INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E IA

Exercícios: Matrizes

Diretoria de Matemática
Diretor: Manuel F. Junior
Membro: Yann N. G. Nóbrega
`tail.ufpb@gmail.com`
`https://aria.ci.ufpb.br/tail/`

TAIL Technology and Artificial Intelligence League

Sumário

Matrizes

Um matriz é composta por valores em um formato de "arranjo", possuindo dimensões, chamadas por linhas e colunas. Vamos ver um exemplo de matriz:

$$A_{m\ x\ n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Note que temos uma matriz com m linhas e n colunas, onde cada linha e coluna, pode ser tratado como um vetor com m ou n entradas, respectivamente. Quando temos $m = n$, temos o caso especial chamado de **matriz quadrada**, que será a base para os proximos conceitos.

Matriz Transposta

A matriz transposta de uma matriz é obtida escrevendo as linhas da matriz como colunas, ou simplesmente,

$$A_{2x3} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \; A^T = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \; dim(A^T) \; = \; 3x2 \tag{2}$$

Matriz diagonal

Podemos definir uma matriz diagonal como uma **matriz quadrada** (m = n), onde todos os a_{ij} são iguais a 0, para todo $i \neq j$, ou seja, apenas a diagonal da matriz é diferente de 0.

$$A_M = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Matriz Identidade

A matriz identidade é um caso especifico da matriz diagonal, onde a_{ij} são iguais a 1, para todos $i = j$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$. Olhe um exemplo para entender melhor:

$$I_M = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Dado que a matriz identidade é um caso especifico da matriz diagonal, logo ela é quadrada, e podemos definir suas dimensões pelo indice **M**, então esse exemplo temos que I é uma matriz M x M.

Soma e subtração

Assim como os números, matrizes também adimitem operações básicas como soma, subtração, multiplicação entre eles, ou ate mesmo vezes outro número qualquer. As operações de soma e subtração nas matrizes ocorrem de forma *Termo a termo*, ou seja, $a_{ij} + b_{ij}$ ou $a_{ij} - b_{ij}$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} = \tag{5}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Multiplicação por constante

Como vocês viram, a soma e subtração são feitos termo a termo, mas quando queremos multiplicar todos os valores de uma matriz por apenas um número ?! simples, cada termo daquela matriz é multiplicado pelo valor que você quer. Da seguitne , vamos tomar um α como qualquer valor no conjunto dos **Reais** :

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{21} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Exemplos

Sejam A e B matrizes de dimensão $3x3$, tal que:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Exemplos

- **Exemplo 1.1:**

$$A + B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+2) & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix} \tag{9}$$

- **Exemplo 1.2:**

$$3 \cdot A - 2 \cdot B = \begin{vmatrix} (3 \cdot 1) & 6 & 9 \\ -12 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (2 \cdot 2) & 0 & 6 \\ 10 & 8 & 12 \\ 10 & 2 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3-4) & 6 & 3 \\ -22 & -5 & -6 \\ -7 & 1 & -8 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Multiplicação de Matrizes

Multiplicar matrizes é um processo um pouco diferente, porém simples, o primeiro cuidado é que o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda. O que devemos fazer em seguida é isolar a primeira linha da primeira matriz e somar a multiplicação do elemento correspondente da primeira coluna da segunda matriz. E assim sucessivamente até completar o resultado.

Multiplicação de Matrizes

Vamos definir *A* e *B* da seguinte forma:

$$B \text{ x } A = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} \text{ x } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} + b_{13} \cdot a_{32} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} + b_{23} \cdot a_{31} & b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} + b_{23} \cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Vamos definir A e B da seguinte forma:

$$B \text{ x } A = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} \text{ x } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} & b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} + b_{13} \cdot a_{32} \\ b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} + b_{23} \cdot a_{31} & b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} + b_{23} \cdot a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemplos

Sejam A e B matrizes de dimensão 3x2 e 2x3, respectivamente, tal que:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.1:**

$$A \; x \; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; x \; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 \cdot 2) + (2 \cdot 1) & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \tag{12}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.1:**

$$A\ x\ B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\ x \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0) & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.1:**

$$A \; x \; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \; x \; \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2) \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.2:**

$$B \; x \; A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (3 \cdot 1) & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.2:**

$$B\ x\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & (2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (3 \cdot 1) \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.2:**

$$B\ x\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ (1 \cdot 1) + (0 \cdot 0) + (2 \cdot 1) & 4 \end{vmatrix} \quad (17)$$

Exemplos

- **Exemplo 2.2:**

$$B\ x\ A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) + (2 \cdot 1) \end{vmatrix} \tag{18}$$

Exemplos

- **Exemplo 2.1:**

$$A \; x \; B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \tag{19}$$

- **Exemplo 2.2:**

$$B \; x \; A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \tag{20}$$

Note que $A \; x \; B \neq B \; x \; A$, e também que $dim(A \; x \; B) \neq dim(B \; x \; A)$, a menos que A e B sejam matrizes quadradas.

Determinante

O determinante de uma matriz é o número associado a esta matriz **quadrada**, como o achamos? Há alguns algoritmos utilizados para encontrar esse número, por Sarrus, referenciado na pág. 04, seção 1.2 do ebook Introdução à Matemática para a Inteligência Artificial. Por cofatores, isolamos uma linha ou coluna (aquela com valores mais simples) e para cada elemento deste vetor calculamos o determinante da matriz de ordem menor que não está na linha, nem na coluna deste elemento. Multiplicamos, então, o elemento com o determinante e somamos todos os resultados do vetor escolhido.

Exemplos

Sejam A e B matrizes de dimensão $3x3$, ambas, tal que:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \; B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Exemplos

- **Exemplo 3.1:**

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right|$$

Exemplos

Diagonais principais (**dp**)

$$det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & \mathbf{1} & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$(1 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot -4 \cdot 1)$$

Exemplos

Diagonais secundárias

$$det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & \mathbf{2} \\ -4 & 1 & 2 & \mathbf{-4} & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$(2 \cdot -4 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 1)$$

Exemplos

$$\left[(1 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot -4 \cdot 1)\right] - \left[(2 \cdot -4 \cdot 2) + (1 \cdot 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 \cdot 1)\right] =$$

$$\left[2 + 4 + (-12)\right] - \left[(-16) + 2 + 3\right] =$$

$$-6 - (-11) = 5$$

Exemplos

- **Exemplo 3.2:**

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{(i+j)} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Matriz Inversa

A inversa de uma matriz é aquela que resulta a matriz identidade I_M quando multiplicada pela matriz original. Para encontrar os seus termos, podemos facilmente realizar um sistema linear.

Exemplos

Sejam A e B matrizes de dimensão $2x2$, ambas, tal que:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Exemplos

- **Exemplo 4.1:**

$$A \; x \; A^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \; x \; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1 \cdot a) + (2 \cdot c) & (1 \cdot b) + (2 \cdot d) \\ (3 \cdot a) + (1 \cdot c) & (3 \cdot b) + (1 \cdot d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot a + 2 \cdot c = 1 & a = -1/5 \\ 3 \cdot a + 1 \cdot c = 0 & c = 3/5 \\ 1 \cdot b + 2 \cdot d = 0 & b = 2/5 \\ 3 \cdot b + 1 \cdot d = 1 & d = -1/5 \end{array}$$

Exemplos

- **Exemplo 4.2:**

$$B \; x \; B^{-1} = I_2 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \; x \; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

$$\begin{vmatrix} (2 \cdot a) + (0 \cdot c) & (2 \cdot b) + (0 \cdot d) \\ (5 \cdot a) + (4 \cdot c) & (5 \cdot b) + (4 \cdot d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot a + 0 \cdot c &= 1 & a &= 1/2 \\ 5 \cdot a + 4 \cdot c &= 0 & c &= -5/8 \\ 2 \cdot b + 0 \cdot d &= 0 & b &= 0 \\ 5 \cdot b + 4 \cdot d &= 1 & d &= 1/4 \end{aligned}$$

Regressão Linear

Com tantos expostos, tantas definições, fica a pergunta: Onde eu usarei isso?. Aqui está, vamos mostrar um exemplo claro do uso da matemática, de modo bem simples, de um método estatístico muito frequente para resolução de problemas lineares: A Regressão Linear.

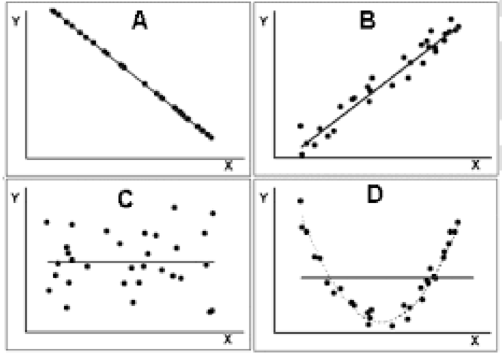
Regressão Linear

Na estatística, a regressão é uma equação utilizada para estimar valores para uma variavel Y (Variável dependente ou explicada), dado um valor para X (Variável independente ou explicativa). A regressão linear tem esse nome "linear", pelo fato de querer assumir uma relação Linear entre as variáveis, ou seja, Y é uma função linear, tendo alguns valores como parâmetros. A equação abaixo define a expressão para regressão linear multipla, escrita em sua forma matricial:

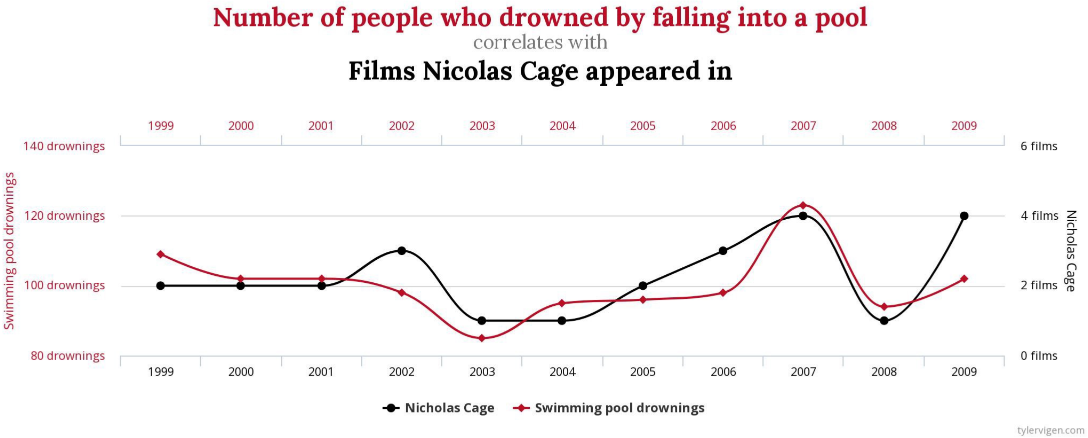
$$Y = X \cdot \hat{\beta}$$

Regressão Linear

Podemos ver 4 possiveis comportamentos dos dados:



Regressão Linear



1

[1] revistacriatica.com.br/correlacoes-incriveis-permitem-mentir-com-a-estatistica/

Regressão Linear

Onde podemos definir Y como uma matriz n x 1 ou simplesmente um vetor com n entradas, X uma matriz de dimensões n x $p+1$ (sendo a primeira coluna preenchida sempre de 1), $\hat{\beta}$ uma matriz de dimensões $p+1$ x 1 ou um vetor com $p+1$ entradas.

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}, \; X = \begin{vmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{vmatrix}, \; \hat{\beta} = \begin{vmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{vmatrix} \tag{23}$$

Regressão Linear

Dado que conhecemos os valores de X e queremos estimar Y, apenas nos resta estimar os valores de , então utilizamos a seguinte expressão para o caso da regressão múltipla:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \tag{24}$$

Exemplo

- **Exemplo 4.1:** Uma equipe de segurança de redes decidiu desenvolver varias formas para conter ataques aos servidores, e agora decidiram estimar um valor para o sucesso dos meios desenvolvidos. Para isso foi desenvolvido um **Índice de sucesso** baseado em dois fatores:
  - Tempo de experimento (duração);
  - Número de ataques no período.

  Logo em seguida, definido como seria feito o experimento, observaram os seguintes dados amostrais:

Exemplo

Esquema	Nº Ataques	Duração	Índice
A	5	118	8.1
B	13	132	6.8
C	20	119	7.0
D	28	153	7.4
E	41	91	7.7
F	49	118	7.5
G	61	132	7.6
H	62	105	8.0

Exemplo

O primeiro passo, dado os dados amostrais, é definir X e Y da seguinte forma matricial:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix}, \qquad Y = \begin{vmatrix} 8.1 \\ 6.8 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ 7.7 \\ 7.5 \\ 7.6 \\ 8.0 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Lembre-se que queremos encontrar:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y$$

Exemplo

Então, vamos calcular primeiro $(X^T \cdot X)^{-1}$, uma multiplicação matricial, logo em seguida, basta calcularmos a inversa do resultado.

$$X^T \cdot X = \begin{vmatrix} 8 & 279 & 968 \\ 279 & 13025 & 33045 \\ 968 & 33045 & 119572 \end{vmatrix} \Longrightarrow (X^T \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 7.7134 & -0.0227 & -0.0562 \\ -0.0227 & 0.0003 & 0.0001 \\ -0.0562 & 0.0001 & 0.0004 \end{vmatrix}$$

E então, calculamos agora $X^T \cdot Y$.

$$X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 60.1 \\ 2118.9 \\ 7247.5 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Por fim, $\hat{\beta}$ é estimado da seguinte forma:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix}$$

Agora que está estimado o $\hat{\beta}$, podemos estimar $\hat{Y}$ da seguinte forma:

$$\hat{Y} = X \cdot \hat{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.4 \\ 7.3 \\ 7.4 \\ 7.2 \\ 7.8 \\ 7.6 \\ 7.5 \\ 7.8 \end{vmatrix}$$