Base fondamentale des mathématiques

Base fondamentale des mathématiques

Chapitre I : Calculs algébriques

I) Rappels

ℕ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et +Infini.

ℤ désigne l'ensemble des entiers relatifs compris entre -Infini et +Infini.

ℝ désigne l'ensemble des nombres compris entre -Infini et +Infini.

ℚ désigne l'ensemble des quotients rationnels compris entre -Infini et +Infini.

II) Somme

1. Le symbole ∑

Exemple : $\sum_{k=0}^{5} 2^k = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^5 = 63$

De façon générale : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n \; si \; n \notin \mathbb{N}$

Notation : Soient m et $n \notin \mathbb{N}$, et a_k où k= m, ..., n.

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n \text{ si m } \leq \text{n.}$$

Si $m \geq n$, $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$.

k est l'indice de sommation (variable muette).

Remarques:

* $\sum_{k=m}^{n} a_k$ s'écrit également $\sum_{m \leq k \leq n} a_k$.

* Attention à l'indice de sommation: il ne doit pas apparaître dans les variables de départ et d'arrivée, c'est à dire $\sum_{k=m}^{k} a_k$ ou $\sum_{k=k}^{n}$ n'a pas de sens.

* Comme k est une variable muette, on peut le remplacer sans problème, ainsi on peut écrire:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{d=1}^{n} d^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2$$

Exercice: Que vaut (E): $\sum_{k=1}^{n} 2^{k} + \sum_{k=1}^{n} 2^{n+h}$?

$$(E) = 2^{0}+2^{1}+2^{2}+...+2^{n}+2^{n+1}+2^{n+2}+...+2^{2n.}$$
$$= \sum_{k=0}^{2n} 2^{k}$$

2. Attention à l'indice de sommation !

Il se peut que l'indice de sommation n'apparaisse pas dans la somme.

Exemples:

$$* \sum_{k=0}^{n} 17 = 17+17+17+...+17 = 17(n+1)$$

Autrement dit: $\sum_{k=0}^{n} 17 = 17 \sum_{k=0}^{n} 1$

$$* \sum_{k=1}^{n} 2^{n} = n2^{n}.$$

Ici, on voit effectivement que k n'est pas inclus dans le résultat.

3. Changement d'indice

On considère pour tout n∉ℕ, la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Que vaut $\sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1}$?

$$\sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Autre méthode: (F): $\sum_{p=0}^{n-1}$ p+1. On pose k = p+1 :

Si p = 0 => k = p+1 = 1
Si p = n-1 => k = p+1 = n

Ainsi, $\sum_{p=0}^{n-1} a_{p+1} = \sum_{k=1}^{n}$ k.

Exemple: Que vaut (G) : $\sum_{p=0}^{n} a_{n-p}$?

On pose k = n-p :
Si p=0, k = n
Si p=n, k = 0
Donc (G) = $\sum_{k=n}^{0} a_k$.

De façon générale : $\sum_{k=m}^{n} a_{p+k}$ (en posant X=p+k) = $\sum_{X=p+m}^{p+n} a_X$.

4. Sommes doubles

$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij}$, si n = m, on note : $\sum_{1\leq i,\, j\leq n} a_{ij}$.

$$\sum_{1\leq i,\, j\leq n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
i=2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
i=3	a_{31}	a_{23}	a_{33}	a_{34}
i=4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

$\sum_{j=1}^{4} a_{1j}$

$\sum_{j=1}^{4} a_{2j}$

$\sum_{j=1}^{4} a_{3j}$

$\sum_{j=1}^{4} a_{4j}$

Si i et j suivent un ordre précis: $\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\right)$.

	j=1	j=2	j=3
i=1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
i=2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
i=3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Exemple: $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}$

$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1+i}^{n} a_{ij}$

$j>1$ donc $j \leq 2$.

$j=2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} a_{i2}=a_{12}.$

$j=3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} a_{i3}=a_{13}+a_{23}.$

$\sum_{1\leq i<j\leq 3} a_{ij} =\sum_{j=2}^{3}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}=a_{12}+a_{13}+a_{23}$

5. Règles de calcul

Propriété: Soient a, b, c $\notin \mathbb{R}$, on a :
* commutativité : si a+b=b+a et ab=ba
* associativité : si (a+b)+c = a+(b+c) et a(bc)=(ab)c
* distributivité : si (a+b)c = ac+bc

Pour les $\sum$, on a quelques analogies :
Soient m et n$\notin \mathbb{N}$ où n$\geq$m et $a_k, b_k \notin \mathbb{R}$ où k = m,...,n.

* $\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=m}^{n}a_k+\sum_{k=m}^{n}b_k$

* Soient $\lambda \notin \mathbb{R}$: $\sum_{k=m}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=m}^{n}a_k$, si λ est indépendant de k .

Produit :

* Attention, $\sum_{k=0}^{n}a_k b_k \neq (\sum_{k=0}^{n}a_k)(\sum_{k=0}^{n}b_k)$

* Exemple : si $a_k=b_k=1, \forall k=0,\dots,n$ avec n$\notin \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k b_k=\sum_{k=0}^{n}1\times 1=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.$$

D'autre part: $(\sum_{k=0}^{n}a_k)(\sum_{k=0}^{n}b_k)=(\sum_{k=0}^{n}1)(\sum_{k=0}^{n}1)=(n+1)(n+1)=(n+1)^2\neq(n+1)$ sauf pour n=0.

Par contre, si on a des indices séparés:

$$(\sum_{j=0}^{n}a_j)(\sum_{k=0}^{m}b_k)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}a_j b_k.$$

6. Sommes téléscopiques

Propriété: Soient n et m $\in \mathbb{N}$ *avec* m $\leq$ n et $a_k \in \mathbb{R}$ avec k = m,...,n.

Alors $\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_m$.

Preuve : $\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{m+1}-a_m+a_{m+2}+a_{m+1}-a_{m+2}+\dots-a_n+a_{n+1}-a_n$

$= -a_m+a_{n+1}$

$= a_{n+1}-a_m$.

Propriété: Soient n et m $\notin \mathbb{N}$ *avec* $m \leq n$ et $a_k \notin \mathbb{R}$ avec k = m,...,n.

$$\text{Alors } \sum_{k=m}^{n} (a_{k=1} - a_k) = a_{n+1} - a_m .$$

$$\text{Preuve : } \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{m+1} - \boldsymbol{a_m} + a_{m+2} + a_{m+1} - a_{m+2} + \ldots - a_n + \boldsymbol{a_{n+1}} - a_n$$

$$= -a_m + a_{n+1}$$

$$= \boldsymbol{a_{n+1} - a_m}.$$

À quoi cela sert?

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{-k+(k+1)}{k(k+1)} = \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}.$$

Donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

Exemple : $S_{100} = \frac{100}{101.}$

7. Résultats classiques

Propriété: Soit $n \notin \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve: on pose $S_n = 1+2+\ldots+(n-1)+n$.

$S_n = n+(n\text{-}1)+\ldots+2+1.$

$2S_n = 1+2+\ldots+(n-1)+n+n+(n\text{-}1)+\ldots+2+1.$

$2S_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1).$

$2S_n = n(n+1).$

Donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propriétés : I) Soit $n \notin \mathbb{N}$.

$$* \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \ldots + (k\text{-}1)^2 + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$* \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2} = (\sum_{k=1}^{n} k)^2.$$

II) Soit $a \notin \mathbb{R}$ avec $a \neq 1$:

$$* \sum_{k=0}^{n} a^k = a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^{(n-1)} + a^n$$

$$= 1 + a + a^2 + \ldots + a^n.$$

$$= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$* (1-a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = 1 - a^{n+1}$$

donc $(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ avec $a \neq 1$.

8. Factorisation

Propriété : Soient $n \notin \mathbb{N}$; a et $b \notin \mathbb{R}$.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

$$= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Exemple : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Si $b = 1$: $a^n - 1 = a^n - 1^n$

$$= (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

Si n est impair avec b = -1: $a^n + 1 = a^n + 1^n = (a+1)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k}$.

III) Produits

1. Symbole ∏

Notation: Soient $m,n \in \mathbb{N}$ et $a_k \in \mathbb{R}$, $k=m,\dots,n$.

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_{n-1} \times a_n \text{ si } n \geq m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Remarque: La notion $\prod_{k=m}^{n} a_k$ s'écrit également $\prod_{m \geq k \geq n} a_k$ et se lit : produit des x_k pour k allant de m à n.

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}$,on note n! (factorielle n) l'entier naturel défini par :

$$n! = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ \prod_{k=1}^{n} k \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $0!=1$ par convention, et $n! = 1\times2\times3\times4\times\dots\times n-1\times n$.

Propriétés:

Soient m,n entiers avec $n \geq m$.

* : $\forall a$, on a : $\prod_{k=m}^{n} a = a\times a\times a\times a\times\dots\times a = a^{n-m+1}$.

$$\textit{Attention au piège}: \prod_{k=0}^{n} 3^n = (3^n)^{n+1}$$

* : $\forall a_k$, $k = m,\dots,n$ et $\forall$ p, $m < p < n$, on a :

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \left(\prod_{k=m}^{p} a_k\right)\left(\prod_{k=p+1}^{n} a_k\right) = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times a_{m+3} \times \dots \times a_{p-1} \times a_p \times a_{p+1} \times a_{p+2} \times \dots \times a_{n-1} \times a_n.$$

* : $\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$

* : Si $b_k \neq 0$ avec $k = m, \dots, n$, on a :

$$\prod_{k=m}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_k}{\prod_{k=m}^{n} b_k}$$

* $:\forall p\in\mathbb{N} : \prod_{k=m}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^p$

Attention , soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k \neq \lambda \prod_{k=m}^{n} a_k$! .À la différence des sommes, on ne factorise pas par λ.

On aura : $\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda a_m \times \lambda a_{m+1} \times \ldots \times \lambda a_{n-1} \times \lambda a_n$

$$= \underbrace{\lambda\times\lambda\times\lambda\times\lambda\times\lambda\ldots}_{m-n+1} \times a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times ¿ a_{n-1} \times a_n$$

$$= \lambda^{m-n+1} \prod_{k=m}^{n} a_k .$$

Produits téléscopiques :

Propriété: Soient m, n $\notin \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $a_k \notin \mathbb{R}^*$, k = m,...,n.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Preuve : $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_m} \times \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \times \frac{\ldots}{a_{m+2}} \times \ldots \times \frac{a_{n-1}}{\ldots} \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$

Produit double :

On a pour m,n $\notin \mathbb{N}$ *et* $a_{ij} \notin \mathbb{R}$ avec $\begin{matrix} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n \end{matrix}$.

Le produit double est noté $\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{ij}$.

Si n = m, on note $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}$, qui est égal à $\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \prod_{1\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Par contre, si i et j sont dans un ordre précis (ex: $i\leqslant j$), on aura :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{1=1}^{j} a_{ij}.$$

Si i < j :

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \prod_{j=2}^{n} \prod_{1=1}^{j-1} a_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1+i}^{n} a_{ij}.$$

2. Coefficients binomiaux

Définition : Soient k et $n \notin \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$ nous notons $\binom{n}{k}$, ou encore C_n^k.

L'entier naturel $\binom{k}{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } k > n . \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } k \leqslant n . \end{cases}$

Interprétation :

* Supposons que l'on choisisse k éléments parmi n, avec l'ordre qui compte, c'est-à-dire que $(1,2,3) \neq (2,1,3)$.

On a $\underbrace{n}_{\text{choix pour un élément}} \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)\times\ldots\times 2\times 1}{(n-k)\times\ldots\times 2\times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

* Supposons que l'ordre ne compte pas, dans ce cas-là, on a (1, 2, 3) qui sera considéré comme identique à (2, 1, 3). Autrement dit, par rapport à ce que l'on vient de faire, on a beaucoup moins de cas possibles.

Exemple: si $k = 3$: $\left.\begin{matrix} (1,2,3) \\ (1,3,2) \\ (2,3,1) \\ (2,1,3) \\ (3,1,2) \\ (3,2,1) \end{matrix}\right\} (1,2,3)$, puisque l'ordre ne compte pas.

Ainsi, on a : $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ cas possibles.

De ce fait, $\binom{n}{k} = \begin{cases} 0, \text{ si } k > n \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ si } k \leq n \end{cases}$

Propriété: Soient $n,k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$:

* Symétrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

* Si $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

* Formule de Pascal : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

À l'origine du triangle de Pascal :

k \ n	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

À quoi cela sert ?

Propriété : Formule du trinôme : Soient a, b $\in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 1: avec n = 1;

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$$

$$= \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0.$$

$$= b+a.$$

Exemple 2: avec n = 2;

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$$

$$= \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0$$

$$= 1\times 1\times b^2 + 2\times a\times b + 1\times a^2\times 1$$

$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

Exemple 3: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$

Exemple 4: $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{n-1!} = n.$

Exemple 5: $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 2\times 1}{1\times 2\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 2\times 1}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 6: Que vaut $(1+a)^n$?

$$(1+a)^n=(a+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k.$$

Exemple 7: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$=(1+1)^n=2^n \text{ avec } a=b=1.$$

Exemple 8: Que vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$?

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times 1^{n-k}=(-1+1)^n-0^n=0$$

IV) Egalités et inégalités dans $\Re$

1. Egalités

Définition : On appelle identité, une égalité entre deux expressions qui es valable quelles que soient les valeurs des variables entrant en jeu dans ces expressions. Les expressions situées de part et d'autre du signe « = » sont appelées les membres de l'égalité.

Exemple : On considère l'égalité a=b ; a, b ∈ ℝ.

$a^2 = ab$

$a^2-b^2 = ab-b^2$

$(a-b)(a+b) = b(a-b)$

On a a=b donc 0(a+b) =b(0), or on ne peut pas diviser par 0.

2. Inégalités

Propriété : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

On a les règles suivantes :

- $Réflexivité, si\ \forall\ a\ \in\ \mathbb{R}: a\ \leq\ a.$
- Antisymétrie, si $\forall a, b \in \mathbb{R}$; si $a\ \leq b$ et $b \leq a$ alors $\mathrm{a} = \mathrm{b}$.
- Transitivité, si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$.

Ainsi que la loi suivante : Si $a, b\ \in\ \mathbb{R}$, on a soit $a \leq b$ soit $b \leq a$.

Remarques : Les règles précédentes expriment le fait que le signe « $\leq$ » est une relation d'ordre tandis que la loi exprime le fait que cette relation d'ordre est totale.

- Tout ce qui fonctionne avec « $\leq$ » fonctionne également avec « $\geq$ ».
- On définit aussi l'inégalité stricte :
  - La relation '$<$' est définie $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ si et seulement si $a\ \leq b$ et $a \neq b$.
  - La relation '$>$' est définie $\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}$ avec $a > b$ si et seulement si $a\ \geq b$ et $a \neq b$.

Propriétés (règles de compatibilités) : Soient *a*, *b*, *c* et *d* ∈ $\mathbb{R}$

⊕ Si $a \leq b$ alors $a + c\ \leq b + c$.
⊕ Si $a \leq b$ et $c \neq 0$ alors $ac \leq bc$.
⊕ Si $a\ < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$.

Définitions :

- Deux réels *a* et *b* sont opposés si *a* + *b* = 0.
- Deux réels *a* et *b* sont inverses l'un de l'autre si et seulement si *a* x *b* = 1 avec *b* non nul.

Propriété :

* Soit $a \in\ \mathbb{R}$, alors il existe un unique réel b tel que $a + b\ = 0$.
* Soit *a* ∈ $\mathbb{R}$*, alors il existe un réel non nul unique *c* tel que *ac* = 1 que l'on note *c* = $\frac{1}{a}$ ou a^{-1}.
* Soient *a*, *b* ∈ $\mathbb{R}$; $a\ \leq b$ est équivalent à $(-a)\ \geq (-b)$.
* Soient *a*, *b* réels non nuls et de même signe : $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
Attention ! Si $a\ \leq b$ *et* $c \leq d$, *on n'a généralement pas* $a - c \leq b - d$!
De même, si $a\ \leq b$ et $c \leq d$, on n'a généralement pas $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}^*$.

Base fondamentale des mathématiques

3. Valeur absolue

Définition : Soit *a* réel, la valeur absolue de *a* est le réel définit par |*a*| :

- *a* si *a* > 0
- -*a* si *a* < 0
- 0 si *a* = 0

Attention, -*a* n'est pas toujours négatif ! En effet, si *a* < 0, -*a* > 0.

Propriétés : Soient *a*, *b* ∈ ℝ :

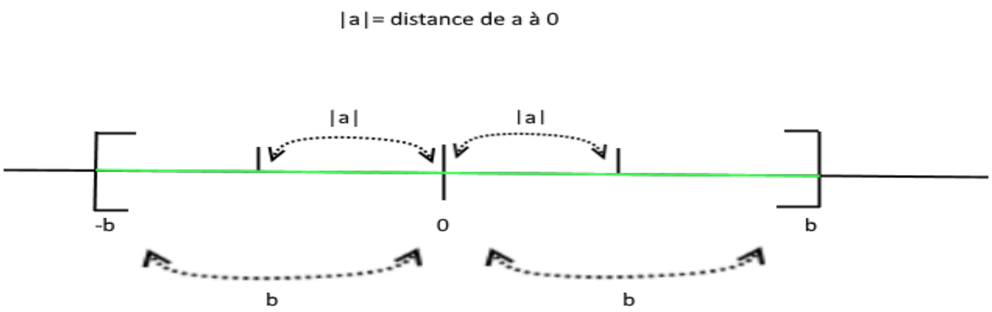
1. $|a| \geq 0;\ -|a| \leq a \leq |a|$ et $|-a| = |a|$.
2. $\sqrt{a^2} = |a|$.
3. $|ab| = |a|\,|b|$.
4. Si $\mathrm{n} \in \mathbb{N}, |\mathrm{X}|^{\mathrm{n}} = |\mathrm{X}^{\mathrm{n}}|$.
5. Si $a \neq 0; \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ et en général $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|}$.
6. Si $b \geq 0$; alors $|a| \leq b$ si et seulement si $-b\ \leq a \leq b$.
7. Si $b \geq 0$; alors $|a| \geq b$ si et seulement si $a\ \leq -b$ ou $a \geq b$.
8. Inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$.
9. $|a| - |b| \leq |a - b|$.

Preuves :

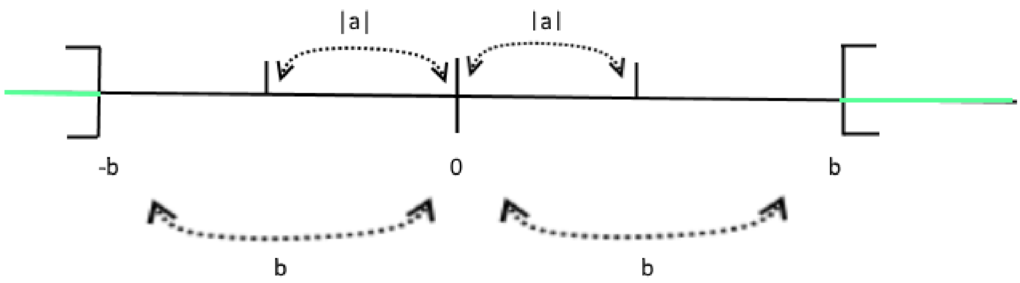
Propriété 5 :

$$|b| = \left|b * \frac{a}{a}\right| \text{ avec } a\ \neq 0$$
$$|b| = \left|\frac{b}{a} * a\right|$$
$$|b| = \left|\frac{b}{a}\right| |a| \text{ (selon Propriété 3)}$$
$$\frac{|b|}{|a|} = \left|\frac{b}{a}\right|$$

Propriété 6 :



Propriété 7 :



Propriété 8 :

$0 \leq |a+b|$
$0 \leq |a+b|^2$
$0 = |(a+b)^2|$
$0 = (a+b)^2$
$0 = a^2 + 2ab + b^2$
$0 = |a^2| + |b^2| + 2ab$ (selon Propriété 4)
$0 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$ (selon Propriété 1)
$0 \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$ (selon Propriété 3)
$0 = (|a| + |b|)^2$
$0 \leq |a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$
Donc $|a+b| \leq |a| + |b|$

Propriété 9 :

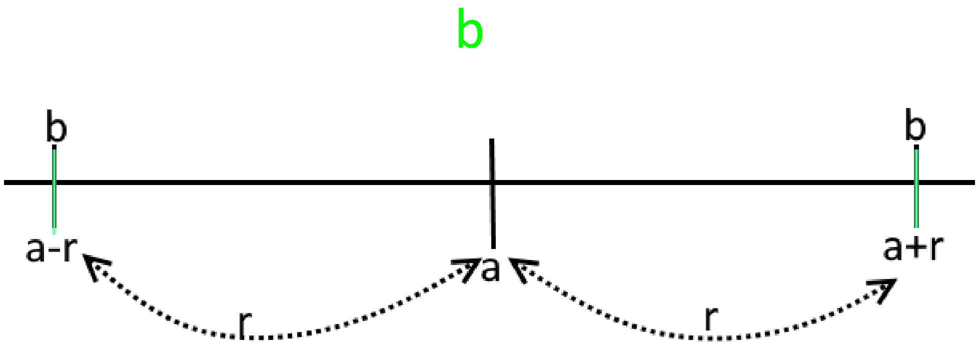
$|a| = |a - b + b|$
$|a| \leq |a - b| + |b|$ (selon Propriété 8)
$|a| - |b| \leq |a - b|$

Propriétés sur la distance :

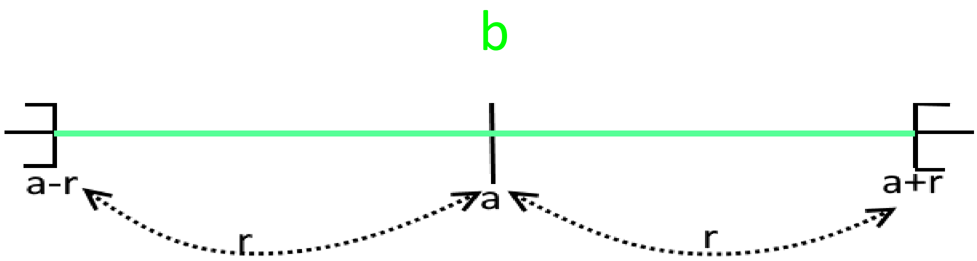
Soient a et b ∈ ℝ, et r un réel tel que r > 0 :

1. |b – a | = r ⇔ la distance de a à b est égale à r.

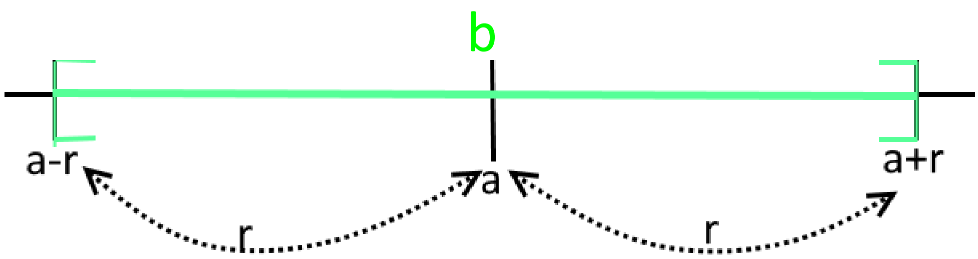
$$\begin{cases} b - a = r \Rightarrow b = a + r \\ b - a = -r \Rightarrow b = a - r \end{cases}$$



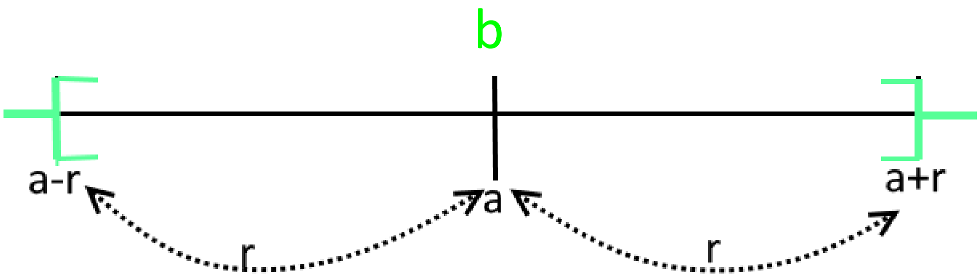
2. | b – a | < r si et seulement si :
   - $-r < b - a < r$
   - $a - r < b < a + r$



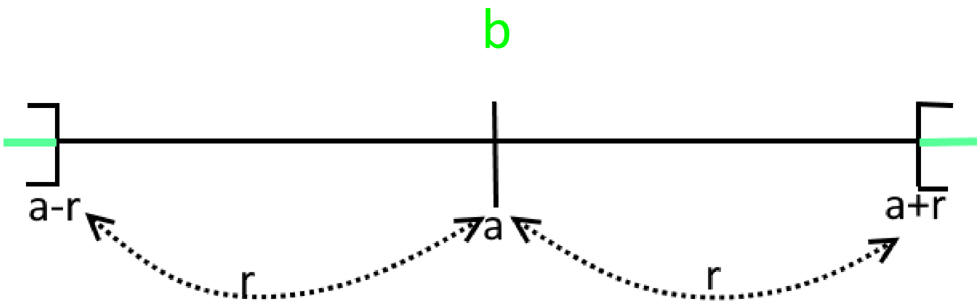
3. | b – a | < r si et seulement si :
   - $-r < b - a < r$
   - $a - r < b < a + r$



4. | b – a | > r si et seulement si :
   - $b - a > r \Leftrightarrow b > a + r$
   - $b - a < -r \Leftrightarrow b < a - r$



5. | b – a | ≥ r si et seulement si :
   - $b - a \geq r \Leftrightarrow b \geq a + r$
   - $b - a \leq -r \Leftrightarrow b \leq a - r$



Remarque : Attention : Pour a, b ∈ ℝ : $a^2 = b^2 \neq a = b$.

En effet : $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a+b) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ou \\ a = -b \end{cases}$$

Définition : Soit a ∈ ℝ :

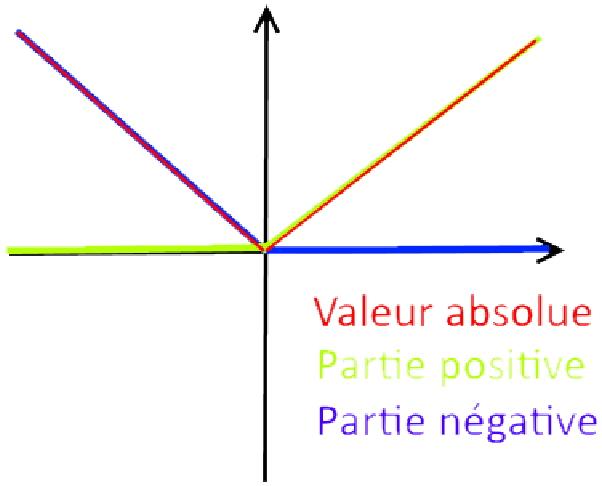
- On appelle partie positive de a, notée $a^+ = \max(a, 0)$.
  $a^+ = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ 0 \text{ si } a < 0 \end{cases}$.

- On appelle partie négative de a, notée $a^- = \max(-a, 0)$.
  $a^- = \begin{cases} (-a) \text{ si } a \leq 0 \\ 0 \text{ si } a > 0 \end{cases}$.

On a donc les propriétés suivantes :

- $a = a^+ - a^-$
  Exemple : Si on a : $a = -5$; $a^+ = 0$, $a^- = 5$ et $a^+ - a^- = -5$.

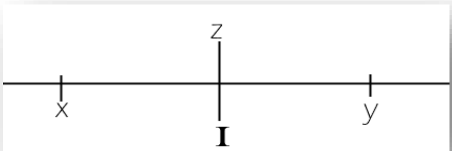
- $|a| = a^+ - a^-$
  Exemple : |-5|=0+5=5.



4. Intervalles de $\Re$

Définitions :

- On appelle intervalle I de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall$x, y dans I et $\forall$z dans $\mathbb{R}$ que si $x \leq z \leq y$ alors z appartient à I.
- Un intervalle I est inclus[1] dans $\mathbb{R}$ s'écrit $I \subset \mathbb{R}$.
- Un élément a appartient à I s'écrit $a \in I$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$. On appelle intervalle fermé borné le segment $[a, b]$ défini par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b\}$.



- Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
  - On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tout ensemble de la forme $]a, b[$ défini par $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$. (*ensemble ouvert borné*). L'ensemble $]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ est un ensemble ouvert non-borné.
  - On appelle intervalle semi-ouvert tout ensemble de la forme :
    Ensembles semi-ouverts bornés : $\begin{cases} [a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\ ]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \end{cases}$

    Ensembles fermés non-bornés : $\begin{cases} [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\ ]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \end{cases}$

[1] $\mathbb{R}$: désigne l'ensemble des réels.

Cas particuliers :[2]

- $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$
- $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$
- $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
- $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$
- $\emptyset = ensemble\ vide$[3] et singleton [4]

Intervalles de $\mathbb{R}$	Bornés			Non-bornés		
Ouverts	$\emptyset$	$]a, b[$		$\mathbb{R}$	$]-\infty, b[$	$]a, +\infty[$
Fermés	$\{a\}$	$\emptyset$	$[a, b]$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, b]$	$[a, +\infty[$
Semi-ouverts	$[a, b[$	$]a, b]$				

5. Majorant/minorant, bornes supérieures/inférieures et maximum/minimum

Définition : Soit $I \subset \mathbb{R}$:

- Majorant et minorant :
  - I est majoré s'il existe un nombre M tel que pour tout x appartenant à I, x soit inférieur ou égal à M.
    On appelle M, majorant de I.
    Exemple : I =]-1,3] M = 3 ou plus.
  - I est minoré s'il existe un nombre m tel que pour tout x appartenant à I, x soit supérieur ou égal à m.
    On appelle m, minorant de I.
    Exemple : I =]-1,3] m = -1 ou moins.
- Bornes supérieures et inférieures :
  - On dit que M est la borne supérieure de I et on note M = sup (I) si et seulement si :
    - M est majorant de I.
    - M est le plus petit des majorants.

  - On dit que m est la borne inférieure de I et on note m = inf (I) si et seulement si :
    - m est minorant de I.
    - m est le plus grand des minorants.

[2] $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles à la fois ouverts et fermés.
[3] $\emptyset$: désigne le fait qu'il n'y a pas d'intervalles dans ce cas.
[4] {a} (singleton) : il s'agit d'un intervalle d'un seul élément.

- Maximum et minimum :

  a. On dit que M est le maximum de I et on note M = max (I) si et seulement si :
     - M = sup (I).
     - M ∈ I.

  b. On dit que m est le minimum de I et on note m = min (I) si et seulement si :
     - m = inf (I).
     - m ∈ I.

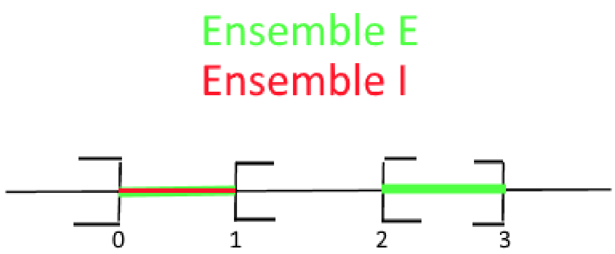
Exemple : Soit I =]-1,5] :

sup (I) = 5
max (I) = 5

inf (I) = -1
min (I) = ∅

Attention à l'ensemble de référence ! La plupart du temps, ce sera ℝ mais pas toujours.

Exemple : Soit I =]0, 1[; E =]0, 1[∪ [2, 3] et I est défini dans E.



Dans E :

Inf (I) = Rien
Min (I) = ∅
Minorant (I) = Rien

Sup (I) = 2 (puisque 1 ∉ E)
Max (I) = ∅
Majorant (I) = 2 (ou 3)

Chapitre II : Nombres complexes

I) Introduction

Il n’y a pas d’ordre ni de comparaison entre deux nombres complexes.

II) Nombres complexes, forme algébrique

1. Lien entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Définitions :

- L’ensemble $\mathbb{R}^2$ est celui des couples (a, b) avec a, b $\in \mathbb{R}$.
  (a, b) et (a’, b’) sont égaux si et seulement si a = a’ et b = b’.
- Le corps des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l’ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l’addition et de la multiplication définis par :
  a. (a, b) + (a’, b’) = (a + a’, b+ b’)
  b. (a, b) x (a’, b’) = (aa’ – bb’, ab’ + a’b)

Notation :

Par convention :

- $\forall$x $\in \mathbb{R}$, nous identifions le nombre complexe (x, 0) comme le réel x.
- L’ensemble des réels est donc identifié à l’ensemble des complexes de la forme (x, 0) avec x $\in \mathbb{R}$.
- Le nombre complexe (0, 1) est noté « i ». Les imaginaires purs sont notés (0, y) avec y $\in \mathbb{R}$.

➢ Par la règle de l’addition, on a tout nombre complexe (a, b) qui s’écrit :
(a, b) = (a, 0) + (0, b).

➢ Que vaut i(b, 0) ?
i (b,0) = (0, 1)(b, 0)
i (b,0) = (0 - 0, b + 0)
i (b,0) = (0, b)

➢ Comment s’écrit (a, b) avec i ?
(a, b) s’écrit a + ib.

2. Partie réelle, partie imaginaire et conjugué

Propriétés : Soient a, a', b et b' $\in \mathbb{R}$.

- a + ib = 0 ⇔ a = 0, b = 0, a + ib = (a, b) = 0, donc a + ib = (0, 0).
- a + ib = a' + ib' ⇔ a = a' ; b = b' ; $\begin{cases} (a+ib) = (a,b) \\ (a'+ib') = (a',b') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a = a' \\ b = b' \end{matrix}$.

Propriétés et définition : Soit z $\in \mathbb{C}$, il existe un couple unique (a, b) $\in \mathbb{R}^2$ tel que z = a+ ib.

- a + ib est appelée forme algébrique de z où a est la partie réelle, notée Re(z) et b la partie imaginaire, notée Im(z).
- On note l'ensemble des imaginaires i$\mathbb{R}$.
- Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire pure est nulle, autrement dit z $\in \mathbb{R}$ ⇔ Im(z) = 0.
- Un nombre complexe est imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle, autrement dit z $\in$ i$\mathbb{R}$ ⇔ Re(z) = 0.

  Soient a, a', b et b' $\in \mathbb{R}$:

- Somme : (a + ib) + (a'+ ib') = (a + a') + i (b + b').
  En effet : (a + ib) + (a'+ ib')
  = (a, b) + (a', b')
  = (a + a', b + b')
  = (a + a') + i (b + b')

- Produit : (a + ib) (a'+ ib') = (aa' – bb') + i (ab' + a'b).
  En effet : (a + ib) (a'+ ib')
  = (aa' – bb', ab' + a'b)
  = (aa' – bb') + i (ab' + a'b)

- i^2 = -1 puisque :
  i^2 = (0, 1)(0, 1)
  i^2 = (0 – 1, 0 + 0)
  i^2 = (-1, 0)
  i^2 = -1

⚠ i n'est pas un réel !

- Soit $z \in \mathbb{C}$, de notation algébrique $a + ib$ où a et $b \in \mathbb{R}$.
  On appelle conjugué de z le nombre complexe $a - ib$, noté $\overline{z}$.

  Soient $z \in \mathbb{C}$, a et $b \in \mathbb{R}$:

- Le conjugué de $\overline{z}$ est $\overline{\overline{(z)}} = z$.

- $z + z' = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$,

  d'où $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+z'}{2}$.

- $z - z' = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2\,\mathrm{Im}(z)$,

  d'où $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-z'}{2i}$.

- $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow (a + ib) - (a - ib) = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow 2ib = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

- $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + ib = -a + ib$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow 2a = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow a = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$
  $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

3. Calculs sur les complexes

Propriété : Soient z, z' et z'' $\in \mathbb{C}$, a et $b \in \mathbb{R}$:

- L'addition dans $\mathbb{C}$ est :
  1. Commutative, si $z + z' = z' + z$.
  2. Associative, si $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
  3. Symétrique, lorsque tout complexe z admet un symétrique dans $\mathbb{C}$ par rapport à 0, qui est l'opposé de z, noté $-z$; c'est-à-dire lorsque $z = a + ib$ alors $-z = -a - ib$.
     Attention, ne pas confondre $-z$ et $\overline{z}$.
  4. 0 est l'élément neutre si $0 + z = z + 0 = z$.

- En mathématiques, on dit que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.

- La multiplication dans $\mathbb{C}$ est :
  1. Commutative, si zz' = z'z.
  2. Associative, si z(z'z'') = (zz') z''.
  3. 1 est l'élément neutre si 1 x z = z x 1 = z.
  4. Pour tout complexe $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$ et zz' = z'z = 1. On note $z' = z^{-1}$ et il est appelé inverse de z.
  5. Sous forme algébrique :

     $z^{-1} = (a + ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2-i^2b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Propriété :

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

  En effet : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

  $\overline{z+z'} = (a + a') - i(b + b')$

  $\bar{z} = a - ib$

  $\overline{z'} = a' - ib'$

  $\bar{z} + \overline{z'} = (a + a') - i(b + b') = \overline{z+z'}$

- $\overline{zz'} = \bar{z}.\overline{z'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

  Soit $z \neq 1$:

- $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

III) Nombres complexes, forme géométrique

1. Image d'un complexe, affixe d'un vecteur et d'un point

Définition :

- Le point M (a ; b) est appelé image de z dans le plan complexe.
- Soit M (a ; b) dans le plan complexe, le nombre complexe z = a + ib est appelé l'affixe de M et on le note aff(M) = z.

Plan complexe :

Rappel : Dans $\mathbb{R}^2$, M (x ; y) et $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Curseur.gif