

Elu jaguneb kolme ossa: kui sa ootad jõuluvana, kui
sa ei usu jõuluvana ja kui sa oled juba ise jõuluvana.

----- Adam Philips -----

Tsoonisiseseid ja tsoonidevahelisi interaktsioonikanaleid hõlmava kahetsoonilise ülijuhtivusmudeli karakteristikud

SISUKORD

A	<i>Ülijuhtivusmudel</i>	3
B	<i>Võrrandisüsteem pilude jaoks</i>	7
C	<i>Kriitilised temperatuurid</i>	9
D	<i>Pilude võrrandisüsteemi lahendite klassid</i>	11
	<i>D.1 Lahendite klassi määrava avaldise analüüs</i>	<i>12</i>
E	<i>Ülijuhtivuspilud nulltemperatuuril</i>	13
F	<i>Ülijuhtivuspilud siirdetemperatuuri lähedal</i>	16
	<i>F.1 Ülijuhtivuspilude avaldiste reaksarendus $T - T_c$ astmete järgi</i>	<i>17</i>
G	<i>Vabaenergia ja faasisiirde punktis soojusmahtuvuse hüpe</i>	20
H	<i>Karakteristikute sõltuvus tsoonidevahelisest tõukeinteraktsioonist</i>	22
L	<i>LISAD</i>	25
	<i>L.1 Abiseose kehtivuse näitamine</i>	<i>25</i>
	<i>L.2 Võrrandisüsteemi kordajad erijuhtudel</i>	<i>26</i>
	<i>L.3 Võrrandisüsteemi kordajate sõltuvus tsoonidevahelisest tõukeinteraktsioonist</i>	<i>27</i>
	<i>L.4 Abiseoste kehtivus siirdetemperatuuril</i>	<i>30</i>
	<i>L.5 Integraalide ligikaudne arvutamine siirdetemperatuuri lähedal</i>	<i>31</i>

7. septembril 2020. aastal

Tartus

A Ülijuhtivusmudel

Lähtume kahetsoonilise ülijuhi hamiltoniaanist, kus on võetud arvesse nii tsoonisisesed interaktsioonikanalid kui ka tsoonidevaheline elektronpaaride ülekanne:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha k s} \tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k}) a_{\alpha k s}^+ a_{\alpha k s} + \\ &+ \sum_{\alpha \alpha'} \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}'} W_{\alpha \alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\alpha \mathbf{k} \uparrow}^+ a_{\alpha' - \mathbf{k} \downarrow}^+ a_{\alpha' - \mathbf{k}' \downarrow} a_{\alpha \mathbf{k}' \uparrow}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Siin $\tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k}) = \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) - \mu$, $\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k})$ on elektroni energia tsoonis $\alpha = 1, 2$; μ on keemiline potentsiaal; $s = \uparrow, \downarrow$ on spinn-indeks; \mathbf{k} on elektroni lainevektor, a, a^+ on elektronide sekundaarse kvantiseerimise operaatorid; $W_{\alpha \alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ on elektronidevahelise interaktsiooni konstandid.

Keskmise välja lähenduses asendub hamiltoniaan (A.1) lineariseeritud hamiltoniaaniga

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \sum_{\alpha k s} \tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k}) a_{\alpha k s}^+ a_{\alpha k s} - \sum_{\alpha \mathbf{k}} \Delta_{\alpha \mathbf{k}} \langle a_{\alpha \mathbf{k} \uparrow}^+ a_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow}^+ \rangle + \\ &+ \sum_{\alpha \mathbf{k}} \left(\Delta_{\alpha \mathbf{k}} a_{\alpha \mathbf{k} \uparrow}^+ a_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow}^+ + \Delta_{\alpha \mathbf{k}}^* a_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow} a_{\alpha \mathbf{k} \uparrow} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

kus

$$\Delta_{\alpha \mathbf{k}} = \sum_{\alpha' \mathbf{k}'} W_{\alpha \alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \langle a_{\alpha' - \mathbf{k}' \downarrow} a_{\alpha' \mathbf{k}' \uparrow} \rangle \quad (\text{A.3})$$

on ülijuhtiva süsteemi tsoonidele vastavad tasakaalulised korrastusparameetrid (ülijuhtivuspilud). Valemite (A.2) ja (A.3) keskmistatakse üle efektiivsele hamiltoniaanile vastava kanoonilise ansambli,

$$\langle \dots \rangle = Z^{-1} \text{Sp} \left(\dots e^{-H_{\text{eff}}/k_B T} \right), \quad (\text{A.4})$$

kus

$$Z = \text{Sp} \left(e^{-H_{\text{eff}}/k_B T} \right), \quad (\text{A.5})$$

on statistiline summa.

Hamiltoniaan (A.2) on täpselt diagonaliseeritav Bogoljubovi-Valatini teisenduse abil :

$$\begin{aligned} a_{\alpha \mathbf{k} \uparrow} &= u_{\alpha \mathbf{k}} A_{\alpha \mathbf{k} \uparrow} + \nu_{\alpha \mathbf{k}}^* A_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow}^+ \\ a_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow} &= u_{\alpha \mathbf{k}} A_{\alpha - \mathbf{k} \downarrow} - \nu_{\alpha \mathbf{k}}^* A_{\alpha \mathbf{k} \uparrow}^+, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

kus $u_{\alpha\mathbf{k}}$ on valitud reaalsena,

$$\begin{aligned} u_{\alpha-\mathbf{k}} &= u_{\alpha\mathbf{k}}, \quad \nu_{\alpha\mathbf{k}} = -\nu_{\alpha-\mathbf{k}} \\ u_{\alpha\mathbf{k}}^2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \tilde{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}) E_\alpha^{-1}(\mathbf{k}) \right] \\ |\nu_{\alpha\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left[1 - \tilde{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}) E_\alpha^{-1}(\mathbf{k}) \right] \\ u_{\alpha\mathbf{k}} \nu_{\alpha\mathbf{k}}^* &= -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mathbf{k}} E_\alpha^{-1}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

ja $E_\alpha(\mathbf{k})$ on vastava tsooni elementaarergastuse energia ülijuhtivas faasis,

$$E_\alpha(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\alpha^2(\mathbf{k}) + |\Delta_{\alpha\mathbf{k}}|^2}. \quad (\text{A.8})$$

Teisendus (A.6) viib hamiltoniaani (A.2) kujule

$$H_{\text{eff}} = \sum_{\alpha\mathbf{k}} R_\alpha(\mathbf{k}) + \sum_{\alpha\mathbf{k}s} E_\alpha(\mathbf{k}) A_{\alpha\mathbf{k}s}^+ A_{\alpha\mathbf{k}s}, \quad (\text{A.9})$$

$$R_\alpha(\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}) - E_\alpha(\mathbf{k}) - \Delta_{\alpha\mathbf{k}} \langle a_{\alpha\mathbf{k}\uparrow}^+ a_{\alpha-\mathbf{k}\downarrow}^+ \rangle. \quad (\text{A.10})$$

Edaspidi käsitleme ülijuhtivuspilusid reaalarvuliste suurustena. Valemite (A.4), (A.5) ja (A.9) alusel ning kasutades teisendust (A.6) saame

$$\langle a_{\alpha-\mathbf{k}\downarrow} a_{\alpha\mathbf{k}\uparrow} \rangle = -\frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mathbf{k}} h_{\alpha\mathbf{k}}, \quad (\text{A.11})$$

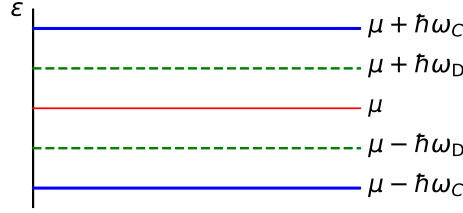
$$h_{\alpha\mathbf{k}} = E_\alpha^{-1}(\mathbf{k}) \tanh \left(\frac{E_\alpha(\mathbf{k})}{2k_B T} \right), \quad (\text{A.12})$$

$$Z = \prod_{\alpha\mathbf{k}} \left\{ \exp \left(-\frac{R_\alpha(\mathbf{k})}{k_B T} \right) \left[1 + \exp \left(-\frac{E_\alpha(\mathbf{k})}{k_B T} \right) \right]^2 \right\}, \quad (\text{A.13})$$

$$R_\alpha(\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k}) - E_\alpha(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha\mathbf{k}}^2 h_{\alpha\mathbf{k}}. \quad (\text{A.14})$$

Asendades keskväärtuse avaldisest (A.11) ülijuhtivuspilude definitsiooni (A.3) jõuame võrrandisüsteemini korrastusparameetrite leidmiseks

$$\Delta_{\alpha\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha'\mathbf{k}'} W_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta_{\alpha'\mathbf{k}'} h_{\alpha'\mathbf{k}'}. \quad (\text{A.15})$$



Joonis 1. Energeetilised piirkonnad.

Tsoonisisesse vastastikmõju konstant $W_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = U_{\alpha} + V_{\alpha}$ sisaldab tõukeinteraktsiooni $U_{\alpha} \geq 0$ ja elektronidevahelist elektron-foonon päritoluga tõmbeinteraktsiooni $V_{\alpha} \leq 0$. Tsoonidevahelist interaktsiooni $W_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ iseloomustab konstant $W_{12} = V_{12} + U_{12}$, kus $V_{12} \leq 0$ on tsoonidevaheline tõmbeinteraktsioon ning $U_{12} \geq 0$ on tsoonidevaheline tõukeinteraktsioon. Efektiivne elektronidevaheline tõmbeinteraktsioon on indutseeritud elektron-foonon interaktsiooni poolt. Tõmbeinteraktsioonid V_{α} ja V_{12} toimivad kitsas energeetilises piirkonnas $\mu - \hbar\omega_D \dots \mu + \hbar\omega_D$, kus ω_D on Debye sagedus. Tõukeinteraktsioonid U_{α} ja U_{12} toimivad laias energeetilises piirkonnas $\mu - \hbar\omega_C \dots \mu + \hbar\omega_C$. Energeetilised piirkonnad on esitatud joonisel 1. Tsoonide olekute tihedused ρ_{α} loeme konstantseteks.

Võttes arvesse interaktsioonide $W_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ jaoks lähendusi, saame ($\alpha' = 3 - \alpha$)

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha} = & - (U_{\alpha} + V_{\alpha})\rho_{\alpha}\Delta_{\alpha}\eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) - U_{\alpha}\rho_{\alpha}\tilde{\Delta}_{\alpha}\tilde{\eta}_{\alpha}(T, \tilde{\Delta}_{\alpha}) - \\ & - (V_{12} + U_{12})\rho_{3-\alpha}\Delta_{3-\alpha}\eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}) - U_{12}\rho_{3-\alpha}\tilde{\Delta}_{3-\alpha}\tilde{\eta}_{3-\alpha}(T, \tilde{\Delta}_{3-\alpha}), \\ \tilde{\Delta}_{\alpha} = & - U_{\alpha}\rho_{\alpha}\Delta_{\alpha}\eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) - U_{\alpha}\rho_{\alpha}\tilde{\Delta}_{\alpha}\tilde{\eta}_{\alpha}(T, \tilde{\Delta}_{\alpha}) - \\ & - U_{12}\rho_{3-\alpha}\Delta_{3-\alpha}\eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}) - U_{12}\rho_{3-\alpha}\tilde{\Delta}_{3-\alpha}\tilde{\eta}_{3-\alpha}(T, \tilde{\Delta}_{3-\alpha}), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

kus $\alpha = 1, 2$; Δ_{α} on ülijuhtiva faasisiirde korrastusparameeter Debye kihis Fermi nivoo ümber ja $\tilde{\Delta}_{\alpha}$ - korrastusparameeter väljaspool seda kihti¹;

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) &= \frac{1}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} E_{\alpha}^{-1}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha}) \tanh\left(\frac{E_{\alpha}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha})}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_{\alpha} = \\ &= \int_0^{\hbar\omega_D} E_{\alpha}^{-1}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha}) \tanh\left(\frac{E_{\alpha}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha})}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_{\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

¹Valemi (A.18) korral peame silmas, et

$$\int_{-b}^{-a} f(x^2)dx =_{x \rightarrow -y} - \int_b^a f(y^2)dy = \int_a^b f(y^2)dy.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_\alpha(T, \tilde{\Delta}_\alpha) &= \frac{1}{2} \int_{-\hbar\omega_C}^{-\hbar\omega_D} E_\alpha^{-1}(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) \tanh\left(\frac{E_\alpha(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha)}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_C} E_\alpha^{-1}(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) \tanh\left(\frac{E_\alpha(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha)}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha = \\
&= \int_{\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_C} E_\alpha^{-1}(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) \tanh\left(\frac{E_\alpha(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha)}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha, \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

$$E_\alpha(X_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) = \sqrt{X_\alpha^2 + \tilde{\varepsilon}_\alpha^2}; \quad X_\alpha = \Delta_\alpha, \tilde{\Delta}_\alpha. \quad (\text{A.19})$$

Lahutame süsteemi (A.16) esimesest võrrandist teise võrrandi. See annab

$$\Delta_\alpha - \tilde{\Delta}_\alpha = -V_\alpha \rho_\alpha \Delta_\alpha \eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) - V_{12} \rho_{3-\alpha} \Delta_{3-\alpha} \eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}). \quad (\text{A.20})$$

Siit järeldub, et

$$\tilde{\Delta}_\alpha = \Delta_\alpha + V_\alpha \rho_\alpha \Delta_\alpha \eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) + V_{12} \rho_{3-\alpha} \Delta_{3-\alpha} \eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}). \quad (\text{A.21})$$

Asendame nüüd $\tilde{\Delta}_\alpha$ avaldise (A.21) süsteemi (A.16) esimesse võrrandisse. Tulemuseks saame² ($\alpha = 1, 2$)

$$\begin{aligned}
\Delta_\alpha &= -(U_\alpha + V_\alpha) \rho_\alpha \Delta_\alpha \eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) - (V_{12} + U_{12}) \rho_{3-\alpha} \Delta_{3-\alpha} \eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}) - \\
&- U_\alpha \rho_\alpha \tilde{\eta}_\alpha(T, \tilde{\Delta}_\alpha) (\Delta_\alpha + V_\alpha \rho_\alpha \Delta_\alpha \eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) + V_{12} \rho_{3-\alpha} \Delta_{3-\alpha} \eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha})) - \\
&- U_{12} \rho_{3-\alpha} \tilde{\eta}_{3-\alpha}(T, \tilde{\Delta}_{3-\alpha}) (\Delta_{3-\alpha} + V_{3-\alpha} \rho_{3-\alpha} \Delta_{3-\alpha} \eta_{3-\alpha}(T, \Delta_{3-\alpha}) + V_{12} \rho_\alpha \Delta_\alpha \eta_\alpha(T, \Delta_\alpha)). \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Arvestame, et küllalt hästi on täidetud tingimused $k_B T, |\tilde{\Delta}_\alpha| \ll \hbar\omega_D, \hbar\omega_C$, siis saame valemis (A.18) integraali ligikaudu ära võtta. Tulemuseks on

$$\tilde{\eta}_\alpha \simeq \ln\left(\frac{\hbar\omega_C}{\hbar\omega_D}\right). \quad (\text{A.23})$$

²Võrrandisüsteemi (A.22) lahendeid on erijuhul, kui $U_1 = U_2 = 0$, analüüsitud numbriliselt Taimo Priinita bakalaureusetöös "Konkureerivad tsoonidevahelised interaktsioonid kahepilulises ülijuhis"(2019).

B Võrrandisüsteem pilude jaoks

Vastavalt valemile (A.22) on pilude võrrandisüsteem kujul

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -(U_1 + V_1)\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) - (V_{12} + U_{12})\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) - \\
&\quad - U_1\rho_1\tilde{\eta}_1(T, \tilde{\Delta}_1)(\Delta_1 + V_1\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) + V_{12}\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2)) - \\
&\quad - U_{12}\rho_2\tilde{\eta}_2(T, \tilde{\Delta}_2)(\Delta_2 + V_2\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) + V_{12}\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1)) , \\
\Delta_2 &= -(U_2 + V_2)\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) - (V_{12} + U_{12})\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) - \\
&\quad - U_2\rho_2\tilde{\eta}_2(T, \tilde{\Delta}_2)(\Delta_2 + V_2\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) + V_{12}\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1)) - \\
&\quad - U_{12}\rho_1\tilde{\eta}_1(T, \tilde{\Delta}_1)(\Delta_1 + V_1\rho_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) + V_{12}\rho_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2)) .
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Toome sisse tähistused

$$\begin{aligned}
\tau &= \rho_1/\rho_2 , \\
w_\alpha &= V_\alpha\rho_\alpha , \\
k_\alpha &= U_\alpha\rho_\alpha , \\
\kappa &= U_{12}\sqrt{\rho_1\rho_2} , \\
\lambda &= V_{12}\sqrt{\rho_1\rho_2}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

ning arvestades võrdust (A.23)

$$\tilde{\eta}_\alpha \simeq \ln \left(\frac{\hbar\omega_C}{\hbar\omega_D} \right) \equiv G. \tag{B.3}$$

Kirjutame süsteemi (B.1) üles järgmiselt

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= -(k_1 + w_1)\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) - (\kappa + \lambda)\sqrt{\tau^{-1}}\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) - \\
&\quad - k_1G \left(\Delta_1 + w_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) + \lambda\sqrt{\tau^{-1}}\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) \right) - \\
&\quad - \kappa G\sqrt{\tau^{-1}} \left(\Delta_2 + w_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) + \lambda\sqrt{\tau}\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) \right) , \\
\Delta_2 &= -(k_2 + w_2)\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) - (\kappa + \lambda)\sqrt{\tau}\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) - \\
&\quad - k_2G \left(\Delta_2 + w_2\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) + \lambda\sqrt{\tau}\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) \right) - \\
&\quad - \kappa G\sqrt{\tau} \left(\Delta_1 + w_1\Delta_1\eta_1(T, \Delta_1) + \lambda\sqrt{\tau^{-1}}\Delta_2\eta_2(T, \Delta_2) \right) .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Võrrandisüsteemis (B.4) liikmete ümber grupeerimine annab

$$\begin{aligned} \xi_1 \Delta_1 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) b_1 &+ \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) B_2 \sqrt{\tau^{-1}} + \kappa G \Delta_2 \sqrt{\tau^{-1}} = 0, \\ \xi_2 \Delta_2 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) b_2 &+ \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) B_1 \sqrt{\tau} + \kappa G \Delta_1 \sqrt{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

kus

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= 1 + k_\alpha G, \\ b_\alpha &= k_\alpha + w_\alpha \xi_\alpha + \kappa \lambda G, \\ B_\alpha &= \lambda \xi_{3-\alpha} + \kappa + G \kappa w_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Korrutame esimest võrrandit suurusega b_2 ning teist võrrandit suurusega $B_2 \sqrt{\tau^{-1}}$ ja lahutame. Korrutame teist võrrandit suurusega b_1 ning esimest võrrandit suurusega $B_1 \sqrt{\tau}$ ja lahutame. Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} a_2 \Delta_1 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) D &- A \Delta_2 \sqrt{\tau^{-1}} = 0, \\ a_1 \Delta_2 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) D &- A \Delta_1 \sqrt{\tau} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

kus³

$$\begin{aligned} a_\alpha &= \xi_{3-\alpha} b_\alpha - B_\alpha \kappa G = \\ &= \xi_{3-\alpha} k_\alpha + w_\alpha (\xi_{3-\alpha} \xi_\alpha - \kappa^2 G^2) - \kappa^2 G = \\ &= \xi_{3-\alpha} \xi_\alpha \mu_\alpha^* + w_\alpha (\xi_{3-\alpha} \xi_\alpha - \kappa^2 G^2) - \kappa^2 G = \\ &= \xi_1 \xi_2 \mu_\alpha^* + w_\alpha (\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2) - \kappa^2 G = \\ &= \xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha) - \kappa^2 G (1 + w_\alpha G), \\ A &= \xi_\alpha B_\alpha - b_\alpha \kappa G = \\ &= \kappa + \lambda (\xi_{3-\alpha} \xi_\alpha - \kappa^2 G^2) = \\ &= \kappa - \lambda \kappa^2 G^2 + \lambda \xi_1 \xi_2, \\ \mu_\alpha^* &= \frac{k_\alpha}{\xi_\alpha} = \frac{k_\alpha}{1 + k_\alpha G}, \\ D &= b_1 b_2 - B_1 B_2. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Märgime, et võrrandisüsteemi (B.5) saab viia ka kujule

$$\begin{aligned} (\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2) \Delta_1 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) a_1 &+ \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) A \sqrt{\tau^{-1}} = 0, \\ (\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2) \Delta_2 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) a_2 &+ \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) A \sqrt{\tau} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

³Suuruste A ja a_α avaldistes valemis (B.8) :

$$\xi_{3-\alpha} \xi_\alpha = \begin{cases} \xi_2 \xi_1 = \xi_1 \xi_2, & \text{kui } \alpha = 1, \\ \xi_1 \xi_2, & \text{kui } \alpha = 2. \end{cases}$$

Seega korrutise $\xi_{3-\alpha} \xi_\alpha$ jaoks ei ole tähtis kas $\alpha = 1$ või $\alpha = 2$; tulemus on ikka $\xi_1 \xi_2$.

C Kriitilised temperatuurid

Lähtume võrrandisüsteemist (B.7):

$$\begin{aligned} a_2 \Delta_1 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) D - A \Delta_2 \sqrt{\tau^{-1}} &= 0, \\ a_1 \Delta_2 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) D - A \Delta_1 \sqrt{\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Kriitiliste temperatuuride leidmiseks lineariseerime võrrandisüsteemi (B.7). Selleks säilitame võrrandites ainult lineaarsed panused $\Delta_{1,2}$ suhtes ning võtame $T = T_c$. Tulemuseks saame ($\eta_1(T_c, 0) = \eta_2(T_c, 0) \equiv \eta(T_c, 0)$):

$$\begin{aligned} \Delta_1 [a_2 + \eta(T_c, 0) D] - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 [a_1 + \eta(T_c, 0) D] - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0. \end{aligned} \quad (C.1)$$

Võrrandisüsteemi (C.1) mittetriviaalse lahendi eksisteerimise tingimusest

$$\begin{vmatrix} D\eta(T_c, 0) + a_2 & -A\sqrt{\tau^{-1}} \\ -A\sqrt{\tau} & D\eta(T_c, 0) + a_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (C.2)$$

saame võrrandid kriitiliste temperatuuride jaoks

$$\eta(T_c^\pm, 0) = \Theta^\pm, \quad (C.3)$$

kus⁴

$$\begin{aligned} \Theta^+ &= -\frac{1}{2D} \left[(a_1 + a_2) - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] = \\ &= -\frac{2(\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2)}{a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2}}, \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \Theta^- &= -\frac{1}{2D} \left[(a_1 + a_2) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] = \\ &= -\frac{2(\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2)}{a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2}}. \end{aligned} \quad (C.5)$$

Teisalt, kui valemis η jaoks (A.17) minna piirile $T \rightarrow T_c$, $\Delta_{1,2} \rightarrow 0$, saame leida integraali. Eeldusel, et $k_B T_c \ll \hbar \omega_D$, see annab

$$\eta(T_c, 0) = \ln \left[\left(\frac{\hbar \omega_D}{2k_B T_c} \right) \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right) \right], \quad (C.6)$$

⁴Avaldiste (B.8) abil saab näidata, et

$$a_1 a_2 - A^2 = (\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2) D.$$

kus $\gamma = e^{0.5772157}$. Lahendades kriitiliste temperatuuride võrrandid (C.3) leiame T_c^+ ja T_c^- :

$$T_c^+ = \left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B} \right) \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right) \exp(-\Theta^+), \quad (\text{C.7})$$

$$T_c^- = \left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B} \right) \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right) \exp(-\Theta^-). \quad (\text{C.8})$$

Suuruse η definitsioonist (A.17) on näha, et $\eta(T_c, 0) > 0$ ⁵. Seega omavad kriitilised temperatuurid T_c^\pm füüsikalist mõtet, kui võrrandi (C.2) lahendid rahuldavad tingimust $\Theta^\pm > 0$. Siinjuures

$$T_c = T_c^-, \text{ kui } 0 < \Theta^- < \Theta^+ \text{ või } \Theta^- > 0, \Theta^+ < 0$$

ja

$$T_c = T_c^+, \text{ kui } 0 < \Theta^+ < \Theta^- \text{ või } \Theta^+ > 0, \Theta^- < 0.$$

Erijuhul kui $\kappa = 0$ ja $k_{1,2} = 0$, siis seoste (B.8) abil saavad valemid (C.4) ja (C.5) kuju

$$\begin{aligned} \Theta^+ &= -\frac{1}{2(w_1w_2 - \lambda^2)} \left[(w_1 + w_2) - \sqrt{(w_1 - w_2)^2 + 4\lambda^2} \right] = \\ &= -\frac{2}{w_1 + w_2 + \sqrt{(w_1 - w_2)^2 + 4\lambda^2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \Theta^- &= -\frac{1}{2(w_1w_2 - \lambda^2)} \left[(w_1 + w_2) + \sqrt{(w_1 - w_2)^2 + 4\lambda^2} \right] = \\ &= -\frac{2}{w_1 + w_2 - \sqrt{(w_1 - w_2)^2 + 4\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

⁵Integraali all olev funktsioon on kogu integreerimispiirkonnas positiivne ning alumine raja on väiksem ülemisest rajast. Seega integraal on positiivne. (Vt integraali monotoonsuse omadus õpikust E. Reimers "Matemaatilise analüüsi praktikum I", *Valgus* 1988, lk 157.)

D Pilude võrrandisüsteemi lahendite klassid

Alajaotises C näitasime, et eksisteerivad kaks kriitilist temperatuuri T_c^- ja T_c^+ . Neile kriitilistele temperatuuridele vastavad võrrandisüsteemi (B.7) kaks mittetriviaalset lahendite klassi $\Delta_{1,2}^-$ ja $\Delta_{1,2}^+$. Allpool selgub, et need kaks lahendite klassi erinevad üksteisest märkide poolest.

Lähtume lineariseeritud võrrandisüsteemist pilude jaoks kujul (C.1):

$$\begin{aligned}\Delta_1 [a_2 + \eta(T_c, 0)D] - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 [a_1 + \eta(T_c, 0)D] - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0.\end{aligned}$$

Süsteemi (C.1) esimese võrrandi teisendamine annab

$$-\eta(T_c, 0)D - a_2 = -A\sqrt{\tau^{-1}} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}. \quad (\text{D.1})$$

Võtame avaldises (D.1) $T_c = T_c^-$ ja $\Delta_{1,2} = \Delta_{1,2}^-$ ning asendame valemist (C.3) $\eta(T_c^-, 0)$, siis saame

$$\frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] = -A\sqrt{\tau^{-1}} \frac{\Delta_2^-}{\Delta_1^-}. \quad (\text{D.2})$$

Seose (D.2) vasakpool on positiivne. Selleks, et võrdus (D.2) saaks kehtida, peab ka võrduse parempool olema positiivne. Viimane on võimalik, kui kehtib märkide reegel $\Delta_{1,2}^-$ jaoks kujul

$$\begin{aligned}A > 0 &: \text{sgn}(\Delta_1^-) = -\text{sgn}(\Delta_2^-), \\ A < 0 &: \text{sgn}(\Delta_1^-) = \text{sgn}(\Delta_2^-).\end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Võtame nüüd võrrandis (D.1) $T_c = T_c^+$ ja $\Delta_{1,2} = \Delta_{1,2}^+$ ning asendame valemist (C.3) $\eta(T_c^+, 0)$, siis saame

$$\frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] = -A\sqrt{\tau^{-1}} \frac{\Delta_2^+}{\Delta_1^+}. \quad (\text{D.4})$$

Seose (D.4) vasakpool on negatiivne. Selleks, et võrdus (D.4) saaks kehtida, peab ka võrduse parempool olema negatiivne. Viimane on võimalik, kui kehtib märkide reegel $\Delta_{1,2}^+$ jaoks kujul

$$\begin{aligned}A > 0 &: \text{sgn}(\Delta_1^+) = \text{sgn}(\Delta_2^+), \\ A < 0 &: \text{sgn}(\Delta_1^+) = -\text{sgn}(\Delta_2^+).\end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Märkide reeglid (D.3) ja (D.5) võimaldavad võrrandite (B.7) alusel panna kirja võrrandisüsteemid $\Delta_{1,2}^-$ ja $\Delta_{1,2}^+$ absoluutväärtuste jaoks. Need avalduvad

$$\begin{aligned}|\Delta_1^-| [a_2 + \eta_1(T, \Delta_1^-)D] + |A||\Delta_2^-|\sqrt{\tau^{-1}} &= 0, \\ |\Delta_2^-| [a_1 + \eta_2(T, \Delta_2^-)D] + |A||\Delta_1^-|\sqrt{\tau} &= 0\end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

ja

$$\begin{aligned} |\Delta_1^+| \left[a_2 + \eta_1(T, \Delta_1^+)D \right] - |A||\Delta_2^+|\sqrt{\tau^{-1}} &= 0, \\ |\Delta_2^+| \left[a_1 + \eta_2(T, \Delta_2^+)D \right] - |A||\Delta_1^+|\sqrt{\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

D.1 Lahendite klassi määrava avaldise analüüs

Lähtume A avaldisest (B.8)

$$A = \kappa - \lambda \kappa^2 G^2 + \lambda \xi_1 \xi_2.$$

Eeldame, et $\kappa \geq 0$ ja $\lambda \leq 0$, siis saame kirjutada

$$A = \kappa^2 G^2 |\lambda| + \kappa - |\lambda| \xi_1 \xi_2 = G^2 |\lambda| \left[\kappa^2 + \kappa \frac{1}{G^2 |\lambda|} - \frac{\xi_1 \xi_2}{G^2} \right]. \quad (\text{D.8})$$

Edasi vaatame funktsionaalset sõltuvust $A(\kappa)$. Lahutame avaldise (D.8) teguriteks. See annab

$$A = G^2 |\lambda| (\kappa - \mathcal{K}_+) (\kappa - \mathcal{K}_-), \quad (\text{D.9})$$

kus

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_+ &= \frac{-1 + \sqrt{1 + 4|\lambda|^2 G^2 \xi_1 \xi_2}}{2|\lambda| G^2} = \frac{2|\lambda| \xi_1 \xi_2}{1 + \sqrt{1 + 4|\lambda|^2 G^2 \xi_1 \xi_2}}, \\ \mathcal{K}_- &= \frac{-1 - \sqrt{1 + 4|\lambda|^2 G^2 \xi_1 \xi_2}}{2|\lambda| G^2} = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4|\lambda|^2 G^2 \xi_1 \xi_2}}{2|\lambda| G^2}. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Kuna $\mathcal{K}_+ \geq 0^6$ ja $\mathcal{K}_- < 0$, siis saame valemist (D.9), et

$$A = G^2 |\lambda| (\kappa - \mathcal{K}_+) (\kappa + |\mathcal{K}_-|). \quad (\text{D.11})$$

Seega kui

$$\kappa = \mathcal{K}_+, \quad (\text{D.12})$$

siis $A = 0$. Valemi (D.10₁) alusel leiame erijuhtude jaoks, et⁷

$$\mathcal{K}_+ = \begin{cases} 0, & \text{kui } |\lambda| = 0, \\ |\lambda|, & \text{kui } G = 0. \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Valemist (D.11) tuleneb, et suuruse A märk on määratud vahe $\kappa - \mathcal{K}_+$ märgiga. Seega

$$\begin{aligned} A &> 0, & \text{kui } \kappa > \mathcal{K}_+, \\ A &< 0, & \text{kui } 0 \leq \kappa < \mathcal{K}_+. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

⁶Suuruse ξ_α definitsiooni (B.6₁) kohaselt $\xi_\alpha > 0$, sest $k_\alpha \geq 0$ ja $G \geq 0$.

⁷Kui $G = 0$, siis valem (B.6₁) annab, et $\xi_\alpha = 1$.

E Ülijuhtivuspilud nulltemperatuuril

Lähtume võrrandisüsteemist (B.7):

$$\begin{aligned}\Delta_1 a_2 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) D - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 a_1 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) D - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0.\end{aligned}$$

Avaldades siit suurused $\eta_{1,2}$, saame

$$\begin{aligned}\eta_1(T, \Delta_1) &= \frac{A}{D} \sqrt{\tau^{-1}} \delta^{-1} - \frac{a_2}{D}, \\ \eta_2(T, \Delta_2) &= \frac{A}{D} \sqrt{\tau} \delta - \frac{a_1}{D},\end{aligned}\tag{E.1}$$

kus

$$\delta = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.\tag{E.2}$$

Arvestame nüüd märkide reeglga (D.3)⁸, siis süsteemist (E.1) järeldub

$$\begin{aligned}-\eta_1(T, \Delta_1) &= \frac{|A|}{D} \sqrt{\tau^{-1}} |\delta|^{-1} + \frac{a_2}{D}, \\ -\eta_2(T, \Delta_2) &= \frac{|A|}{D} \sqrt{\tau} |\delta| + \frac{a_1}{D}.\end{aligned}\tag{E.3}$$

Temperatuuril $T = 0$ K leiame integraalid $\eta_{1,2}(T, \Delta_{1,2})$, mis on defineeritud valemiga (A.17). See annab⁹ $[\Delta_{1,2}(T = 0 \text{ K}) \equiv \Delta_{1,2}(0)]$

$$\begin{aligned}\eta_{1,2}(0, \Delta_{1,2}(0)) &= \int_0^{\hbar\omega_D} E_{1,2}^{-1}(\Delta_{1,2}(0), \tilde{\epsilon}_{1,2}) d\tilde{\epsilon}_{1,2} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\epsilon}_{1,2}^2 + |\Delta_{1,2}(0)|^2}} d\tilde{\epsilon}_{1,2} = \tag{E.4} \\ &= \ln \left| \hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + |\Delta_{1,2}(0)|^2} \right| - \ln |\Delta_{1,2}(0)| \approx \ln \left(\frac{2\hbar\omega_D}{|\Delta_{1,2}(0)|} \right).\end{aligned}$$

Pilude jaoks võrrandisüsteem, kui $T = 0$ K, on võrranditest (E.3) lähtuvalt kujul¹⁰

$$\begin{aligned}|\Delta_1(0)| &= 2\hbar\omega_D \exp \left(\frac{|A|}{D} \sqrt{\tau^{-1}} |\delta|^{-1} + \frac{a_2}{D} \right), \\ |\Delta_2(0)| &= 2\hbar\omega_D \exp \left(\frac{|A|}{D} \sqrt{\tau} |\delta| + \frac{a_1}{D} \right).\end{aligned}\tag{E.5}$$

⁸Tegemist on märkide reeglga $\Delta_{1,2}^-$ jaoks.

⁹Valemis (E.4) on lõpptulemuse saamiseks eeldatud, et $|\Delta_{1,2}(0)| \ll \hbar\omega_D$.

¹⁰Siin $\delta = \frac{\Delta_1(0)}{\Delta_2(0)}$.

Võrdusest¹¹

$$a_1 a_2 - A^2 = (\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2) D$$

avaldame

$$\frac{1}{D} = \frac{\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2}{a_1 a_2 - A^2}. \quad (\text{E.6})$$

Kui $A = 0$ (st $\kappa = \mathcal{K}_+$), siis valemite (E.5) ja (E.6) alusel leiame, et

$$\begin{aligned} |\Delta_1(0)| &= 2\hbar\omega_D \exp\left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \mathcal{K}_+^2 G^2}{\bar{a}_1}\right), \\ |\Delta_2(0)| &= 2\hbar\omega_D \exp\left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \mathcal{K}_+^2 G^2}{\bar{a}_2}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

kus

$$\bar{a}_\alpha = a_\alpha \Big|_{\kappa=\mathcal{K}_+} = \xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha) - \mathcal{K}_+^2 G(1 + w_\alpha G). \quad (\text{E.8})$$

Seega nulltemperatuursete pilude jaoks võrrandisüsteem (E.5) läheb üle kaheks sõltumatuks avaldiseks, kui $A = 0$.

Pidades silmas valemit (E.4), on avaldised (E.7) kooskõlas võrranditega (B.9), kui viimastes võtta samuti $A = 0$ ning $T = 0$.

Valemite (E.5), (E.6) ja (C.8) alusel saame suhete jaoks

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_1(0)|}{k_B T_c^-} &= \frac{\pi}{\gamma} \exp\left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2}{a_1 a_2 - A^2} r_1(\Delta_1(0), \Delta_2(0))\right), \\ \frac{|\Delta_2(0)|}{k_B T_c^-} &= \frac{\pi}{\gamma} \exp\left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2}{a_1 a_2 - A^2} r_2(\Delta_1(0), \Delta_2(0))\right), \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

kus

$$\begin{aligned} r_1(\Delta_1(0), \Delta_2(0)) &= |A| \sqrt{\tau^{-1}} |\delta|^{-1} - \frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right], \\ r_2(\Delta_1(0), \Delta_2(0)) &= |A| \sqrt{\tau} |\delta| + \frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

ja

$$\delta = \frac{\Delta_1(0)}{\Delta_2(0)}.$$

¹¹Vt joonealune märkus [4].

Paneme tähele, et $A = 0$ (st $\kappa = \mathcal{K}_+$) korral

$$\begin{aligned} r_1(\Delta_1(0), \Delta_2(0)) &= 0, \text{ kui } \bar{a}_1 - \bar{a}_2 < 0, \\ r_2(\Delta_1(0), \Delta_2(0)) &= 0, \text{ kui } \bar{a}_1 - \bar{a}_2 > 0. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Sel erijuhul järeldub avaldistest (E.9) ja (E.11), et

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta_1(0)|}{k_{\text{B}}T_c^-} &= \frac{\pi}{\gamma}, \text{ kui } \bar{a}_1 - \bar{a}_2 < 0, \\ \frac{|\Delta_2(0)|}{k_{\text{B}}T_c^-} &= \frac{\pi}{\gamma}, \text{ kui } \bar{a}_1 - \bar{a}_2 > 0. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

F Ülijuhtivuspilud siirdetemperatuuri lähedal

Lähtume võrrandisüsteemist (B.7):

$$\begin{aligned}\Delta_1 a_2 + \Delta_1 \eta_1(T, \Delta_1) D - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 a_1 + \Delta_2 \eta_2(T, \Delta_2) D - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0,\end{aligned}$$

kus

$$\eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) = \int_0^{\hbar\omega_D} E_\alpha^{-1}(\Delta_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) \tanh\left(\frac{E_\alpha(\Delta_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha)}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha.$$

Arendame suuruse $\eta_\alpha(T, \Delta_\alpha)$ korrusatusparameetrite järgi ritta, mis annab

$$\eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) = \eta(T, 0) - \nu \Delta_\alpha^2, \quad (\text{F.1})$$

kus

$$\nu = \frac{7\zeta(3)}{8(\pi k_B T_c)^2}. \quad (\text{F.2})$$

Asendame avaldise (F.1) võrranditesse (B.7), saame

$$\begin{aligned}\Delta_1 a_2 + \Delta_1 \eta(T, 0) D - D\nu \Delta_1^3 - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 a_1 + \Delta_2 \eta(T, 0) D - D\nu \Delta_2^3 - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0,\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}\Delta_1 [a_2 + D\eta(T, 0)] - D\nu \Delta_1^3 - \sqrt{\tau^{-1}} A \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 [a_1 + D\eta(T, 0)] - D\nu \Delta_2^3 - \sqrt{\tau} A \Delta_1 &= 0.\end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Tähistame

$$\begin{aligned}q_\alpha &= a_{3-\alpha} + D\eta(T, 0), \\ Q_{1,2} &= -\sqrt{\tau^{\pm 1}} A,\end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

siis süsteem (F.3) on kujul

$$\begin{aligned}\Delta_1 q_1 - D\nu \Delta_1^3 + Q_2 \Delta_2 &= 0, \\ \Delta_2 q_2 - D\nu \Delta_2^3 + Q_1 \Delta_1 &= 0.\end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Korrutame esimest võrrandit suurusega q_2 , teist võrrandit suurusega Q_2 ja lahutame. Korrutame teist võrrandit suurusega q_1 , esimest võrrandit suurusega Q_1 ning lahutame. Tulemuseks on

$$\begin{aligned}\Delta_1 (q_1 q_2 - Q_1 Q_2) - D\nu q_2 \Delta_1^3 + D\nu Q_2 \Delta_2^3 &= 0, \\ \Delta_2 (q_1 q_2 - Q_1 Q_2) - D\nu q_1 \Delta_2^3 + D\nu Q_1 \Delta_1^3 &= 0.\end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Teeme nüüd esimesse võrrandisse asenduse $\Delta_2 = -\frac{Q_1}{q_2}\Delta_1$ ja teise võrrandisse asenduse $\Delta_1 = -\frac{Q_2}{q_1}\Delta_2$. See annab

$$\begin{aligned}\Delta_1 \left[(q_1 q_2 - Q_1 Q_2) - D\nu \Delta_1^2 \left(q_2 + \frac{Q_2 Q_1^3}{q_2^3} \right) \right] &= 0, \\ \Delta_2 \left[(q_1 q_2 - Q_1 Q_2) - D\nu \Delta_2^2 \left(q_1 + \frac{Q_1 Q_2^3}{q_1^3} \right) \right] &= 0.\end{aligned}\quad (\text{F.7})$$

Avaldame siit $\Delta_{1,2}^2$ ja saame

$$\begin{aligned}\Delta_1^2 &= \frac{q_1 q_2 - Q_1 Q_2}{D\nu \left(q_2 + \frac{Q_2 Q_1^3}{q_2^3} \right)}, \\ \Delta_2^2 &= \frac{q_1 q_2 - Q_1 Q_2}{D\nu \left(q_1 + \frac{Q_1 Q_2^3}{q_1^3} \right)}.\end{aligned}\quad (\text{F.8})$$

Võtame $T = T_c$ ja leiame, et

$$q_1 q_2 - Q_1 Q_2 \stackrel{(\text{F.4})}{=} \begin{vmatrix} D\eta(T_c, 0) + a_2 & -A\sqrt{\tau^{-1}} \\ -A\sqrt{\tau} & D\eta(T_c, 0) + a_1 \end{vmatrix} \stackrel{(\text{C.2})}{=} 0. \quad (\text{F.9})$$

Kui $A = 0$ (st $\kappa = \mathcal{K}_+$), siis valemite (E.6), (F.4) ja (F.8) alusel leiame, et korrustusparameetrid avalduvad järgmiselt

$$\begin{aligned}\Delta_1^2 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \mathcal{K}_+^2 G^2}{\bar{a}_1} + \eta(T, 0) \right), \\ \Delta_2^2 &= \frac{1}{\nu} \left(\frac{\xi_1 \xi_2 - \mathcal{K}_+^2 G^2}{\bar{a}_2} + \eta(T, 0) \right),\end{aligned}\quad (\text{F.10})$$

kus \bar{a}_α on defineeritud valemiga (E.8)

$$\bar{a}_\alpha = \xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha) - \mathcal{K}_+^2 G(1 + w_\alpha G).$$

Pidades silmas valemite (F.1), on avaldised (F.10) kooskõlas võrranditega (B.9), kui viimastes võtta samuti $A = 0$.

F.1 Ülijuhtivuspilude avaldiste reaksarendus $T - T_c$ astmete järgi

Kui $T \rightarrow T_c$, siis kehtib

$$\eta_\alpha(T, 0) \simeq \ln \left[\left(\frac{\hbar \omega_D}{2k_B T} \right) \left(\frac{4\gamma}{\pi} \right) \right]. \quad (\text{F.11})$$

Arendame suuruse $\eta(T, 0)$ ritta $T - T_c$ astmete järgi. See annab

$$\eta_\alpha(T, 0) \approx \eta(T_c, 0) + \left. \frac{d\eta(T, 0)}{dT} \right|_{T=T_c} (T - T_c), \quad (\text{F.12})$$

ehk

$$\eta_\alpha(T, 0) \approx \eta(T_c, 0) - \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (\text{F.13})$$

Asendame avaldise (F.13) valemisse (F.4), siis saame

$$q_\alpha = q_\alpha^c + D \frac{T_c - T}{T_c}, \quad (\text{F.14})$$

kus

$$q_\alpha^c = a_{3-\alpha} + D\eta(T_c, 0). \quad (\text{F.15})$$

Võrrand T_c jaoks on uutes tähistustes järgmine

$$q_1^c q_2^c - Q_1 Q_2 = 0. \quad (\text{F.16})$$

Valemi (F.14) alusel leiame

$$q_1 q_2 \approx q_1^c q_2^c + (q_1^c + q_2^c) D \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (\text{F.17})$$

Asendame q_α avaldised (F.14) valemitesse (F.8). Pidades silmas valemit (F.17) ning arvestades T_c võrrandiga (F.16), saame

$$\Delta_1^2(T) = \frac{q_1^c + q_2^c}{\left(q_2^c + \frac{Q_2 Q_1^3}{(q_2^c)^3} \right)} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c} \quad (\text{F.18})$$

ja

$$\Delta_2^2(T) = \frac{q_1^c + q_2^c}{\left(q_1^c + \frac{Q_1 Q_2^3}{(q_1^c)^3} \right)} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c}. \quad (\text{F.19})$$

Kasutades T_c võrrandit (F.16) saab leida, et

$$\begin{aligned} q_2^c + \frac{Q_2 Q_1^3}{(q_2^c)^3} &= \frac{1}{q_2^c Q_2} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right), \\ q_1^c + \frac{Q_1 Q_2^3}{(q_1^c)^3} &= \frac{1}{q_1^c Q_1} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Teeme valemist (F.20) asendused valemitesse (F.18) ja (F.19). See annab tulemuseks

$$\begin{aligned}\Delta_1^2(T) &= \frac{q_2^c Q_2 (q_1^c + q_2^c)}{(q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c} = \\ &= \frac{q_2^c (q_1^c + q_2^c)}{(q_2^c)^2 + (q_1^c)^2 \tau} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c} =\end{aligned}\quad (\text{F.21})$$

ja

$$\begin{aligned}\Delta_2^2(T) &= \frac{q_1^c Q_1 (q_1^c + q_2^c)}{(q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c} = \\ &= \frac{q_1^c \tau (q_1^c + q_2^c)}{(q_2^c)^2 + (q_1^c)^2 \tau} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{T_c - T}{T_c}.\end{aligned}\quad (\text{F.22})$$

Seega pilude temperatuurisõltuvus T_c lähedal¹² [$\Xi \equiv k_B T$]:

$$|\Delta_{1,2}(T)| = 3.06 \Xi_c \Gamma_{1,2} \left(1 - \frac{\Xi}{\Xi_c}\right)^{1/2}, \quad (\text{F.23})$$

kus

$$\Gamma_\alpha = \left[q_{3-\alpha}^c \tau^{\alpha-1} \frac{q_1^c + q_2^c}{(q_2^c)^2 + (q_1^c)^2 \tau} \right]^{1/2}. \quad (\text{F.24})$$

Võtame $T_c = T_c^-$, siis valemite (C.3), (C.5) ja (F.15) alusel saame

$$q_1^c = -\frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] \quad (\text{F.25})$$

ja

$$\begin{aligned}q_2^c &= -\frac{1}{2} \left[(a_2 - a_1) + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[(a_1 - a_2) - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4A^2} \right].\end{aligned}\quad (\text{F.26})$$

Valemitest (F.25) ja (F.26) järeldeb, et $A = 0$ (st $\kappa = \mathcal{K}_+$) korral on üks suurustest q_1^c või q_2^c võrdne nulliga¹³. Kumb nimetatutest null on, see sõltub vahe $\bar{a}_1 - \bar{a}_2$ märgist. Valemist (F.24) tuleneb, et siis

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= 1, \Gamma_2 = 0, \text{ kui } q_1^c = 0 \ (\bar{a}_1 - \bar{a}_2 < 0); \\ \Gamma_1 &= 0, \Gamma_2 = 1, \text{ kui } q_2^c = 0 \ (\bar{a}_1 - \bar{a}_2 > 0).\end{aligned}\quad (\text{F.27})$$

¹²Märgime, et $\nu = \frac{1}{\frac{8\pi^2}{7\zeta(3)}(k_B T_c)^2} \simeq \frac{1}{(3.06 k_B T_c)^2}$.

¹³Kui $A = 0$, siis ka T_c võrrandist (F.16) järeldeb samuti, et üks suurustest q_1^c või q_2^c on võrdne nulliga. Seda seetõttu, et $Q_\alpha \sim A$.

G Vabaenergia ja faasisiirde punktis soojusmahtuvuse hüpe

Kahetsoonilise ülijuhi vabaenergia

$$F = -k_B T \ln Z \quad (\text{G.1})$$

on määratud statistilise summaga (A.13). Järelikult

$$F = \sum_{\alpha \mathbf{k}} \left[\tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k}) - 2k_B T \ln \left(2 \cosh \frac{E_{\alpha}(\mathbf{k})}{2k_B T} \right) + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha \mathbf{k}}^2 h_{\alpha \mathbf{k}} \right]. \quad (\text{G.2})$$

Kuna süsteemi vabaenergia normaalseisundis on

$$F_n = \sum_{\alpha \mathbf{k}} \left[\tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k}) - 2k_B T \ln \left(2 \cosh \frac{|\tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k})|}{2k_B T} \right) \right], \quad (\text{G.3})$$

siis kahetsoonilise ülijuhi vabaenergia muutus normaalseisundi suhtes avaldub järgmiselt

$$\begin{aligned} F - F_n &= 2k_B T \sum_{\alpha \mathbf{k}} \ln \left(2 \cosh \frac{|\tilde{\varepsilon}_{\alpha}(\mathbf{k})|}{2k_B T} \right) - \\ &- 2k_B T \sum_{\alpha \mathbf{k}} \ln \left(2 \cosh \frac{E_{\alpha}(\mathbf{k})}{2k_B T} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \mathbf{k}} \Delta_{\alpha \mathbf{k}}^2 h_{\alpha \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Arvestades vaadeldava mudeli lähendusi, saame avaldise (G.4) kirjutada kujul

$$F - F_n = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} J(T, 0) - \rho_{\alpha} J_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) + \Delta_{\alpha}^2 \rho_{\alpha} \eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}), \quad (\text{G.5})$$

kus

$$J_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) = 2k_B T \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \ln \left(2 \cosh \frac{E_{\alpha}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha})}{2k_B T} \right) d\tilde{\varepsilon}_{\alpha}, \quad (\text{G.6})$$

$$\eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) = \int_0^{\hbar\omega_D} E_{\alpha}^{-1}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha}) \tanh \frac{E_{\alpha}(\Delta_{\alpha}, \tilde{\varepsilon}_{\alpha})}{2k_B T} d\tilde{\varepsilon}_{\alpha}. \quad (\text{G.7})$$

Vabaenergia (G.5) võib arendada ritta korrastusparameetrite Δ_{α} astmete järgi, kui $T \rightarrow T_c$. Selleks leiame

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) &\approx \eta(T, 0) - \nu \Delta_{\alpha}^2, \\ J_{\alpha}(T, \Delta_{\alpha}) &\approx J(T, 0) + \eta(T, 0) \Delta_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \nu \Delta_{\alpha}^4. \end{aligned}$$

Vastavalt sellele

$$F - F_n = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \nu \Delta_{\alpha}^4. \quad (\text{G.8})$$

Asendame nüüd pilude avaldised (F.23) valemisse (G.8). Saame tulemuseks

$$F = F_n - \frac{1}{2} (3.06 \Xi_c)^2 \left(1 - \frac{\Xi}{\Xi_c}\right)^2 (\rho_1 \Gamma_1^4 + \rho_2 \Gamma_2^4). \quad (\text{G.9})$$

Siit järeldub, et soojusmahtuvuse hüpe faasisiirde punktis avaldub

$$\Delta C = (3.06 k_B)^2 (\rho_1 \Gamma_1^4 + \rho_2 \Gamma_2^4) T_c. \quad (\text{G.10})$$

Soojusmahtuvus normaalseisundis on

$$C_n = \gamma_s T, \quad (\text{G.11})$$

$$\gamma_s = \frac{2\pi^2}{3} (\rho_1 + \rho_2) k_B^2. \quad (\text{G.12})$$

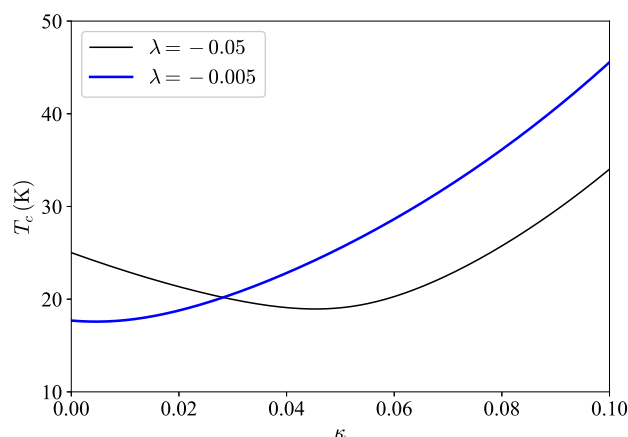
Siis valemite (G.10) ja (G.11) alusel saame, et faasisiirde punktis

$$\frac{\Delta C}{C_n} = \frac{12}{7\zeta(3)} \cdot \frac{\rho_1 \Gamma_1^4 + \rho_2 \Gamma_2^4}{\rho_1 + \rho_2} \simeq 1.43 \frac{\tau \Gamma_1^4 + \Gamma_2^4}{\tau + 1}. \quad (\text{G.13})$$

Valemitest (F.27) ja (G.13) järeldub, et $A = 0$ (st $\kappa = \mathcal{K}_+$) korral

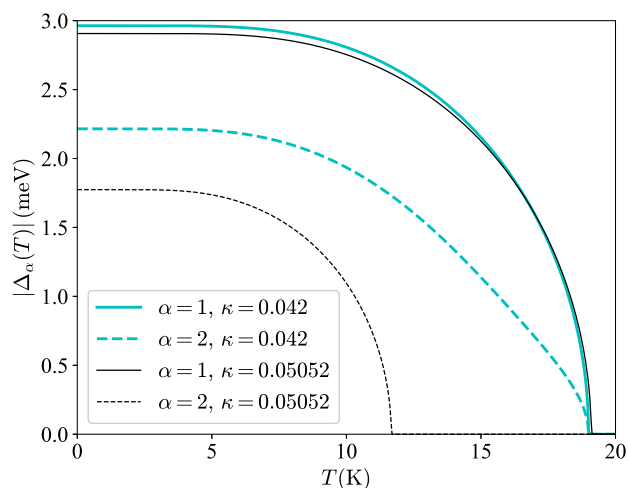
$$\begin{aligned} \frac{\Delta C}{C_n} &= 1.43 \frac{\tau}{\tau + 1}, \text{ kui } q_1^c = 0 \ (\bar{a}_1 - \bar{a}_2 < 0); \\ \frac{\Delta C}{C_n} &= 1.43 \frac{1}{\tau + 1}, \text{ kui } q_2^c = 0 \ (\bar{a}_1 - \bar{a}_2 > 0). \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

H Karakteristikute sõltuvus tsoonidevahelisest tõukeinteraktsioonist. Pilude temperatuurisõltuvus



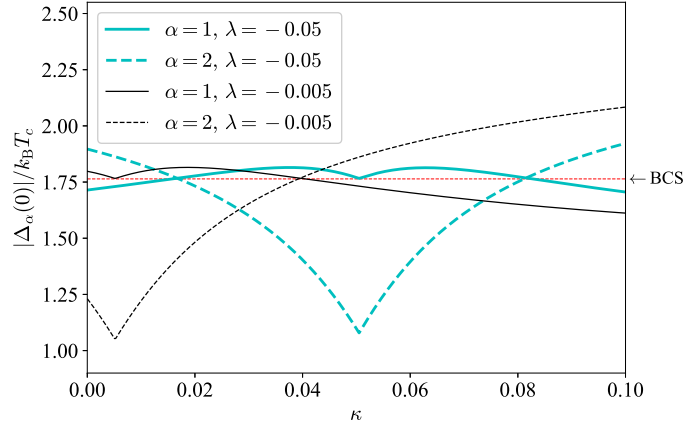
Joonis 2. Faasisiirde temperatuuri sõltuvus tõukeinteraktsioonist. Parameetrid: $G = \ln(20)$, $\hbar\omega_D = 0.04\text{eV}$, $k_1 = 0.006$, $k_2 = 0.005$, $w_1 = -0.3$, $w_2 = -0.26$.

Jooniselt 2 on näha, et kriitiline temperatuur sõltuvalt tsoonidevahelisest tõukeinteraktsioonist esmalt kahaneb ning peale miinimumi läbimist hakkab kasvama (joonisel must joon). See on nii, kui tsoonidevaheline tõmbeinteraktsioon on piisavalt tugev. Kui tsoonidevaheline tõmbeinteraktsioon on nõrk, siis miinimumi ei teki (joonisel sinine joon).



Joonis 3. Pilude sõltuvus temperatuurist. Parameetrid: $\tau = 3$, $\lambda = -0.05$ ning ülejäänud vt joonise 2 allkirjast.

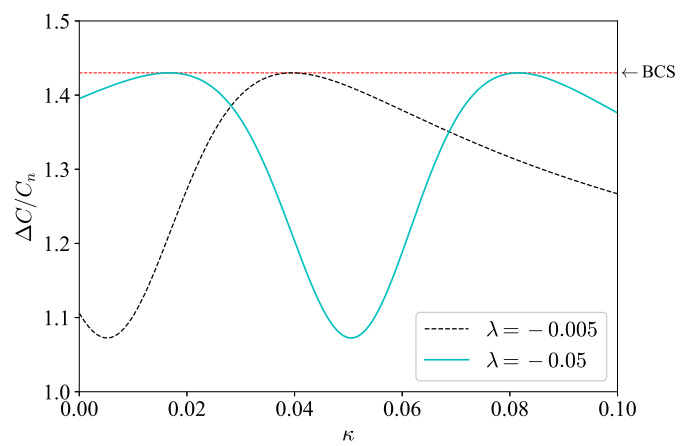
Joonisel 3 on toodud pilude sõltuvus temperatuurist kahel erineval tsoonidevahelise tõukeinteraktsiooni väärtuse korral. Kui $\kappa < \mathcal{K}_+$, siis toimub faasiire mõlema pilu jaoks ühel ja samal kriitilisel temperatuuril. Kui aga $\kappa = \mathcal{K}_+$, siis toimub kaks faasisiiret, kummagi pilu jaoks eraldi, erinevatel temperatuuridel. Samas mõlemal nimetatud juhul panustavad nii tsoonidevaheline tõukeinteraktsioon kui ka tsoonidevaheline tõmbeinteraktsioon faasisiirde toimumisse.



Joonis 4. Pilude sõltuvus tõukeinteraktsioonist nulltemperatuuril. Parameetrid: $\tau = 3$ ja ülejäänud vt joonise 2 allkirjast.

Jooniselt 4 on näha, et punktides $\kappa = \mathcal{K}_+$ ei ole suhte $\frac{|\Delta_\alpha(0)|}{k_B T_c^-}$ sõltuvus tõukeinteraktsioonist sujuv, vaid on moodustunud teravik. Selle põhjuseks on asjaolu, et nimetatud punktides pole pilude suhte märk määratud. Kooskõlas eelneva analüütilise rehkendusega saab, punktides $\kappa = \mathcal{K}_+$, suhe $\frac{|\Delta_1(0)|}{k_B T_c^-}$ võrdseks BCS teooriast tuntud konstandiga. Lisaks näeme jooniselt, et teatud tõukeinteraktsiooni väärtuste korral mõlemad suhted $\frac{|\Delta_1(0)|}{k_B T_c^-}$, $\frac{|\Delta_2(0)|}{k_B T_c^-}$ on võrdsed nimetatud konstandiga (so joonisel sama värvi katkendliku ja pideva joone lõikepunktid punasel horisontaaljoonel).

Joonisel 5 näha olevad miinimumid vastavad punktidele, kus $\kappa = \mathcal{K}_+$. Suhe $\Delta C/C_n$ sõltuvalt tõukeinteraktsioonist omab samas ka vähemalt ühte maksimumi. Nimetatud maksimumid on tingitud asjaolust, et $|\Delta_1| \approx |\Delta_2|$ ning sel juhul $\Delta C/C_n \simeq 1.43$.



Joonis 5. Soojusmahtuvushüppe sõltuvus tõukeinteraktsioonist siirdepunktis. Parameetrid: $\tau = 3$ ja ülejäänud vt joonise 2 allkirjast.

L LISAD

L.1 Abiseose kehtivuse näitamine

Näitame, et kehtib seos

$$a_1 a_2 - A^2 = (\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2) D. \quad (\text{L.1})$$

Selleks esiteks leiame

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &=_{(\text{B.8})} (\xi_2 b_1 - B_1 \kappa G)(\xi_1 b_2 - B_2 \kappa G) = \\ &= \xi_2 \xi_1 b_2 b_1 + B_1 B_2 \kappa^2 G^2 - \xi_2 b_1 B_2 \kappa G - \xi_1 b_2 B_1 \kappa G. \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

Avaldame nüüd valemist (L.2)

$$\xi_2 \xi_1 b_2 b_1 + B_1 B_2 \kappa^2 G^2 = a_1 a_2 + \xi_2 b_1 B_2 \kappa G + \xi_1 b_2 B_1 \kappa G. \quad (\text{L.3})$$

Järgnevalt teisendame valemi (L.1) paremat poolt. See annab

$$\begin{aligned} \underline{(\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2) D} &=_{(\text{B.8})} (\xi_1 \xi_2 - G^2 \kappa^2)(b_1 b_2 - B_1 B_2) = \\ &= \xi_2 \xi_1 b_2 b_1 + B_1 B_2 \kappa^2 G^2 - b_1 b_2 G^2 \kappa^2 - \xi_1 \xi_2 B_1 B_2 =_{(\text{L.3})} \\ &= a_1 a_2 + \xi_2 b_1 B_2 \kappa G + \xi_1 b_2 B_1 \kappa G - b_1 b_2 G^2 \kappa^2 - \xi_1 \xi_2 B_1 B_2 = \\ &= a_1 a_2 - \xi_1 B_1 (\xi_2 B_2 - b_2 \kappa G) + b_1 \kappa G (\xi_2 B_2 - b_2 \kappa G) = \\ &= a_1 a_2 - (\xi_2 B_2 - b_2 \kappa G)(\xi_1 B_1 - b_1 \kappa G) =_{(\text{B.8})} \\ &= \underline{a_1 a_2 - A^2}. \end{aligned} \quad (\text{L.4})$$

Seega seos (L.1) kehtib.

L.2 Võrrandisüsteemi kordajad erijuhtudel

Võrrandisüsteemide (B.5) ja (B.9) kordajad erijuhtudel¹⁴.

kordaja	$G = 0$	$\kappa = 0$	$k_{1,2} = 0$	$\lambda = 0$
ξ_α	1	$1 + k_\alpha G$	1	$1 + k_\alpha G$
b_α	$k_\alpha + w_\alpha$	$(\mu_\alpha^* + w_\alpha) \xi_\alpha$	$w_\alpha + G\kappa\lambda$	$(\mu_\alpha^* + w_\alpha) \xi_\alpha$
B_α	$\lambda + \kappa$	$\lambda \xi_{3-\alpha}$	$\lambda + \kappa + G\kappa w_\alpha$	$\kappa + G\kappa w_\alpha$
A	$\lambda + \kappa$	$\lambda \xi_1 \xi_2$	$\kappa + \lambda(1 - G^2 \kappa^2)$	κ
a_α	$k_\alpha + w_\alpha$	$\xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha)$	$w_\alpha(1 - G^2 \kappa^2) - \kappa^2 G$	$\xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha) - \kappa^2 G(1 + w_\alpha G)$
\mathcal{P}	1	$\xi_1 \xi_2$	$1 - \kappa^2 G^2$	$\xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2$

¹⁴ $\mathcal{P} = \xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2$.

L.3 Võrrandisüsteemi kordajate sõltuvus tsoonidevahelisest tõukeinteraktsioonist

Vaatame kordajad

$$a_\alpha = \xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* + w_\alpha) - \kappa^2 G(1 + w_\alpha G). \quad (\text{L.5})$$

Eeldame, et $w_\alpha < 0$. Edasi saame leida, et

$$\frac{\partial a_\alpha}{\partial \kappa} = 2\kappa G(|w_\alpha|G - 1), \quad (\text{L.6})$$

millest jäeldub, et statsionaarne punkt on $\kappa = 0$. Leiame ka teise tuletise. See annab

$$\frac{\partial^2 a_\alpha}{\partial \kappa^2} = 2G(|w_\alpha|G - 1). \quad (\text{L.7})$$

Siit jäeldub, et punktis $\kappa = 0$ on miinimum, kui $|w_\alpha|G > 1$ ning maksimum, kui $|w_\alpha|G < 1$.

Märgime veel, et

$$a_\alpha(\kappa = 0) = \xi_1 \xi_2 (\mu_\alpha^* - |w_\alpha|). \quad (\text{L.8})$$

1) Olgu

$$|w_\alpha|G > 1. \quad (\text{L.9})$$

Sel juhul $\frac{\partial a_\alpha}{\partial \kappa} > 0$, millest jäeldub, et a_α kasvab interaktsioonikonstandi κ kasvades.

1a) Eeldame nüüd lisaks, et

$$\mu_\alpha^* - |w_\alpha| > 0. \quad (\text{L.10})$$

Kuna eelnevast teame, et punktis $\kappa = 0$ on miinimum, siis saame skitseerida sõltuvuse $a_\alpha(\kappa)$ joonisel 6.

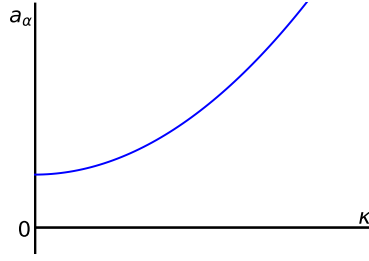
1b) Eeldame siin lisaks, et

$$\mu_\alpha^* - |w_\alpha| < 0. \quad (\text{L.11})$$

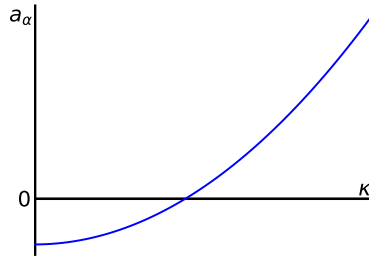
Kuna eelnevast teame, et punktis $\kappa = 0$ on miinimum, siis saame skitseerida sõltuvuse $a_\alpha(\kappa)$ joonisel 7.

2) Olgu

$$|w_\alpha|G < 1. \quad (\text{L.12})$$



Joonis 6. Kordaja a_α skemaatiline sõltuvus interaktsioonikonstandist κ juhul 1a.



Joonis 7. Kordaja a_α skemaatiline sõltuvus interaktsioonikonstandist κ juhul 1b.

Sel juhul $\frac{\partial a_\alpha}{\partial \kappa} < 0$, millest järeldub, et a_α kahaneb interaktsioonikonstandi κ kasvades.

2a) Eeldame nüüd lisaks, et

$$\mu_\alpha^* - |w_\alpha| > 0. \quad (\text{L.13})$$

Kuna eelnevast teame, et punktis $\kappa = 0$ on maksimum, siis saame skitseerida sõltuvuse $a_\alpha(\kappa)$ joonisel 8.

2b) Eeldame siin lisaks, et

$$\mu_\alpha^* - |w_\alpha| < 0. \quad (\text{L.14})$$

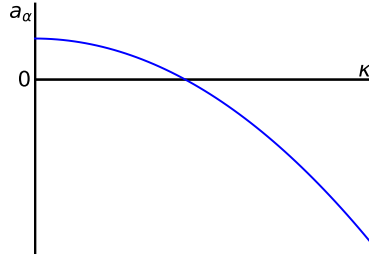
Kuna eelnevast teame, et punktis $\kappa = 0$ on maksimum, siis saame skitseerida sõltuvuse $a_\alpha(\kappa)$ joonisel 9.

Vaatame kordajat

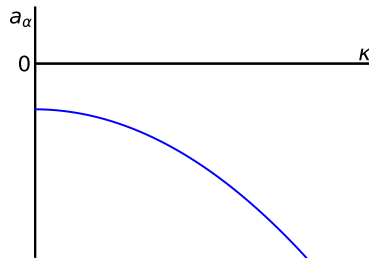
$$\mathcal{P} = \xi_1 \xi_2 - \kappa^2 G^2. \quad (\text{L.15})$$

Leiame tuletise

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \kappa} = -2\kappa G^2, \quad (\text{L.16})$$



Joonis 8. Kordaja a_α skemaatiline sõltuvus interaktsioonikonstandist κ juhul 2a.

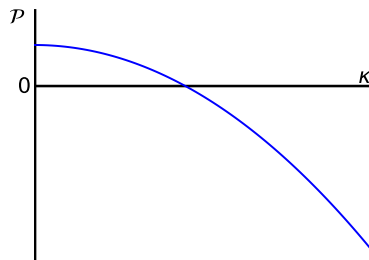


Joonis 9. Kordaja a_α skemaatiline sõltuvus interaktsioonikonstandist κ juhul 2b.

millest järeldub, et punkt $\kappa = 0$ on kriitiline punkt. Leiame ka teise tuletise, mis annab

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \kappa^2} = -2G^2. \quad (\text{L.17})$$

Kuna teine tuletis on negatiivne, siis on punktis $\kappa = 0$ tegemist maksimumiga. Et $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \kappa} < 0$, siis \mathcal{P} kahaneb interaktsioonikonstandi κ kasvades. Skitseerime sõltuvuse $\mathcal{P}(\kappa)$ joonisel 10.



Joonis 10. Kordaja \mathcal{P} skemaatiline sõltuvus interaktsioonikonstandist κ .

L.4 Abiseoste kehtivus siirdetempeartuuril

Näitame, et kehtivad seosed (F.20)

$$\begin{aligned} q_2^c + \frac{Q_2 Q_1^3}{(q_2^c)^3} &= \frac{1}{q_2^c Q_2} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right) , \\ q_1^c + \frac{Q_1 Q_2^3}{(q_1^c)^3} &= \frac{1}{q_1^c Q_1} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right) . \end{aligned}$$

Esmalt paneme tähele, et T_c võrrandist (F.16)

$$q_1^c q_2^c - Q_1 Q_2 = 0$$

järelduvad võrdsused

$$\frac{Q_1}{q_2^c} = \frac{q_1^c}{Q_2} \quad (\text{L.18})$$

ja

$$\frac{Q_2}{q_1^c} = \frac{q_2^c}{Q_1} . \quad (\text{L.19})$$

Leiame

$$\begin{aligned} q_2^c + \frac{Q_2 Q_1^3}{(q_2^c)^3} &\stackrel{(\text{F.16})}{=} q_2^c + \frac{q_1^c q_2^c Q_1^2}{(q_2^c)^3} = \\ &= q_2^c + \frac{q_1^c Q_1^2}{(q_2^c)^2} \stackrel{(\text{L.18})}{=} q_2^c + \frac{(q_1^c)^2 Q_1}{q_2^c Q_2} = \\ &= \frac{1}{q_2^c Q_2} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right) \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} q_1^c + \frac{Q_1 Q_2^3}{(q_1^c)^3} &\stackrel{(\text{F.16})}{=} q_1^c + \frac{q_1^c q_2^c Q_2^2}{(q_1^c)^3} = \\ &= q_1^c + \frac{q_2^c Q_2^2}{(q_1^c)^2} \stackrel{(\text{L.19})}{=} q_1^c + \frac{(q_2^c)^2 Q_2}{q_1^c Q_1} = \\ &= \frac{1}{q_1^c Q_1} \left((q_2^c)^2 Q_2 + (q_1^c)^2 Q_1 \right) . \end{aligned}$$

L.5 Integraalide ligikaudne arvutamine siirdetemperatuuri lähedal

Vaatame integraali

$$\eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) = \int_0^{\hbar\omega_D} E_\alpha^{-1}(\Delta_\alpha) \tanh\left(\frac{E_\alpha(\Delta_\alpha)}{2k_B T}\right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha, \quad (\text{L.20})$$

kus

$$E_\alpha(\Delta_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\alpha^2 + |\Delta_\alpha|^2}. \quad (\text{L.21})$$

Tähistame

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \frac{\Delta_\alpha}{2k_B T}, \\ y_\alpha &= \frac{\tilde{\varepsilon}_\alpha}{2k_B T}. \end{aligned} \quad (\text{L.22})$$

Siis integraal (L.20) saab kuju

$$\eta_\alpha(T, x_\alpha) = \int_0^{\hbar\omega_D/2k_B T} \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) dy_\alpha, \quad (\text{L.23})$$

kus

$$\tilde{E}_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2}. \quad (\text{L.24})$$

Kui $T \rightarrow T_c$, siis $x_\alpha \rightarrow 0$ ja me võime integraali $\eta_\alpha(x_\alpha)$ ritta arendada x_α astmete järgi. See annab

$$\eta_\alpha(T, x_\alpha) \approx \eta(T, 0) + \frac{x_\alpha^2}{2} \int_0^{\hbar\omega_c/2k_B T_c} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) \Big|_{x_\alpha=0} dy_\alpha. \quad (\text{L.25})$$

Leiame

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) \Big|_{x_\alpha=0} = -\frac{y_\alpha \tanh(y_\alpha)^2 + \tanh(y_\alpha) - y_\alpha}{y_\alpha^3}$$

ning teisalt kehtib võrdus

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\tanh(r)}{r} \right) = -\frac{r \tanh(r)^2 + \tanh(r) - r}{r^3}.$$

Kuna

$$\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T_c \gg 1$$

ja

$$\int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\tanh(r)}{r} \right) dr = -\frac{7\zeta(3)}{\pi^2} \quad (\text{L.26})$$

siis

$$\eta_\alpha(T, x_\alpha) \simeq \eta(T, 0) - c_\nu \frac{x_\alpha^2}{2}, \quad (\text{L.27})$$

$$c_\nu = \frac{7\zeta(3)}{\pi^2}. \quad (\text{L.28})$$

Pidades silmas tähistusi (L.22₁) ja (L.28), saame tulemuseks

$$\eta_\alpha(T, \Delta_\alpha) \simeq \eta(T, 0) - \nu \Delta_\alpha^2, \quad (\text{L.29})$$

kus

$$\nu = \frac{7\zeta(3)}{8(\pi k_{\text{B}}T_c)^2}. \quad (\text{L.30})$$

Vaatame integraali

$$J_\alpha(T, \Delta_\alpha) = 2k_{\text{B}}T \int_{-\hbar\omega_{\text{D}}}^{\hbar\omega_{\text{D}}} \ln \left(2 \cosh \frac{E_\alpha(\Delta_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha)}{2k_{\text{B}}T} \right) d\tilde{\varepsilon}_\alpha, \quad (\text{L.31})$$

$$E_\alpha(\Delta_\alpha, \tilde{\varepsilon}_\alpha) = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\alpha^2 + |\Delta_\alpha|^2}. \quad (\text{L.32})$$

Kasutades eelpooltoodud tähistusi, saame integraali (L.31) viia kujule

$$J_\alpha(T, x_\alpha) = (2k_{\text{B}}T)^2 \int_{-\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T}^{\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) dy_\alpha. \quad (\text{L.33})$$

Kui $T \rightarrow T_c$, siis $x_\alpha \rightarrow 0$ ja me võime integraali $J_\alpha(T, x_\alpha)$ ritta arendada x_α astmete järgi. See annab

$$\begin{aligned} J_\alpha(T, x_\alpha) \simeq & J(T, 0) + \frac{1}{2}(2k_{\text{B}}T_c)^2 x_\alpha^2 \int_{-\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T_c}^{\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T_c} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \Big|_{x_\alpha=0} dy_\alpha + \\ & \frac{1}{4!}(2k_{\text{B}}T_c)^2 x_\alpha^4 \int_{-\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T_c}^{\hbar\omega_{\text{D}}/2k_{\text{B}}T_c} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \Big|_{x_\alpha=0} dy_\alpha. \end{aligned} \quad (\text{L.34})$$

Kuna

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \right|_{x_\alpha=0} = \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) \Big|_{x_\alpha=0}, \quad (\text{L.35})$$

siis¹⁵

$$\frac{1}{2} (2k_B T_c)^2 x_\alpha^2 \int_{-\hbar\omega_D/2k_B T_c}^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} \left. \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \right|_{x_\alpha=0} dy_\alpha \simeq (2k_B T_c)^2 x_\alpha^2 \eta(T, 0).$$

Arvestame veel, et¹⁶

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4!} (2k_B T_c)^2 x_\alpha^4 \int_{-\hbar\omega_D/2k_B T_c}^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} \left. \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \right|_{x_\alpha=0} dy_\alpha = \\ &= \frac{1}{8} (2k_B T_c)^2 x_\alpha^4 2 \int_0^{\hbar\omega_c/2k_B T_c} \left. \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) \right|_{x_\alpha=0} dy_\alpha \simeq_{(\text{L.26})} \\ &\simeq -\frac{1}{4} c_\nu (2k_B T_c)^2 x_\alpha^4. \end{aligned}$$

Siis

$$J_\alpha(T, x_\alpha) \simeq J(T, 0) + (2k_B T_c)^2 x_\alpha^2 \eta(T, 0) - \frac{1}{4} c_\nu (2k_B T_c)^2 x_\alpha^4. \quad (\text{L.36})$$

Pidades silmas tähistusi (L.22₁) ja (L.28), saame tulemuseks

$$J_\alpha(T, \Delta_\alpha) \simeq J(T, 0) + \Delta_\alpha^2 \eta(T, 0) - \frac{1}{2} \nu \Delta_\alpha^4, \quad (\text{L.37})$$

kus kordaja ν on antud valemiga (L.30)

$$\nu = \frac{7\zeta(3)}{8(\pi k_B T_c)^2}.$$

¹⁵Vaata ka valem (L.23) võttes seal $T = T_c$, $x_\alpha = 0$ ning arvestades, et

$$\int_{-\hbar\omega_D/2k_B T_c}^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} \dots dy_\alpha = 2 \int_0^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} \dots dy_\alpha.$$

¹⁶Siinjuures kehtib seos

$$\left. \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x_\alpha^4} \ln \left(2 \cosh \tilde{E}_\alpha \right) \right|_{x_\alpha=0} = \frac{1}{8} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \tilde{E}_\alpha^{-1} \tanh(\tilde{E}_\alpha) \Big|_{x_\alpha=0}.$$

Vaata ka võrduseid valemi (L.25) järel.