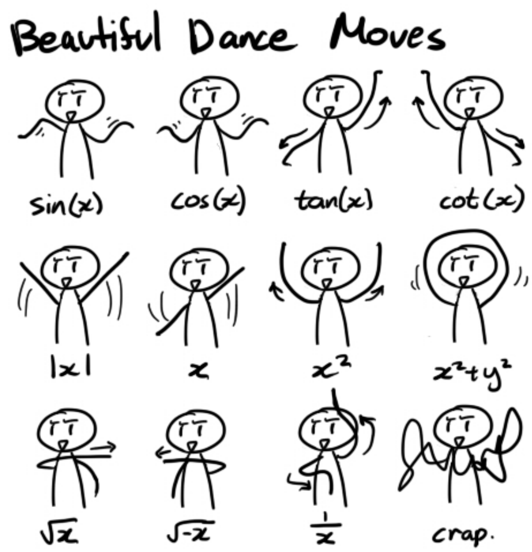
Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Fondamentaux des mathématiques 1



Université Claude Bernard Lyon 1

Chapitre 1

Calculs algébriques

J'ai profondément regretté de ne pas avoir été assez loin pour au moins comprendre un petit peu des grands principes fondamentaux des mathématiques : car les hommes qui les ont acquis semblent avoir un sens supplémentaire – un sixième sens.

Charles Darwin

(a) Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), mathématicien allemand fut un des fondateurs de l'axiomatisation de l'arithmétique. On lui doit notamment une définition axiomatique de l'ensemble des nombres entiers ainsi qu'une construction rigoureuse des nombres réels à partir des nombres rationnels.

(b) Giuseppe Peano (1858 - 1932), mathématicien italien un des fondateurs de l'approche formaliste des mathématiques, il développa, parallèlement à l'allemand Richard Dedekind, une axiomatisation de l'arithmétique en 1889. On lui doit notamment la notation $\mathbb{Q}$.

(c) Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918), mathématicien allemand, créateur de la théorie des ensembles. Il montra entre autres choses t que les nombres réels sont « plus nombreux » que les entiers naturels, c'est à lui que l'on doit la notation $\mathbb{R}$.

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des nombres entiers, rationnels et réels.

Sommaire

1.1 Un peu d'histoire

Les nombres apparaissent très tôt dans l'histoire de l'humanité. Pour mémoire, le calcul a été inventé avant l'écriture (il y a $20\ 000$ ans mais certains disent 35000 et d'autres plus). Il s'agissait de compter avec des cailloux (calculus en latin) afin d'évaluer des quantités entières.
Ces entiers naturels permettaient de résoudre des équations du type $x + 3 = 5$ par exemple. Cet ensemble sera par la suite noté $\mathbb{N}$ en 1888 par Richard Dedekind (pour “nummer” qui signifie numéro en allemand).
On notera ainsi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Notons au passage, que c'est René Descarte qui suggéra par convention (que l'on garde encore aujourd'hui) de noter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet, et de garder les première lettres pour les paramètres connus. Il s'avéra très vite que les entiers ne pouvaient pas résoudre certaines équations comme $x + 5 = 3$. Il fallut alors introduire un ensemble agrandi du précédent, que l'on appellera entiers relatifs (par rapport à leurs positions à 0). Dedekind notera l'ensemble $\mathbb{K}$, mais on retiendra plutôt la notation $\mathbb{Z}$ (pour zahlen qui signifie nombre en allemand) de Nicolas Bourbaki.
On notera ainsi

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Il fallut ensuite résoudre des équations du type $x \times 3 = 5$. On ne pouvait pas trouver toutes les solutions dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. Un autre ensemble fut alors introduit. L'ensemble des rationnels permettait de contenir l'ensemble des solutions de ce type d'équation, et il fut noté $\mathbb{Q}$ par Giuseppe Peano en 1895 (initiale du mot "quoziente" (quotient) en italien).
On notera ainsi

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers relatifs et } b \neq 0\}.$$

Il ne faut cependant pas confondre les rationnels $\mathbb{Q}$ avec les décimaux $\mathbb{D}$. Les nombres décimaux sont de la forme $a.10^n$ où a et n sont des entiers relatifs. Un nombre décimal a donc un nombre fini de chiffres après la virgule : par exemple $1,23$ s'écrit 123.10^{-2}. Tandis qu'un nombre rationnel sont de la forme $\frac{a}{b}$ où a est un entier relatif, et b est un entier relatif différent de zéro. C'est d'ailleurs ici que commence le première piège qu'il faudra éviter, et qui semble assez évident a priori : **on ne divise pas par 0 !**
Un nombre décimal est donc un cas particulier de nombre rationnel.

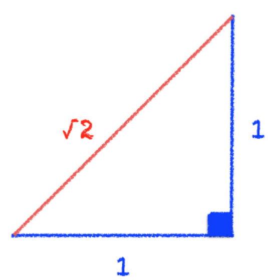


FIGURE 1.2 – Triangle rectangle de côtés 1, 1 et$\sqrt{2}$.

Vint enfin une équation assez simple à résoudre $1^2 + 1^2 = x^2$, autrement dit $x^2 = 2$. Cette équation provenant d'un problème géométrique assez simple (le théorème de Pythagore), n'est pas récente (dans une version différence évidemment). Elle date de 500 ans avant J-C environ. Une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ date à peu près de cette époque mentionnée dans les manuscrits d'Aristote. Il fallut donner un nom à l'ensemble de ces nombres qui contenait tous les précédents (entiers et rationnels) mais qui n'étaient ni entiers ni rationnels. René Descartes les appela nombres réels en 1637 et c'est Georg Cantor qui désignera l'ensemble des réels par $\mathbb{R}$.
Augustin Cauchy, puis Charles Méray suivi de Georg Cantor établiront que l'ensemble des réels est complet. Autrement dit, contrairement à l'ensemble des rationnels qui contenait encore des "trous" que l'on pouvait remplir avec des réels, l'ensemble des réels ne possède pas de trou. On dit qu'il est complet. Cette notion sera très utile dans la suite des cours d'analyse.

Puis vinrent les nombres complexes et d'autres équations de plus en plus élaborées à résoudre. Nous en aborderons quelques unes dans ce cours (comme les équations différentielles). Pas toutes, ce serait impossible, mais celles qui nous semblent incontournables pour le premier semestre de la première année en analyse. Pour cela il faudra définir les bons outils, leur manipulation précise et rigoureuse (ce que l'on peut faire et ce que l'on ne peut pas faire). Une fois les outils en main nous avancerons progressivement de telle sorte qu'à la fin du semestre, nous

FIGURE 1.3 – Hugues Charles Robert Méray (1835 à Chalon-sur-Saône -1911), un mathématicien français, professeur à la faculté des sciences de Lyon. En 1869, il donne, le premier, une construction rigoureuse des nombres réels.

aurons effleuré la puissance d'applications de ce que l'on aura appris.

Nous pourrons nous trouver de temps en temps devant des concepts qui pourraient aller à l'encontre de nos intuitions. Comme par exemple :

1. Est-ce que le nombre "juste avant" 1 que l'on note $x = 0.999999999...$ est égal à un ?
2. Est-ce que l'ensemble des entiers est plus grand que celui des entiers relatifs, lui même contenu dans les rationnels ? Et que dire de l'ensemble des réels ?

Les réponses à ces questions ne doivent pas être données si rapidement...nous verrons en cours pourquoi.

1.2 Sommes

Nous allons dans ce chapitre poser les bases de certaines calculs, de certaines notations et surtout de certains résultats concernant *les sommes et les produits* que l'on considèrera avec le temps comme classiques. Il faudra prendre le temps de tout lire, prendre le temps de comprendre et surtout faire un maximum d'exercices pour s'approprier les résultats.
Nous débuterons par le plus simple : **les sommes**.

1.2.1 Le symbole $\sum$

Commençons par un exemple pour nous fixer les idées.

Exemple *L'écriture*

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k,$$

se lit "somme pour k allant de 0 à 5 de 2 à la puissance k." Et c'est l'écriture abrégée de

$$\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

*Le symbole $\sum$ se lit sigma. C'est la majuscule de la lettre grecque S, pour...***S***omme. La lettre k est ce qu'on appelle l'indice de sommation. On remplace cette lettre par toutes les valeurs* *entières comprises entre 0 et 5 ici. Par convention, la première valeur de k est écrite en dessous de $\sum$ et la dernière valeur au-dessus. Par conséquent, la valeur du bas sera toujours inférieure ou égale à celle du haut.*

Nous voyons bien dans cet exemple l'utilité de la notation abrégée. En effet, si jamais k allait de 0 à 100 par exemple, écrire tous les termes de la somme serait assez fastidieux. Et donc, quand nous pourrons simplifier les écritures, nous le ferons avec plaisir. Par contre, au début, nous pourrons l'écrire sous forme "développée", c'est à dire, sans l'abréger, mais en mettant trois petits points entre les premiers et les derniers termes.
Pourquoi ? Tout simplement parce que lorsque nous n'avons pas l'habitude de rédiger en abréger, le fait de passer par la version développée permet d'avoir des idées plus claires.
Par exemple, si on suppose que k va de 0 jusqu'à un entier n dans l'exemple précédent, nous écrirons

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n.$$

Nous ne savons pas pour l'instant combien ça vaut. Mais nous savons déjà l'écrire. Maintenant que nous avons vu un exemple, nous pouvons donner une première définition.

Notation 1 (Symbole $\sum$)

Soient m et n deux entier naturels et a_k des nombres réels quelconques avec $k = m, \ldots, n$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n, & \text{si } \ m \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre k est appelé **indice de sommation**.

Plusieurs remarques sont à faire ici.

Remarques 1.1

1. ***Remarque*** *La notation $\sum_{k=m}^{n} a_k$ s'écrit également $\sum_{m \leq k \leq n} a_k$*
2. *Comme nous le voyons dans la notation ci-dessus, k n'est pas obligé de commencer à 0. Il peut commencer où il veut, à partir de n'importe quelle valeur entière m. Nous verrons plus tard que l'on pourra donner des valeurs négatives. Mais nous nous contenterons pour l'instant des valeurs positives.*
3. *La variable k est "muette". Autrement dit, on peut la remplacer par n'importe quelle lettre SAUF les variables de départ et celle d'arrivée si elles sont données par des lettres ! Par exemple on n'écrit pas*

$$\sum_{k=1}^{k} k^2, \text{N'A PAS DE SENS!}$$

De même, le résultat d'une somme ne peut pas dépendre de l'indice de sommation, c'est une variable muette !
Par contre, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2, \quad \text{etc.}$$

Un exemple pour s'entraîner :

Exemple *Que vaut*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} ?$$

Et bien, remplaçons par la forme développée pour voir (celle avec des petits points) :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} = (2^0 + ... + 2^n) + (2^{n+1} + ... + 2^{2n}).$$

Cette formule se simplifie grandement, nous pouvons donc écrire

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{h=1}^{n} 2^{n+h} = \sum_{k=0}^{2n} 2^k.$$

1.2.2 Attention à l'indice de sommation

Il se peut que l'indice de sommation n'apparaisse pas dans la somme. Que se passe-t-il alors ? Voyons ça sur un exemple :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17.$$

C'est une somme du même terme. Combien de fois fait-on cette somme ?
-Si n était égal à 1 on la ferait pour $k = 0$ et $k = 1$, ce qui ferait $17 + 17 = 17 \times 2$.
-Si n était égal à 2, on la ferait pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, ce qui ferait $17 + 17 + 17 = 17 \times 3$.
-Si on prend n quelconque, on voit assez facilement que cela ferait $17 + ... + 17$ non pas n fois mais $n + 1$ fois ! Il faut compter le 0 du premier $k = 0$. Et donc le résultat serait :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17 = 17.(n + 1)$$

En fait, on factorise l'élément de la somme et on le multiplie par le nombre de termes :

$$\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 + 17 + ... + 17 = 17(1 + 1 + ... + 1) = 17.\sum_{k=0}^{n} 1 = 17.(n + 1)$$

Attention : si l'on part de $k = 0$ et que l'on va jusqu'à $k = n$ dans une somme, il y aura $n + 1$ termes, mais si l'on part de $k = 1$ et que l'on va jusqu'à $k = n$, il y aura n termes dans la somme.
Il faut toujours faire attention à ça !
De même un dernier exemple un peu plus subtil mais qui pourra vous faire rendre compte de la différence entre l'indice de sommation et les bornes de la somme.

Exemple *Que vaut*

$$\sum_{k=1}^{n} 2^n ?$$

Ca a l'air assez similaire à ce que l'on vient de faire. La seule différence réside dans l'exposant de 2 qui est n et non pas k. Autrement dit, l'indice de sommation n'apparaît pas dans l'élément que l'on somme ! Et bien on se retrouve comme dans l'exemple précédent, on factorise par 2^n et on multiplie ce nombre par le nombre de termes de la somme (remarquons que l'on part de $k = 1$ ici) :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^n = 2^n \sum_{k=1}^{n} 1 = 2^n.n.$$

En fait, comme dans la notation 1, nous pouvons commencer par ce que l'on veut ($k = m$ dans notre cas) et terminer par ce qu'on veut $k = n$ ici). Et donc le nombre de termes de cette somme entre m et n (avec $n \geq m$) serait $n - m + 1$. Ne pas oublier le $+1$! Il suffit de le vérifier si $n = m + 1$, $n = m + 2$, etc.

1.2.3 Changement d'indice

Nous pouvons également changer d'indice, ça arrive quelques fois quand nous souhaitons simplifier une formule. Ainsi, par exemple, si l'on considère des réels a_j, $j = 1, ...n$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

et

$$\sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ce sont les mêmes sommes, les indices ont changé et les bornes de la somme aussi.
De façon générale, nous avons, pour m, n, p entiers naturels, $n \geq m$ et a_j réels $j = m, ..., n + p$

$$\sum_{k=m}^{n} a_{p+k} = \sum_{l=m+p}^{n+p} a_l.$$

1.2.4 Sommes doubles

Il arrive quelques fois que nous ayons besoin de faire la somme sur des réels possédant deux indices. Comment notons nous cela ? Et surtout comment est-ce que nous pouvons la calculer.
Si l'on considère n et m deux entiers naturels et $a_{i,j}$ des réels avec $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$, alors la somme de réels $x_{i,j}$ s'écrit

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}} a_{i,j}.$$

Si $n=m$, nous notons plutôt

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}.$$

Nous pouvons remarquer les résultats suivants, pour tous $a_{i,j}$ réels, avec $i,j=1,...,n$

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

si i et j sont dans un ordre précis large (notez le $\leq$ entre i et j)

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

et enfin, si i et j sont dans un ordre précis strict (notez le $<$ entre i et j)

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

1.2.5 Quelques règles de calcul

Rappels

Si l'on se rappelle des règles de calcul suivant :

Propriété 1 (Règles de calcul)

Soient a, b et c trois nombres réels. On pourra écrire a, b, $c\in\mathbb{R}$. On notera l'addition $+$ et la multiplication $\times$ ou rien du tout ($a\times b$ ou ab quand il n'y a pas d'ambiguïté). On a alors les règles de calcul suivantes :

1. **Commutativité** : quels que soient les nombres réels a et b,

$$a+b=b+a \text{ et } ab=ba,$$

2. **Associativité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,

$$(a+b)+c=a+(b+c) \text{ et } a(bc)=(ab)c,$$

3. **Distributivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,

$$(a+b)c=ac+bc,$$

4. **Éléments neutres pour $+$ et pour $\times$** : quel que soit le nombre réel a,

$$a+0=a \text{ et } a\times 1=a.$$

Somme de $\sum$

Nous pouvons énoncer les règles de calculs pour les $\sum$.

Propriété 2 (Somme de $\sum$)

Soient m et n deux entier tels que $n \geq m$, soient a_k et b_k pour $k = m, ..., n$ des réels quelconques alors

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$

et pour tout réel λ ,

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

La deuxième propriété revient à dire que l'on peut toujours factoriser (ce qui revient à "sortir") tout ce qui ne dépend pas de de l'indice de sommation.
On peut alors généraliser, en combinant ces deux propriétés par l'égalité suivante :
pour tous réels λ et μ

$$\sum_{k=m}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Produit et $\sum$

Comment se passe la multiplication ?

Attention : en règle général la somme d'un produit n'est pas égal au produit de la somme !
Autrement dit, en général si n est un entier naturel et a_k, b_k, $k = 0, ..., n$ des nombres réels quelconques (notons que l'on prend k qui commence à 0 (par habitude), mais on pourrait le faire commencer pour n'importe quel m entier inférieur ou égal à n),

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Donnons un exemple pour montrer que ce n'est pas vrai tout le temps :
prenons $n \geq 1$ et $a_k = b_k = 1$ pour tout k. On aura alors d'un côté

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} 1.1 = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

Et de l'autre

$$\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Et pour tout entier $n \geq 1$, $n+1 \neq (n+1)^2$.
Bon, nous savons ce qui ne marche pas. Est-ce que l'on pourrait quand même trouver une formule qui pourrait marcher ?
Faisons un calcul simple et regardons ce que vaudrait

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Pour ça, nous allons développer un peu :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = (a_1 + ... + a_n)(b_1 + ... + b_n).$$

Nous pouvons alors utiliser la distributivité et nous obtenons

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = a_1(b_1 + ... + b_n) + ... + a_n(b_1 + ... + b_n).$$

En d'autres termes, nous faisons le produits de chaque a_k avec la somme des b_k et nous sommons le tout...maintenant il faut l'écrire mais comme on ne fait pas les indices changent, il faut leur donner un nom différent pour chaque somme (c'est la partie la plus délicate, il faut donc faire attention !) On l'écrit de la façon suivante

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = a_1\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) + ... + a_n\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

Mais comme le dernier facteur $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ est indépendant de l'indice j on peut rentrer les a_j dans la somme sur les k et on obtient finalement

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j b_k.$$

De façon plus général, nous avons la propriété suivante

Propriété 3 (Produits et $\sum$)

Soient n et m deux entiers naturel et a_j, b_k, $j = 1, ..., n$ et $k = 1, ..., m$ des nombres réels quelconques, alors

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k\right) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_j b_k.$$

C'est ce que nous aurons de mieux comme résultat entre $\sum$ et produit.

1.2.6 Sommes télescopiques

Le télescopage a un peu à voir avec le télescope (qui par étymologie signifie “regarder loin”), mais pas sa fonction...plutôt l'instrument d'époque. En effet, le télescope pouvait à l'instar d'une longue vue être composé de pièces s'emboîtant les unes dans les autres. C'est de cette image que l'on a tiré le verbe télescoper qui nous intéresse ici.
Il se peut en effet, que dans une somme donnée, certains termes puissent se rencontrer et s'annuler (ou disparaître comme les pièces du télescope). On dit alors que l'on a affaire à une somme télescopique (quand on prend cette somme dans l'autre sens, on peut d'ailleurs l'allonger comme la longue vue). D'où la propriété suivante

Propriété 4 (Sommes téléscopiques)

Soient n et m deux entiers naturel avec $m \leq n$ et a_k, $k = m, ..., n$ des nombres réels quelconques, alors

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m.$$

Preuve *la preuve est assez simple, il suffit de développer la somme :*

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_{m+1} - a_m) + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+3} - a_{m+2}) + ... + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

Nous voyons que des termes s'annulent entre eux (on dit qu'ils se télescopent)

$$\cancel{a_{m+1}} - a_m + \cancel{a_{m+2}} - \cancel{a_{m+3}} - \cancel{a_{m+2}} + ... + \cancel{a_n} - \cancel{a_{n-1}} + a_{n+1} - \cancel{a_n} = a_{n+1} - a_m.$$

Quelle est l'utilité de cette propriété ? Nous allons le voir tout de suite dans l'exemple suivant.

Exemple *Considérons la somme s_n, qui est un nombre réel dépendant de l'entier naturel n définie par*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Pour une raison quelconque, nous souhaitons évaluer s_{100}. On sent que ça risque d'être long... Mais pourquoi pas écrire cette somme par une formule dépendant de n en général et ensuite remplacer n par 100. Comment allons-nous faire ?
La technique la plus simple va consister à remarquer (faire le calcul, c'est ce qu'on appelle une décomposition en éléments simples) que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Pas de panique, la technique de décomposition s'apprend. Nous ne le verrons au prochain semestre. Mais tant que vous ne la connaitrez pas, on vous guidera pour la trouver.
Et donc, nous obtenons,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}).$$

Parfait ! Nous reconnaissons une somme télescopique. En le développant, nous voyons que tous les termes vont s'annuler, sauf le premier $\frac{1}{1} = 1$ *et le dernier* $\frac{1}{n+1}$*. Il nous reste donc*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Et donc trouver par exemple s_{100} *est un jeu d'enfant maintenant, nous savons tout de suite que ça fait* $100/101$.

1.2.7 Quelques résultats classiques à connaître

La toute première, la plus connue est la suivante

Propriété 5 (Sommes des entiers de 1 à n)

Pour tout n entier naturel, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C'est ce que nous appellerons la somme d'une suite arithmétique, que nous verrons...avec les suites.

Preuve *la preuve est assez simple, nous la verrons en cours. Mais pour notre culture, il y a une légende derrière cette preuve. La résolution de ce problème serait due à Carl Friedrich Gauss (1777-1855, mathématicien allemand). Âgé de neuf ans, il aurait surpris son maître d'école Büttner qui avait donné comme calcul à sa classe la somme des entiers de 1 à 100. Pensant être tranquille pendant un moment, Gauss résolu le problème quasiment instantanément. Comment ? Il additionna 1 avec 100, puis 2 avec 99, puis 3 avec 98 et ainsi de suite jusqu'à 50 avec 51. Un simple calcul montre qu'il obtint ainsi 50 fois la valeur 101, soit 5 050. Ne restait plus qu'à généraliser ce résultat à n'importe quel entier n.*
Pour la petite histoire voilà l'origine probable de cette légende due à Wolfgang Sartorius. "Le jeune Gauss venait juste d'arriver dans cette classe quand Büttner donna en exercice la sommation d'une suite arithmétique. À peine avait-il donné l'énoncé que le jeune Gauss jeta son ardoise sur la table en disant « la voici ». Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, Büttner, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps

FIGURE 1.4 – Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) mathématicien, astronome et physicien allemand. Il est surnommé “le prince des mathématiciens”, l’un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu’il devait toujours l’être, une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu’il ne pouvait y avoir d’autre réponse”.

Remarquons que si l’on commence la somme à partir de m plutôt que 1, nous avons la formule suivante

$$\sum_{k=m}^{n} k = m + (m+1) + (m+2) + ... + (k-1) + k = (n-m+1)\frac{n+m}{2}$$

Continuons avec une autre propriété classique : la somme des carrés.

Propriété 6 (Sommes des carrés de 1 à n)

Pour tout n entier naturel, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous avons également un résultat classique pour la somme des cubes

Propriété 7 (Sommes des cubes de 1 à n)

Pour tout n entier naturel, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Astuce pour se rappeler de la dernières propriété : noter que la somme des cubes $\sum_{k=1}^{n} k^3$ est égale à la somme des k, $\sum_{k=1}^{n} k$ au carré.
Parmi les sommes classiques, nous avons la somme d'une suite géométrique. Le principe est simple :
considérons un nombre a réel quelconque, et un entier naturel n non nul. Nous cherchons à calculer la somme des $n+1$ premiers termes des éléments dont le suivant est multiplié par lui-même à chaque terme. Autrement dit, nous cherchons à calculer

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n.$$

Plusieurs cas sont simples :

1. Si $a = 0$, la somme fera toujours 1 quel que soit la valeur de n.
2. Si $a = 1$, nous sommons $n+1$ fois le nombre 1. Ce qui fait exactement $n+1$.

Regardons le cas général, pour $a \in \mathbb{R}$ mais $a \neq 1$. Dans cas, nous avons la propriété suivante

Propriété 8 (Somme de $n+1$ premières puissances de a)

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tel que $a \neq 1$, et pour tout n entier naturel non nul, nous avons

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^{n-1} + a^n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Nous voyons bien que pour ce résultat, nous avons besoin d'avoir $a \neq 1$, sinon ça ne marche pas. Par contre, nous avons vu juste au dessus qu'il y a quand même une formule pour $x = 1$.
De même, nous voyons que si $n = 0$, nous aurions juste le premier terme qui est 1. Alors que la formule de la proposition donnerait 0. Donc, là aussi, il faut écarter ce cas, qui ne marche pas avec la formule générale.

1.2.8 Factorisation

Vous vous souvenez très certainement de la formule suivante, valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Vous serez sans doute amenés à factoriser $a^3 - b^3$ ou $a^4 - b^4$... Est-ce que nous pouvons avoir une formule générale ?
La réponse est oui. Dans la propriété suivante :

Propriété 9 (Factorisation)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et pour tout n entier naturel non nul, nous avons

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Nous pouvons remarquer que l'on peut trouver une formule de $a^n + b^n$ si n est impair, en remplaçant b par $-b$ dans la formule précédente.
Noter qu'il faut que n soit impaire parce qu'alors $(-b)^n = -b^n$, mais si n est pair, nous avons $(-b)^n = b^n$, et on n'a pas $a^n + b^n$.
Donc si n est impair, nous avons :

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^k a^{n-1-k}b^{n-2} + a^k + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}b^k. \end{aligned}$$

Un autre cas particulier :
si nous prenons $b = 1$ nous avons

$$a^n - 1 = a^n - 1^n = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

Et si n est impair avec $y = -1$, nous avons

$$a^n + 1 = a^n + 1^n = (a+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a^{n-1-k}.$$

1.3 Produits

Comme la somme, nous pouvons regarder ce qu'il se passe quand nous multiplions un nombre fini de termes.

1.3.1 Le symbole $\prod$

Comme nous prenions l'équivalent de la lettre S en grec pour la somme, nous utilisons l'équivalent du P en grec pour le produit, qui est $\prod$.

Notation 2 (Symbole $\prod$)

Soient m et n deux entier naturels et a_k, $k = m, \ldots, n$ des nombres réels quelconques. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m \times a_{m-1} \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n, & \text{si } \ m \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque *La notation* $\prod_{k=m}^{n} a_k$ *s'écrit également* $\prod_{m \leq k \leq n} a_k$ *et se lit "produit des* x_k *pour* k *allant de* m *à* n*.*

Factorielle

Définition 1 (Factorielle)

Soit n un entier naturel, nous notons $n!$ (qui se lit factorielle n) l'entier naturel

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \prod_{k=1}^{n} k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit :

1. $0! = 1$ par convention,
2. $n! = 0 \times 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.

De façon analogue à la somme, nous avons les propriétés sur le produit suivante

Propriété 10 (Propriétés des produits)

Soient m et n des entiers naturels, tels que $m \leq n$, nous avons

1. pour tout réel a,
$$\prod_{k=m}^{n} a = a.a.a...a = a^{n-m+1}.$$
2. pour tous réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout entier p tel que $m \leq p < n$, nous avons
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right)\left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right),$$
3. pour tous réels a_k et b_k, $k = m, ..., n$,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),$$
4. pour tous réels a_k et b_k, $k = m, ..., n$, tels que $b_k \neq 0$ pour tout k,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k/b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) / \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),$$
5. pour tous réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$\prod_{k=m}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p,$$

Attention : pour tout réels a_k, $k = m, ..., n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k \neq \lambda \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right),$$

mais

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right),$$

Comme pour la somme, nous avons une propriété de télescopage pour le produit.

Propriété 11 (Produits téléscopiques)

Soient n et m deux entiers naturel avec $m \leq n$ et a_k, $k = m, ..., n$ des nombres réels quelconques **non nuls**, alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Produits doubles

Il arrive quelques fois que nous ayons besoin de faire le produit sur des réels possédant deux indices. Comment notons nous cela ? Et surtout comment est-ce que nous pouvons la calculer. Si l'on considère n et m deux entiers naturels et $a_{i,j}$ des réels avec $i = 1, ..., n$ et $j = 1, ..., m$, alors le produit de réels $x_{i,j}$ s'écrit

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j}.$$

Si $n = m$, nous notons plutôt

$$\prod_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}.$$

Nous pouvons remarquer les résultats suivants, pour tous $a_{i,j}$ réels, avec $i, j = 1, ..., n$

$$\prod_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_{i,j},$$

si i et j sont dans un ordre précis large (notez le $\leq$ entre i et j)

$$\prod_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{j} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

et enfin, si i et j sont dans un ordre strict (notez le $<$ entre i et j)

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

1.3.2 Coefficients binomiaux

Certainement une notion que vous avez déjà vue au lycée. Quand on aborde les probabilité, ils représentent le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (où k et n sont des entiers tels que $k \leq n$). Nous allons rappeler leur définition ainsi que quelques propriétés

Définition 2 (Coefficients binomiaux)

Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$, nous notons $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ou encore C_n^k, l'entier naturel défini par

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & \text{si } k > n, \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Interprétation :
- quand on doit choisir k éléments parmi n et que l'ordre est important, nous avons n possibilités de choisir le premier, puis $n-1$ pour le second, etc. jusqu'au $n-k+1$. Ce qui nous donne

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Mais quand on se fiche de l'ordre, ça fait beaucoup moins de possibilités. Par exemple, pour le Loto, tirer les boules 15, 4 ou 33, revient au même que de tirer 33, 4 puis 15. Et donc il faut compter combien on compte les mêmes combinaisons qui comportent les mêmes chiffres. Ceci revient à compter le nombre de permutation de k chiffres (ou pour le loto, les permutations de k boules).
Et le nombre de permutations de k nombres est $k!$
Par conséquent, on divise la formule précédente par k. Ce qui nous donne

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

ce qui est exactement la formule des coefficients binomiaux.

Propriété 12 (Propriétés coefficients binomiaux)

Soient k et n deux entiers naturels avec $k \leq n$, nous avons les 3 propriétés suivantes

1. **Symétrie :** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$,
2. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n}{k} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$,
3. **Formule de Pascal :** $\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$.

Notons que la dernière propriété, la formule de Pascal, peut se traduire sous forme de tableau que l'on appelle communément **triangle de Pascal**.
Et ceci nous amène tout naturellement à la **formule du binôme** suivante.

Propriété 13 (Formule du binôme)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

En particulier, nous avons

1. $(1+a)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.$

   Attention : ne pas confondre cette formule du binôme, avec celle que nous avons plus haut qui est $a^n - b^n$ donnée dans la propriété 9 !
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n,$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^k = 0.$

1.4 Égalités et inégalités dans $\mathbb{R}$

1.4.1 Égalités

Définition 3 (Égalité)

On appelle identité, une égalité entre deux expressions qui est valable quelles que soient les valeurs des variables entrant en jeu dans ces expressions.
Les expressions situées de part et d'autre du signe "=" sont appelées les membres de l'égalité.

1.4.2 Inégalités

Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Comme pour les égalités, les expressions situées de part et d'autre du signe $\geq$, $\leq$, $>$ ou $<$ sont appelés les membres de l'inégalité.
Rappelons d'abord quelques règles de comparaison. C'est important de les exprimer ici, même si elles ont l'air simples. Elles permettront de résoudre un grand nombre de problèmes.
Il est également sage de rappeler que ces règles sont valables pour les nombres réels, mais lorsqu'il s'agira d'étudier les nombres complexes, ce sera une autre histoire. Commençons par la relation d'ordre.

Propriété 14 (Relation d'ordre)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$. On a alors les règles de comparaison suivantes :

1. **Réflexivité** : quels que soit les nombres réels a,
$$a \leq a,$$
2. **Antisymétrie** : quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \quad \text{alors} \quad a = b,$$
3. **Transitivité** : quels que soient les nombres réels a, b et c,
$$\text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \quad \text{alors} \quad a \leq c,$$
4. quels que soient les nombres réels a et b,
$$\text{on a} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a.$$

Remarque *Les règles* 1, 2 *et* 3 *de la propriété précédente expriment que* $\leq$ *est une relation d'ordre, et la propriété* 4 *que cette relation est totale.*

Remarque

1. *A partir de la relation "inférieur ou égal"* $\leq$ *définie précédemment, on peut définir sa relation symétrique "supérieur ou égal"* $\geq$ *pour tous réels* a *et* b *par :*
$$a \geq b \quad \textit{si et seulement si} \quad b \leq a.$$
On remarquera que $\geq$ *est également une relation totale.*
2. *On définit également la relation "strictement inférieur" pour tous réels* a *et* b *par :*
$$a < b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \leq b \textit{ et } a \neq b,$$
et la relation "strictement supérieur" pour tous réels a *et* b *par :*
$$a > b \quad \textit{si et seulement si} \quad a \geq b \textit{ et } a \neq b,$$
3. *D'un point de vue de logique, la négation de* $a \leq b$ *est* $a > b$*.*

Attention : ne pas confondre les inégalités larges et strictes.
En effet, si $a < b$ alors $a \geq b$ mais la réciproque est fausse ! On ne passera donc jamais d'une inégalité large vers une inégalité stricte sans une bonne justification.
On aborde ensuite les règles dites de compatibilité que la plupart d'entre vous connaissez depuis le collège.

Propriété 15 (Règles de compatibilité)

Soient a, b, c et $d \in \mathbb{R}$. On a alors les **règles de compatibilité** suivantes :

1. si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$,
2. si $a \leq b$ et $0 \leq c$ alors $ac \leq bc$.

Remarque

La règle 2 de la propriété précédente peut également s'écrire avec la relation "stricte", en utilisant le résultat suivant :

$$\text{si} \quad ab = 0 \quad \text{alors} \quad a = 0 \text{ ou } b = 0 \text{ (ou les deux).}$$

On a alors la règle suivante :

$$\text{si } a < b \text{ et } 0 < c \quad \text{alors} \quad ac < bc.$$

Remarque

De la propriété précédente on déduit

1. *si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$,*
2. *si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.*

Définition 4 (Opposé et inverse)

1. Deux nombres réels a et b sont **opposés** si $a + b = 0$.
2. Deux nombres réels a et b non nuls sont dits **inverses** l'un de l'autre si $ab = 1$.

Propriété 16 (Règles de l'opposé et de l'inverse)

1. Soit a un réel quelconque alors il existe un unique réel b tel que $a + b = 0$.
   On note $b = -a$.
2. Soit a un réel **non nul**, il existe un unique réel **non nul** c tel que $ac = 1$.
   On note $c = \dfrac{1}{a}$ ou encore a^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, alors
$$a \leq b \text{ est équivalent à } -a \geq -b,$$
4. Soient a et b deux réels non nuls et de même signe, alors
$$a \leq b \text{ est équivalent à } \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Attention : on ne soustrait pas des inégalités membre à membre ! c'est à dire que pour a, b, c, d réels

$$\text{si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ on n'a pas } a - c \leq b - d\,!$$

Il faut d'abord passer par l'opposé pour la deuxième inégalité, puis additionner membre à membre. De même, on ne divise pas les inégalités membres à membres, c'est à dire que pour tous a, b, c et d réels, avec c et d non nuls,

$$\text{si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ on n'a pas } \frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}\,!$$

Il faut d'abord passer par l'inverse dans la deuxième inégalité puis multiplier (ça ne changera pas l'ordre si le tous les membres sont positifs...sinon il faut faire attention).

Remarque

1. *L'opposé de a noté $-a$ n'est pas nécessairement négatif! L'opposé de $a = -5$ par exemple est $-a = 5$! C'est une erreur que l'on rencontre souvent.*
2. *On rappelle encore une fois ici que l'**on ne peut pas diviser par 0 !** Ainsi, lorsque l'on écrira un dénominateur, **il faudra toujours s'assurer que ce dernier est non nul**.*
3. *Toutes les propriétés et règles précédentes nous permettent de dire que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un corps commutatif muni d'une relation d'ordre totale (comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels). On représente cet ensemble $\mathbb{R}$ par une droite en général, et comme on l'a spécifié dans le préambule, cette droite ne possède pas de trou (on dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ est complet) contrairement à la représentation des l'ensemble $\mathbb{Q}$.*

Méthode : pour déterminer le signe d'une expression, il vaut mieux essayer de factoriser l'expression quand c'st possible. Il est en effet toujours plus facile de déterminer le signe d'un produit (par tableau de signes) que le signe d'une somme.

1.4.3 Valeur absolue

Rappelons ici quelques propriétés des valeurs absolues que vous êtes censés maîtriser depuis le lycée. Commençons par en donner la définition qui est due à François Viète en 1591.

FIGURE 1.5 – François Viète (1540-1603), mathématicien français, il est le premier à noter les paramètres d'une équation par des symboles et se trouve donc le fondateur de l'algèbre nouvelle ou "logistique spécieuse".

Définition 5 (Valeur absolue)

Soit a un nombre réel. La **valeur absolue** de a est le nombre réel défini par :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0, \\ -a & \text{si } a < 0. \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Propriété 17 (Valeur absolue, rappels)

Pour tous nombres réels a et b, nous avons :

1. $|a| \geq 0$, $-|a| \leq a \leq |a|$, $|-a| = |a|$,
2. $\sqrt{a^2} = |a|$,
3. $|ab| = |a||b|$,
4. pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (si on a en plus $a \in \mathbb{R}^*$) , $|x|^n = |x^n|$,
5. si $a \neq 0$, $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ et de façon générale $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$,
6. si $b \geq 0$, $|a| \leq b$ si et seulement si $-b \leq a \leq b$,
7. si $b \geq 0$, $|a| \geq b$ si et seulement si $a \leq -b$ ou $a \geq b$,
8. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire**),
9. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (c'est l'**inégalité triangulaire inversée**).

Une autre propriété que l'on utilisera très souvent en TD.

Propriété 18 (Valeur absolue et distance)

Soit r un réel strictement positif. Pour tous nombres a et b nous avons les deux équivalence suivantes :

1. $|b - a| = r$ si et seulement $b = a - r$ ou $b = a + r$,
2. $|b - a| < r$ si et seulement $a - r < b < a + r$,
3. $|b - a| \leq r$ si et seulement $a - r \leq b \leq a + r$,
4. $|b - a| > r$ si et seulement $b < a - r$ ou $b > a + r$,
5. $|b - a| \geq r$ si et seulement $b \leq a - r$ ou $b \geq a + r$.

Définition 6 (Partie positive, partie négative)

Soit $a \in \mathbb{R}$,

1. On appelle partie positive de a, le réel $a^+ = \max(a, 0) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0, \\ 0 & \text{si } a < 0. \end{cases}$
2. On appelle partie négative de a, le réel $a^- = \max(-a, 0) = \begin{cases} -a & \text{si } a \leq 0, \\ 0 & \text{si } a > 0. \end{cases}$

On a alors $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$.

1.4.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Il existe plusieurs types d'intervalles. Tout est assez intuitif, nous garderons cette forme d'intuition dans les définitions sans aller dans les détails.
Voici tout d'abord la définition générale d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 7 (Intervalle de $\mathbb{R}$)

On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie de I de $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tous x et y dans I et pour tout z dans $\mathbb{R}$,

$$\text{si } x \leq z \leq y \quad \text{alors} \quad z \text{ appartient à } I.$$

Remarque

1. *Le fait de considérer* ***une partie*** *I de $\mathbb{R}$ se note $I \subset \mathbb{R}$ (qui se lit I inclus dans $\mathbb{R}$).*
2. *Le fait de considérer* ***un élément*** *a de I se note $a \in I$ (qui se lit a appartient à I.*
   Il ne faut donc pas confondre le symbole $\subset$ qui est utilisé pour des parties, et $\in$ qui est utilisé pour des éléments.
3. *La définition précédente pourrait alors s'écrire :*
   on appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie $I \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, $y \in I$ et pour tout $z \in \mathbb{R}$
   $$\textit{si } x \leq z \leq y \quad \textit{alors} \quad z \in I.$$

Il existe plusieurs types d'intervalles de $\mathbb{R}$. Nous allons les résumer dans les définitions suivantes.

Définition 8 (Intervalle fermé et borné (segment))

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle fermé et borné (appelé aussi segment) de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Définition 9 (Intervalle ouvert)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

mais pas que...
Ce sont également les ensembles de la forme :

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\},$$

ou

$$] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}.$$

Remarque *Un cas particulier d'intervalle ouvert est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier :* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Définition 10 (Intervalle ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Définition 11 (Intervalle semi-ouvert et borné)

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalle semi-ouvert et borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

mais aussi

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}.$$

Définition 12 (Intervalle fermé et non borné)

Soient a et b deux réels . Par convention on appelle intervalle fermé et non borné de $\mathbb{R}$ tout ensemble de la forme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\},$$

mais aussi

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

Notation 1.1
On notera les intervalles particuliers suivants :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[, \quad \mathbb{R}_- =]-\infty, 0], \quad \textit{et} \quad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[.$$

La notation $\mathbb{R}^*$ désignant l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0.

Remarque

1. *L'intervalle qui ne contient aucun nombre réel est appelé l'ensemble vide (eh oui ! Il faut le considérer celui-ci aussi...), et il est noté $\varnothing$.*
2. *L'intervalle qui ne contient qu'un seul nombre est appelé singleton (en anglais "single" veut dire seul). On le note alors entre accolade (est-ce que c'est parce qu'il est seul qu'il a besoin d'accolades pour être réconforté...) ; Autrement un singleton contenant le nombre réel a s'écrit $\{a\}$.*
3. *Un singleton $\{a\}$ est considéré comme l'intervalle $[a, a]$ et donc c'est un cas particulier d'intervalle fermé.*
4. *L'ensemble vide $\varnothing$ est considéré comme l'intervalle $]a, a[$ donc c'est un cas particulier d'intervalle ouvert. Comme c'est le complémentaire de $\mathbb{R}$, on considère $\mathbb{R}$ alors comme un intervalle fermé.*
   Mais, $\mathbb{R}$ peut être également vu comme un intervalle ouvert si on l'écrit $]-\infty, +\infty[$. Et donc son complémentaire $\varnothing$ sera considéré comme fermé.
   C'est la raison pour laquelle $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont considérés comme des ensembles à la fois ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Définition 13 (Segment)

Soient a et b deux réels, avec $a \leq b$. On appelle segment, l'ensemble noté $[a, b]$ défini par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \text{tels que } a \leq x \leq b\}$$

Intervalles de $\mathbb{R}$	**Bornés**	**Non Bornés**
Ouverts	$]a, b[$; $\varnothing$	$\mathbb{R}$; $]-\infty, a[$; $]a, +\infty[$
Fermés	$[a, b]$; $\{a\}$; $\varnothing$	$\mathbb{R}$; $]-\infty, a]$; $[a, +\infty[$
Semi-ouverts	$[a, b[$; $]a, b]$	

FIGURE 1.6 – Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Remarque *Nous pourrons utiliser quelques fois la notion de paramétrage du segment. Autrement dit, en essayant d'interpréter, nous laisserons un point se balader entre les bornes de l'intervalle suivant un "temps" t compris entre 0 et 1.*
Pour être plus clair, on aura l'équivalence suivante :

$$x \in [a, b] \text{ si et seulement s'il existe } t \in [0, 1] \text{ tel que } x = (1 - t)a + bt.$$

Cette équivalence permet de dire que tout point du segment $[a, b]$ peut être identifié grâce à un paramètre t compris entre 0 et 1. Pour aller plus loin, nous pourrions dire que tout point de se segment peut être identifié comme un certain barycentre des extrémités.
Cela pourra nous servir quand on verra (en cours, ou TD) la notion de convexité.

1.4.5 Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Voyons maintenant comment on pourrait construire l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ (ce n'est pas l'unique façon de construire $\mathbb{R}$ mais pour l'instant c'est la seule que l'on puisse aborder dans l'état de nos connaissances).
Pour cela nous avons besoin des notions de borne supérieures et inférieures, pour les utiliser, nous devons auparavant définir les notions de majorant et minorant.

Définition 14 (Majorant, minorant)

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est majorée s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.
2. E est minorée s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \geq m$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé minorant de E.
3. E est bornée si E est majorée et minorée.

Remarque *Attention : comme on l'a noté, M et m n'appartiennent pas nécessairement à E...c'est la toute la nuance entre les notions qui suivent : la borne supérieure et le maximum, la borne inférieure et le minimum.*

Définition 15 (Borne supérieure, Borne inférieure)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un **majorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \geq m$,
2. si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.

On peut caractériser de façon pratique (ce qui pourra servir pour des exercices) la borne $\sup$ et la borne $\inf$ de la façon suivante.

Proposition 1 (Caractérisation des bornes $\sup$ et $\inf$.)

Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. si la partie E est majorée par un réel M. Alors

$$M = \sup(E) \text{ si et seulement si pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe } x \in E \text{ tel que } x \in]M - \varepsilon, M].$$

2. si la partie E est minorée par un réel m. Alors

$$m = \inf(E) \text{ si et seulement si pour tout } \varepsilon > 0 \text{, il existe } x \in E \text{ tel que } x \in [m, m + \varepsilon[.$$

Si les majorants et minorants appartiennent à l'ensemble E, on les appelle maximum et minimum. C'est la toute la différence avec les bornes supérieures et bornes inférieures. Donc ne confondez pas ces notions !

Définition 16 (Maximum, minimum)

Soit $E \subset \mathbb{R}$.
On dit que M est le **maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est le **minimum** de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

On peut maintenant décrire une façon de construire $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute “toutes les bornes sup de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$”.
On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 19 (Propriété de la borne sup)

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.

Propriété 20 (Réel et borne sup)

Tout réel est la borne sup d'un ensemble d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Remarque

1. *La première propriété est due à Bernhard Bolzano en 1817.*
2. *$\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne sup : $\{x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 < 2\}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne sup dans $\mathbb{R}$ et n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$.*

Voilà, nous avons maintenant quelques outils essentiels pour continuer le cours d'analyse. Bien entendu, ce chapitre est bien loin de couvrir toutes les connaissances accumulées sur ces ensembles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)...mais faute de temps, nous en resterons là. Les plus curieux pourront à loisir se renseigner plus dans ce domaine, un peu en cours d'algèbre, mais également dans la littérature très riche à ce sujet.
En ce qui nous concerne, nous allons aborder une autre notion toute aussi importante dans la suite de ce cours d'analyse : la notion de fonctions.

Chapitre 2

Nombres complexes

D'impossibles à imaginaires, d'imaginaires à complexes. Combien d'idées, de systèmes politiques, de théories, de procédés ont suivi ce chemin pour devenir "réalité" !

Denis Guedj

(a) Girolamo Cardano (Jérôme Cardan) (1501 - 1576), mathématicien italien, à l'origine de la méthode pour trouver les solutions de certaines équations de troisième degré (accusé toutefois de plagiat par Niccolo Fontana Tartaglia).

(b) Raphaël Bombelli (1526-1572), mathématicien italien, il fut à utiliser les nombres complexes pour résoudre certaines équations de troisième degréle.

(c) Jean-Robert Argand, (1768 - 1822), mathématicien suisse, à l'origine de la représentation géométrique des nombres complexes. Le plan complexe est d'ailleurs appelé plan d'Argand-Cauchy.

FIGURE 2.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude des nombres complexes.

Sommaire

2.1 Origines de sa découverte

Lorsqu'il exposa sa méthode pour résoudre les équations de troisième degré de la forme $x^3 + px = q$, Jérôme Cardan ne s'attendait pas à deux choses :

1. être accusé de plagiat par Nicolas Tartaglia qui qui revendiquait être le premier à avoir trouvé cette méthode,

2. que la résolution de certains cas insolubles dans les réels, pouvait finalement être possible en utilisant des notations inhabituelles qui seront à l'origine des nombres complexes. Et cette méthode fut présentée par Rafael Bombelli, toujours au 16ème siècle.

Les nombres complexes intéressèrent les mathématiciens comme Leonhard Euler qui attribua la notation i de l'imaginaire pur, Jean-Robert Argand qui proposa une étude géométrique, mais également Jean le Rond d'Alembert, Caspar Wessel, Buée, Gauss, Cauchy parmi les plus célèbres et les plus anciens.
Les nombres complexes sont essentiels dans la géométrie algébrique et analytique moderne, et font partie de la recherche très active en mathématiques encore maintenant.
Nous allons rappeler ici leur définition, certaines de leurs propriétés algébriques et géométriques.

2.2 Nombres complexes : forme algébrique

Nous ne souhaitons pas ici détailler la façon dont les nombres complexes peuvent se construire (il faudrait rappeler ce qu'est un corps, ses propriétés et définir des applications). Nous n'avons pas encore tous les outils entre les mains, et nous laissons pour l'instant les curieux le soin d'aller voir cette partie dans des ouvrages à la bibliothèque ou sur internet. Nous allons directement attaquer cette section par les définitions des complexes.

2.2.1 Lien entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Définition 1 ($\mathbb{R}^2$)

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (a, b) de nombres réels.
Deux éléments de (a, b) et (a', b') de $\mathbb{R}^2$ sont égaux si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$.

Maintenant que nous avons défini $\mathbb{R}^2$ essayons de mettre cet ensemble en relation avec les complexes.

Définition 2 (Nombres complexes)

Le corps des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition et d'une multiplication définies pour tous (a, b), et $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ par,

1. $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$,
2. $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$.

Notation 1 (Convention pour les réels)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous conviendrons d'identifier le nombre complexe $(x, 0)$ et le réel x.
2. L'ensemble des réels est donc identifié à l'ensemble des nombres complexes de la forme $(x, 0)$ où $x \in \mathbb{R}$.

Notation 2 (Imaginaire)

Le nombre complexe $(0, 1)$ est noté i.

En conséquence, nous avons alors la possibilité d'écrire :

1. Par la règle 1 de la définition 2), pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) = (a,0) + (0,b),$$

2. Par la règle 2 de la définition 2, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$i(b,0) = (0,1)(b,0) = (0,b),$$

3. Et finalement nous pouvons écrire pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$(a,b) = a + ib.$$

2.2.2 Partie réelle, partie imaginaire et conjugué

Propriété 1 (Égalité de deux complexes)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. $a + ib = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b = 0$,
2. $a + ib = a' + ib'$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$.

Définition 3 (Partie réelle partie imaginaire)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. Il existe un couple unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$.

1. $a + ib$ est appelée forme algébrique du complexe z,
2. a est appelée partie réelle de z, on la note $\mathrm{Re}(z)$,
3. b est appelée partie imaginaire de z, on la note $\mathrm{Im}(z)$.

Nous noterons l'ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$.
Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 2 (Réel et Imaginaire pur)

1. Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire pure est nulle, c'est à dire

$$z \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } \mathrm{Im}(z) = 0.$$

2. Un nombre complexe est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle, c'est à dire

$$z \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } \mathrm{Re}(z) = 0.$$

En prenant maintenant la notation des complexes sous la forme algébrique, nous avons les propriétés suivantes

Propriété 3 (Addition et produit : forme algébrique)

Soient a, a', b, b' des réels quelconques, nous avons les deux propriétés suivantes

1. Somme : $(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b')$,
2. Produit : $(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$,
3. Carré de i : $i^2 = -1$. Le nombre i ne peut pas être un réel.

Définition 4 (Conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de notation algébrique $z = a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous appelons conjugué de z le nombre complexe $a-ib$, que nous noterons $\overline{z}$.

Nous avons quelques propriétés pour les conjugués.

Propriété 4 (Propriétés du conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

1. le conjugué de $\overline{z}$ est, $\overline{(\overline{z})} = z$,
2. $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ et $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z})$,
3. $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$,
4. $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Et d'après la partie 2 de la propriété 1, deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\text{Re}(z) = \text{Re}(\overline{z})$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(\overline{z})$.

2.2.3 Calculs sur les complexes

Nous avons plusieurs propriétés supplémentaires sur l'addition et la multiplication des complexes.

Propriété 5 (Propriétés de l'addition)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, l'addition dans $\mathbb{C}$ est

1. Commutative : $z + z' = z' + z$,
2. Associative : $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$,
3. 0 est l'élément neutre : $z + 0 = z$,
4. Symétrique : tout complexe z admet un symétrique dans $\mathbb{C}$, c'est $-z$ (l'opposé de z), sous forme algébrique, si $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $-z = -a - ib$.

En mathématique, nous verrons plus tard, que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.

Propriété 6 (Propriétés de la multiplication)

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, la multiplication dans $\mathbb{C}$ est

1. Commutative : $zz' = z'z$,
2. Associative : $z(z'z'') = (zz')z''$,
3. 1 est l'élément neutre : $z \times 1 = z$,
4. Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe $z' \in \mathbb{C}$, $z' \neq 0$ tel que $zz' = 1$. Nous notons ce nombre $\dfrac{1}{z}$ ou encore z^{-1}, et c'est l'inverse de z. Sous forme algébrique, pour $z = a + ib \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

En mathématique, nous verrons plus tard, que, grâce à ces deux propriétés, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps (c'est que nous entrevu déjà dans la définition 2).

Propriété 7 (Sommes et produits de conjugués)

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$,
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}'$,
3. pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}'}$.

Propriété 8 (Sommes des $n + 1$ premières puissances de z)

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 1$, alors

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

2.3 Nombres complexes : forme géométrique

Dans toute cette section nous allons travailler dans un plan orienté. Nous ne pouvons pas prendre $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ étant donné que désormais, i est choisi comme le nombre imaginaire pur dont le carré vaut -1. Par conséquent, nous allons travailler dans le plan orthonormal direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, où $O(0,0)$ est l'origine, et les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ sont orthogonaux et de norme 1.

Par conséquent, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ désignera le point M de coordonnées (a,b).

2.3.1 Image d'un complexe, affixe d'un vecteur et d'un point

Définition 5 (Image et affixe)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$, le point $M(a,b)$ est appelé l'image de z.
2. Soit $M(a,b)$ un point du plan, le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe de M. On pourra noter quelques fois aff(M) l'affixe du point M.

Définition 6 (Image et affixe)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$, le vecteur $a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ est l'image vectorielle de z.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (a,b) dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, Le nombre complexe $a + ib$ est appelé l'affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$. On pourra également noter aff$(\overrightarrow{u})$ l'affixe du vecteur u.

Par conséquent, pour tout point M du plan, aff(M)=aff($\overrightarrow{OM}$).

2.3.2 Interprétation géométrique

Commençons par la somme de deux complexes :

Propriété 9 (Affixe de la somme de vecteurs)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors

$$\text{aff}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \text{aff}(\overrightarrow{u}) + \text{aff}(\overrightarrow{v}).$$

Propriété 10 (Affixe et points)

Soient A et B deux points du plan. Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B)\text{-aff}(A).$$

Propriété 11 (Translation et somme)

Soit $p \in \mathbb{C}$ un complexe. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe p. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'un point M du plan d'affixe z, est un point M' du plan d'affixe $z' = z + p$.

Propriété 12 (Réflexion et conjugué)

La réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$ d'un point M du plan d'affixe z est le point M' du plan d'affixe $\overline{z}$.

En d'autres terms, l'image par la réflexion d'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$ de $M(a, b)$ est $M(a, -b)$.

2.3.3 Module

Définition et propriétés

Définition 7 (Module)

Soit $z \in \mathbb{C}$, d'image M. Le module de z est la norme $\|\overrightarrow{OM}\|$. Nous le notons $|z|$.

Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 13 (Propriétés du module)

1. Soient z et $z' \in \mathbb{C}$ deux complexes, d'images respectives M et M' alors
$$|z - z'| = \|\overrightarrow{MM'}\|.$$
2. Pour tout complexe $z = a + ib$, où a et b sont réels,
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
3. $|z|^2 = z\overline{z}$ ou encore $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
4. $|z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |-z|$.
5. $|zz'| = |z||z'|$ et si $z \neq 0$ alors $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ et $|\frac{z'}{z}| = \frac{|z'|}{|z|}$.
6. $|z^n| = |z|^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et même $\mathbb{Z}$ si $z \neq 0$.
7. $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
8. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.

Lorsque z est seulement réel, on module correspond à la valeur absolue de z.

Interprétation géométrique du module

Propriété 14 (Inégalité triangulaire)

Soient z et z' deux complexes, nous avons
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Propriété 15 (Cercles, disques)

Soit a un nombre complexe, soit $r > 0$ un réel. Notons A l'image de a alors nous avons :

1. $|z - a| = r$ décrit le cercle de centre A et de rayon r,
2. $|z - a| \leq r$ le disque fermé (contenant le bord) de centre A et de rayon r,
3. $|z - a| < r$ le disque ouvert (ne contenant pas le bord) de centre A et de rayon r.

Remarquons que si $a = 0$, alors $A = O$ (l'origine) et me cercles et disques sont centrés en O.

2.3.4 Racines carrées et équations du second degré

Soit $z \in \mathbb{C}$, une racine carrée de z est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$.

Proposition 1 (Racine carrée)

Soient z un nombre complexe quelconque, alors z admet deux racines carrées complexes ω et $-\omega$.

Attention : contrairement au cas réel, qui nous dit que si $x \in \mathbb{R}_+$ est un réel positif ou nul, nous avons deux racines de ce nombre qui sont $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$, mais nous privilégions quand même le fait de dire que $\sqrt{x}$ est la racine réelle de x.
Pour les complexes nous ne privilégions pas une racine par rapport à une autre parce que z se trouve n'importe où dans le plan. Parler de complexe positif n'a pas de sens. Donc on ne privilégie pas de racine en particulier, et on parle alors de ω comme une racine de z.
Etudions maintenant les polynômes de second degré avec les coefficients complexes d'abord, puis réels.

Proposition 2 (Équation du second degré coef. complexes)

L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et $c \in \mathbb{C}$, et en plus $a \neq 0$ possède deux solutions complexes z_1 et z_2 (qui peuvent être confondues).
Si l'on pose $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant, et δ une racine carrée de Δ, alors les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Si on s'autorisait à écrire $\delta = \sqrt{\Delta}$ nous aurions le même réultat que l'on connait quand a, b et c sont réels (voir ci-dessous). Mais on ne le fait pas. Si par contre les coefficients du polynôme sont réels, nous avons

Proposition 3 (Équation du second degré coef. réels)

L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et $c \in \mathbb{R}$, et en plus $a \neq 0$.
Alors le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est réel et nous avons trois cas :

1. si $\Delta = 0$, nous avons une racine double réelle qui vaut $\dfrac{-b}{2a}$,
2. si $\Delta > 0$, nous avons deux solutions réelles $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
3. si $\Delta < 0$, nous avons deux solutions complexes (et non réelles) $\dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$,

2.3.5 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 1 (d'Alembert-Gauss)

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité (racines doubles, racines triples, etc. suivant les cas). Ceci veut dire qu'il existe z_1, z_2, ... ,z_n n nombres complexes (parfois confondues) tels que

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n).$$

2.3.6 Argument et trigonométrie

Considérons le nombre complexe $z = x + iy$. Supposons que son module $|z| = 1$, alors nous avons $x^2 + y^2 = 1$. Et donc, comme vu précédemment, Le point $M(x, y)$ est sur le cercle centré en O et de rayon 1. Nous appelons ce cercle, le cercle unité. Par définition du cosinus et du sinus, l'abscisse (ou partie réelle de z), x est notée $\cos(\theta)$ et l'ordonnée (ou partie imaginaire de z), y est notée $\sin(\theta)$, où θ est une mesure de l'angle entre l'axe des réels (abscisses) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition 8 (Argument)

Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que
$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est appelé argument de z et on le note $\theta = \arg(z)$.
Cet argument est défini modulo 2π (c'est à dire à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$).
Nous pouvons imposer quelques fois à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, \pi]$.

En conséquence : deux nombres réels θ et $theta'$ sont arguments d'un même complexe z si et seulement s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. On écrit cette dernière égalité

$$\theta' \equiv \theta \mod (2\pi), \text{ que nous lisons "}\theta' \text{ est congru à } \theta \text{ modulo } 2\pi''.$$

Nous avons les propriétés suivantes

Propriété 16 (Propriétés des arguments)

Soient z et z' deux nombres complexes **non nuls**. Nous avons

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + arg(z')$ (mod 2π),
2. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)$ (mod 2π),
3. $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z)$ (mod 2π),
4. $\arg(\frac{z'}{z}) \equiv \arg(z') - \arg(z)$ (mod 2π) ,
5. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)$ (mod 2π).

Une conséquence directe de la propriété 4 est que si l'on a deux complexes non nuls z et z' alors

$$\arg(z) = \arg(z') \text{ si et seulement si } \frac{z'}{z} \text{ est un réel strictement positif.}$$

car les nombres complexes d'argument 0 sont les réels strictement positifs.

Formule de Moivre et notation exponentielle

Propriété 17 (Formule de Moivre)

Pour tout réel θ et tout entier n, nous avons

$$(\cos(\theta)) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Nous définissons alors la notation exponentielle

Définition 9 (Notation exponentielle)

Nous définissons l'exponentielle complexe pour tout réel θ par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

En conséquence, tout nombre complexe s'écrit de la façon suivante

$$z = \rho e^{i\theta},$$

où $\rho = |z|$ est le module de z et $\theta = \arg(z)$ est un argument de z. C'est ce que l'on appelle la forme trigonométrique de z.
Nous avons alors les propriétés suivantes

Propriété 18 (Propriétés exponentielles de complexes)

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, nous avons

1. $zz' = \rho\rho' e^{i\theta} e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$,
2. $z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n (e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$,
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$,
4. $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$,
5. Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (le module est ici égal à 1),
6. $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ si et seulement si $\rho = \rho$ et $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

En conséquence,

$$e^{i\theta} = 1 \text{ si et seulement s'il existe } k \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } \theta = 2k\pi.$$

Donnons maintenant quelques propriétés géométriques sur les arguments, les angles et l'orthogonalité

Propriété 19 (Angle formé par trois points)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right).$$

Propriété 20 (Alignement)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors :

"A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)$ est réel".

Propriété 21 (Perpendiculaire)

Étant donnés trois points A, B et C dans le plan complexe d'affixe respective a, b et c, avec $A \neq C$ et $B \neq C$, on a alors

" les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\dfrac{c-b}{c-a}\right)$ est imaginaire pur".

2.3.7 Racines nièmes d'un complexe

Nous avons vu un peu plus haut (section 1) les racines carrées d'un nombre complexe. Allons plus loin ici en étudiant les racines nièmes.

Définition 10 (Racine nième)

Soient $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, et $n \in \mathbb{N}\setminus \{0, 1\}$ (c'est à dire que $n \neq 0ni1$). Une racine $nime$ de z est un nombre complexe ω tel que

$$\omega^n = z.$$

Propriété 22 (Racines nième d'un complexe)

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul, qui s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$ admet exactement n racines nièmes, ce sont les nombres ω_k définis pour tout $k = 0, ..., n-1$ par

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Remarquons que si l'on pose $\omega_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$ et $\tilde{\omega} = e^{i2\pi/n}$ alors $\omega_k = \omega_0 \tilde{\omega^k}$.
Un cas particulier est la propriété suivante :

Propriété 23 (Racines nième de 1)

Les n racines nièmes de 1 sont $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, ..., n-1$.

2.3.8 Quelques applications trigonométriques

2.3.9 Formules de l'addition

Rappelons les formules de l'addition de sinus et cosinus.

Propriété 24 (Formules d'addition)

Pour tous réels a et b nous avons

$$\begin{array}{rcl} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \\ \cos(a-b) & = & \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a-b) & = & \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a). \end{array}$$

Pour la tangente nous avons

Propriété 25 (Formule de la tangente)

Pour tous réels $a \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π), $b \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π) et $a+b \neq \frac{\pi}{2}$ mod(π) nous avons

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

2.3.10 Formules de duplication de l'argument

Propriété 26 (Formules de duplicaton)

Pour tous réels a nous avons

$$\begin{array}{rcl} \cos(2a) & = & \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a), \\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a), \\ \tan(2a) & = & \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}, \quad a \neq \pi \text{mod } (\pi), \quad \text{et} \quad a \neq \dfrac{\pi}{4} \text{mod } (\pi/2) \end{array}$$

Propriété 27 (Formules d'Euler)

Pour tout réel θ, nous avons

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Il y a quelques applications aux formules d'Euler et notamment les formules de linéarisation

Propriété 28 (Formules de linéarisation)

Pour tous réels a et b nous avons

$$\begin{array}{lcl}
\cos(a)\cos(b) & = & \left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)/2, \\
\sin(a)\sin(b) & = & \left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)/2, \\
\sin(a)\cos(b) & = & \left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)/2, \\
\sin(a)\cos(a) & = & \sin(2a)/2, \\
\cos^2(a) & = & \dfrac{1+\cos(2a)}{2}, \\
\sin^2(a) & = & \dfrac{1-\cos(2a)}{2}.
\end{array}$$

et si on pose $p = a + b$ et $q = a - b$, nous obtenons

Propriété 29 (Formules de conversion de somme en produit)

Pour tous réels p et q nous avons

$$\begin{array}{lcl}
\cos(p)+\cos(q) & = & 2\cos(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2}), \\
\cos(p)-\cos(q) & = & -2\sin(\dfrac{p+q}{2})\sin(\dfrac{p-q}{2}), \\
\sin(p)+\sin(q) & = & 2\sin(\dfrac{p+q}{2})\cos(\dfrac{p-q}{2}), \\
\sin(p)-\sin(q) & = & 2\cos(\dfrac{p-q}{2})\cos(\dfrac{p+q}{2}),
\end{array}$$

2.3.11 Nombres complexes en géométrie

Nous considérons le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Tout point M de coordonnées (x, y) peut être repéré par son affixe $z = x + iy$.

Homothétie, interprétation de $z \to az+b$, $a \neq 0$

Propriété 30 (Homothétie)

L'homothétie de centre A, tel que aff(A)= z_0, et de rapport $k \in \mathbb{R}\backslash 0, 1$ est l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' - z = (k(z - z_0)) \text{ ou aussi } z' = kz + (1-k)z_0.$$

Propriété 31 (Homothétie de rapport a)

L'application $z \mapsto z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}\backslash 0, 1$, $b \in \mathbb{C}$ représente une homothétie de rapport a.
Si $a = 1$ nous avons une translation $z \mapsto z' = z + b$

Conséquence : la réciproque d'une homothétie h, représentée par $z \mapsto az+b$ est une homothétie de même centre.

Propriété 32 (Composée d'homothétie)

Soient f et g deux homothéties (ou translations) du plan, représentées respectivement par

$$\varphi : z \mapsto az + b \text{ et } \psi : z \mapsto a'z + b, \text{ avec } aa' \neq 0.$$

La composée $g \circ f$ est représentée par

$$\psi \circ \phi : z \mapsto a'(az+b) + b' = aa'z + a'b + b'.$$

2.3.12 Rotation, interprétation de $z \mapsto az + b$, avec $|a| = 1$

Propriété 33 (Rotation)

Étant donné un point A d'affixe z_0, la rotation de centre A et d'angle α, est l'application qui transforme un point M d'affixe z en M' d'affixe z' telle que

$$z' - z_0 = (z - z_0)e^{i\alpha}$$

Conséquence : l'application $z \mapsto az + b$, avec $|a| = 1$ s'interprète géométriquement comme

1. une rotation d'angle α =arg(a), lorsque $a \neq 1$,
2. la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, avec b =aff$(\overrightarrow{u})$ lorsque $a = 1$

La réciproque d'une rotation de centre A et d'angle α est la rotation de même centre A et d'angle $-\alpha$.

2.3.13 Similitudes directes planes

1. Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre :

Propriété 34 (Composée homothétie, rotation)

On considère une homothétie H de centre A et de rapport $k > 0$, et une rotation R de même centre A et d'angle θ. Alors $H \circ R$ conserve les angles orientés et multiplie les distances par k.
L'écriture complexe d'une telle composée, en définissant z_0, l'affixe de A, et M' d'affixe z', l'image de M d'affixe z par $H \circ R$, est donnée par :

$$z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0).$$

Définition 11 (Similitude directe)

Une similitude directe S est une application qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = az + b$ avec a et b complexes donnés, et $a \neq 0$.
L'angle de S est arg(a) et son rapport est $|a|$.

Propriété 35 (Composée de similitudes directes)

La composée de deux similitudes directes S et S' de représentation complexes $z \mapsto az + b$ et $z \mapsto a'z + b'$, avec $aa' \neq 0$, est encore une similitude directe d'angle arg(aa') =arg(a)+arg(a') et de rapport $|aa'| = |a||a'|$, autrement dit, c'est la somme des angles et le produit des rapports.

Remarque *(a) si deux similitudes ont des angles opposés, leur composée est une homothétie,*

(b) si deux similitudes ont des rapports inverses, leur composée est une rotation.

2. Décomposition en rotation et homothétie

Propriété 36 (Point invariant)

Toute similitude directe, autre qu'une translation, admet un point invariant et un seul, qui est appelé le centre de la similitude.

3. Détermination d'une similitude directe

Propriété 37 (Existence et unicité)

Étant donnés P, Q, P' et Q' quatre points tels que $P \neq Q$ et $P' \neq Q'$, il existe une similitude directe S et une seule telle que $S(P) = P'$ et $S(Q) = Q'$.
Si p, q, p' et q' sont respectivement les affixes de ces 4 points, et que l'on considère que la représentation complexe de S est l'application $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, alors

$$a = \frac{p' - q'}{p - q} \text{ et } b = \frac{pq' - p'q}{p - q},$$

l'angle et le rapport de S sont donnés alors respectivement par l'argument et le module de a.