x, y$ deux réels tels que $0 < x \leq y$.

1. a) $x = \dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2} \leq \dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2} = y$, soit $x \leq m \leq y$.

   b) Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, on a $0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.
   Donc, $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 \leq \sqrt{xy} \leq \left(\sqrt{x}\right)^2 = y$,soit $x \leq g \leq y$.

   c) $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$.
   On a $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$, soit d'après 1.a), $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{h} \leq \dfrac{1}{x}$.
   Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on en déduit que $x \leq h \leq y$.
2. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$.
   On en déduit que $m - g \geq 0$, $g \leq m$.
3. Comme $\dfrac{1}{h}$ est la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, d'après mla question 2., $\dfrac{1}{\sqrt{xy}} \leq \dfrac{1}{h}$, soit $0 < \dfrac{1}{g} \leq \dfrac{1}{h}$.
   Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on en déduit que $g \geq h$.
4. D'après 1.a) et c) et 2. et 3., on obtient $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.