

TAIL — INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Diretoria de Matemática - Tail

11/09/2020

1 Introdução a matrizes

Uma matriz $A_{m \times n}$ é um arranjo retangular com m linhas e n colunas da forma

$$A_{m \times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

A i -ésima linha da matriz A é matriz $1 \times n$, sendo considerado como vetor

$$Li = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} \quad (2)$$

e a j -ésima coluna da matriz A é matriz $m \times 1$, também considerado como um vetor

$$Cj = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{vmatrix} \quad (3)$$

Podemos também dizer que uma matriz é formada por m vetores horizontais e n vetores verticais, normalmente, vemos a primeira forma, m vetores com n elementos cada.

Definição 1.1 (diagonal principal). A *diagonal principal* de uma matriz quadrada A é formada pelos componentes a_{ij} onde $i = j$.

Exemplo 1.1.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Exemplo 1.1.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -45 & 10 \\ 4 & \mathbf{2} & 3 \\ 7 & 25 & \mathbf{3} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Exemplo 1.1.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & -45 & 10 & 3 \\ 4 & \mathbf{3} & 3 & 7 \\ 7 & 25 & \mathbf{8} & 0 \\ 1 & 2 & 5 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Definição 1.2 (matriz diagonal). É uma matriz quadrada formada por componentes $a_{ij} = 0$ onde $i \neq j$.

Exemplo 1.2.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Exemplo 1.2.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Exemplo 1.2.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Definição 1.3 (Matriz Identidade). A matriz identidade é uma matriz diagonal especial, formada por apenas 1s e 0s. Desse modo: $\forall a_{ij} \in \mathbb{R}$ se $i = j$, $a_{ij} = 1$ e se $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.

Exemplo 1.3.1.

$$I_M = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Exemplo 1.3.2.

$$I_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \quad (11)$$

Exemplo 1.3.3.

$$I_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Além das definições, podemos realizar operações básicas com matrizes como **Multiplicação por escalar** e **Soma de matrizes**. Vamos definir $\mathbf{A}_{m \times n}$, com m linhas e n colunas e $\mathbf{B}_{m \times n}$, com as mesmas dimensões de \mathbf{A} , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, alpha pertencente ao conjunto dos números *Reais*, tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} \quad (14)$$

Podemos definir $\alpha \cdot \mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{21} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{vmatrix} \quad (15)$$

Como pode ver, a multiplicação de um escalar pela matriz dar-se termo a termo, multiplicado pelo escalar. Abaixo definimos a soma das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} também termo a termo, da seguinte forma:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Abaixo seguem as propriedades para operações com matrizes e valores escalares.

Propriedade 1.1 (Propriedade Associativa). $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (para todos).

Propriedade 1.2 (Matriz Nula). Existe $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + O = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Propriedade 1.3 (Matriz Oposta). $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe $-A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $A + (-A) = O$, onde $-A = [-a_{ij}]$.

Propriedade 1.4 (Propriedade da Soma). $A + B = B + A$, $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Propriedade 1.5 (Propriedade Distributiva da Multiplicação). $(a + b)A = aA + bA$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Propriedade 1.6 (Propriedade Distributiva da Multiplicação 2). $a(A + B) = aA + aB$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Propriedade 1.7 (Propriedade da igualdade). $a(A + B) = aA + aB$, $\forall a \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Propriedade 1.8 (Propriedade da igualdade). $1 \cdot A = A$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1.1 Multiplicação de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$. O produto de A por B , em símbolos, AB , é definido como:

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11}) + (a_{12} \cdot b_{21}) \\ (a_{21} \cdot b_{11}) + (a_{22} \cdot b_{21}) \\ (a_{31} \cdot b_{11}) + (a_{32} \cdot b_{21}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

A operação pode parecer desafiadora a primeira vista, porém o passo a passo a ser seguido é simples

O mais importante é ter atenção nas dimensões das matrizes, $\dim(A)$ é 3×2 , e $\dim(B)$ é 2×1 , para podermos multiplicá-las o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda, em termos matemáticos é comum ver: $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$, o que resulta numa matriz $C_{m \times p}$, ou seja, nesse exemplo a matriz resultante tem dimensões $\dim(C) = 3 \times 1$.

O passo a passo a ser seguido é:

1. Identificar a primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz
2. Multiplicar o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna
3. Somar as multiplicações até o n-ésimo termo das matrizes
4. Repetir com o restante da matriz

Exemplo 1.3.4.

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3 \cdot 1) + (-1 \cdot 2) \end{vmatrix} \quad (19)$$

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ (0 \cdot 1) + (2 \cdot 2) \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ (1 \cdot 1) + (1 \cdot 2) \end{vmatrix} \quad (21)$$

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \quad (22)$$

Desse modo, se AxB for uma multiplicação válida não implica que BxA também a seja, apenas se A e B forem matrizes quadradas

1.2 Determinante de uma matriz

Definição 1.4 (Determinante). É um número associado à matriz quadrada, que envolve operações incluindo todos os elementos desta

Exemplo 1.4.1 (Determinante de matriz 2x2). *Simplemente multiplicamos os valores da diagonal principal e subtraímos o valor da multiplicação dos elementos restantes*

$$\det[A] = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0) - (2 \cdot 2) = -4 \quad (23)$$

Exemplo 1.4.2 (Determinante de matriz 3x3). Método de Sarrus

$$\det[A] = \det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (24)$$

"Duplica-se" as duas primeiras colunas a direita da matriz para facilitar o agrupamento dos elementos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (25)$$

Multiplica-se as três diagonais da esquerda para a direita e as três da direita para a esquerda. Por fim, soma-se os três primeiros resultados e subtrai-se a soma dos outros três.

$$\left[(1 \cdot 0 \cdot 1) + (2 \cdot 1 \cdot 0) + (3 \cdot 2 \cdot 1) \right] - \left[(2 \cdot 2 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot 0 \cdot 0) \right] \quad (26)$$

$$(0 + 0 + 6) - (4 + 1 + 0) = 6 - 5 = 1 \quad (27)$$

1.3 Outras operações de matrizes

Definição 1.5 (Matriz transposta). A matriz transposta de uma matriz é obtida escrevendo as linhas da matriz como colunas, ou simplesmente,

Exemplo 1.5.1.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (28)$$

Definição 1.6 (Matriz Adjunta). A matriz adjunta de uma matriz A - adj(A) é a transposta da matriz dos cofatores A_{ij} de A.

Definição 1.7 (Matriz Inversa). A matriz inversa tem a propriedade de quando multiplicada a matriz base resultar na matriz identidade.

$$A^{-1} \times A = I \quad (29)$$

Ela é definida como:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \quad (30)$$

Há outra forma de adquirir a matriz inversa, de maneira bem mais simples e intuitiva:

Exemplo 1.7.1. Começamos com o seguinte sistema linear: (Sendo A uma matriz quadrada e I a matriz identidade de mesma dimensão que A)

$$A \times A^{-1} = I \quad (31)$$

Sabemos os valores de A, sabemos também os valores de I, então usaremos as regras simples da multiplicação de matriz para achar A^{-1}

$$A \times A^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (32)$$

O resultado da multiplicação é esse:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{11} + (-1) \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) & (3 \cdot a_{12} + (-1) \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) & (3 \cdot a_{13} + (-1) \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) \\ (0 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31}) & (0 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32}) & (0 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33}) \\ (1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) & (1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) & (1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) \end{vmatrix} \quad (33)$$

Agora igualamos cada coluna da matriz multiplicação a cada coluna da matriz identidade, formando os três sistemas lineares.

Primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{11} + (-1) \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) = 1 \\ (0 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31}) = 0 \\ (1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) = 0 \end{vmatrix} \quad (34)$$

Segunda coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{12} + (-1) \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) = 0 \\ (0 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32}) = 1 \\ (1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) = 0 \end{vmatrix} \quad (35)$$

Terceira coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{13} + (-1) \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) = 0 \\ (0 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33}) = 0 \\ (1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) = 1 \end{vmatrix} \quad (36)$$

1.4 Exemplos

Com tantos conceitos expostos, tantas definições, fica a pergunta: Onde eu usarei isso? Aqui está um exemplo claro do uso da matemática, de modo bem simples, de um método estatístico muito frequente para resolução de problemas lineares: A Regressão Linear.

1.4.1 Regressão Linear

Na estatística, a regressão é uma equação utilizada para estimar valores para uma variável Y (Variável dependente ou explicada), dado um valor para X (Variável independente ou explicativa). A regressão linear tem esse nome "linear", pelo fato de querer assumir uma relação Linear entre as variáveis, ou seja, Y é uma função linear, tendo alguns valores como parâmetros. A equação abaixo define a expressão para regressão linear múltipla, escrita em sua forma matricial:

$$Y = X \cdot \hat{\beta}$$

Onde podemos definir Y como uma matriz $n \times 1$, ou também, como simplesmente um vetor com n entradas; X , uma matriz de dimensões $n \times p + 1$ (sendo a primeira coluna preenchida sempre com 1s); β , uma matriz de dimensões $p + 1 \times 1$, ou um vetor com $p + 1$ entradas.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad (37)$$

Dado que conhecemos os valores de X e queremos estimar Y , apenas nos resta estimar os β , então utilizamos a seguinte expressão para o caso da regressão múltipla:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \quad (38)$$

Exemplo 1.7.2. Uma equipe de segurança de redes, decidiu desenvolver várias formas de conter ataques aos servidores e rede, e então decidiram encontrar uma forma de avaliar os mecanismos e estimar um valor para o índice de sucesso dos meios desenvolvidos. Para isso foi desenvolvido um **Índice de sucesso** baseado em dois fatores:

- Tempo de experimento (duração);
- Número de ataques no período.

Logo em seguida, definindo como seria feito o experimento, observaram os seguintes dados amostrais:

Esquema	Nº Ataques	Duração	Índice
A	5	118	8.1
B	13	132	6.8
C	20	119	7.0
D	28	153	7.4
E	41	91	7.7
F	49	118	7.5
G	61	132	7.6
H	62	105	8.0

Logo, dado os dados amostrais, podemos definir Y e X da seguinte forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 8.1 \\ 6.8 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ 7.7 \\ 7.5 \\ 7.6 \\ 8.0 \end{bmatrix}$$

Note agora que além desses valores, precisamos realizar operações para a estimativa de β , que são evidenciadas pela equação (38). Vamos por partes, primeiro vamos encontrar a transposta de X :

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix} \Rightarrow X^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 13 & 20 & 28 & 41 & 49 & 61 & 62 \\ 118 & 132 & 119 & 153 & 91 & 118 & 132 & 105 \end{vmatrix}$$

Então, vamos calcular primeiro $(X^T \cdot X)^{-1}$, uma multiplicação matricial como na seção 1.1, logo em seguida, basta calcularmos a inversa do resultado, como na seção 1.3.

$$X^T \cdot X = \begin{vmatrix} 8 & 279 & 968 \\ 279 & 13025 & 33045 \\ 968 & 33045 & 119572 \end{vmatrix} \Rightarrow (X^T \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 7.7134 & -0.0227 & -0.0562 \\ -0.0227 & 0.0003 & 0.0001 \\ -0.0562 & 0.0001 & 0.0004 \end{vmatrix}$$

E então, calculamos agora $X^T \cdot Y$.

$$X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 60.1 \\ 2118.9 \\ 7247.5 \end{vmatrix}$$

Por fim, temos que $\hat{\beta}$ é estimado da seguinte forma:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix}$$

Agora que está estimado o $\hat{\beta}$, podemos definir o \hat{Y} estimado pela regressão da seguinte forma:

$$\hat{Y} = X \cdot \hat{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.4 \\ 7.3 \\ 7.4 \\ 7.2 \\ 7.8 \\ 7.6 \\ 7.5 \\ 7.8 \end{vmatrix}$$

1.5 Exercícios

Exemplo 1.7.3 (Soma, Subtração e Multiplicação por escalar). Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (39)$$

Determine:

1. $A + B$
2. $B + C$
3. $A + B - C$
4. $2A - B + 3C$

Exemplo 1.7.4 (Multiplicação de matrizes). Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (40)$$

Determine:

1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $C \times A$
4. $A \times B \times C$

Exemplo 1.7.5 (Determinante). Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (41)$$

Determine:

1. $\det(A)$
2. $\det(B)$
3. $\det(C)$
4. $\det(A \times B)$

Exemplo 1.7.6 (Inversa). Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (42)$$

Determine:

1. A^{-1}
2. B^{-1}
3. C^{-1}
4. $(A \times B)^{-1}$

2 Introdução à Geometria Analítica

2.1 Pontos, Retas e Planos

2.2 Distância

3 Introdução a Funções