TAIL — INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA PARA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Diretoria de Matématica - Tail

11/09/2020

1 Introdução a matrizes

Uma matriz $A_{m\times n}$ é um arranjo retangular com m linhas e n colunas da forma

$$A_{m\times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$.

A i-ésima linha da matriz A é matriz 1 × n, sendo considerado como vetor

$$Li = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e a j-ésima coluna da matriz A é matriz m × 1, também considerado como um vetor

$$Cj = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Podemos também dizer que uma matriz é formada por m vetores horizontais e n vetores verticais, normalmente, vemos a primeira forma, m vetores com n elementos cada.

Definição 1.1 (diagonal principal)**.** A *diagonal principal* de uma matriz quadrada A é formada pelos componentes a_{ij} onde $i = j$.

Exemplo 1.1.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \mathbf{a_{mn}} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Exemplo 1.1.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -45 & 10 \\ 4 & \mathbf{2} & 3 \\ 7 & 25 & \mathbf{3} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Exemplo 1.1.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & -45 & 10 & 3 \\ 4 & \mathbf{3} & 3 & 7 \\ 7 & 25 & \mathbf{8} & 0 \\ 1 & 2 & 5 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Definição 1.2 (matriz diagonal)**.** É uma matriz quadrada formada por componentes $a_{ij} = 0$ onde $i \neq j$.

Exemplo 1.2.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a_{mn}} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Exemplo 1.2.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Exemplo 1.2.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Definição 1.3 (Matriz Identidade)**.** A matriz identidade é uma matriz diagonal especial, formada por apenas 1s e 0s. Desse modo: $\forall\ a_{ij} \in \mathbb{R}$ se $i = j,\ a_{ij} = 1$ e se $i \neq j,\ a_{ij} = 0$.

Exemplo 1.3.1.

$$I_M = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Exemplo 1.3.2.

$$I_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Exemplo 1.3.3.

$$I_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Além das definições, podemos realizar operações básicas com matrizes como **Multiplicação por escalar** e **Soma de matrizes**. Vamos definir $\mathbf{A}_{mxn}$, com m linhas e n colunas e $\mathbf{B}_{mxn}$, com as mesmas dimensões de $\mathbf{A}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, alpha pertencente ao conjunto dos números *Reais*, tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Podemos definir $\alpha \cdot \mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{21} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Como pode ver, a multiplicação de um escalar pela matriz dar-se termo a termo, multiplicado pelo escalar. Abaixo definimos a soma das matrizes **A** e **B** também termo a termo, da seguinte forma:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} = \tag{16}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Abaixo seguem as propriedades para operações com matrizes e valores escalares.

Propriedade 1.1 (Propriedade Associativa)**.** $(A+B)+C = A+(B+C), \ \forall \ A, \ B, \ C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (para todos).

Propriedade 1.2 (Matriz Nula)**.** Existe $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A+O = A, \ \forall \ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Propriedade 1.3 (Matriz Oposta)**.** $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, existe $-A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A+(-A) = O$, onde $-A = [-a_{ij}]$.

Propriedade 1.4 (Propriedade da Soma)**.** $A+B = B+A$, $\forall \ A, \ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Propriedade 1.5 (Propriedade Distributiva da Multiplicação)**.** $(a+b)A = aA+bA$, $\forall \ a, b \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Propriedade 1.6 (Propriedade Distributiva da Multiplicação 2)**.** $a(A+B) = aA+aB$, $\forall \ a \in R$ e $A, \ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Propriedade 1.7 (Propriedade da igualdade)**.** $a(A+B) = aA+aB$, $\forall \ a \in R$ e $A, \ B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Propriedade 1.8 (Propriedade da igualdade)**.** $1 \cdot A = A$, $\forall \ A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1.1 Multiplicação de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times p}$. O produto de A por B, em símbolos, AB, é definido como:

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}\cdot b_{11})+(a_{12}\cdot b_{21}) \\ (a_{21}\cdot b_{11})+(a_{22}\cdot b_{21}) \\ (a_{31}\cdot b_{11})+(a_{32}\cdot b_{21}) \end{vmatrix} \tag{18}$$

A operação pode parecer desafiadora a primeira vista, porém o passo a passo a ser seguido é simples

O mais importante é ter atenção nas dimensões das matrizes, dim(A) é 3x2, e dim(B) é 2x1, para podermos multiplicá-las o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda, em termos matemáticos é comum ver: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$, o que resulta numa matriz Cm×p, ou seja, nesse exemplo a matriz resultante tem dimensões dim(C) = 3x1.

O passo a passo a ser seguido é:

1. Identificar a primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz
2. Multiplicar o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna
3. Somar as multiplicações até o n-ésimo termo das matrizes
4. Repetir com o restante da matriz

Exemplo 1.3.4.

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3\cdot 1)+(-1\cdot 2) \\ \\ \end{vmatrix} \tag{19}$$

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ (0\cdot 1)+(2\cdot 2) \\ \\ \end{vmatrix} \tag{20}$$

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ (1\cdot 1)+(1\cdot 2) \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \tag{22}$$

Desse modo, se AxB for uma multiplicação válida não implica que BxA também a seja, apenas se A e B forem matrizes quadradas

1.2 Determinante de uma matriz

Definição 1.4 (Determinante)**.** É um número associado à matriz quadrada, que envolve operações incluindo todos os elementos desta

Exemplo 1.4.1 (Determinante de matriz 2x2)**.** *Simplesmente multiplicamos os valores da diagonal principal e subtraimos o valor da multiplicação dos elementos restantes*

$$det[A] = det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1\cdot 0)-(2\cdot 2) = -4 \tag{23}$$

Exemplo 1.4.2 (Determinante de matriz 3x3)**.** Método de Sarrus

$$det[A] = det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{24}$$

"Duplica-se" as duas primeiras colunas a direita da matriz para facilitar o agrupamento dos elementos

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right| \tag{25}$$

Multiplica-se as três diagonais da esquerda para a direita e as três da direita para a esquerda. Por fim, soma-se os três primeiros resultados e subtrai-se a soma dos outros três.

$$\Big[(1\cdot 0\cdot 1)+(2\cdot 1\cdot 0)+(3\cdot 2\cdot 1)\Big] - \Big[(2\cdot 2\cdot 1)+(1\cdot 1\cdot 1)+(3\cdot 0\cdot 0)\Big] \tag{26}$$

$$\Big(0+0+6\Big) - \Big(4+1+0\Big) = 6-5 = 1 \tag{27}$$

1.3 Outras operações de matrizes

Definição 1.5 (Matriz transposta)**.** A matriz transposta de uma matriz é obtida escrevendo as linhas da matriz como colunas, ou simplesmente,

Exemplo 1.5.1.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{28}$$

Definição 1.6 (Matriz Adjunta)**.** A matriz adjunta de uma matriz A - adj(A) é a transposta da matriz dos cofatores A_{ij} de A.

Definição 1.7 (Matriz Inversa)**.** A matriz inversa tem a propriedade de quando multiplicada a matriz base resultar na matriz identidade.

$$A^{-1} \times A = I \tag{29}$$

Ela é definida como:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) \tag{30}$$

Há outra forma de adquirir a matriz inversa, de maneira bem mais simples e intuitiva:

Exemplo 1.7.1. Começamos com o seguinte sistema linear: (Sendo A uma matriz quadrada e I a matriz identidade de mesma dimensão que A)

$$A \times A^{-1} = I \tag{31}$$

Sabemos os valores de A, sabemos também os valores de I, então usaremos as regras simples da multiplação de matriz para achar A^{-1}

$$A \times A^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{32}$$

O resultado da multiplicação é esse:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{11} + (-1) \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) & (3 \cdot a_{12} + (-1) \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) & (3 \cdot a_{13} + (-1) \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) \\ (0 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31}) & (0 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32}) & (0 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33}) \\ (1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) & (1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) & (1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) \end{vmatrix} \tag{33}$$

Agora igualamos cada coluna da matriz multiplicação a cada coluna da matriz identidade, formando os três sistemas lineares.
Primeira coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{11} + (-1) \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) = 1 \\ (0 \cdot a_{11} + 2 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{31}) = 0 \\ (1 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31}) = 0 \end{vmatrix} \tag{34}$$

Segunda coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{12} + (-1) \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) = 0 \\ (0 \cdot a_{12} + 2 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{32}) = 1 \\ (1 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{32}) = 0 \end{vmatrix} \tag{35}$$

Terceira coluna:

$$\begin{vmatrix} (3 \cdot a_{13} + (-1) \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) = 0 \\ (0 \cdot a_{13} + 2 \cdot a_{23} + 1 \cdot a_{33}) = 0 \\ (1 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23} + 0 \cdot a_{33}) = 1 \end{vmatrix} \tag{36}$$

1.4 Exemplos

Com tantos conceitos expostos, tantas definições, fica a pergunta: Onde eu usarei isso? Aqui está um exemplo claro do uso da matemática, de modo bem simples, de um método estatístico muito frequente para resolução de problemas lineares: A Regressão Linear.

1.4.1 Regressão Linear

Na estatística, a regressão é uma equação utilizada para estimar valores para uma variável Y (Variável dependente ou explicada), dado um valor para X (Variável independente ou explicativa). A regressão linear tem esse nome "linear", pelo fato de querer assumir uma relação Linear entre as variáveis, ou seja, Y é uma função linear, tendo alguns valores como parâmetros. A equação abaixo define a expressão para regressão linear múltipla, escrita em sua forma matricial:

$$Y = X \cdot \hat{\beta}$$

Onde podemos definir Y como uma matriz n **x** 1, ou também, como simplesmente um vetor com n entradas; X, uma matriz de dimensões n **x** $p+1$ (sendo a primeira coluna preenchida sempre com 1s); β, uma matriz de dimensões $p+1$ x 1, ou um vetor com $p+1$ entradas.

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}, \; X = \begin{vmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{vmatrix}, \; \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{vmatrix} \tag{37}$$

Dado que conhecemos os valores de X e queremos estimar Y, apenas nos resta estimar os β, então utilizamos a seguinte expressão para o caso da regressão múltipla:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y \tag{38}$$

Exemplo 1.7.2. Uma equipe de segurança de redes, decidiu desenvolver várias formas de conter ataques aos servidores e rede, e então decidiram encontrar uma forma de avaliar os mecanismos e estimar um valor para o índice de sucesso dos meios desenvolvidos. Para isso foi desenvolvido um **Índice de sucesso** baseado em dois fatores:

- Tempo de experimento (duração);
- Número de ataques no período.

Logo em seguida, definindo como seria feito o experimento, observaram os seguintes dados amostrais:

Esquema	Nº Ataques	Duração	Índice
A	5	118	8.1
B	13	132	6.8
C	20	119	7.0
D	28	153	7.4
E	41	91	7.7
F	49	118	7.5
G	61	132	7.6
H	62	105	8.0

Logo, dado os dados amostrais, podemos definir Y e X da seguinte forma matricial:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} 8.1 \\ 6.8 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ 7.7 \\ 7.5 \\ 7.6 \\ 8.0 \end{vmatrix}$$

Note agora que além desses valores, precisamos realizar operações para a estimativa de β, que são evidenciadas pela equação (38). Vamos por partes, primeiro vamos encontrar a transposta de X:

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix} \Longrightarrow X^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 13 & 20 & 28 & 41 & 49 & 61 & 62 \\ 118 & 132 & 119 & 153 & 91 & 118 & 132 & 105 \end{vmatrix}$$

Então, vamos calcular primeiro $(X^T \cdot X)^{-1}$, uma multiplicação matricial como na seção 1.1, logo em seguida, basta calcularmos a inversa do resultado, como na seção 1.3.

$$X^T \cdot X = \begin{vmatrix} 8 & 279 & 968 \\ 279 & 13025 & 33045 \\ 968 & 33045 & 119572 \end{vmatrix} \Longrightarrow (X^T \cdot X)^{-1} = \begin{vmatrix} 7.7134 & -0.0227 & -0.0562 \\ -0.0227 & 0.0003 & 0.0001 \\ -0.0562 & 0.0001 & 0.0004 \end{vmatrix}$$

E então, calculamos agora $X^T \cdot Y$.

$$X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 60.1 \\ 2118.9 \\ 7247.5 \end{vmatrix}$$

Por fim, temos que $\hat{\beta}$ é estimado da seguinte forma:

$$\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Y = \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix}$$

Agora que está estimado o $\hat{\beta}$, podemos definir o $\hat{Y}$ estimado pela regressão da seguinte forma:

$$\hat{Y} = X \cdot \hat{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 118 \\ 1 & 13 & 132 \\ 1 & 20 & 119 \\ 1 & 28 & 153 \\ 1 & 41 & 91 \\ 1 & 49 & 118 \\ 1 & 61 & 132 \\ 1 & 62 & 105 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8.37 \\ 0.005 \\ -0.009 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.4 \\ 7.3 \\ 7.4 \\ 7.2 \\ 7.8 \\ 7.6 \\ 7.5 \\ 7.8 \end{vmatrix}$$

1.5 Exercicios

Exemplo 1.7.3 (Soma, Subtração e Multiplicação por escalar)**.** Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \tag{39}$$

Determine:

1. A + B
2. B + C
3. A + B - C
4. 2A - B + 3C

Exemplo 1.7.4 (Multiplicação de matrizes)**.** Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \tag{40}$$

Determine:

1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $C \times A$
4. $A \times B \times C$

Exemplo 1.7.5 (Determinante)**.** Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \tag{41}$$

Determine:

1. $det(A)$
2. $det(B)$
3. $det(C)$
4. $det(A \times B)$

Exemplo 1.7.6 (Inversa)**.** Dadas as matrizes A, B e C

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \tag{42}$$

Determine:

1. A^{-1}
2. B^{-1}
3. C^{-1}
4. $(A \times B)^{-1}$

2 Introdução à Geometria Analítica

2.1 Vetores Unitários Ortogonais

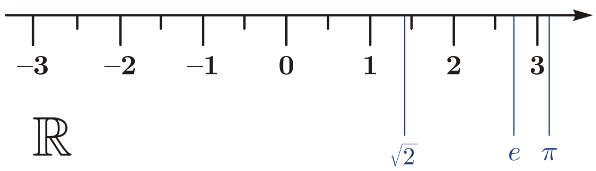
Vamos definir $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ como os vetores unitários ortogonais, ou seja com comprimento de uma unidade de medida (1 u.a) e ortogonais entre eles. Vamos definir a ortogonalidade como vetores que formam um angulo de 90 entre eles, ou seja, $\hat{\imath} \perp \hat{\jmath}$, $\hat{\jmath} \perp \hat{k}$ e $\hat{\imath} \perp \hat{k}$, onde o simbolo $\perp$ significa que um vetor é perpedincular ou ortogonal a outro.

2.2 Sistemas de Coordenadas Cartesianas

O espaço cartesiano é construído por vetores unitários ortogonais entre si. Normalmente estes são chamados $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$. Sendo relacionados aos eixos x, y e z, respectivamente. De forma mais simples, podemos dizer que o sistema cartesiano é uma ferramenta que nos auxilia a encontrar um objeto ou grupo de informações em um espaço de até n-dimensões. O Sistema de Coordenadas Cartesianas é largamente usado por diversas áreas como matemática, física e astronomia, além de outras, como a química.

2.2.1 Reta dos reais ($\mathbb{R}$)

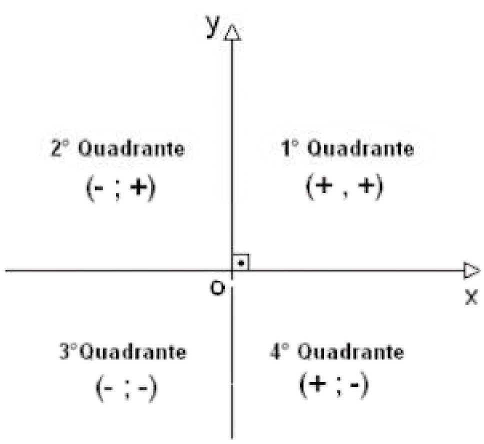
A reta do conjunto dos Reais ($\mathbb{R}$) é o espaço que compreende a primeira dimensão. Nele temos somente as operações simples já conhecidas na álgebra. A distância entre pontos, por exemplo, sempre é trivial, como veremos abaixo. Podemos representar um vetor na reta dos reais como um **segmento orientado da reta**.



Note que, o valor 0 divide a reta dos reais, negativos para a esquerda ($\longleftarrow$) e para a direita, os positivos ($\longrightarrow$).

2.2.2 Espaço Bidimensional ($\mathbb{R}^2$)

No espaço bidimensional, vemos o básico da geometria, a distância entre dois pontos, ou operações de vetores não são mais tão simples, mas na maioria das vezes envolvem somente o Teorema de Pitágoras ou outras operações também bastante conhecidas.

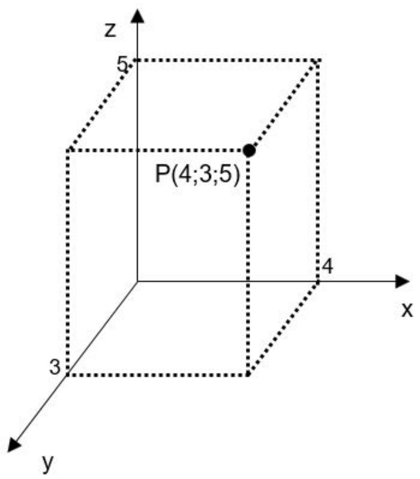


Perceba também que o espaço bidimensional é composto por duas Retas Reais, que possuem uma interseção, determinada como **origem**, suas coordenadas são definidas como $x = 0$ e $y = 0$, ou simplesmente o par de coordenadas (0,0). Note também que esse espaço bidimensional pode ser tratado também como um **Plano infinito**. Além disso, em um espaço bidimensional podemos definir 4 quadrantes fundamentais:

- **Quadrante x+, y+**
- **Quadrante x+, y-**
- **Quadrante x-, y+**
- **Quadrante x-, y-**

2.2.3 Espaço Tridimensional ($\mathbb{R}^3$)

No espaço tridimensional avançamos mais um passo de complexidade, porém ainda temos um objeto de estudo facilmente compreensível espacialmente para o cérebro humano. Podemos resolver muitas situações ainda utilizando o Teorema de Pitágoras.



Ao avançarmos a complexidade do espaço, note que podemos interpretar um ponto em seu espaço como (x,y,z). Note que um espaço tridimensional é composto por retas, geradas a partir da interseção de 3 planos, uma ideia que será explicada mais à frente, que são:

- **(0, y, z)** ;
- **(x, 0, z)** ;
- **(x, y, 0)** .

Espaços *n-dimensionais:* Falando em n-dimensões temos situações que fogem da compreensão humana (tente imaginar um hipercubo em 4 dimensões, por exemplo), tratamos esses exemplos, na maioria das vezes, de forma puramente matemática, e é então onde a álgebra linear é mais aplicada, já que a maioria dos problemas reais que encontraremos possuem inúmeras variáveis independentes de entrada com uma ou mais saídas.

2.3 Sistema de Coordenadas Esféricas e Cilíndricas

Não precisamos necessariamente tratar uma posição no espaço tridimensional (ou em quaisquer n-dimensões) de forma cartesiana (x, y, z). Podemos, utilizar de ângulos para adquirir o mesmo resultado, como por exemplo no sistema de coordenadas esféricas (r, α, θ), que se referem ao raio, ou distância da origem ao ponto, ângulo num primeiro plano e ângulo no segundo plano.

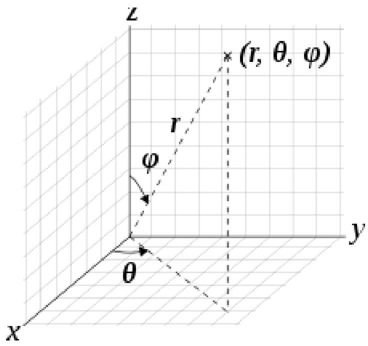


Figura 1: Coordenadas Esféricas

Já no sistema cilíndrico temos (r, Z, θ), onde r é a distância do ponto a origem no primeiro plano, Z a "altura" ou a distância ortogonal do ponto ao segundo plano e θ o ângulo no primeiro plano.

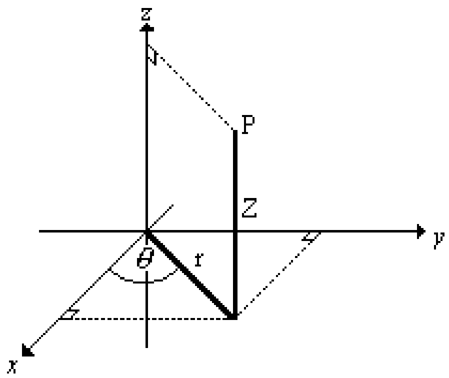


Figura 2: Coordenadas Cilíndricas

2.4 Pontos, Retas e Planos

2.4.1 Pontos

Começamos com o objeto mais simples, o ponto, sendo este com função de determinar localização no espaço, porém com dimensão **nula** (0), ou seja, por definição, podemos dizer que um ponto não possui **Volume**, **Área** ou **Comprimento**.

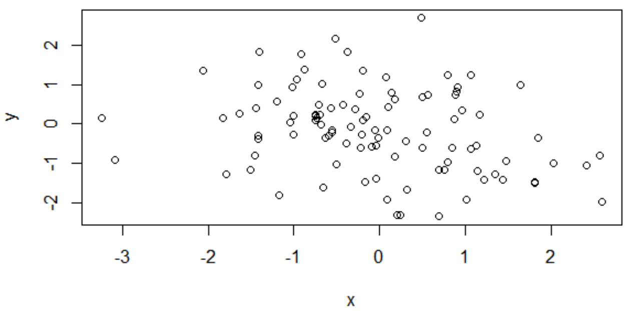


Figura 3: Gráfico de Pontos

2.4.2 Retas

$$ax + b = y$$

As retas são conjuntos de pontos, de tal forma que não formem uma curva. Dentro dessas retas, podemos calcular a distância entre eles, agora definindo um **segmento de reta** entre eles. Encontramos as retas, muitas vezes, como a equação vista acima, $ax + b = y$, essa forma é como veremos bem comum no cálculo de regressões, um tópico de muita importância.

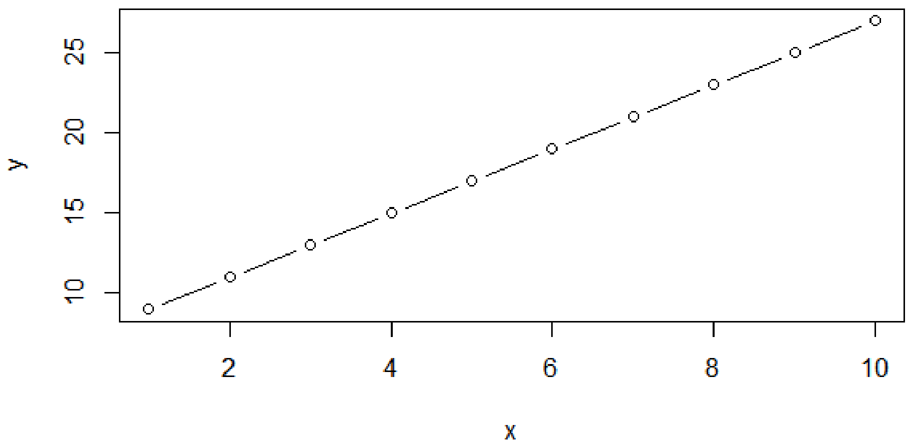


Figura 4: Gráfico da Reta e sua composição de pontos

2.4.3 Planos

O plano é um conjunto de retas e pontos, de modo que apenas um único plano passa por duas retas paralelas não coincidentes.

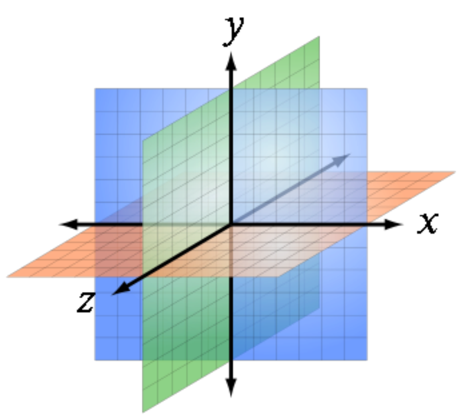


Figura 5: Planos principais

Outra forma de definir um plano é a partir de uma reta e um ponto não coincidentes (i.e. o ponto não pertence à reta). Podemos ter num plano infinitas retas e pontos. De modo contrário aos últimos dois itens, a interseção entre dois planos não paralelos gera uma única reta. Entre três planos define-se um único ponto ou três retas, dependendo da forma que se encontrarem.

2.5 Distância

2.5.1 Distância Euclidiana

Essa é a forma mais usual de se calcular a distância entre dois pontos, normalmente calculamos (muitas vezes sem nem se dar conta) com a decomposição do vetor posição em planos e com o uso sequencial do Teorema de Pitágoras. O cálculo da distância euclidiana é dado a partir da generalização do teorema para n dimensões, mostrado na seguinte expressão:

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Sendo,

$$P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

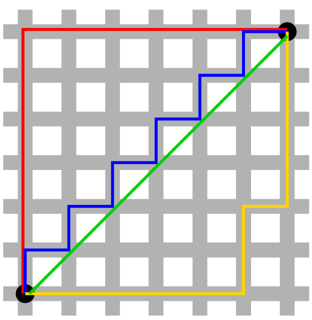
$$Q = (y_1, y_2, y_3, \ldots, x_n)$$

Onde n é o número de dimensões. Então, podemos definir os seguintes casos mais utilizados:

- **Unidimensional:**
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2} = |x_1 - y_1|$$
- **Bidimensional:**
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
- **Tridimensional:**
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$
$$\vdots$$
- **n-dimensional:**
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

2.5.2 Distância Manhattan

Também é conhecida como geometria do táxi.



Imagine um táxi se movendo por uma cidade, a distância prática entre 2 pontos não é a reta que os liga, mas sim quantos quarteirões no eixo x mais a quantidade de quarteirões no eixo y o táxi percorreu.

Definimos P_0 como o vetor posição inicial e P_1 o vetor posição final.

- **Unidimensional:** Defina $P_0 = (x_0)$ e $P_1 = (x_1)$
$$d(P_0, P_1) = |x_1 - x_0|$$

- **Bidimensional:** Defina $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, então

$$d(P_0, P_1) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$$

- **Tridimensional:** Defina $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$d(P_0, P_1) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|$$

$$\vdots$$

- **n-dimensional:** Defina $P_0 = (x_0, y_0, \ldots, w_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, \ldots, w_1)$

$$d(P_0, P_1) = |x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0| + \cdots + |w_1 - w_0|$$

3 Métricas de avaliação de modelos

3.1 Métricas de avaliação de modelos de Regressão

Vimos mais definições e mais fórmulas, e agora vamos a questão de onde iremos utilizar. Abaixo veremos alguns meios de avaliação do modelo de regressão visto na última seção. Para as métricas abaixo, vamos utilizar a **distância euclidiana**.

3.1.1 Coeficiente de Determinação (R^2):

O R-quadrado avalia a variabilidade da variável dependente (Y) que é explicada pelo nosso modelo, baseado na variável independente (X). Nele temos $\bar{Y}$, que é a média dos valores dependentes da nossa base:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

y_i, cada valor real da variável dependente e $\hat{y}_i$ cada valor estimado para y.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i|^2}{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}|^2}$$

3.1.2 Erro Quadrático Médio (MSE):

O MSE é a métrica muito utilizada, baseado na distância da estimativa do nosso modelo baseado nos verdadeiros valores dos dados, dado da seguinte forma:

$$MSE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{1}{n} \cdot d(Y, \hat{Y})^2$$

Onde Y é o vetor formado pelos valores da variável dependente e $\hat{Y}$ os valores estimados por nosso modelo. Por fim n é a dimensão, ou a quantidade dos valores de Y, ou seja, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e $\hat{Y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$.

3.1.3 Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE):

Como forma de correção de unidade de medida, a RMSE surge, corrigindo este fator da unidade de medida. Assim como o anterior, ambos penalizam estimativas fora da realidades. Um exemplo desta correção é dado da seguinte forma: Digamos que temos um modelo que quer estimar o gasto em reais de uma familia, dado o número de membros, supondo uma linearidade nessa dependencia, digamos que o nosso MSE é igual $MSE = \frac{1}{n} \cdot d(Y, \hat{Y})^2 = (143,00 \quad reais)^2$. Perceba que tanto o valor e a unidade de medida dele está elevado ao quadrado, para isso temos o $RMSE$, retirando a raiz desse valor, e deixando o erro como mesma unidade de medida que Y.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot d(Y, \hat{Y})^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |d(Y, \hat{Y})|$$

3.1.4 Erro Absoluto Médio (MAE):

É a média das distâncias entre os valores preditos ($\hat{Y}$) e reais (Y)

$$MAE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{y}_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} d(y_i, \hat{y}_i)$$

3.2 Exercícios

3.2.1 Distância Euclidiana

Determine as distâncias entre os pontos pelo método Euclidiano

- P(1, 2) e Q(3, 3)

  Resolução:

  Um modo simples é calcular as distâncias de cada eixo (assim como em Manhattan) |(1, 2) - (3, 3)| = (2, 1). agora utilizamos Pitágoras: $d = \sqrt{2^2 + 1^2}$, ou seja, d = 5.

  Ou simplesmente $d = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2}$, então $d = \sqrt{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2}$
- P(3, 0, 5) e Q(1, 0, 2)
- P(1, 0, 1) e Q(-2, 0, -1)
- P(1, 2, 3, 4) e Q(3, 3, 0, 3)
- P(3, -1, 0, 2) e Q(1, 1, 4, 1)

3.2.2 Distância Manhattan

Determine agora as distâncias entre os mesmos pontos pelo método Manhattan

- P(1, 2) e Q(3, 3)

  Resolução:

  Como foi visto |(1, 2) - (3, 3)| = (2, 1). Agora somamos os 2 valores, $d_M = 2 + 1 = 3$

  Ou simplesmente $d_M = |P_x - Q_x| + |P_y - Q_y|$, então $d_M = |1 - 3| + |2 - 3|$
- P(3, 0, 5) e Q(1, 0, 2)
- P(1, 0, 1) e Q(-2, 0, -1)
- P(1, 2, 3, 4) e Q(3, 3, 0, 3)
- P(3, -1, 0, 2) e Q(1, 1, 4, 1)

3.2.3 Modelo para avaliação

Utilizando os valores da regressão da seção anterior:

$$Y = \begin{vmatrix} 8.1 \\ 6.8 \\ 7.0 \\ 7.4 \\ 7.7 \\ 7.5 \\ 7.6 \\ 8.0 \end{vmatrix} \qquad \hat{Y} = \begin{vmatrix} 7.4 \\ 7.3 \\ 7.4 \\ 7.2 \\ 7.8 \\ 7.6 \\ 7.5 \\ 7.8 \end{vmatrix}$$

Encontre os valores:

- R^2
- MSE
- RMSE
- MAE

4 Introdução a Funções

4.1 Definição de função

Uma função é uma relação entre dois conjuntos, com uma determinada lei de correspondência dos elementos de um conjunto para com o outro. Podemos definir matematicamente uma função da seguinte forma: Dados os conjuntos A e B, definimos uma f como uma lei se associação entre elementos de A ($x \in A$) para com B ($y \in B$), tal que:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Podemos definir y como $y = f(x)$, ou seja, denotamos y como uma função de x.

4.2 Domínio, Imagem e Contradomínio

As funções matemáticas são compostas por 3 importantes elementos: domínio, contradomínio e imagem. O domínio, denotado por D, representa os elementos do conjunto de partida de uma determinada função, isto é, os valores que o x pode assumir. A imagem, por sua vez, denotada por Im, representa o conjunto destino de elementos da função. Tal relação pode ser verificada na Figura 6 abaixo.

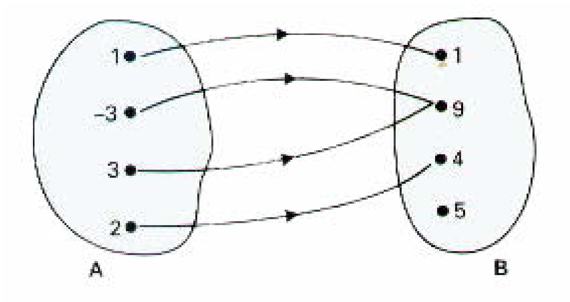


Figura 6: Exemplo de domínio e imagem de uma função.

Já o contradomínio de uma função, representado por Cd, representa os possíveis valores de chegada de uma função f, ou seja, os valores contidos na imagem de f. Em outras palavras, por exemplo, a Figura 6 é composta pelo domínio $D(f) = \{-3, 1, 2, 3\}$, pela imagem $Im(f) = \{1, 4, 9\}$ e pelo contradomínio $Cd(f) = \{1, 4, 5, 9\}$.

4.3 Tipos de funções

As funções podem ser classificadas de três formas distintas: função **injetora**, **bijetora** e **sobrejetora**. A seguir, iremos definir cada uma delas e fornecer alguns exemplos.

4.3.1 Função injetora ou injetiva

Uma função é injetora quando cada elemento do domínio D está relacionado a apenas um elemento da imagem Im, ou seja, para cada x existe um único $f(x)$ associado. A Figura 7 abaixo exemplifica uma função injetiva.

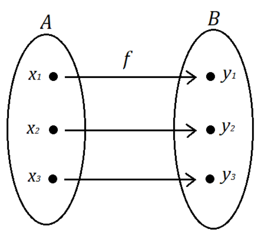


Figura 7: Exemplo de uma função injetiva.

Perceba que cada elemento do contradomínio Cd é atingido uma única vez.

4.3.2 Função sobrejetora ou sobrejetiva

Quando todos os elementos do domínio D de uma função estão associados a um elemento da imagem Im, isto é, quando cada elemento do contradomínio Cd é atingido pelo menos uma vez, dizemos que a função é sobrejetora. A Figura 8 elucida o que acabamos de definir.

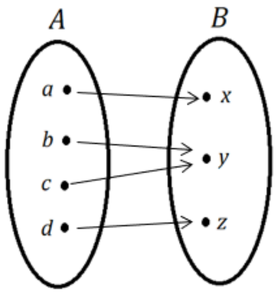


Figura 8: Exemplo de uma função sobrejetora.

4.3.3 Função bijetora ou bijetiva

Quando uma função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ou seja, quando cada elemento do contradomínio Cd é atingido exatamente uma vez, dizemos que ela é bijetora. Podemos visualizar tal definição na Figura 9.

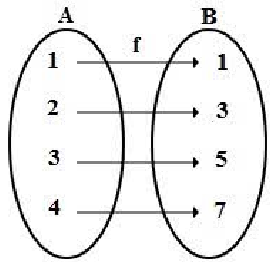


Figura 9: Exemplo de uma função bijetora.

4.3.4 Paridade de um função

Vamos definir os seguintes conjuntos, A e B tal que:

$$\begin{array}{rl} f: & A \longrightarrow B \\ & x \longrightarrow y \end{array}$$

Onde temos que y é função de x, ou seja, $f(x) = y$

- **Função Par:** Uma função é denominada par se: (Repare na figura 10)

$$f(x) = f(-x)$$

- **Função Ímpar:** Uma função é denominada ímpar se: (Repare na figura 11)

$$f(-x) = -f(x)$$

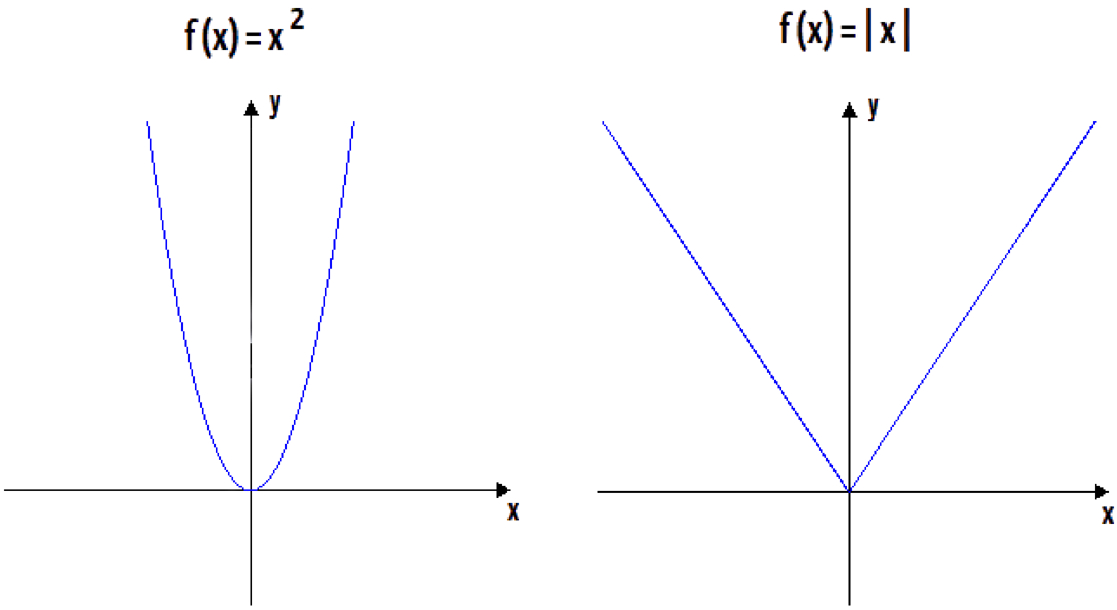


Figura 10: f(x) = f(-x)

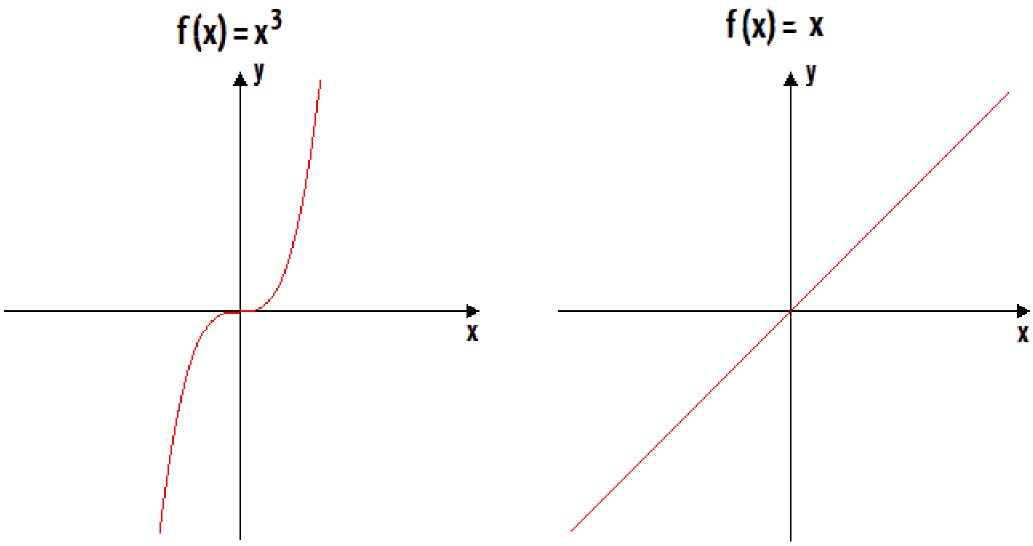


Figura 11: f(-x) = -f(x)

4.3.5 Função linear

Uma função linear é definida pela seguinte lei de associação:

$$f(x|\beta_1, \beta_0) = \beta_1 \cdot x + \beta_0$$

Podemos interpretar o valor de β_1 como o nosso coeficiente angular da reta, ou seja, valor que determina a angulação da reta com relação ao eixo x e o valor de β_0 é o intercept da reta, quando temos $x = 0$. Perceba que podemos perceber 3 comportamentos distintos dessa função, eles são os seguintes:

- **Função linear crescente:** quando $\beta_1 > 0$, temos um comportamento crescente, como visto na Figura 12 (a médida que aumentamos x, aumentos y de forma proporcional).
- **Função linear decrescente:** quando $\beta_1 < 0$, temos um comportamento decrescente, como visto na Figura 13 (a médida que aumentamos x, diminuimos y de forma proporcional).

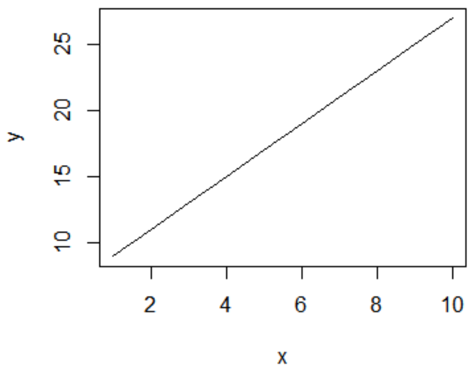


Figura 12: Função linear crescente ($\beta_1 > 0$)

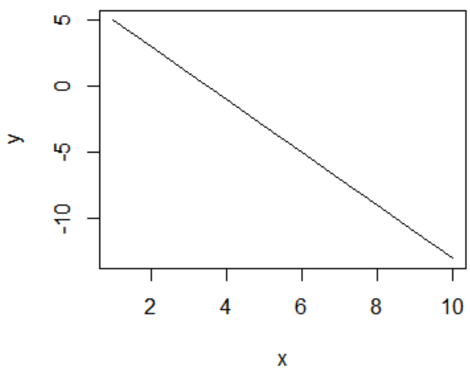


Figura 13: Função linear decrescente

- **Função linear constante:** quando $\beta_1 = 0 \Longrightarrow f(x) = \beta_0$, temos um comportamento constante (a médida que aumentamos x, y permanece inalterado).

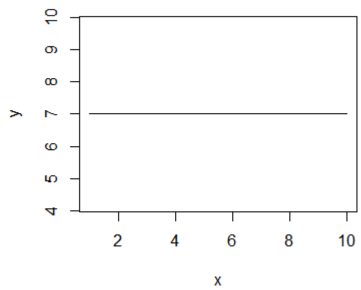


Figura 14: Função linear decrescente

4.3.6 Função exponencial

A função exponencial é dado pela seguinte lei de associação:

$$f(x|\alpha) = \alpha^x$$

Esse tipo de função é largamente utilizado para modelar problemas da área de finanças, onde sua base (α) pode ser qualquer valor dos reais maiores que 0 ($\alpha > 0$), porém se divide em dois intervalos, $0 < \alpha < 1$ e $\alpha > 1$.

- **Função exponencial crescente** ($\alpha > 1$)

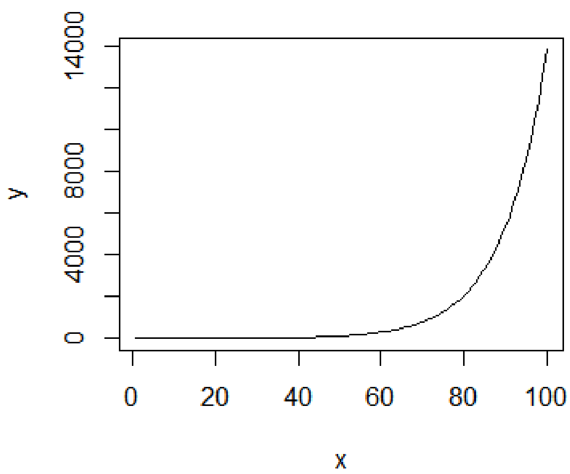


Figura 15: $\alpha > 1$

- **Função exponencial decrescente** ($0 < \alpha < 1$)

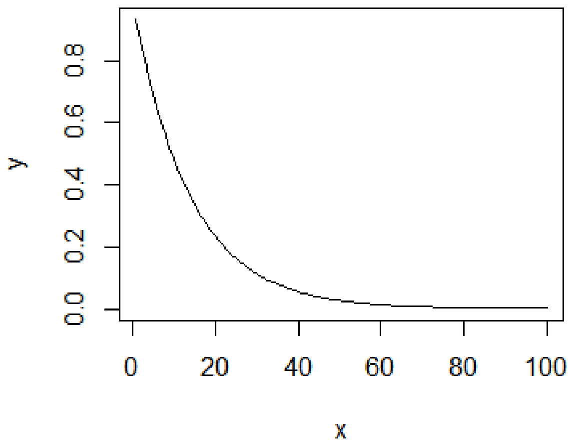


Figura 16: $0 < \alpha < 1$

4.3.7 Função logarítmica

A função logarítmica possui a seguinte lei de associação:

$$f(x|a) = \log_a(x)$$

Esta função possuí um domínio nos números Reais estritamente positivos e diferentes de 0, ou seja, $x \in R_+^*$. Além disso, seu valor de a deve ser positiva e diferente de 1. Podemos notar dois comportamentos dessa curva, um para $a > 1$ e um para $0 < a < 1$.

- **Função logarítmica crescente:** $(a > 1)$

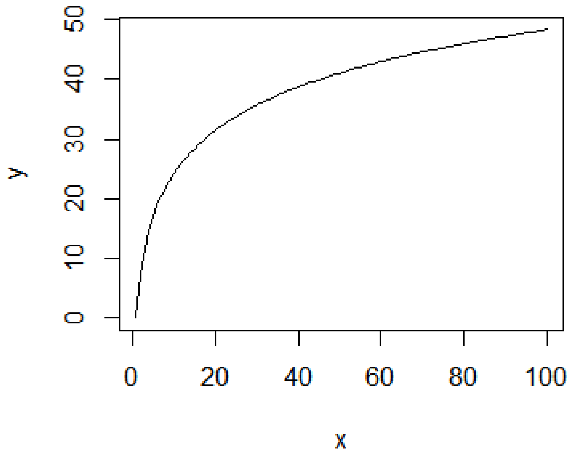


Figura 17: $a > 1$

- **Função logarítmica crescente:** $(0 < a < 1)$

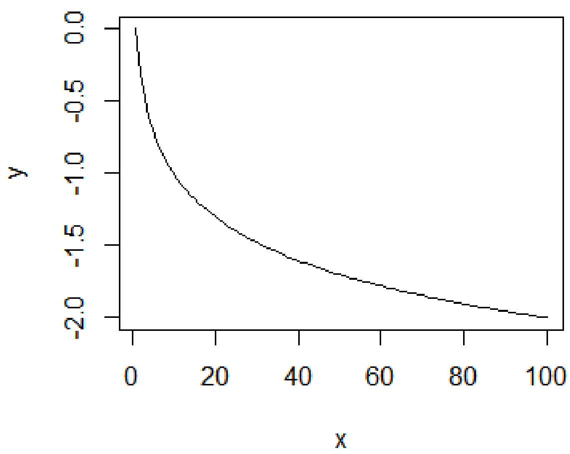


Figura 18: $0 < a < 1$

4.4 Gráfico de funções

O gráfico de uma função definido no plano cartesiano nos ajuda a representar a ordenação de um conjunto de pontos (x, y), onde para cada x, existe um único valor para $y = f(x)$, note que x vária no domínio de f.

- **Exemplo (1):** Perceba que o gráfico abaixo é gráfico de função, note que para cada valor de x existe um único valor para $f(x)$.

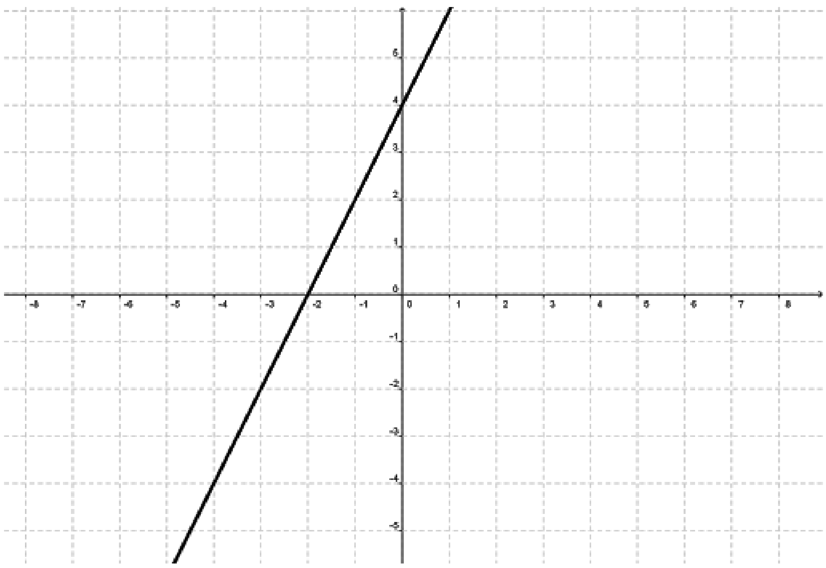


Figura 19: Gráfico de uma função linear crescente

- **Exemplo (2):** Perceba que o gráfico abaixo não é gráfico de uma função e sim gráfico de uma circunferência, note que para pelo menos um valor de x no domínio de f, temos 2 valores para $f(x)$.

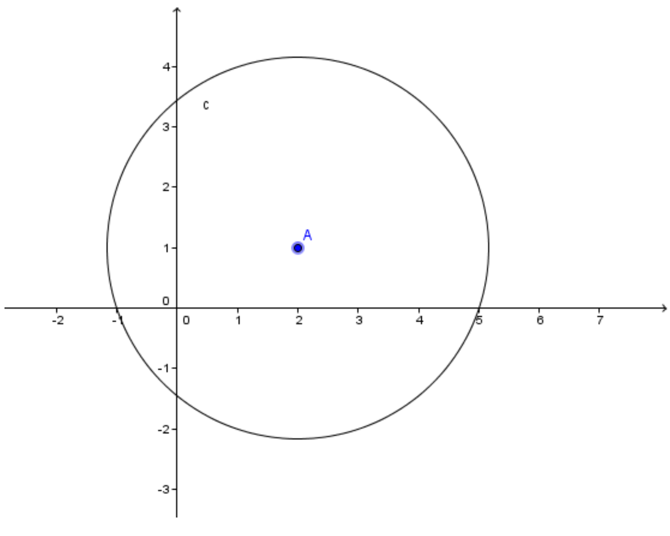


Figura 20: Gráfico de circunferência

4.5 Funções compostas

4.5.1 Composição de funções

Vamos definir as seguintes funções, dados os conjuntos A, B, C e D, tal que:

$$
\begin{aligned}
f: \quad A &\longrightarrow B\\
x &\longrightarrow f(x)
\end{aligned}
$$

e,

$$
\begin{aligned}
h: \quad C &\longrightarrow D\\
x &\longrightarrow h(x)
\end{aligned}
$$

Então definimos a composta de f com h, supondo $Im(h) \subset Dom(f)$, da seguinte forma, podemos dizer que f e h são compostas se:

$$(f \circ h) = f(h(x))$$

de maneira análoga, podemos perceber que, supondo $Im(f) \subset Dom(h)$, então, podemos dizer que f e h são compostas se:

$$(h \circ f) = h(f(x))$$

4.5.2 Associatividade da composição

Vamos definir três funções, tais que $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ e $h : C \longrightarrow D$. A propriedade da associatividade da composição nos diz que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

portanto, podemos dizer que $h \circ g \circ f : A \longrightarrow D$.

Algumas definições são importantes sabermos:

- **Definição (1):** Sejam f e g duas funções bijetoras e g é a inversa de f, então $g(x) = f^{-1}(x)$;
- **Definição (2):** Se f e g são funções sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora;
- **Definição (3):** Se f e g são funções injetoras, então $g \circ f$ é injetora.

4.6 Exemplos

Uma das áreas que mais usa funções em suas entrelinhas é a Inteligência Artificial. Em relação à arquitetura das redes neurais artificiais (RNAs), o primeiro passo no processamento fica a cargo das **funções de soma**, que são responsáveis pela multiplicação das entradas pelos pesos dos neurônios correspondentes. Uma vez finalizado o cálculo da função soma, o valor é passado para a **função de ativação**, responsável pela introdução da não-linearidade no processamento das RNAs.

Dentre várias funções de ativação existentes, iremos falar de duas: a **função sigmoide** e a **função softmax**.

A função sigmoide, dada pela equação

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

recebe o valor calculado pela função de soma e retorna um valor que se encontra entre 0 e 1, como pode ser observado na Figura 21.

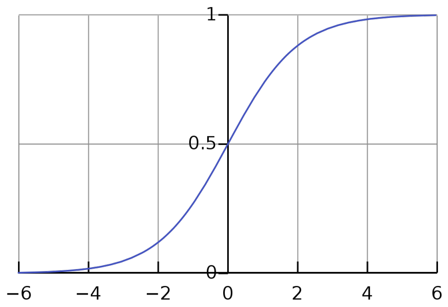


Figura 21: Gráfico da função sigmoide.

A função softmax, por sua vez, é dada pela equação

$$f(x_j) = \frac{e^{x_j}}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}, \text{ com i = 1, 2, ..., n-1, n}$$

Ela é muito utilizada em problemas envolvendo classificação multiclasse. Uma vez recebendo o resultado da função de soma, a mesma retorna uma distribuição de probabilidade para cada classe existente; a soma dessa distribuição é igual a 1. A Figura 22 representa o gráfico da função softmax.

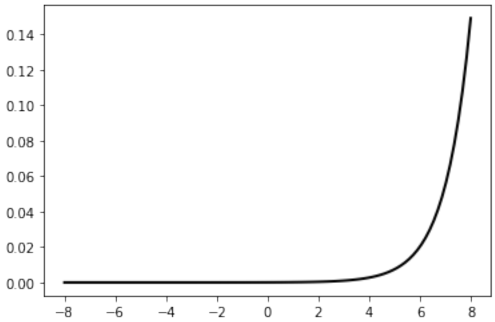


Figura 22: Gráfico da função softmax.

4.7 Exercícios

4.7.1 Exercício: Regressão Logística

Sejam as seguintes funções $g(X) = X \cdot \beta$ e $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Encontre $f \circ g(x)$.
Resolução : Para resolvermos esse problema, é simples, queremos encontrar uma função composta, dada por $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, então simplesmente precisamos substituir o valor de x em $f(x)$ pela função $g(x)$, da seguinte forma:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 + e^{-g(x)}}$$

onde $g(X) = X \cdot \beta$, então,

$$h(x) = f(X \cdot \beta) = \frac{1}{1 + e^{-X \cdot \beta}}$$

Observação : Além disso, note que $g(x)$ é a função da regressão linear múltipla, ou seja, $X \cdot \beta$ é um produto matricial, onde cada observação $y_i = h(x_i)$ pode ser denotado da seguinte forma:

$$f(x_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + \cdots + \beta_p \cdot x_{ip}$$

então, por fim temos $h(x)$ da seguinte forma, para cada observação em y:

$$h(y_i|\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + \cdots + \beta_p \cdot x_{ip})}}$$

Perceba que temos a cara da **função logística** no final. Além disso, para a estatística, a função $g(X) = g(\mu_i) = X_i \cdot \beta$ é conhecida como **função de ligação** largamente usada para associação dos valores esperados da resposta aos preditores lineares no modelo, utilizado principalmente dentro da classe de **Modelos Lineares Generalizados** (GLM).

4.7.2 Exercício: Paridade de função

Defina a paridade das funções abaixo:

1. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ | **Resolução:** Perceba que $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, logo a função não é par, nem impar.
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = \sqrt{|x| + 17}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

4.7.3 Exercício: Domínio de função

Defina a domínio das funções abaixo:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ | **Resolução:** $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 1\}$ ou $Dom(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, ou seja, domínio de f é os Reais, diferente de -1 e 1
2. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = \sqrt{|x| + 17}$

4.7.4 Exercício: Contradomínio de função

Defina a domínio das funções abaixo:

1. $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ | **Resolução:** $Cd(f) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < f(x) < 1\}$ ou $Cd(f) = (0, 1)$, ou seja, o contradomínio de f é o intervalo de 0 a 1.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = \sqrt{|x| + 17}$

4.7.5 Exercício: Composição de funções

Calcule as funções compostas a seguir:

1. Seja $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e $g(x) = x + 1$, defina $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$. | **Resolução:** Vamos substituir g dentro de f, ou seja, avaliar g em f. Então:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{g^2(x) - 1}{g(x) - 1} = \frac{(x+1)^2 - 1}{x + 1 - 1} = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$

2. Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{x}$, defina $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$.
3. Seja $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ e $g(x) = \theta \cdot (x - \mu)$, defina $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$.
4. Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\big\{ -(x-\mu)^2 \big\}$ e $g(x) = x + \mu$, defina $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$.