INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E IA

Exercícios: Geometria Analítica

Diretoria de Matemática
Diretor: Manuel F. Junior
Membro: Yann N. G. Nóbrega
tail.ufpb@gmail.com
https://aria.ci.ufpb.br/tail/

TAIL Technology and Artificial Intelligence League

Sumário

Ponto, Reta e Plano

- **Pontos:** Começamos com o objeto mais simples, o ponto, sendo este com função de determinar localização no espaço, porém com dimensão **nula** (0), ou seja, por definição, podemos dizer que um ponto não possui **Volume**, **Área** ou **Comprimento**.

Ponto

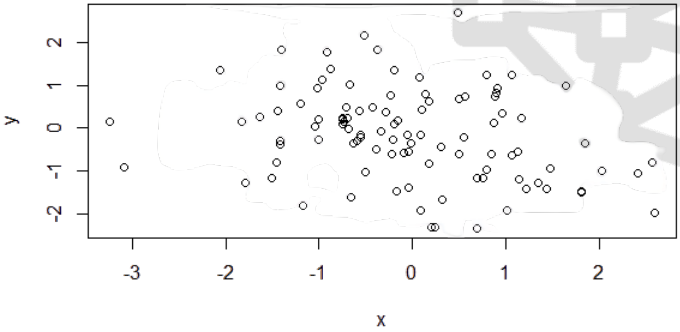


Figura: Gráfico de pontos em um espaço bidimensional

Ponto, Reta e Plano

- **Retas:**

$$ax + b = y$$

As retas são conjuntos de pontos, de tal forma que não formem uma curva. Dentro dessas retas, podemos calcular a distância entre eles, agora definindo um **segmento de reta** entre eles. Encontramos as retas, muitas vezes, como a equação vista acima, $ax + b = y$, essa forma é como veremos bem comum no cálculo de regressões, um tópico de muita importância.

Reta

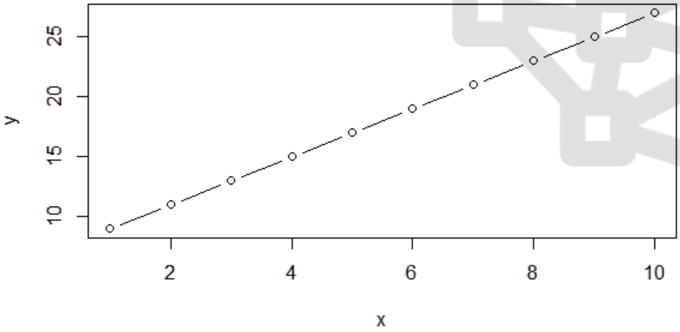


Figura: Gráfico da Reta e sua composição de pontos

Ponto, Reta e Plano

- **Planos:** O plano é um conjunto de retas e pontos, de modo que apenas um único plano passa por duas retas paralelas não coincidentes.
  Outra forma de definir um plano é a partir de uma reta e um ponto não coincidentes, ou seja, o ponto não pertence à reta. Podemos ter num plano infinitas retas e pontos. De modo contrário aos últimos dois itens, a interseção entre dois planos não paralelos gera uma única reta. Entre três planos define-se um único ponto ou três retas, dependendo da forma que se encontrarem.

Plano

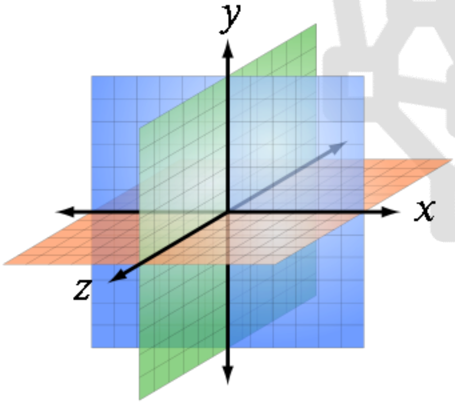


Figura: Planos principais

Distância Euclidiana

- A distância Euclidiana será a mais utilizada!
- Muitos a conhecem, no plano, como Teorema de Pitágoras.
- Na 3° ou maiores dimensões utilizamos o Teorema várias vezes.
- Vamos mostrar a generalização para n dimensões

Distância Euclidiana

Essa é a forma mais usual de se calcular a distância entre dois pontos, normalmente calculamos (muitas vezes sem nem se dar conta) com a decomposição do vetor posição em planos e com o uso sequencial do Teorema de Pitágoras. O cálculo da distância euclidiana é dado a partir da generalização do teorema para n dimensões, mostrado na seguinte expressão:

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Sendo, $P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $Q = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$. Onde n é o número de dimensões.

Distância Euclidiana

- **Unidimensional:** para o caso unidimensional (n = 1), temos o mais trivial, onde calculamos a distância entre dois pontos. Pela fórmula, temos o seguinte:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|$$

Sendo $P = x_1$ e $Q = y_1$.

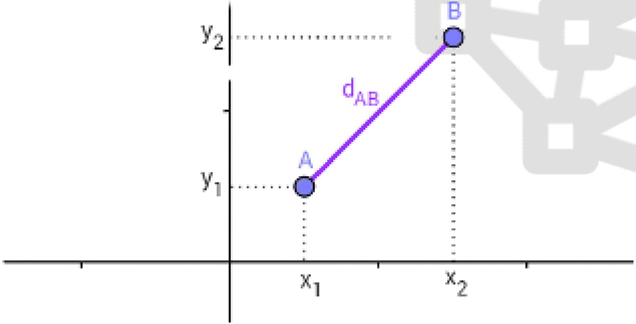
Distância Euclidiana

- **Bidimensional:** Para o caso bidimensional (n = 2), a fórmula torna-se uma junção aplicação mais ampla do teorema de Pitágoras, tal que:

$$d(A, B) = d_{AB} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Sendo $A = (x_1, x_2)$ e $B = (y_1, y_2)$.

Distância Euclidiana



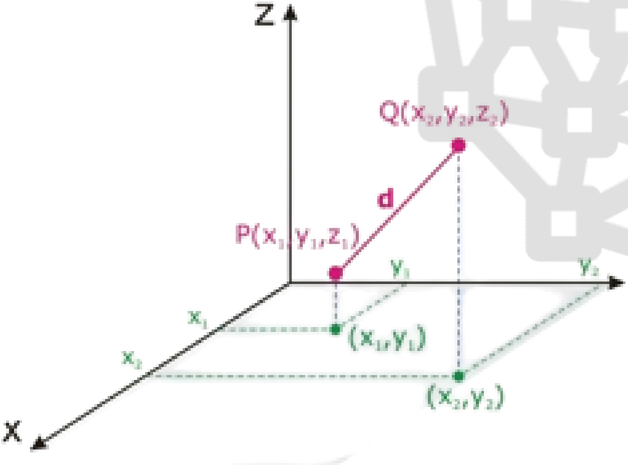
Distância Euclidiana

- **Tridimensional:** Para o caso tridimensional (n=3), devemos utilizar uma forma ainda mais geral para o teorema de Pitágoras, dado por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Onde $P = (x_1, x_2, x_3)$ e $Q = (y_1, y_2, y_3)$

Distância Euclidiana



Distância Manhattan

- Também conhecida como **geometria do táxi**.

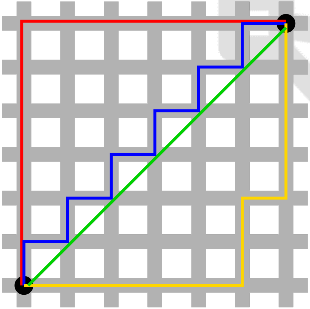


Figura: Distância Manhattan e Euclidiana

Distância Manhattan

- A distância prática entre 2 pontos não é a reta que os liga
- Quantas unidades no eixo x mais a quantidade no eixo y.

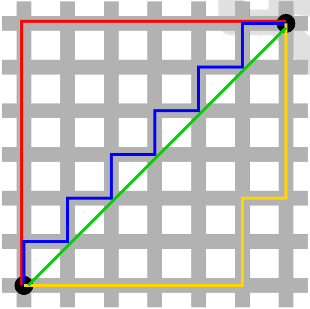


Figura: Distância Manhattan e Euclidiana

Distância Manhattan

$$d(P_0, P_1) = |P_1 - P_0|$$

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0, \ldots, w_0)$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1, \ldots, w_1)$$

$$d(P_0, P_1) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0| + \cdots + |w_1 - w_0|$$

Distância Manhattan

Qual a distância Manhattan entre os pontos:

$$P_1 = (0, 3, 7)\ e$$

$$P_2 = (4, 0, -5)$$

Exemplos

- Utilizamos a definição da distância:

$$d(P_0, P_1) = |0 - 4| + |3 - 0| + |7 - (-5)|$$

$$d(P_0, P_1) = |4 + 3 + 12|$$

- Ou, combinando as duas contas antes de operar:

$$d(P_0, P_1) = 19$$

A Regressão

Esquema	Nº Ataques	Duração	Índice
A	5	118	8.1
B	13	132	6.8
C	20	119	7.0
D	28	153	7.4
E	41	91	7.7
F	49	118	7.5
G	61	132	7.6
H	62	105	8.0

Métodos de Avaliação de Regressão

$$Y = \begin{vmatrix} 8.1 \\ 6.8 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ 7.7 \\ 7.5 \\ 7.6 \\ 8.0 \end{vmatrix} \qquad \hat{Y} = \begin{vmatrix} 7.4 \\ 7.3 \\ 7.4 \\ 7.2 \\ 7.8 \\ 7.6 \\ 7.5 \\ 7.8 \end{vmatrix}$$

Vamos encontrar os seguintes valores:

- R^2
- MSE
- RMSE
- MAE

Coeficiente de Determinação (R^2)

- Avalia a variabilidade da variável dependente (Y) que é explicada pelo nosso modelo, baseado na variável independente (X).
- Definimos $\bar{y}$, y_i e $\hat{y}_i$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

- O R^2 é então:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{d(\hat{Y}, Y)^2}{d(Y, \bar{Y})^2}$$

Coeficiente de Determinação (R^2)

$$\bar{y} = \frac{(8.1 + 6.8 + 7.0 + 7.4 + 7.7 + 7.5 + 7.6 + 8.0)}{8} = 7.5125$$

$$num = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 1.01$$

$$den = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = 1.408755$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = 0.2830524$$

Erro Quadrático Médio (MSE):

- O MSE é a distância da estimativa do nosso modelo para os valores verdadeiros dos dados, da seguinte forma:

$$MSE = \frac{1}{n} \cdot d(Y, \hat{Y})^2$$

Erro Quadrático Médio (MSE):

$$MSE = ((8.1 - 7.4)^2 + (6.8 - 7.3)^2 + (7.0 - 7.4)^2 + (7.4 - 7.2)^2 +$$

$$+(7.7 - 7.8)^2 + (7.5 - 7.6)^2 + (7.6 - 7.5)^2 + (8.0 - 7.8)^2)/8 = 1.01/8$$

$$MSE = 0.12625$$

Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE):

- A Raiz do MSE é a raiz da distância da estimativa do nosso modelo para os valores verdadeiros dos dados, da seguinte forma:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot d(Y, \hat{Y})^2}$$

Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{0.12625}$$

$$RMSE = 0.3553$$

Erro Absoluto Médio (MAE):

- É a média das distâncias entre os valores preditos ($\hat{Y}$) e reais (Y):

$$MAE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} d(y_i, \hat{y}_i)$$

Erro Absoluto Médio (MAE):

$$MAE = (|8.1 - 7.4| + |6.8 - 7.3| + |7.0 - 7.4| + |7.4 - 7.2| +$$

$$+|7.7 - 7.8| + |7.5 - 7.6| + |7.6 - 7.5| + |8.0 - 7.8|)/8 = 2.3/8$$

$$MAE = 0.2875$$

No Python:

- from sklearn.metrics import r2_score, mean_squared_error, mean_absolute_error
- r2 = r2_score(Y_true, Y_pred)
- mse = mean_squared_error(Y_true, Y_pred)
- rmse = mean_squared_error(Y_true, Y_pred, squared = False)
- mae = mean_absolute_error(Y_true, Y_pred)