11.13 Будем искать диагональный вид тензора инерции. Для этого составим характеристический многочлен соответствующей матрицы

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & -F & -E \\ -F & B-\lambda & -D \\ -E & -D & C-\lambda \end{vmatrix} = (A-\lambda)(BC-(B+C)\lambda+\lambda^2-D^2)+$$

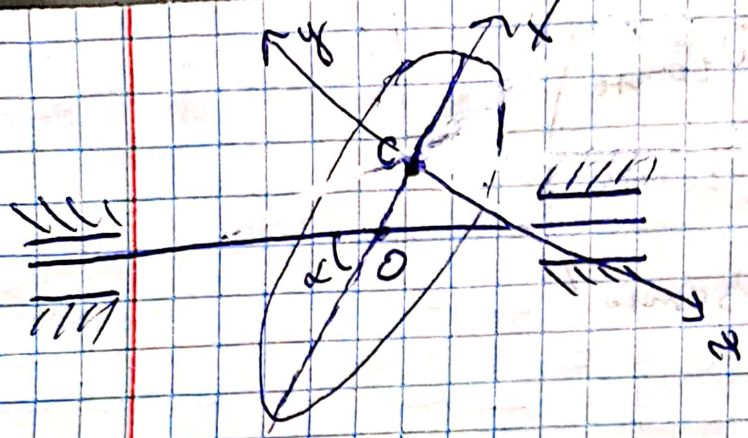
$$+F(\lambda F-FC-ED)-E(FD+EB-E\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-\lambda^2(A+B+C)+\lambda(AB+AC+BC-E^2-F^2-D^2)-$$

$$-(ABC-AD^2-F^2C-FDE-EFD-E^2B)=0$$

Т.к. характеристический многочлен не зависит от системы координат, коэффициенты в скобках не зависят от ориентации осей

11.15 Направим оси следующим образом:



$x \parallel OC$

- $y \perp x$, y лежит в плоскости диска
$z \perp$ диску, проходит через его центр

Тензор инерции в этих осях в точке O

$$J = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + me^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} + me^2 \end{pmatrix}$$

В этих осях

$$\overline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos\alpha \\ 0 \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix}$$

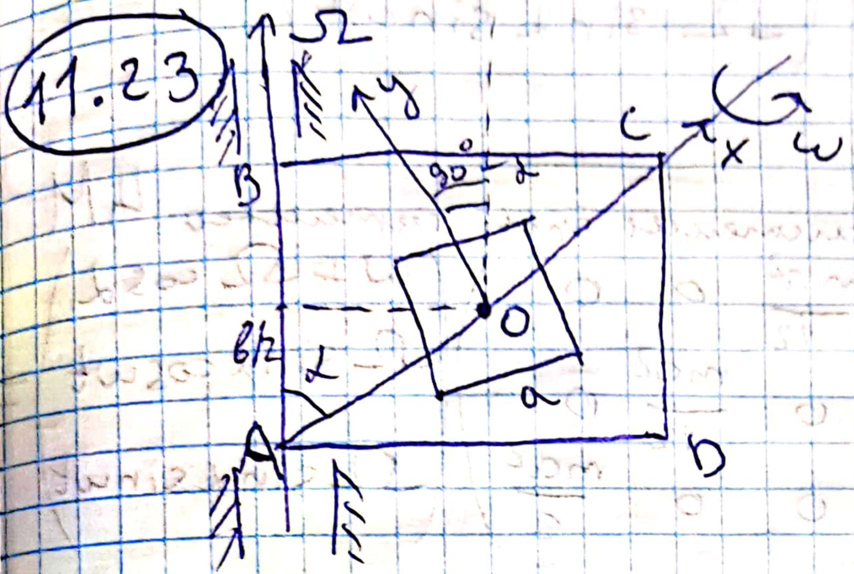
$$\overline{K} = \overline{J} \cdot \overline{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4}\omega\cos\alpha \\ 0 \\ \left(\frac{mR^2}{2} + me^2\right)\omega\sin\alpha \end{pmatrix}$$

11.25 $T = \frac{1}{2}(\overline{K} \cdot \overline{\omega}) = \left(\frac{mR^2}{4}\cos\alpha \quad 0 \quad \left(\frac{mR^2}{2} + me^2\right)\omega\sin\alpha\right)$

$$\cdot\begin{pmatrix}\omega\cos\alpha\\ 0\\ \omega\sin\alpha\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{4}\omega^2\cos^2\alpha + \left(\frac{mR^2}{2}+me^2\right)\omega^2\sin^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{mR^2}{8}\omega^2\cos^2\alpha + \left(\frac{mR^2}{4}+\frac{me^2}{2}\right)\omega^2\sin^2\alpha$$

11.23



$AO = OC$

$AB = b$

Из теоремы Кёнига, $T = \frac{mv_0^2}{2} + T_{цм}$

кин. энергия движения пластины относительно её центра масс

$$v_0 = \frac{\Omega b\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$$

Тензор инерции пластины относительно центра масс

$$I = \begin{pmatrix}\frac{ma^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6}\end{pmatrix}$$

(x и y – взаимно $\perp$, лежат в плоскости пластины, $z \perp$ пластине)

Введём координаты x и y однозначно: $x \parallel \overline{\omega}$, $y \perp x$ и лежит в плоскости пластины

$$\overline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overline{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \cos\alpha \\ \Omega \sin\alpha \cos\omega t \\ \Omega \sin\alpha \sin\omega t \end{pmatrix}$$

Момент импульса системы относительно ЦМ

$$\overline{K} = I \cdot (\overline{\omega} + \overline{\Omega}) = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + \Omega\cos\alpha \\ \Omega \sin\alpha \cos\omega t \\ \Omega \sin\alpha \sin\omega t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}(\omega + \Omega\cos\alpha) \\ \frac{ma^2}{12}\Omega \sin\alpha \cos\omega t \\ \frac{ma^2}{6}\Omega \sin\alpha \sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$T_{ЦМ} = \frac{1}{2}\left(\overline{K} \cdot (\overline{\omega} + \overline{\Omega})\right) = \frac{1}{2}\Bigg(\frac{ma^2}{12}(\omega + \Omega\cos\alpha)^2 +$$

$$+ \frac{ma^2}{12}\Omega^2 \sin^2\alpha \cos^2\omega t + \frac{ma^2}{6}\Omega^2 \sin^2\alpha \sin^2\omega t\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ma^2}{12}(\omega + \Omega\cos\alpha)^2 + \frac{ma^2}{12}\Omega^2 \sin^2\alpha + \frac{ma^2}{12}\Omega^2 \sin^2\alpha\right.$$

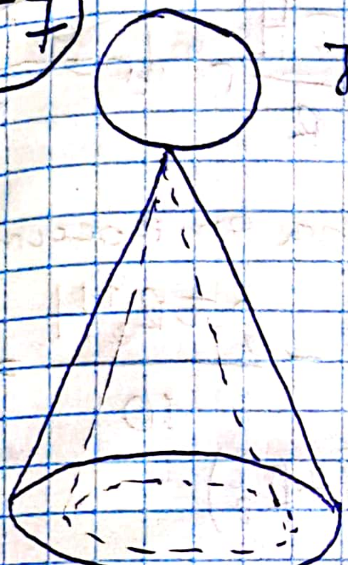
Scanned with CamScanner

$$\cdot \sin^2\omega t\Big) = \frac{ma^2}{24}\Big((\omega+\Omega\cos\alpha)^2+\Omega^2\sin^2\alpha\,(1+\sin^2\omega t)\Big)$$

$$T = \frac{ma^2\Omega^2 tg^2\alpha}{8} + \frac{ma^2}{24}\Big((\omega+\Omega\cos\alpha)^2+\Omega^2\sin^2\alpha\,\cdot$$

$$\cdot(1+\sin^2\omega t)\Big)$$

T7



Найдем расстояние L от вершины сплошного конуса до его центра масс. $\exists$ угол раствора $= 2\alpha$

m^* – масса конуса

ρ – его плотность,

$$m^* = \frac{\rho H^3 \pi\, tg^3\alpha}{3}$$

$$m^*L = \int_0^h dm\cdot h$$

dm – масса кусочка (дольки) конуса высотой dh, находящаяся на расстоянии h от вершины

$$dm = \rho\cdot\pi h^2 tg^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\rho\pi H^3 tg^3\alpha}{3} L = \int_0^H \rho\pi\, tg^2\alpha\, h^3\, dh = \frac{\rho\pi tg^2\alpha H^4}{4} \Rightarrow L = \frac{3H}{4}$$

Требуемый конус в задаче можно получить, вырезав из сплошного конуса с радиусом основы R_1 сплошной конус с радиусом основы R_2

Центр масс такого „полого конуса" находится на расстоянии $\frac{3H}{4}$ от вершины

Момент инерции конуса (сплошного) относительно его оси симметрии

$$= \int_0^H \frac{\pi r^2(h)\,dh\,\rho}{2}\cdot r^2(h) \xrightarrow{dh/dr = \frac{H}{R}} \int_0^R \frac{\rho\pi H}{2R} r^4\,dr = \frac{\rho\pi R^4 H}{10}$$

Момент инерции полого цилиндра относительно его оси симметрии $= \frac{\rho\pi R_1^4 H}{10} - \frac{\rho\pi R_2^4 H}{10} = I_{z2}$

$$M = \frac{\pi R_1^2 H}{3}\rho - \frac{\pi R_2^2 H}{3}\rho = \frac{\pi H\rho}{3}(R_1^2 - R_2^2)$$

$$\Rightarrow I_{z2} = \frac{\rho\pi H}{10}(R_1^2+R_2^2)(R_1^2-R_2^2) = \frac{3M}{10}(R_1^2+R_2^2)$$

Момент инерции всей конструкции относительно оси симметрии

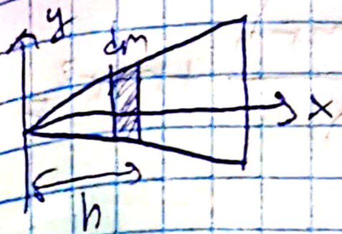
$$I_{zz} = \frac{2mr^2}{5} + \frac{3M(R_1^2+R_2^2)}{10}$$

координата центра масс системы

$$z = \frac{ML - mr}{m+M} = \frac{M\cdot\frac{3H}{4} - mr}{(m+M)} = \frac{3MH - 4mr}{4(m+M)}$$

Scanned with CamScanner

Момент инерции конуса (сплошного) относительно оси, проходящей через его вершину и $\perp$ его оси симметрии (по Т Гюйгенса-Штейнера)



$$= \int \left(\frac{r^2}{4}+h^2\right) dm = \int_0^R \frac{\rho\pi H}{R}\left(\frac{R^2+4H^2}{4R^2}\right) r^4 dr =$$

$$= \frac{\rho\pi H R^2(R^2+4H^2)}{20} \Rightarrow$$

для полого конуса $I_{ky} =$

$$= \frac{\rho\pi H\left(R_1^2(R_1^2+4H^2) - R_2^2(R_2^2+4H^2)\right)}{20}$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера, момент инерции полого конуса относительно оси $\perp$ его оси симметрии, проходящей через центр масс системы:

$$= I_{ky} + Mx^2 = \frac{\rho\pi H}{20}\left(R_1^4 - R_2^4 + R_1^2\cdot 4H^2 - 4H^2\cdot R_2^2\right) + Mz^2 =$$

$$= \frac{\rho\pi H}{20}\left((R_1^2-R_2^2)(R_1^2+R_2^2)+4H^2(R_1^2-R_2^2)\right) + Mz^2 =$$

$$= \frac{\rho\pi H}{20}(R_1^2-R_2^2)(R_1^2+R_2^2+4H^2) = \frac{3M}{20}(R_1^2+R_2^2+4H^2) + Mz^2 =$$

$$= \frac{3M}{20}(R_1^2+R_2^2+4H^2) + M\left(\frac{3MH-4mr}{4(m+M)}\right)^2$$

Для сферы аналогично $I_{cy} + mx^2 = \frac{2}{5}mr^2 + m(z+r)^2$

Итого, для всей конструкции

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3M}{20}\left(R_1^2 + R_2^2 + 4H^2\right) + M\frac{(3HM - mr)^2}{16(m+M)^2} +$$

$$+ \frac{2}{5}mr^2 + m\frac{(3MH - mr)^2}{16(m+M)^2} + \frac{m(3MH - mr)r}{2(m+M)} + mr^2 =$$

$$= \frac{3M}{20}\left(R_1^2 + R_2^2 + 4H^2\right) + \frac{(3HM - mr)^2}{16(m+M)} + \frac{7}{5}mr^2 + \frac{mr(3MH - mr)}{2(m+M)}$$