スライド2
目的： SfM等で得られたワールド座標 r_w のガウスを、カメラの外部パラメータ (R, T) を用いてカメラ座標 r_c に写像する。

変換式 (アフィン変換):
$r_c = Rr_w + T$

ガウスの不変性： ガウス分布はアフィン変換に対して閉じており、変換後もガウス分布の形を保つ。

パラメータの変換：
平均ベクトル: $\boldsymbol{\mu}_c = \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}_w + \mathbf{T}$
共分散行列: $\boldsymbol{\Sigma}_c = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}_w\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$

スライド3
射影の必要性： カメラ座標 $\mathbf{r}_c = (x, y, z)$ を画像平面 $\mathbf{r}_m = (u, v)$ に変換する。

元の射影式 (非線形):
$\mathbf{r}_m = (\frac{f_x x}{z}, \frac{f_y y}{z})^T$
（z による除算が非線形要素）

問題点： 非線形変換はガウスの形を厳密には保たない。

解決策（線形近似）： ガウス中心 $\boldsymbol{\mu}_c$ の周りでヤコビ行列 ($\mathbf{J}$) による一次近似を実行し、射影を線形化する。

結果： 画像座標 $\mathbf{r}_m$ における共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_m$ を計算。

$$\boldsymbol{\Sigma}_m = \mathbf{J}\boldsymbol{\Sigma}_c\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$$

スライド6
学習パラメータ：位置 ($\boldsymbol{\mu}_i$)、共分散 ($\boldsymbol{\Sigma}_i$)、放射特性（SH係数）、不透明度 (c_i)。

$\boldsymbol{\Sigma}$ の制約： $\boldsymbol{\Sigma}$ が常に正定値となるよう、回転行列 ($\mathbf{R}$) とスケーリング行列 ($\mathbf{S}$) に分解して学習。
($\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$)

損失関数 (L_{recon}): 再構成品質を評価するため、L1損失とD-SSIM損失の複合損失を使用。

$$L_{recon} = (1 - \lambda)L_1 + \lambda L_{\text{D-SSIM}}$$

最適化手法： AdamなどのSGDにより、画像再構成誤差が最小となるよう全パラメータを更新。

スライド12

・学習パラメータ ω_i に対する損失の偏微分：

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = \frac{\partial L}{\partial \mu_i'}\left(\frac{\partial \mu_i'}{\partial \alpha_i}\right)\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial \Sigma_i'}\left(\frac{\partial \Sigma_i'}{\partial \alpha_i}\right)\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega_i}\right) + \frac{\partial L}{\partial L_H}\left(\frac{\partial L_H}{\partial \alpha_i}\right)\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega_i}\right)$$

【各項の導出】

$$\frac{\partial \mu_i'}{\partial \alpha_i} = \log(R_G)\exp(\alpha_i \log R_G)\mu_i + T_G$$
$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \omega_i} = \beta\alpha_i(1-\alpha_i)$$
$$\frac{\partial \Sigma_i'}{\partial \alpha_i} = \log(R_G)\exp(\alpha_i \log R_G)\Sigma_i \exp(\alpha_i \log R_G^T) + \exp(\alpha_i \log R_G)\Sigma_i \exp(\alpha_i \log R_G^T)$$
$$\frac{\partial L_H}{\partial \alpha_i} = -\Sigma_i \log\left(\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}\right)$$

→ これにより、連続かつ可微分な偏導関数を得て安定した最適化が可能。
スライド14

動的物体に追従するガウス中心 μ_i は 動的物体の回転・並進R_G, T_G で表現できる

$$\mu_i' = R_G\mu_i + T_G$$

静的／剛体点を連続補間で統一的に扱う
$\mu_i' = (1-a_i)\,\mu_i + a_i\,(R_G\mu_i + T_G)$
ここで,ガウス分布が静的物体に属するなら$a_i = 0$,動的物体に属するなら$a_i = 1$である.
つまり,
$\mu_i' = \begin{Bmatrix} \mu_i \ \ (a_i = 0) \\ R_G\mu_i + T_G \ \ (a_i = 1) \end{Bmatrix}$
剛体所属度 a_i をシグモイド関数で連続表現し微分可能な関数とする
→　勾配計算が可能
$a_i = \frac{1}{1+e^{-w_i}}$
図
剛体の回転を対数写像して線形補間することで,物理的な意味をもたせる.
$\mu_i' = \exp\{a_i \log(R_G)\}\mu_i + a_i T_G$

スライド15

ガウス分布が動的物体に追従するなら,その回転はガウス分布の共分散行列自体も回転させる.
なぜか理論的に説明
まず,確率変数(の位置)を剛体に追従させたとき,確率密度自体は変化しないと仮定すれば,
$x_i' = \exp\{a_i \log(R_G)\}x_i + a_i T_G$の期待値Eは,
$E[\exp\{a_i \log(R_G)\}x_i + a_i T_G] = \exp\{a_i \log(R_G)\}E[x_i] + a_i T_G E[1]$
ここで,定義よりx_iは平均μ_i,共分散$\sum_i$の正規分布に従うので,
$E[x_i'] = \exp\{a_i \log(R_G)\}\mu_i + a_i T_G$
すなわちμ_i'

また,x_i'とμ_i'の偏差の2乗の期待値$E[(x_i'-\mu_i')(x_i'-\mu_i')^T]$は,
$E[(x_i'-\mu_i')(x_i'-\mu_i')^T] = E[\exp\{a_i\log(R_G)\}(x_i-\mu_i)(x_i-\mu_i)^T\exp\{a_i\log(R_G)\}^T]$
$= \exp\{a_i\log(R_G)\}E[(x_i-\mu_i)(x_i-\mu_i)^T]\exp\{a_i\log(R_G)\}^T$
$E[(x_i-\mu_i)(x_i-\mu_i)^T] = \sum_i$だから,
$E[(x_i'-\mu_i')(x_i'-\mu_i')^T] = \exp\{a_i\log(R_G)\}\sum_i\exp\{a_i\log(R_G)\}^T$
これはx_i'が従うガウス分布の共分散行列を表す

次に共分散行列Σ_iは,一般に対称行列かつ正定値であり固有値行列D_iと回転行列R_iに固有値分解できる.
$\sum_i = R_iD_iR_i^T$
$D_i = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$
$R_i = (p_1,p_2,p_3)$
としたとき,p_1,p_2,p_3はそれぞれ楕円体の軸の方向ベクトル,
$\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\sqrt{\lambda_3}$はそれぞれの方向ベクトルに対応する軸の長さ
ここで平均がμ_i,共分散行列$\sum_i$が固有値分解の形,
$\sum_i = I\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}I^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$
で与えられるガウス分布を考える.
Iは$\sum_i$の固有ベクトルの向きがそれぞれx,y,z軸であることを意味する.
このガウス分布の中心を$\mu_i\rightarrow R_i\mu_i$と変換すると,
上記よりその共分散行列もまた$I\sum_i I^T\rightarrow R_iI\sum_i I^T(R_i)^T = (R_iI)\sum_i(R_iI)^T$と変化する.
R_iは回転行列でありこれをIの左にかけることはIをR_iだけ回転することを意味し,
すなわち固有値ベクトルがそれぞれR_iだけ回転したことを意味する.
このガウス分布をR_iだけ回転すると,上記よりR_iだけ回転し,$\sum_0$の対角成分をそれぞれ,$\frac{\lambda_1}{\sigma^2},\frac{\lambda_2}{\sigma^2},\frac{\lambda_3}{\sigma^2}$倍したものが,共分散行列が$\sum_i$のガウス分布である.
ガウス分布である.
今,
Σ_i' = R_G(α_i) Σ_i R_G(α_i)^T
$
剛体回転の影響を分布形状に反映し動的変化を再現

さらに

スライド１６

各剛体のR, Tをグローバル座標で統一的に定義

所属度をソフトマックス関数で多変数表現

ガウス中心：
$\mu_i' = \exp(\Sigma\, a_{ij} \log R_{ij})\, \mu_i + \Sigma\, a_{ij} T_{ij}$

共分散：
$\Sigma_i' = \exp(\Sigma\, a_{ij} \log R_{ij})\, \Sigma_i \exp(\Sigma\, a_{ij} \log R_{ij})^T$

複数剛体に追従するガウス分布を統合的に再構成