TAIL — INTRODUÇÃO À MATRIZES

Diretoria de Matématica - Tail

11/09/2020

1 Introdução do tema

Uma matriz $Am{\times}n$ é um arranjo retangular com m linhas e n colunas da forma

$$Am{\times}n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

onde aij ϵ R, $i = 1, 2, ..., m$ e $j = 1, 2, ..., n$.

A i-ésima linha da matriz A é matriz 1 × n

$$Li = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e a j-ésima coluna da matriz A é matriz m × 1

$$Cj = \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Definição 1.1 (diagonal principal)**.** A *diagonal principal* de uma matriz quadrada A é formada pelos componentes a_{ij} onde $i = j$.

Exemplo 1.1.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a}_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Exemplo 1.1.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -45 & 10 \\ 4 & \mathbf{2} & 3 \\ 7 & 25 & \mathbf{3} \end{vmatrix} \tag{5}$$

Exemplo 1.1.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & -45 & 10 & 3 \\ 4 & \mathbf{3} & 3 & 7 \\ 7 & 25 & \mathbf{8} & 0 \\ 1 & 2 & 5 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \tag{6}$$

Definição 1.2 (matriz diagonal)**.** É uma matriz quadrada formada por componentes $a_{ij} = 0$ onde $i \neq j$.

Exemplo 1.2.1. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a}_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Exemplo 1.2.2. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Exemplo 1.2.3. :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Além das definições, podemos realizar operações básicas com matrizes como **Multiplicação por escalar** e **Soma de matrizes**. Vamos definir $\mathbf{A}_{mxn}$, com m linhas e n colunas e $\mathbf{B}_{mxn}$, com as mesmas dimensões de $\mathbf{A}$, sendo $\alpha\epsilon\mathbb{R}$, ou seja, alpha pertencente ao conjunto dos números *Reais*, tal que:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} \tag{11}$$

Podemos definir $\alpha \cdot \mathbf{A}$ da seguinte forma:

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{21} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \cdots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Como pode ver, a multiplicação de um escalar pela matriz dar-se termo a termo, multiplicado pelo escalar. Abaixo definimos a soma das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ também termo a termo, da seguinte forma:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{vmatrix} = \tag{13}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Abaixo seguem as propriedades para operações com matrizes e valores escalares.

Propriedade 1.1 (Propriedade Associativa)**.** $(A+B)+C = A+(B+C),\ \ \forall\ A,\ B,\ C\ \epsilon\ Rm{\times}n$ (para todos).

Propriedade 1.2 (Matriz Nula)**.** Existe $O\ \epsilon\ Rm{\times}n$ tal que $A+O = A,\ \forall\ A\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

Propriedade 1.3 (Matriz Oposta)**.** Para cada $A\ \epsilon\ Rm{\times}n$, existe $-A\ \epsilon\ Rm{\times}n$ tal que $A+(-A) = O$, onde $-A = [-a_{ij}]$.

Propriedade 1.4 (Propriedade da Soma)**.** $A+B = B+A$, $\forall\ A,\ B\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

Propriedade 1.5 (Propriedade Distributiva da Multiplicação)**.** $(a+b)A = aA+bA$, $\forall\ a,\ b\ \epsilon\ R$ e $A\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

Propriedade 1.6 (Propriedade Distributiva da Multiplicação 2)**.** $(a+b)A = aA+bA$, $\forall\ a,\ b\ \epsilon\ R$ e $A\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

Propriedade 1.7 (Propriedade da igualdade)**.** $a(A+B) = aA+aB$, $\forall\ a\ \epsilon\ R$ e $A,\ B\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

Propriedade 1.8 (Propriedade da igualdade)**.** $1 * A = A$, $\forall\ A\ \epsilon\ Rm{\times}n$.

2 Multiplicação de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]\ \epsilon\ R\ _{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]\ \epsilon\ R\ _{n\times p}$. O produto de A por B, em símbolos, AB, é definido como:

$$A\ _{3\times 2}\times B\ _{2\times 1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}\cdot b_{11}) + (a_{12}\cdot b_{21}) \\ (a_{21}\cdot b_{11}) + (a_{22}\cdot b_{21}) \\ (a_{31}\cdot b_{11}) + (a_{32}\cdot b_{21}) \end{vmatrix} \tag{15}$$

A operação pode parecer desafiadora a primeira vista, porém o passo a passo a ser seguido é simples

O mais importante é ter atenção nas dimensões das matrizes, dim(A) é 3x2, e dim(B) é 2x1, para podermos multiplicá-las o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda, em termos matemáticos é comum ver: $Am{\times}n \cdot Bn{\times}p, oqueresultanumamatrizCm{\times}p, ouseja, nesseexemploam$
$3x1$.

O passo a passo a ser seguido é:

1. *Identificar a primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz*
2. *Multiplicar o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna*
3. *Somar as multiplicações até o n-ésimo termo das matrizes*
4. *Repetir com o restante da matriz*

Exemplo 2.0.1.

$$A\ _{3\times 2}\times B\ _{2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3\cdot 1) + (-1\cdot 2) \\ \\ \\ \end{vmatrix} \tag{16}$$

$$A\ _{3\times 2}\times B\ _{2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ (0\cdot 1) + (2\cdot 2) \\ \\ \end{vmatrix} \tag{17}$$

$$A\ _{3\times 2}\times B\ _{2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ (1\cdot 1) + (1\cdot 2) \end{vmatrix} \tag{18}$$

$$A_{\ 3\times 2} \times B_{\ 2\times 1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Desse modo, se AxB for uma multiplicação válida não implica que BxA também a seja, apenas se A e B forem matrizes quadradas

3 Outras operações de matrizes

Definição 3.1 (Matriz transposta)**.** A matriz transposta de uma matriz é obtida escrevendo as linhas da matriz como colunas, ou simplesmente,