

מחברת 1 - הסתברות חוק בייס:

1.

א. בערך $1/125$ מהלידות זה תאומים לא זהים ו- $1/300$ מהלידות זה תאומים זהים. לאלביס היה אח תאום שמת בלידה. מה ההסתברות שאלביס היה תאום זהה? (ניתן להניח שההסתברות להולדת בן ובת שווה ל- $1/2$).

תשובה:

$$P(A) = \text{הסתברות ללידת תאומים זכרים לא זהים} = 1/4 * 1/125 = 0.002$$

$$P(B) = \text{הסתברות ללידת תאומים זכרים זהים} = 1/2 * 1/300 = 0.0016$$

$$P(A) \cup P(B) = \text{הסתברות ללידת תאומים זכרים} = 1/500 + 1/600 = 11/3000 = 0.0036$$

הסתברות לתאומים זהים בהינתן שהם תאומים זכרים =

$$\frac{P(B)}{P(A) \cup P(B)} = \frac{1/600}{11/3000} = \frac{5}{11} = 0.4545$$

ב. יש שתי קערות של עוגיות. בקערה 1 יש 10 עוגיות שקדים ו-30 עוגיות שוקולד. בקערה 2 יש 20 עוגיות שקדים ו-20 עוגיות שוקולד. אריק בחר קערה באקראי ובחר ממנה עוגיה באקראי. העוגיה שנבחרה היא שוקולד. מה ההסתברות שאריק בחר את קערה 1?

תשובה:

$$P(A) = \text{הסתברות שתצא עוגיית שוקולד בקערה 1} = 0.5 * 30/40 = 0.375$$

$$P(B) = \text{הסתברות שתצא עוגיית שוקולד בקערה 2} = 0.5 * 20/40 = 0.25$$

$$P(A) \cup P(B) = \text{הסתברות שתצא עוגיית שוקולד} = 0.25 + 0.375 = 5/8 = 0.625$$

הסתברות שהעוגיה מקערה 1 בהינתן שהעוגיה שנבחרה באקראי היא שוקולד:

$$\frac{P(A)}{P(A) \cup P(B)} = \frac{0.375}{0.625} = \frac{3}{5} = 0.6$$

.2

בשנת 1995 חברת M&M הוסיפה את הצבע כחול. לפני השנה הזו, התפלגות הצבעים בשקית M&M נראית כך:

30% Brown, 20% Yellow, 20% Red, 10% Green, 10% Orange, 10%

Tan

החל משנת 1995, ההתפלגות נראית כך:

24% Blue, 20% Green, 16% Orange, 14% Yellow, 13% Red, 13% Brown.

לחבר שלכם יש 2 שקיות M&M, אחת משנת 1994 ואחת משנת 1996 והוא לא מוכן לגלות לכם איזו שקית שייכת לאיזו שנה. אבל הוא נותן לכם סוכריה אחת מכל שקית. סוכריה אחת היא צהובה ואחת היא ירוקה. מה הסיכוי שהסוכריה הצהובה הגיעה מהשקית של 1994?

תשובה:

$$P(A) = \text{הסתברות לצבע צהוב בשקית של 1994} = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1$$

$$P(B) = \text{הסתברות לצבע צהוב בשקית של 1995} = 0.5 \cdot 0.14 = 0.07$$

$$P(A) \cup P(B) = \text{הסתברות לצבע צהוב} = (0.1 + 0.07) = 0.17$$

הסתברות שהסוכריה הצהובה משקית של 1994, בהינתן שהסוכריה צהובה =

$$\frac{P(A)}{P(A) \cup P(B)} = \frac{0.1}{0.17} = \frac{10}{17} = 0.5882$$

3. הלכת לדוקטור בעקבות ציפורן חודרנית. הדוקטור בחר בכך **באקראי** לבצע בדיקת דם הבדקת שפעת חזירים. ידוע סטטיסטית ששפעת זו פוגעת ב-1 מתוך 10,000 אנשים באוכלוסייה. הבדיקה מדויקת ב-99 אחוז במובן שהסתברות ל false positive היא 1%. הווה אומר שהבדיקה סיווגה בטעות אדם בריא כאדם חולה היא 1 אחוז. ההסתברות ל- false negative היא 0 – אין סיכוי שהבדיקה תגיד על אדם החולה בשפעת חזירים שהוא בריא. בבדיקה יצאת חיובי (יש לך שפעת). א. מה ההסתברות שיש לך שפעת חזירים?

תשובה:

הסתברות שהבדיקה חיובית:

$$P(\text{pos}) = P(\text{pos} \setminus \text{sick}) * P(\text{sick}) + P((\text{pos} \setminus \text{healthy})) * P(\text{healthy}) =$$

$$1 * 10^{-4} + 0.01 * (1 - 10^{-4}) = 0.01009$$

הסתברות שהנבדק חולה בהינתן שהבדיקה חיובית:

$$P(\text{sick} \setminus \text{pos}) = \frac{P(\text{pos} \setminus \text{sick}) * P(\text{sick})}{P(\text{pos})} = \frac{1 * 10^{-4}}{0.01009} = 0.0099$$

ב. נניח שחזרת מתאילנד לאחרונה ואתה יודע ש-1 מתוך 200 אנשים שחזרו לאחרונה מתאילנד, חזרו עם שפעת חזירים. בהינתן אותה סיטואציה כמו בשאלה א, מה ההסתברות (המתוקנת) שיש לך שפעת חזירים?

$$\text{נחליף את } P(\text{sick}) \text{ מ-} 10^{-4} \text{ ל-} 1/200$$

הסתברות שהבדיקה חיובית:

$$P(\text{pos}) = P(\text{pos} \setminus \text{sick}) * P(\text{sick}) + P((\text{pos} \setminus \text{healthy})) * P(\text{healthy}) =$$

$$1 * \frac{1}{200} + 0.01 * \left(1 - \frac{1}{200}\right) = 0.01495$$

הסתברות שהנבדק חולה בהינתן שהבדיקה חיובית:

$$P(\text{sick} \setminus \text{pos}) = \frac{P(\text{pos} \setminus \text{sick}) * P(\text{sick})}{P(\text{pos})} = \frac{1 * \frac{1}{200}}{0.01495} = 0.3444$$

Random Variables:

1. Roi is playing a dice game with Yael.

Roi will roll 2 six-sided dice, and if the sum of the dice is divisible by 3, he will win 6\$. If the sum is not divisible by 3, he will lose 3\$.

What is Roi's expected value of playing this game?

Answer:

Options divisible by 3:

$$3 = 2+1 \setminus 1+2 - 2 \text{ options}$$

$$6 = 5+1 \setminus 1+5 \setminus 4+2 \setminus 2+4 \setminus 3+3 - 5 \text{ options}$$

$$9 = 6+3 \setminus 3+6 \setminus 5+4 \setminus 4+5 - 4 \text{ options}$$

$$12 = 6+6 - 1 \text{ options}$$

$$\text{Count of options divisible by 3: } 2+5+4+1 = 12$$

$$\text{Total options: } 6*6 = 36$$

$$P(\text{divisible by 3}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{not divisible by 3}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{The expected value: } \frac{1}{3} * 6 + \frac{2}{3} * (-3) = 0\$$$

2. Sharon has challenged Alex to a round of Marker Mixup. Marker Mixup is a game where there is a bag of 5 red markers numbered 1 through 5, and another bag with 5 green markers numbered 6 through 10.

Alex will grab 1 marker from each bag, and if the 2 markers add up to more than 12, he will win 5\$, 5. If the sum is exactly 12, he will break even, and If the sum is less than 12, he will lose 6\$.

What is Alex's expected value of playing Marker Mixup?

Answer:

Total options: $5 \times 5 = 25$

Count of options 12+: $3+10 \setminus 4+9 \setminus 4+10 \setminus 5+8 \setminus 5+9 \setminus 5+10$ - 6 options

Count of options 12: $2+10 \setminus 3+9 \setminus 4+8 \setminus 5+7$ - 4 options

Count of options 12-: $25-10 = 15$ options

Count of options divisible by 3: $2+5+4+1 = 12$

$$P(12) = \frac{4}{25} = 0.16$$

$$P(12-) = \frac{15}{25} = 0.6$$

The expected value: $0.24 \times 5 + 0.16 \times 0 + 0.6 \times (-6) = -2.4\$$

3. A division of a company has 200 employees, 40%, percent of which are male. Each month, the company randomly selects 8 of these employees to have lunch with the CEO.

What are the mean and standard deviation of the number of males selected each month?

Answer:

$$\text{Mean} = 8 * 0.4 = 3.2$$

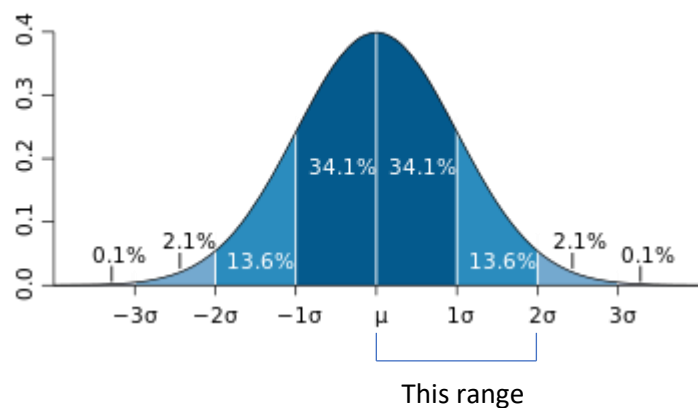
$$x_i = 0, 1, 2 \dots, 8$$

$$\text{Standart deviation} = \sqrt{\frac{1}{9} * \sum_{i=1}^9 x_i - 3.2} = \sqrt{\frac{1}{9} * 65.76} = 2.703$$

4. Different dealers may sell the same car for different prices. The sale prices for a particular car are normally distributed with a mean and standard deviation of 26,000\$ and 2,000\$, respectively. Suppose we select one of these cars at random. Let X = the sale price (in thousands of dollars) for the selected car.

Find $P(26 < X < 30)$,

Answer:



μ = Mean = 26,000 \$

Standard deviation = 2,000 \$

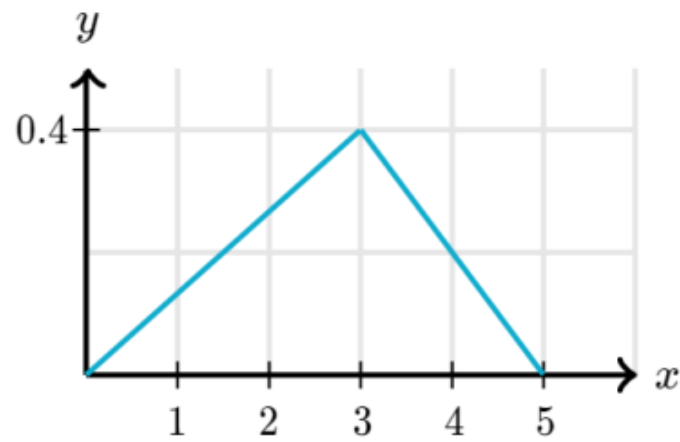
$1\sigma = 26,000 + 2,000 = 28,000$ \$

$2\sigma = 26,000 + 2,000 * 2 = 30,000$ \$

To be in the range $26 < X < 30$ we have to be in the range $\mu < X < 2\sigma$.

According to the graph this range is $34.1\% + 13.6\% = 47.7\%$

5. Given the following distribution, what is $P(x > 3)$?



Answer:

$$P(x > 3) = \frac{0.4 \cdot (5 - 3)}{2} = 0.4$$

The area of the triangle between 3 to 5.

6. A company has 500 employees, and 60% of them have children. Suppose that we randomly select 4 of these employees.

What is the probability that exactly 3 of the 4 employees selected have children?

Answer:

There are 4 options:

The first, that the first employee don't have children and the other three have.

Or the second employee don't have children and the rest have.

Either the third employee don't have or the fourth employee don't have.

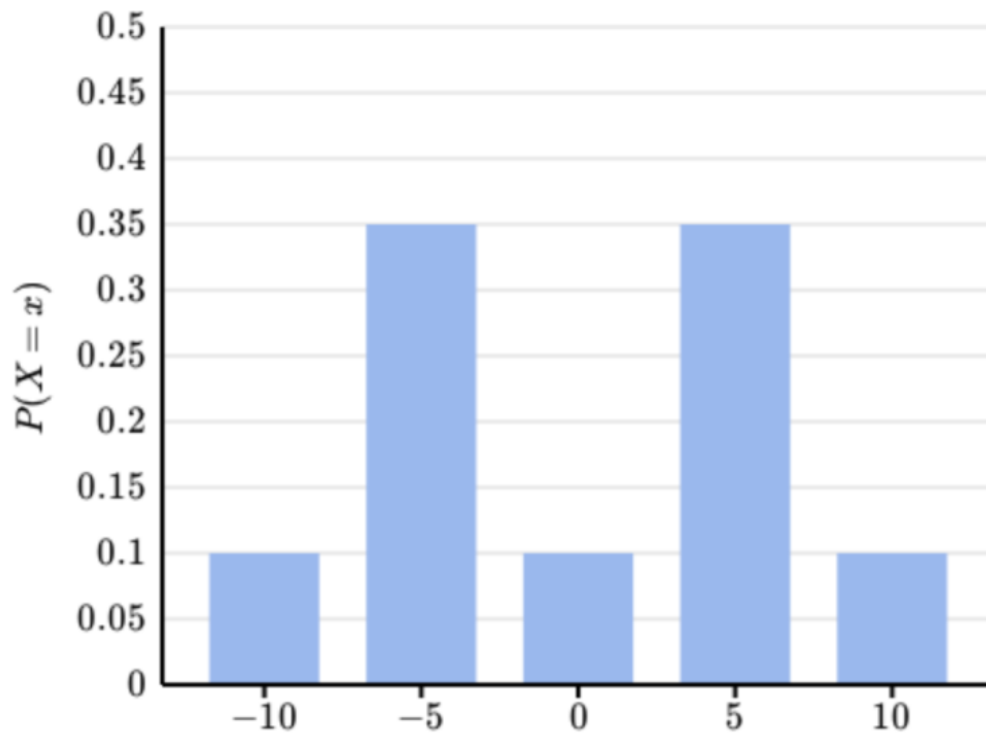
All options have the same probability.

Because the 4 denominators will be the same and also the 4 masses. Just a different order, but the multiplication between the 4 numbers will be the same.

$$\underline{P(\text{the first don't have, the rest have})} = \frac{200}{500} * \frac{300}{499} * \frac{299}{498} * \frac{298}{497} = 0.0865$$

$$P(\text{just 1 employee don't have}) = 0.0865 * 4 = \mathbf{0.3462}$$

7. Look at the next Graph. What is the expected value of X?



Answer:

The value: $0.1*(-10)+0.35*(-5)+0.1*0+0.35*5+0.1*10 = 0$