

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

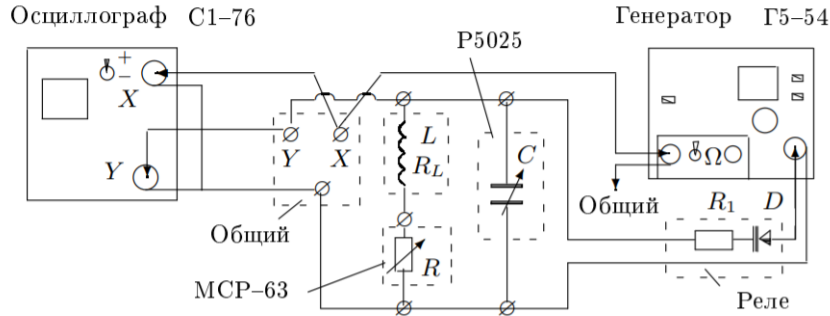
Лабораторная работа

Свободные колебания в электрическом контуре

Выполнила:
Карасёва Таисия
Б02-001

Долгопрудный 2021

Цель работы: исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре
В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф, универсальный мост. **Описание установки**



На рисунке приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит тиристор D и ограничительный резистор R_1 .

Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико (≈ 1 МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

Теория

Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R . Обозначим разность потенциалов на конденсаторе U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Второе правило Кирхгофа:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (1)$$

Вводя обозначения $\gamma = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, получим уравнение

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (2)$$

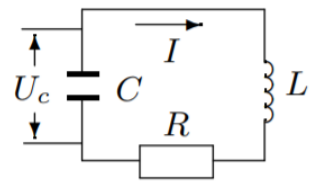
Его решение в общем виде:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t), \quad (3)$$

где $\kappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $U_0 = U_C$ — начальное напряжение на конденсаторе.

В случае $R \approx 0$

$$\ddot{I} + \omega_0^2 I = 0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (4)$$



Затухающие колебания

В случае, когда $\gamma < \omega_0$, имеем $\kappa = i\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – частоты свободных (собственных) колебаний. Тогда ток

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (5)$$

затухает и имеет колебательный характер. Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = \frac{1}{\tau}$, где τ – время затухание амплитуды в e раз. Формулы для напряжения на конденсаторе и тока в цепи можно переписать иначе:

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta),$$

$$I = -\frac{U_0}{L} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta).$$

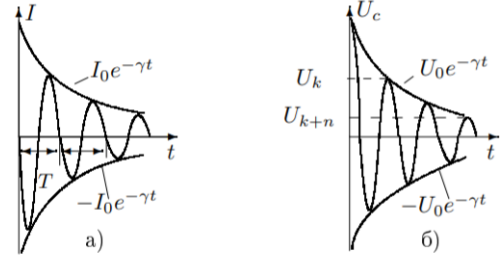


Рис. 1: Затухающие колебания.

Апериодические колебания

В случае $\gamma > \omega_0$, формулы для тока и напряжения на конденсаторе имеют следующий вид:

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh}(\kappa t),$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh}(\kappa t) + \text{ch}(\kappa t) \right).$$

Процесс в этом случае не является колебательным, его называют апериодическим. Режим, соответствующий $\gamma = \omega_0$, называются *критическим*. В этом случае предельный переход $\omega \rightarrow 0$ в (5) даст

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t},$$

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t).$$

Сопротивление в этом случае

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7)$$

называется *критическим сопротивлением* контура.

Добротность контура по определению

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W},$$

где W – запасённая энергия, ΔW – потери за период. Тогда

$$Q = 2\pi \frac{CU_0^2/2 \cdot e^{-2\gamma t}}{CU_0^2/2 \cdot (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(T+t)})} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (8)$$

Логарифмическим декрементом затухания называются число

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (9)$$

или

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (10)$$

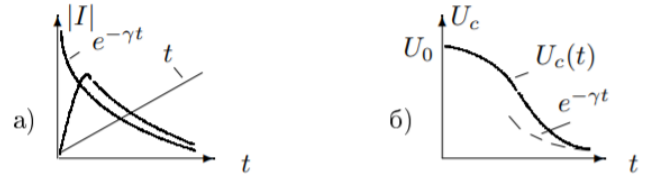


Рис. 2: Критический режим.

Ход работы

1. На генераторе устанавливаем длительность импульсов 5 мкс, частоту повторения $\nu_0 = 100$ Гц. На магазине сопротивлений устанавливаем величину $R = 0$ Ом, на магазине ёмкостей - $C = 0.02$ мкФ. Будем изменять ёмкость от 0.02 до 0.10 мкФ, проводя измерения периода по формуле:

$$T_{exp} = T_0 \frac{x}{n} \quad (11)$$

где T_0 , с - цена деления развёртки, x - количество делений, которое занимают n периодов. Погрешность $\sigma_x = 0.5$, $\sigma_{T_0} = 0.01$ мс. Тогда

$$\sigma_{T_{exp}} = T_{exp} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2} \quad (12)$$

Результаты сведём в таблицу 1 и построим график рис. 3.

Таблица 1: Зависимость $T(C)$.

C , мкФ	0.002	0.005	0.007	0.010	0.020	0.030	0.040
T , мсВ	0.20	0.29	0.33	0.38	0.47	0.61	0.72
C , мкФ	0.050	0.060	0.070	0.080	0.090	0.090	0.100
T , мсВ	0.80	0.88	0.97	1.03	1.08	1.15	1.20

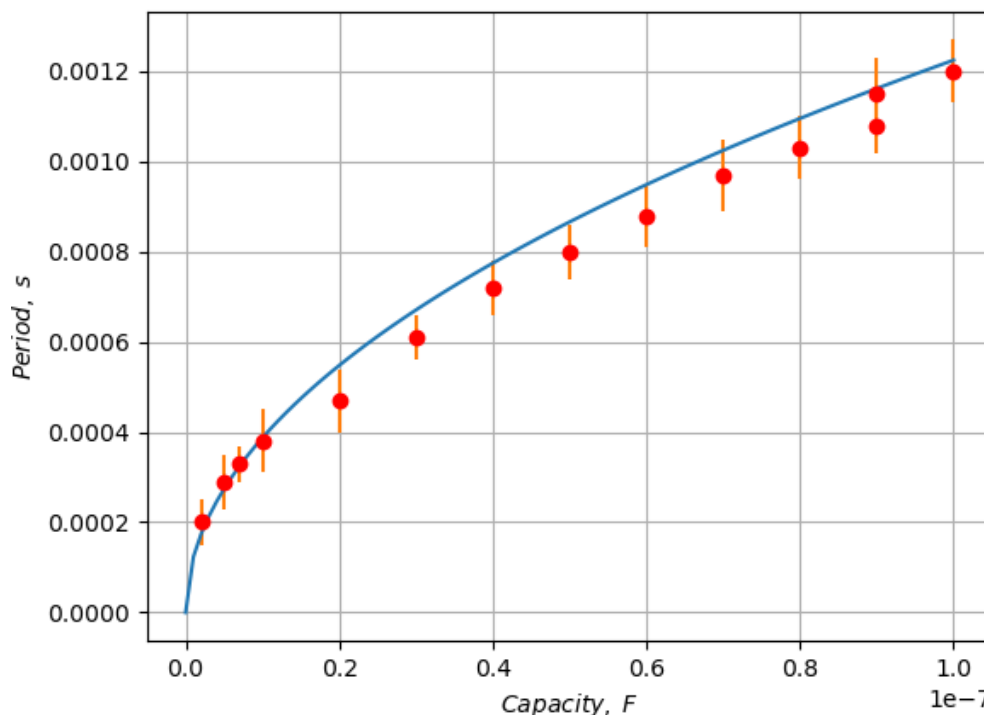


Рис. 3: Экспериментальная и теоретическая зависимости $T(C)$.

2. Рассчитаем ёмкость, при которой собственная частота колебаний контура составляет 5 кГц. $C = 3$ нФ. Рассчитаем критическое сопротивление контура $R_{кп, теор} = 2\sqrt{L/C} = 2.2 \cdot 10^4$ Ом.

3. Установим на магазине соответствующую ёмкость. Увеличивая сопротивление от 0 до $R_{\text{кр,теор}}$, будем наблюдать картину затухающих колебаний. Зафиксируем сопротивление, при котором колебательный режим переходит в апериодический $R_{\text{кр,эксп}} = 1.7 \cdot 10^4 \text{ Ом}$.
- Будем менять значения сопротивления от $0.1R_{\text{кр,эксп}}$ до $0.3R_{\text{кр,эксп}}$. Измеряя амплитуды для разных колебаний, определим логарифмический декремент затухания по формуле (10) и его погрешность.

$$\sigma_{\Theta} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\sigma_{U_{k+n}}^2}{U_{k+n}^2} + \frac{\sigma_{U_k}^2}{U_k^2}}$$

$$\sigma_{U_{k+n}} = \sigma_{U_k} = 10 \text{ мВ}$$

Таблица 2: Определение зависимости $\Theta(R)$

$R, \text{ Ом}$	1700	2000	2300	3500	4000	4500	5000
$R_{\Sigma}, \text{ Ом}$	1743	2043	2343	3543	4043	4543	5043
n	4	4	2	2	2	2	1
$U_0, \text{ В}$	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
$U_n, \text{ В}$	0.30	0.20	0.70	0.30	0.20	0.16	0.54
Θ	0.56	0.66	0.69	1.12	1.32	1.43	1.65
σ_{Θ}	0.02	0.03	0.03	0.03	0.05	0.06	0.04

Измерив на универсальном мосте сопротивление катушки $R_L = 43 \text{ Ом}$ при нашей частоте 5 кГц, добавим его к сопротивлению магазина, получив сопротивление контура R_{Σ}

Построим график $\frac{1}{\Theta^2} = f\left(\frac{1}{R_{\Sigma}^2}\right)$ и рассчитаем $R_{\text{кр}}$ по его наклону.

Теоретическая зависимость имеет вид

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{R_{\text{кр}}^2}{4\pi^2} \frac{1}{R_{\Sigma}^2} - \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\sigma_{\frac{1}{\Theta^2}} = \frac{2\sigma_{\Theta}}{\Theta^3}$$

Получим значения $R_{\text{кр}} = 19700 \text{ Ом}$ и $\sigma_{R_{\text{кр}}} \approx 500 \text{ Ом}$ с помощью МНК.

Полученное значение отстоит от теоретического $R_{\text{кр,теор}} = 2\sqrt{L/C} = 2.2 \cdot 10^4$ на $\sim 10\%$

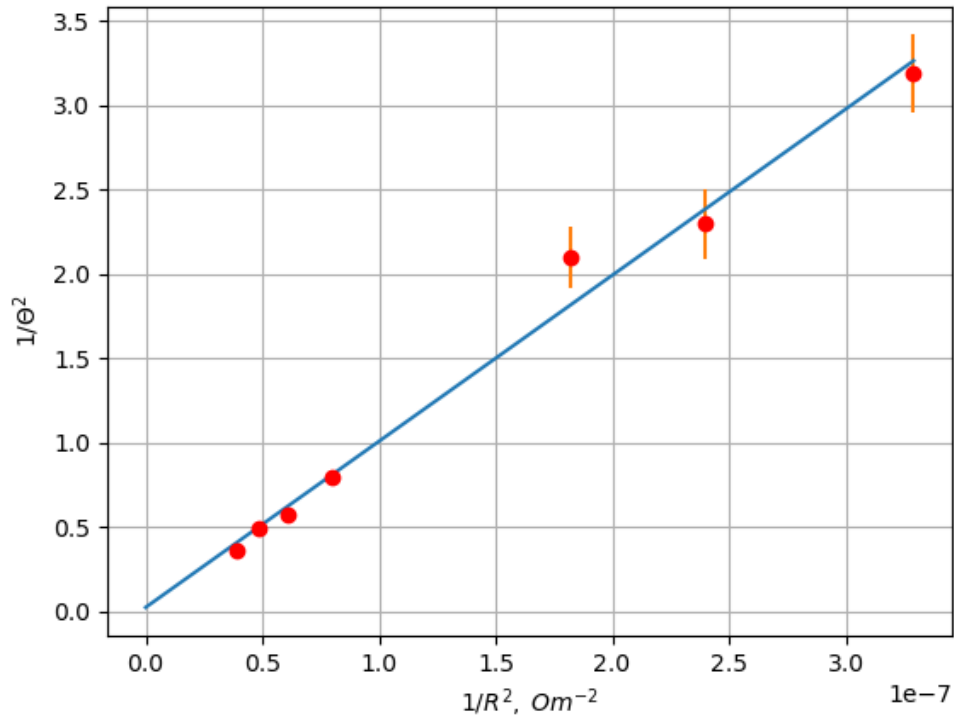


Рис. 4: Зависимость $\frac{1}{\Theta^2} \left(\frac{1}{R^2} \right)$

4. Рассчитаем добротность контура Q и его погрешность для максимального и минимального значений Θ

$$Q_{exp} = \frac{\pi}{\Theta}; \quad \sigma_{Q_{exp}} = \frac{\pi \sigma_{\Theta}}{\Theta^2}$$

сравним полученные значения с $Q_{teor} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Таблица 3: Добротность контура

Θ	Q_{exp}	$\sigma_{Q_{exp}}$	Q_{teor}
0.56	5.6	0.2	6.5
1.65	1.9	0.05	2.3

5. Рассчитаем добротность по спирали на фазовой плоскости, измеряя максимумы отклонения витков спирали по одной из координат для для максимального и минимального значений R

$$\text{для } R_{min} = 1.7 \cdot 10^3 \text{ получаем } \Theta = \frac{1}{3} \ln \frac{1.3}{0.24} = 0.56 \pm 0.03$$

$$\text{для } R_{max} = 5.0 \cdot 10^3 \text{ получаем } \Theta = \frac{1}{1} \ln \frac{0.4}{0.08} = 1.61 \pm 0.09$$

Вывод

- (а) была подтверждена теоретическая зависимость периода колебаний от ёмкости конденсатора. Некоторое отклонение от теоретической кривой может быть объяснено

ограниченностью точности измерения количества делений, которые занимает один период.

- (b) тремя способами был вычислен логарифмический декремент затухания. Двумя экспериментальными - по зависимости напряжения от времени и по фазовой траектории колебаний. Результаты обоих методов совпадают в пределах погрешности и имеют относительную погрешность не более 5%. Третий метод - теоретический. Его результаты отличаются от результатов экспериментов на $\sim 15\%$
- (c) была изучена зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления контура и подтверждена линейная зависимость обратного квадрата декремента затухания от обратного квадрата сопротивления контура
- (d) Тремя способами было определено критическое сопротивление контура - теоретический, прямое измерение, как коэффициент в линейной зависимости. Все 3 результата отличаются друг от друга на $\sim 10\%$