4月21日の課題

曲線 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) γ の変曲点は $o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に限ることを確認せよ.

(2) γ の変曲点でない $\gamma(t)$ における曲率半径 $r(t)$ を求めよ. また, $t > 0$ または $t < 0$ の範囲で t の値を動かしたとき, $r(t) = \frac{\|\gamma'(t)\|^3}{\det(\gamma'(t)\gamma''(t))}$ の値の変化（増減）を調べよ.

解答

(1)

$\gamma(t_0)$が変曲点であるための必要十分条件は,

$$\langle \gamma'(t_0), \boldsymbol{J}\gamma''(t_0) \rangle = 0 \tag{1}$$

ここで, $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である.

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\gamma''(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

式(2),(3)を式(1)に代入して,

$$\langle \gamma'(t_0), \boldsymbol{J}\gamma''(t_0) \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6t_0 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3t_0^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6t_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = -6t_0 = 0 \therefore t_0 = 0 \tag{4}$$

式(4)より,曲線 $\gamma(t)$ が変曲点を持つのは $t_0 = 0$ のときだから,

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のときのみ,変曲点となる.

(2)

$$\det(\gamma'(t)\gamma''(t)) = \langle \gamma'(t_0), \boldsymbol{J}\gamma''(t_0) \rangle = -6t \tag{5}$$

$$\|\gamma'(t)\|^3 = (1+9t^4)^{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

式(5),(6)を持ちいると,

$$r(t) = \frac{\|\gamma'(t)\|^3}{\det\left(\gamma'(t)\gamma''(t)\right)} = -\frac{(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}{6t} \tag{7}$$

値の増減を曲率半径の微分によって求める.

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{9\cdot 36\cdot t^4\sqrt{1+9t^4} - 6(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}}{36t^2} \tag{8}$$

式(8)右辺の分母は常に正となるので,分子のみ考えればよいから,

$$-\left(9\cdot 36\cdot t^4\sqrt{1+9t^4} - 6(1+9t^4)^{\frac{3}{2}}\right) = 6\sqrt{1+9t^4}\left(6(1+9t^4) - 54t^4\right) = 36\sqrt{1+9t^4} > 0 \tag{9}$$

となり $r(t)$ の微分が常に正となるので, $r(t)$ は常に増加する.
4月28日の課題
次の平面曲線 γ について,曲線上の点 $\gamma(t)$ における接触円の半径 $r(t)$ を求めよ.
(1) 点 x_0 を通り, 単位ベクトル v 方向の直線.
(2) 原点を中心とする 半径$a(>0)$の円.
(3) 放物線 $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$.
解答
(1)
$\gamma(t)$ は,以下のように与えられる.

$$\gamma(t) = \boldsymbol{x_0} + t\boldsymbol{v}\ , t \in \mathbb{R} \tag{10}$$

$$\|\gamma'(t)\|^3 = \|\boldsymbol{v}\|^3 \tag{11}$$

$$\det\left(\gamma'(t)\gamma''(t)\right) = 0 \tag{12}$$

式(12)より曲率半径は常に無限大になる.これは直線の曲率半径は常に無限大となることを意味している.
(2)
$\gamma(t)$ をtでパラメータ表示すると,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t < 2\pi \tag{13}$$

$$\|\gamma'(t)\|^3 = \left\| \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix} \right\|^3 = a^3 \tag{14}$$

$$\det\left(\gamma'(t)\gamma''(t)\right) = \left\langle \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\sin t \\ -a\cos t \end{pmatrix} \right\rangle = -a^2 \tag{15}$$

式(11)と式(12)より曲率半径 $r(t)$ は,常に

$$r(t) = \frac{1}{|\kappa|} = a \tag{16}$$

となる.

(3)

$$\|\gamma'(t)\|^3 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\|^3 = \left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{17}$$

$$\det\left(\gamma'(t)\gamma''(t)\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \tag{18}$$

よって,

$$r(t) = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2} \tag{19}$$

5月12日の課題

２つの等長変換 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次で定める.

$$f(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}, g(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x} + d.$$

(1)「fとgの合成」と「$\mathbb{R}^2 \times O(2)$の行列の積」とが対応することを確認せよ.すなわち,任意の$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$に対して次の等式を満たすことを確認せよ.

$$f \circ g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} o & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O_{1\times 2} \\ \boldsymbol{b} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O_{1\times 2} \\ \boldsymbol{d} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

(2) fの逆写像$f^{-1}(\boldsymbol{v})$を行列表示せよ. ただし, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$

解答

5月19日の課題

$k : [0, L] \to \mathbb{R}$ をC^∞級関数とし,関数θを

$$\theta(s) = \int_0^s k(u)du$$

により定める. このとき,正則曲線$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$を

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix}, \qquad x_1(s) = \int_0^s \cos(\theta(u))du, \quad x_2(s) = \int_0^s \sin(\theta(u))du$$

と定め,γの曲率はkと一致することを確認せよ.

5月26日の課題

次の[1]から[3]の中から一題以上解くこと.

$r, a, b \in \mathbb{R}$ を定数として, $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を

$$\hat{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} o & e_1^0 & e_2^0 & e_3^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & 0 \\ at & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ at+b \end{pmatrix}$$

と定める/

[1]　一般のパラメータtで表示された曲線$\hat{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ の曲率κ と捩率τは

$$\kappa(t) = \frac{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\det(\hat{\gamma}'(t)\hat{\gamma}''(t)\hat{\gamma}'''(t))}{\|\hat{\gamma}'(t) \times \hat{\gamma}''(t)\|^2}$$

で与えられることを示せ.

[2] (1)　$r = 0$ のとき,曲率 κ を求めよ.

(2)　$r > 0$ のとき,曲率 κ と捩率 τ を求めよ.

[3]　$r > 0$ のとき, $\gamma(t)$ における接触平面の方程式を求めよ.