INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA E IA

Exercícios: Funções

Diretoria de Matemática
Diretor: Manuel F. Junior
Membro: Franklin Anthony
tail.ufpb@gmail.com
https://aria.ci.ufpb.br/tail/

TAIL Technology and Artificial Intelligence League

Sumário

Definição de Função

Uma função é uma relação entre dois conjuntos, com uma determinada lei de correspondência dos elementos de um conjunto para com o outro. Podemos definir matematicamente uma função da seguinte forma: Dados os conjuntos A e B, definimos uma f como uma lei de associação entre elementos de A ($x \in A$) para com B ($y \in B$), tal que:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Podemos definir y como $y = f(x)$, ou seja, denotamos y como uma função de x.

Domínio, Imagem e Contradomínio

As funções matemáticas são compostas por 3 importantes elementos: domínio, contradomínio e imagem. O domínio, denotado por *D*, representa os elementos do conjunto de partida de uma determinada função, isto é, os valores que o *x* pode assumir. A imagem, por sua vez, denotada por *Im*, representa o conjunto destino de elementos da função. Tal relação pode ser verificada na figura abaixo.

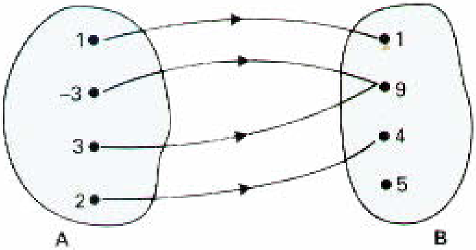


Figura: Exemplo de domínio e imagem de uma função.

Domínio, Imagem e Contradomínio

Já o contradomínio de uma função, representado por Cd, representa os possíveis valores de chegada de uma função f, ou seja, os valores contidos na imagem de f. Em outras palavras, por exemplo, a a figura acima é composta pelo domínio $D(f) = \{-3, 1, 2, 3\}$, pela imagem $Im(f) = \{1, 4, 9\}$ e pelo contradomínio $Cd(f) = \{1, 4, 5, 9\}$.

Tipos de Funções

As funções podem ser classificadas de três formas distintas: função **injetora**, **bijetora** e **sobrejetora**. A seguir, iremos definir cada uma delas e fornecer alguns exemplos.

Função injetora ou injetiva

Uma função é injetora quando cada elemento do domínio D está relacionado a apenas um elemento da imagem Im, ou seja, para cada x existe um único $f(x)$ associado. A figura abaixo exemplifica uma função injetiva.

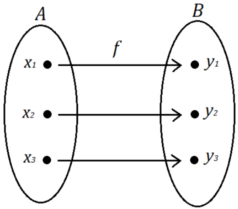


Figura: Exemplo de uma função injetiva.

Perceba que cada elemento do contradomínio Cd é atingido uma única vez.

Função sobrejetora ou sobrejetiva

Quando todos os elementos do domínio *D* de uma função estão associados a um elemento da imagem *Im*, isto é, quando cada elemento do contradomínio *Cd* é atingido pelo menos uma vez, dizemos que a função é sobrejetora. A figura abaixo elucida o que acabamos de definir.

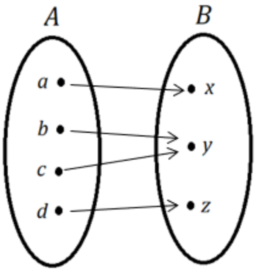


Figura: Exemplo de uma função sobrejetora.

Função bijetora ou bijetiva

Quando uma função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, ou seja, quando cada elemento do contradomínio *Cd* é atingido exatamente uma vez, dizemos que ela é bijetora. Podemos visualizar tal definição abaixo.

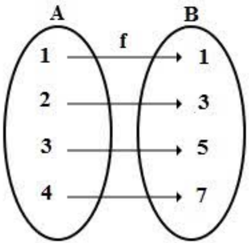


Figura: Exemplo de uma função bijetora.

Paridade de Funções

Vamos definir os seguintes conjuntos, A e B tal que:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y \end{aligned}$$

Onde temos que y é função de x, ou seja, $f(x) = y$

Função Par

- **Função Par:** Uma função é denominada par se: (Repare na figura abaixo)

$$f(x) = f(-x)$$

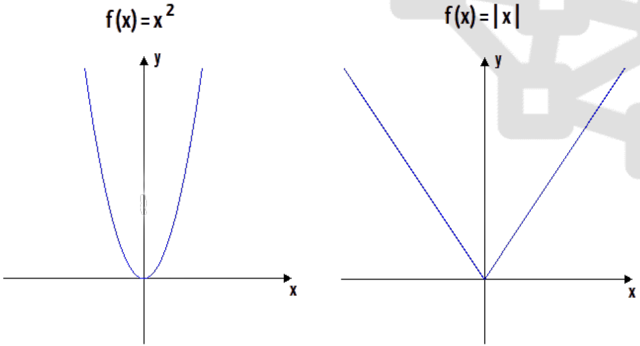


Figura: $f(x) = f(-x)$

Função Ímpar

- **Função Ímpar:** Uma função é denominada ímpar se: (Repare na figura abaixo)

$$f(-x) = -f(x)$$

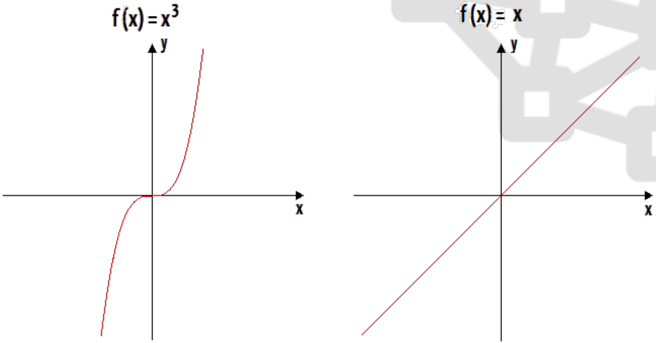


Figura: $f(-x) = -f(x)$

Função Linear

Uma função linear é definida pela seguinte lei de associação:

$$f(x|\beta_1, \beta_0) = \beta_1 \cdot x + \beta_0$$

Podemos interpretar o valor de β_1 como o nosso coeficiente angular da reta, ou seja, valor que determina a inclininação da reta com relação ao eixo x e o valor de β_0 é o intercept da reta, quando temos $x = 0$. Perceba que podemos notar 3 comportamentos distintos dessa função, eles são os seguintes:

Função Linear Crescente

- **Função Linear Crescente:** quando $\beta_1 > 0$, temos um comportamento crescente, como visto abaixo (a médida que aumentamos x, aumentos y de forma proporcional).

Função Linear Crescente

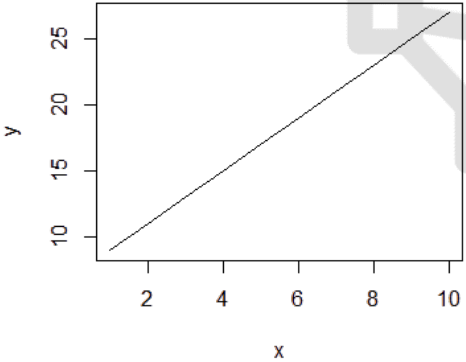


Figura: Função linear crescente ($\beta_1 > 0$)

Função Linear Decrescente

- **Função Linear Decrescente:** quando $\beta_1 < 0$, temos um comportamento decrescente, como visto abaixo (a médida que aumentamos x, diminuimos y de forma proporcional).

Função Linear Decrescente

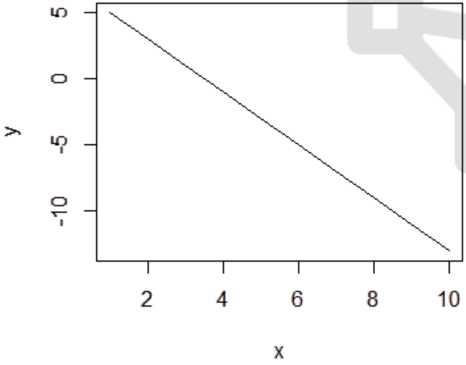


Figura: Função linear decrescente ($\beta_1 < 0$)

Função Linear Constante

- **Função Linear Constante:** quando $\beta_1 = 0 \implies f(x) = \beta_0$, temos um comportamento constante (a médida que aumentamos x, y permanece inalterado).

Função Linear Constante

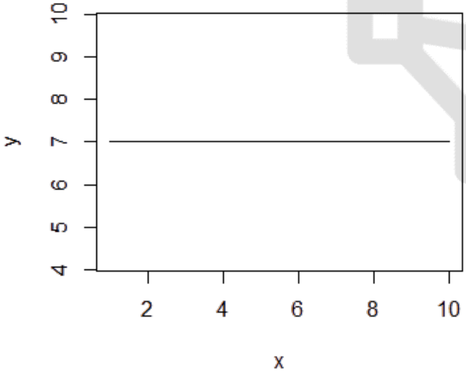


Figura: Função linear constante ($\beta_1 = 0$)

Função Logarítmica

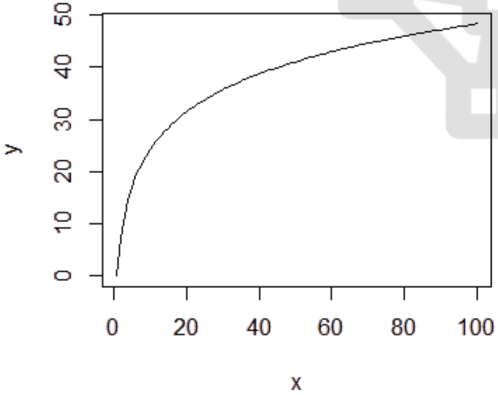
A função logarítmica possui a seguinte lei de associação:

$$f(x|a) = \log_a(x)$$

Esta função possuí um domínio nos números reais estritamente positivos e diferentes de 0, ou seja, $x \in R_+^*$. Além disso, seu valor de a deve ser positivo e diferente de 1. Podemos notar dois comportamentos dessa curva: um para $a > 1$ e um para $0 < a < 1$.

Função Logarítmica Crescente

- Função logarítmica crescente: $(a > 1)$



Função Logarítmica Decrescente

- **Função logarítmica decrescente:** $(0 < a < 1)$

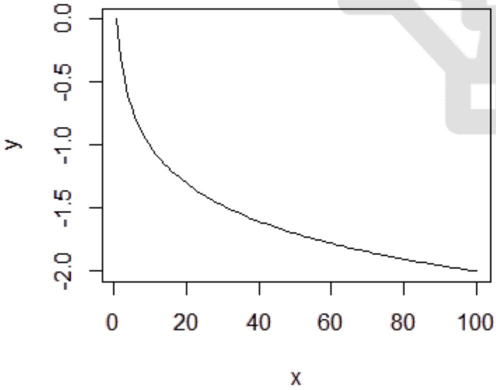


Gráfico de Funções

O gráfico de uma função definido no plano cartesiano nos ajuda a representar a ordenação de um conjunto de pontos (x, y), onde para cada x, existe um único valor para $y = f(x)$, note que x varia no domínio de f.

Exemplo (1)

Perceba que o gráfico abaixo é gráfico de função, note que para cada valor de x existe um único valor para $f(x)$.

Exemplo (1)

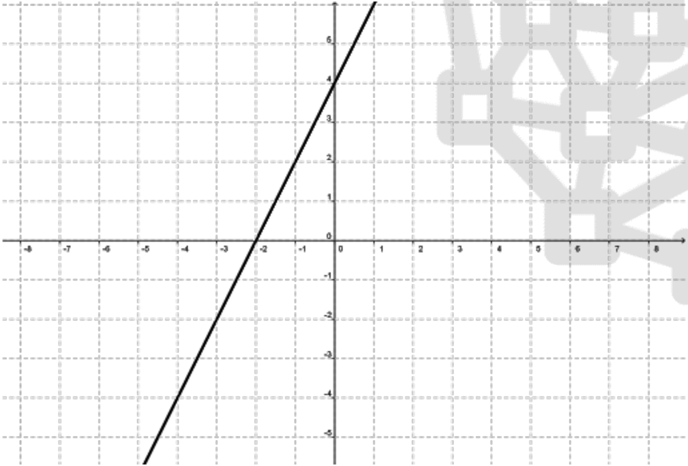


Figura: Gráfico de uma função linear crescente

Exemplo (2)

Perceba que o gráfico a seguir não é gráfico de uma função e sim gráfico de uma circunferência, note que para pelo menos um valor de x no domínio de f, temos 2 valores para $f(x)$.

Exemplo (2)

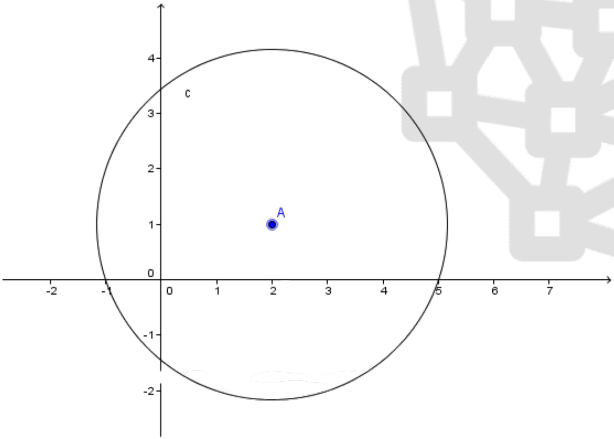


Figura: Gráfico de circunferência

Composição de Funções

Vamos definir as seguintes funções, dados os conjuntos A, B, C e D, tal que:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \longrightarrow B \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} h: \quad & C \longrightarrow D \\ & x \longrightarrow h(x) \end{aligned}$$

Composição de Funções

Definimos a composta de f com h, supondo $Im(h) \subset Dom(f)$, da seguinte forma: podemos dizer que f e h são compostas se

$$(f \circ h) = f(h(x))$$

de maneira análoga, podemos perceber que, supondo $Im(f) \subset Dom(h)$, f e h são compostas se

$$(h \circ f) = h(f(x))$$

Regressão Logística

Sejam as seguintes funções :

$$g(X) = X \cdot \beta$$

, e

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Encontre $f \circ g(x)$.

Regressão Logística

- **Resolução :** Para resolvermos esse problema, é simples, queremos encontrar uma função composta, dada por $h(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$, então simplesmente precisamos substituir o valor de x em $f(x)$ pela função $g(x)$, da seguinte forma:

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{1}{1 + e^{-g(x)}}$$

onde $g(X) = X \cdot \beta$, então,

$$h(x) = f(X \cdot \beta) = \frac{1}{1 + e^{-X \cdot \beta}}$$

Regressão Logística

- **Observação :** Além disso, note que $g(x)$ é a função da regressão linear múltipla, ou seja, $X \cdot \beta$ é um produto matricial, onde cada observação $y_i = h(x_i)$ pode ser denotada da seguinte forma:

$$f(x_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + \cdots + \beta_p \cdot x_{ip}$$

Regressão Logística

Por fim, temos $h(x)$ da seguinte forma, para cada observação em y:

$$h(y_i|\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \beta_2 \cdot x_{i2} + \cdots + \beta_p \cdot x_{ip})}}$$

Perceba que temos a cara da **função logística** no final. Além disso, para a estatística, a função $g(X) = g(\mu_i) = X_i \cdot \beta$ é conhecida como **função de ligação**, largamente usada para associação dos valores esperados da resposta aos preditores lineares no modelo, utilizado principalmente dentro da classe de **Modelos Lineares Generalizados** (GLM).

Funções de Ativação

Uma das áreas que mais usa funções em suas entrelinhas é a Inteligência Artificial. Em relação à arquitetura das redes neurais artificiais (RNAs), o primeiro passo no processamento fica a cargo da **função de soma**, que é responsável pela multiplicação das entradas pelos pesos dos neurônios correspondentes. Uma vez finalizado o cálculo da função soma, o valor é passado para a **função de ativação**, responsável pela introdução da não-linearidade no processamento das RNAs. Dentre várias funções de ativação existentes, iremos falar de duas: a **função sigmoide** e a **função softmax**.

Função Sigmoide

- **Função Sigmoide:** A função sigmoide, dada pela equação

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \text{ com } \{x \in \mathbb{R} : 0 < f(x) < 1\}$$

recebe o valor calculado pela função de soma e retorna um valor que se encontra entre 0 e 1, como pode ser observado abaixo.

Funções de Ativação

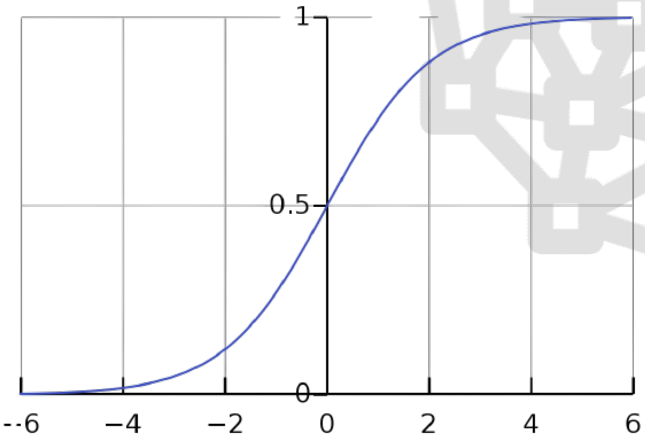


Figura: Gráfico da função sigmoide.

Função Softmax

- **Função Softmax:** A função softmax, por sua vez, é dada pela equação

$$f(x_j) = \frac{e^{x_j}}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}}, \text{ com i = 1, 2, ..., n-1, n}$$

Ela é muito utilizada em problemas envolvendo classificação multiclasse. Uma vez recebendo o resultado da função de soma, a mesma retorna uma distribuição de probabilidade para cada classe existente; a soma dessa distribuição é igual a 1. Abaixo, podemos conferir o gráfico da função softmax.

Função Softmax

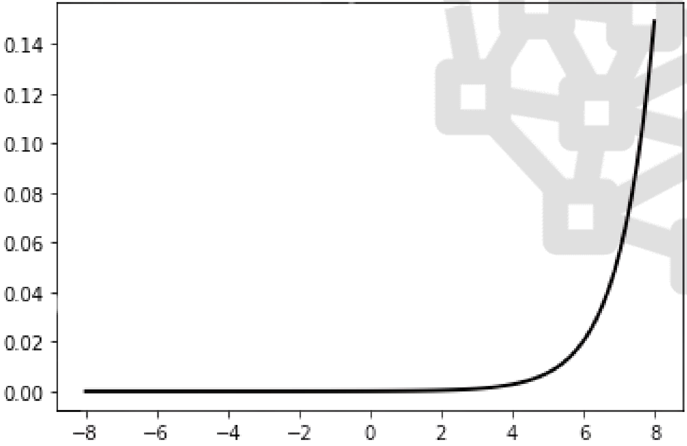


Figura: Gráfico da função softmax.