

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

## Лабораторная работа

### Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнила:  
Карасёва Таисия  
Б02-001

Долгопрудный 2021

**Цель работы:** исследование спектра колебаний электрических сигналов.

**В работе используются:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье

## Теория

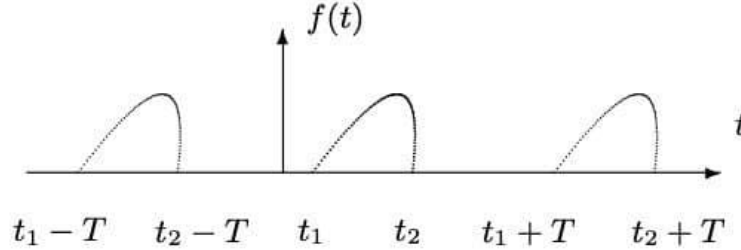


Рис. 1: График периодической функции с периодом  $T$

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = 2\pi/T$ , где  $T$  — период повторения (Рис. 1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n)$$

Здесь  $a_0/2 = A_0/2$  — постоянная составляющая (среднее значение) функции  $f(t)$ ;  $a_n$  и  $b_n$  — амплитуды косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{T+t_1} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{T+t_1} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования  $t_1$  можно выбрать произвольно. В тех случаях, когда сигнал чётен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, так как все коэффициенты  $b_n$  обращаются в нуль. Для нечётной относительно  $t = 0$  функции, наоборот, ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда  $A_n$  и фаза  $\psi_n$   $n$ -й гармоники выражаются через  $a_n$  и  $b_n$  следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами:  $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1 \dots$  и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ( $0 \cdot \Omega_1$ ).

Представим выражение в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left( A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Введём комплексные амплитуды  $\tilde{A}_n$  и  $\tilde{A}_{-n}$

$$\tilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \tilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \tilde{A}_0 = A_0$$

Разложение  $f(t)$  приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\Omega_1 t}$$

Как мы видим, введение отрицательных частот позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом.

Для расчёта комплексных амплитуд  $A_n$  умножим левую и правую части на  $e^{-ik\Omega_1 t}$  и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2\pi/\Omega_1$ . В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего  $n = k$ . Этот член даёт  $A_k T/2$ . Имеем поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

## Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

С амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $f_{\text{повт}} = 1/T$ , где  $T$  — период повторения импульсов.

Среднее значение

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Амплитуды косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $F(\nu)$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на Рис. 2б. Амплитуды гармоник  $A_n$  меняются по Закону  $(\sin x)/x$ . На Рис. 2б изображён спектр для случая, когда  $T$  кратно  $\tau$ . Назовём шириной спектра  $\Delta\omega$  (или  $\Delta\nu$ ) расстояние от главного максимума ( $\nu = 0$ ) до первого нуля, возникающего, как нетрудно убедиться, при  $\Omega_1 = 2\pi/\tau$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот — явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки  $\Delta\nu$  радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов. Длительностью  $t < 1/\Delta\nu$

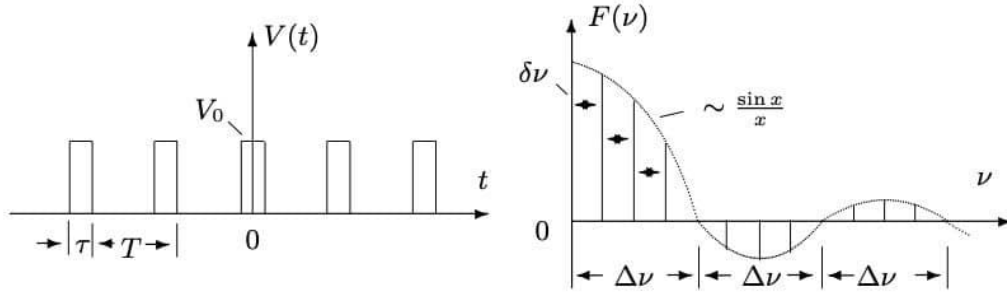


Рис. 2: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов и б) спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

## Периодическая последовательность цугов

Гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (Рис. 3а)

Функция  $f(t)$  снова является чётной относительно  $t = 0$ . Амплитуда  $n$ -й гармоники равна

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right)$$

Такое спектральное распределение  $F(\omega)$  для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлено на рис. Рис. 3б. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов (см. рис. Рис. 2б и Рис. 3б), мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

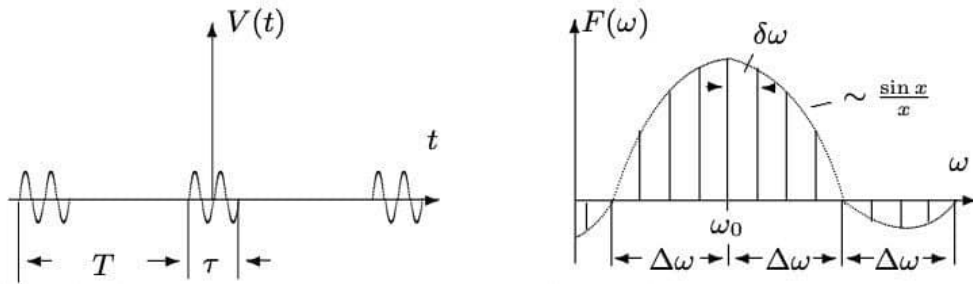


Рис. 3: а) периодическая последовательность цугов и б) спектр периодической последовательности цугов

## Амплитудно-модулированные колебания.

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. П.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega t)$$

Коэффициент  $m$  называют глубиной модуляции. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{\min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{\max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может

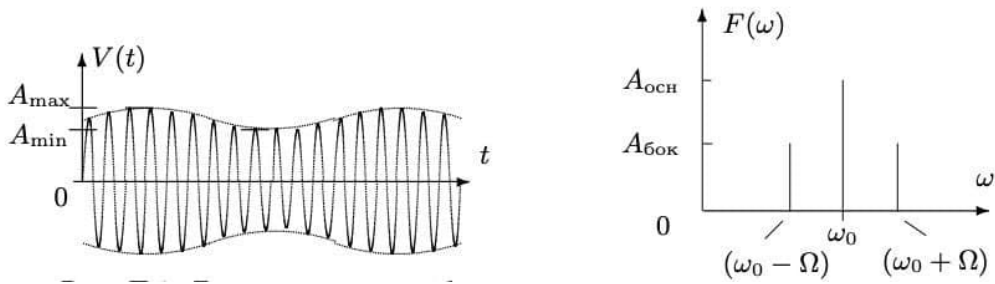


Рис. 4: а) гармонические колебания, модулированные по амплитуде б) спектр гармонических колебаний, модулированных по амплитуде

быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t \end{aligned}$$

Спектр  $F(\omega)$  таких колебаний содержит три составляющих (рис. П. 7) Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с иесущей частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $A_{\text{ос}} = A_0$  — первое слагаемое в правой части; боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами  $(\omega_0 + \Omega)$  и  $(\omega_0 - \Omega)$  — Второе и третье слагаемые. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $m/2$  от амплитуды немодулированного колебания:  $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$

# Ход работы

## 1. Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов.

Устанавливаем прямоугольные колебания,  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ . Изменяя  $f_{\text{повт}}$  или  $\tau$ , получим на экране разные изображения спектров.

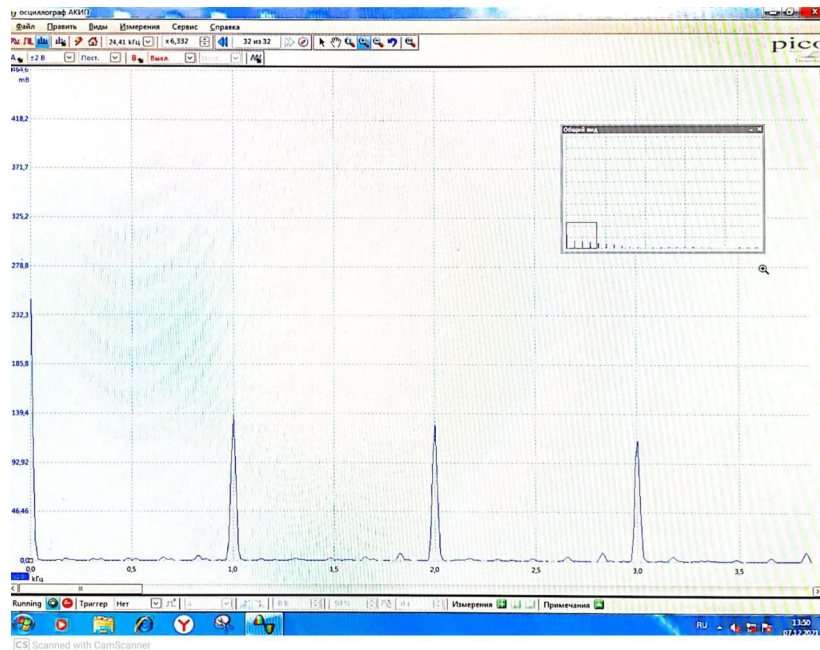


Рис. 5:  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ .

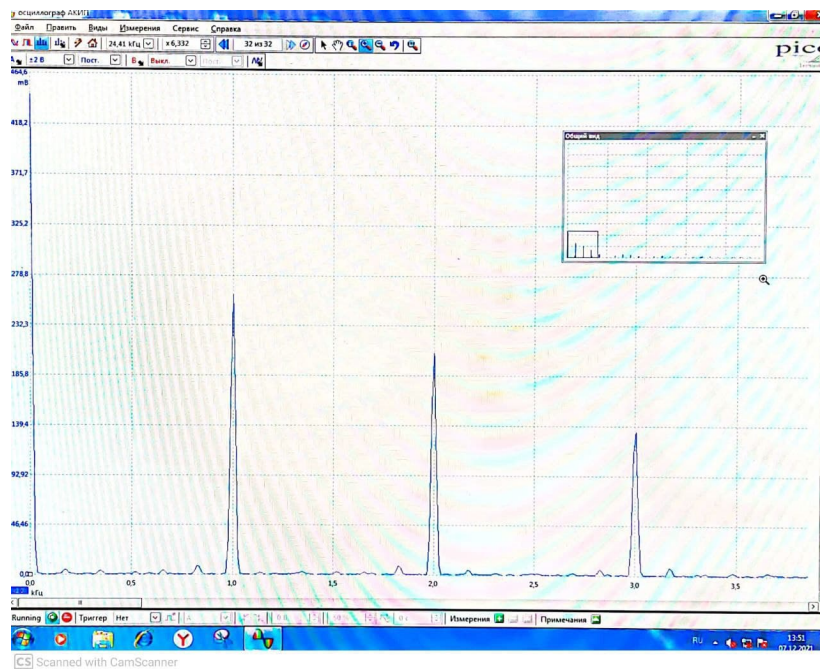


Рис. 6:  $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ .

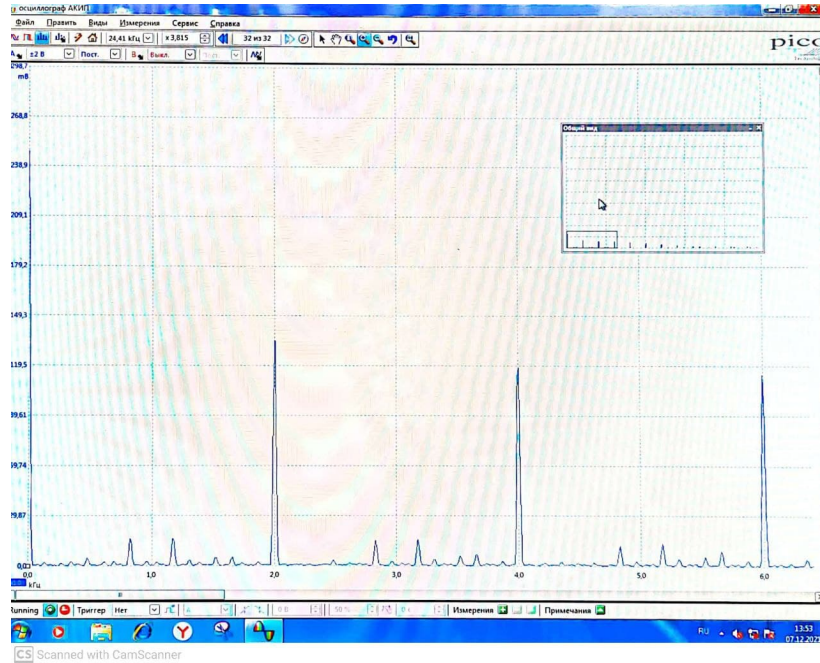


Рис. 7:  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 200 \text{ мкс}$ .

При увеличении  $\tau$  уменьшается  $\Delta\nu$ , а при увеличении  $f_{\text{повт}}$  пики становятся дальше друг от друга.

Проведём измерения зависимости ширины спектра  $\Delta\nu$  от длительности импульса  $\tau$

Таблица 1: Зависимость ширины спектра  $\Delta\nu$  от длительности импульса  $\tau$

$\tau$ , мкс	40	60	80	100	120	140	160	180	200
$\Delta\nu$ , кГц	24	17	13	10	7.7	7.0	6.2	5.5	5.0

С помощью МНК получим угловой коэффициент  $\Delta\nu\tau = 1.01 \pm 0.2$ , что в пределах погрешности совпадает с 1.

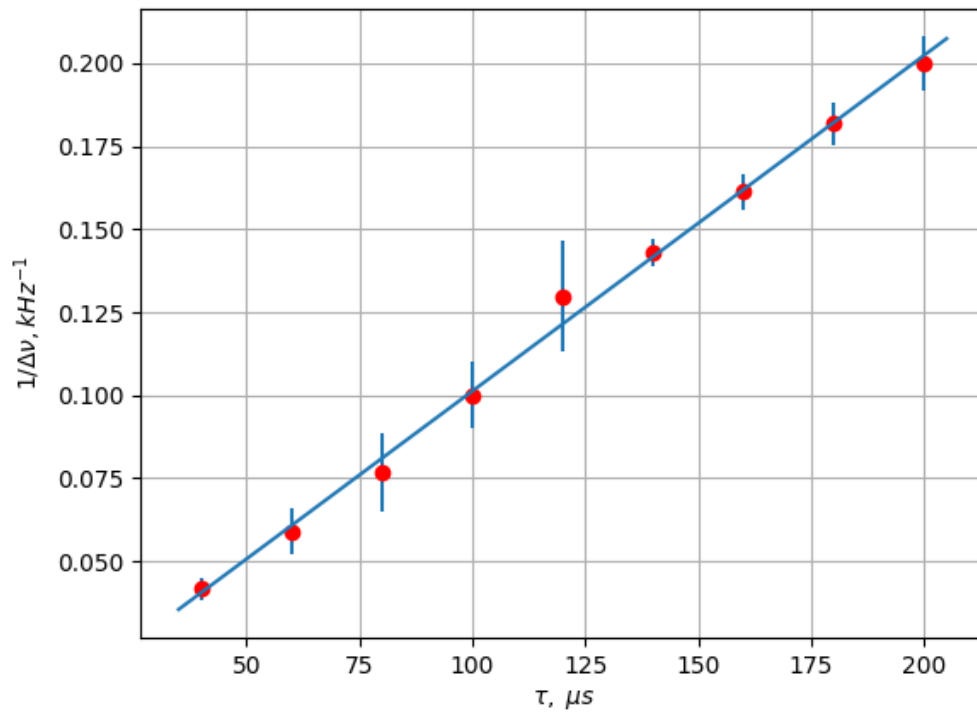


Рис. 8: Зависимость ширины спектра  $\Delta\nu$  от длительности импульса  $\tau$

2. **Исследование спектра периодической последовательности цугов.** Установим  $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  и  $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$  и посмотрим на поведение спектра при изменении  $\tau$ .

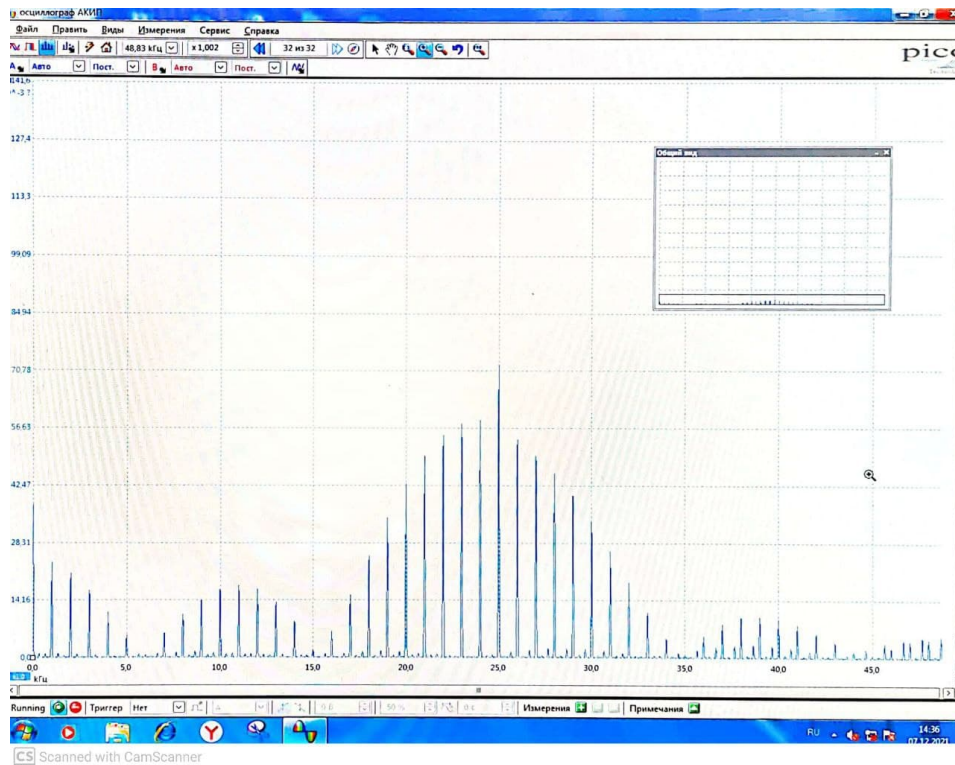


Рис. 9:  $\tau = 100 \text{ мкс}$ .



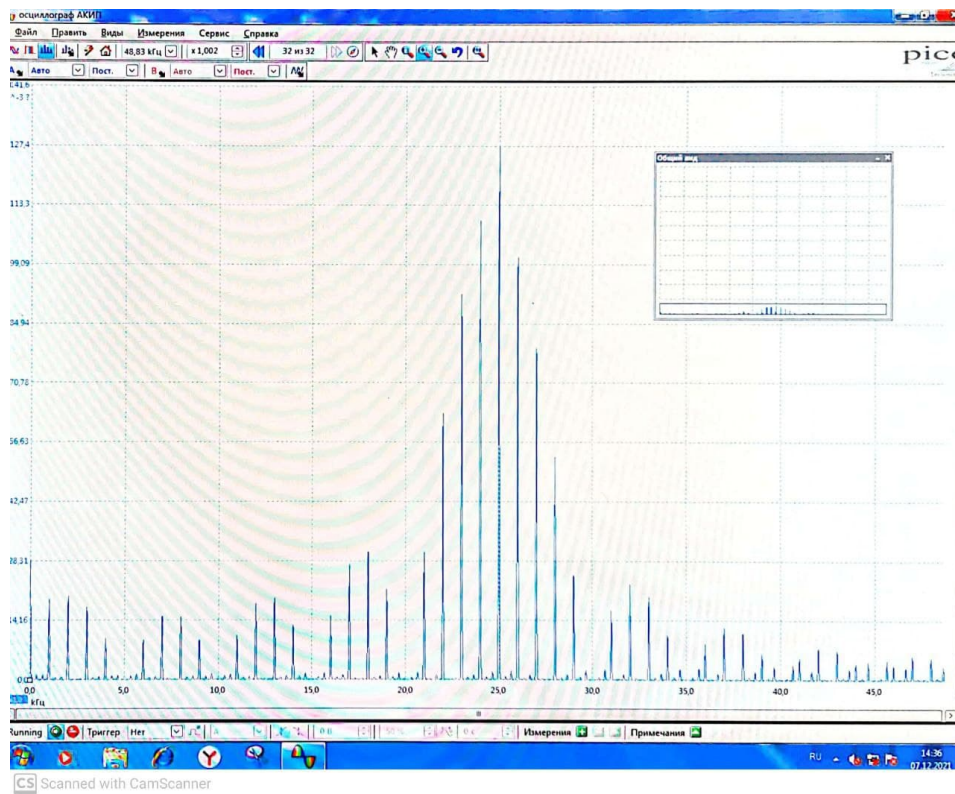


Рис. 10:  $\tau = 200$  мкс.

Из данных видно, что с увеличением  $\tau$  уменьшается  $\Delta\omega$  (обратная пропорциональность). Теперь зафиксируем  $\tau = 100$  мкс и будем менять значение  $\nu_0$ .

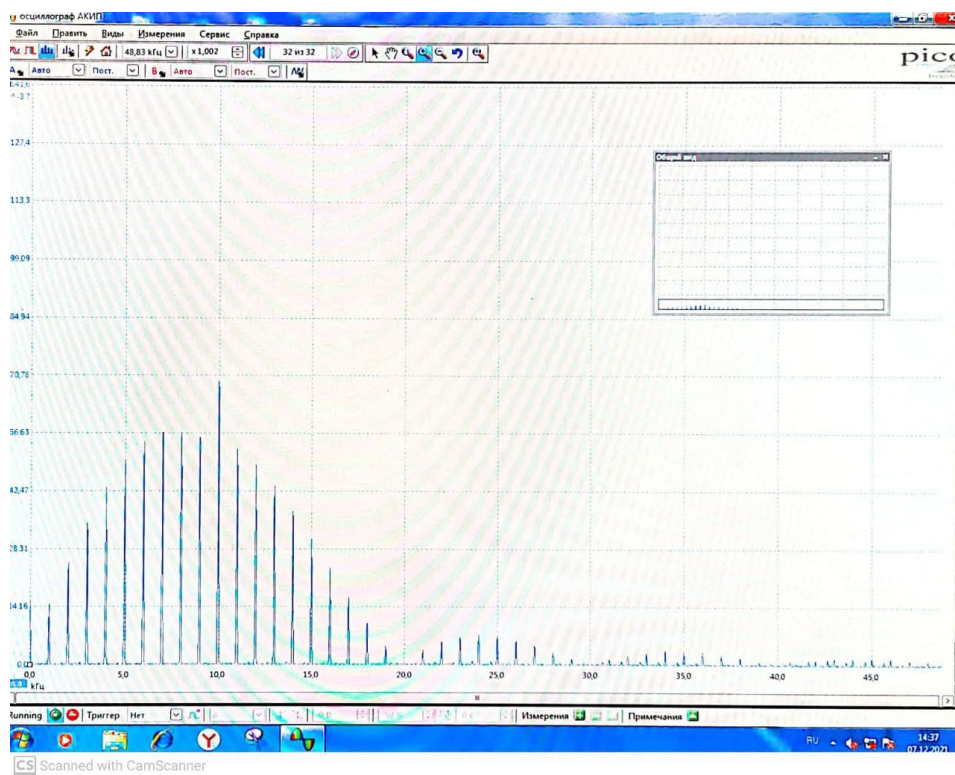


Рис. 11:  $\nu_0 = 10$  кГц.

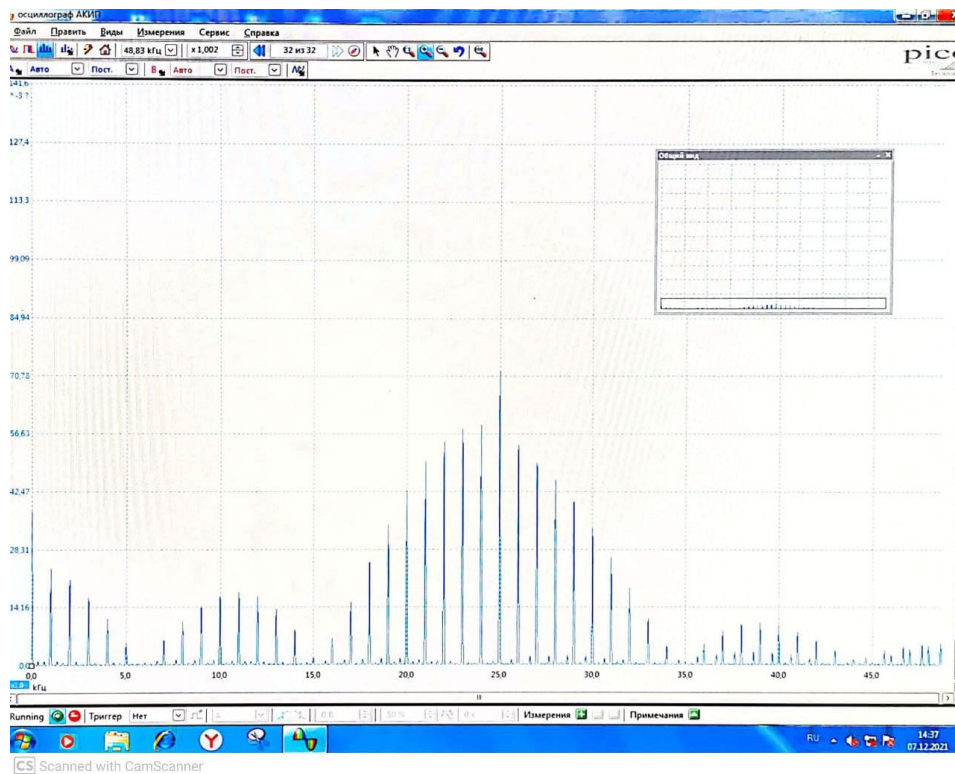


Рис. 12:  $\nu_0 = 25$  кГц.

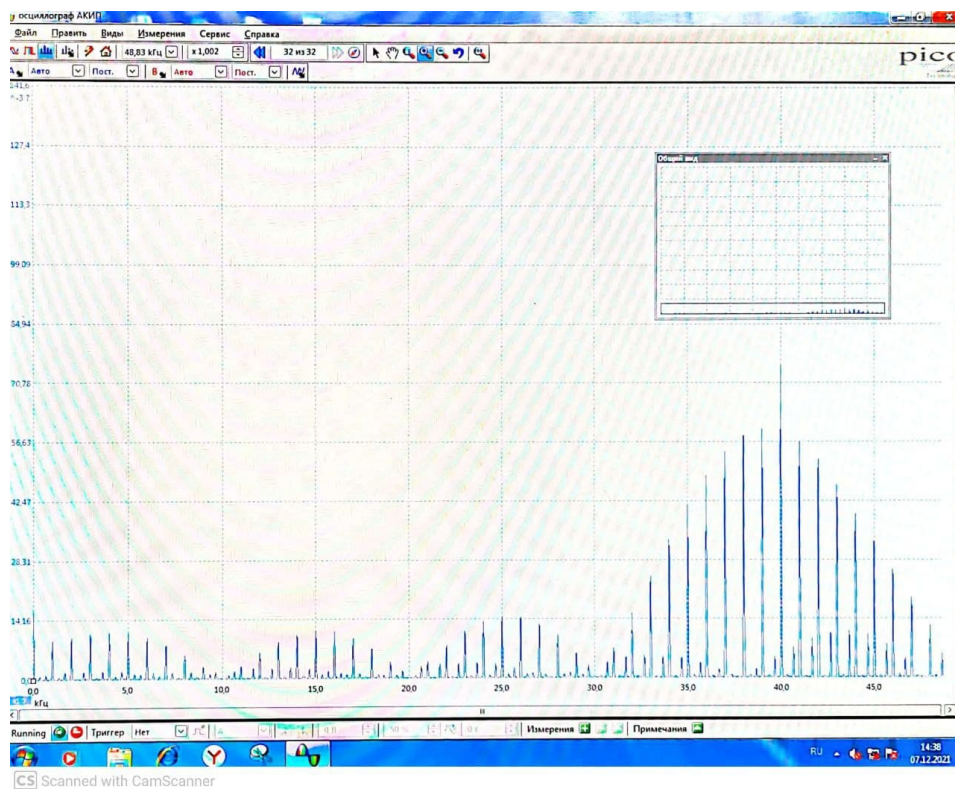


Рис. 13:  $\nu_0 = 40$  кГц.

Как видно, картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.

Установим частоту несущей  $\nu_0 = 30$  кГц. Определим зависимость  $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Погрешность измерения определяется погрешностью генератора 0,5 Гц. То есть

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повторения импульсов

$f_{\text{повт}}, \text{кГц}$	0.5	1	2	4	5
$\delta\nu, \text{кГц}$	0.5	1	2	4	5

$$\frac{f_{\text{повт}}}{\delta\nu} = 1 \pm 0.01, \text{ что совпадает с теоретическим значением в пределах погрешности}$$

### 3. Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала.

Рассмотрим амплитудно промодулированный сигнал с параметрами  $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$ ,  $f_{\text{мод}} = 1 \text{ кГц}$ .

Рассмотрим зависимость отношения  $k = \frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$  и  $m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}}$

Таблица 3: Зависимость  $\frac{A_{\text{бок}}}{A_{\text{осн}}}$  от глубины модуляции

$A_{\text{max}}, \text{мВ}$	543.7	617.5	686.3	765.1	833.9	922.5	965.6
$A_{\text{min}}, \text{мВ}$	445.3	366.5	302.6	233.7	155.0	76.3	43.1
$A_{\text{осн}}, \text{мВ}$	323.9	323.9	323.9	323.9	323.9	323.9	323.9
$A_{\text{бок}}, \text{мВ}$	15.2	40.1	59.8	89.5	113.3	138.9	151.4
$k$	0.0469	0.1238	0.1846	0.2763	0.3498	0.4288	0.4674
$m$	0.0995	0.2551	0.3880	0.5320	0.6865	0.8472	0.9145
$\sigma_k$	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
$\sigma_m$	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002

$$\sigma_{A_{\text{max}}} = \sigma_{A_{\text{min}}} = \sigma_{A_{\text{осн}}} = \sigma_{A_{\text{бок}}} = 0.1 \text{ мВ} = \sigma_A$$

$$\sigma_k = \frac{\sigma_A}{A_{\text{осн}}} \sqrt{k^2 + 1}$$

$$\sigma_m = \frac{2\sigma_A}{(A_{\text{max}} + A_{\text{min}})^2} \sqrt{A_{\text{max}}^2 + A_{\text{min}}^2}$$

С помощью МНК получим  $\frac{k}{m} = 0.505 \pm 0.008$

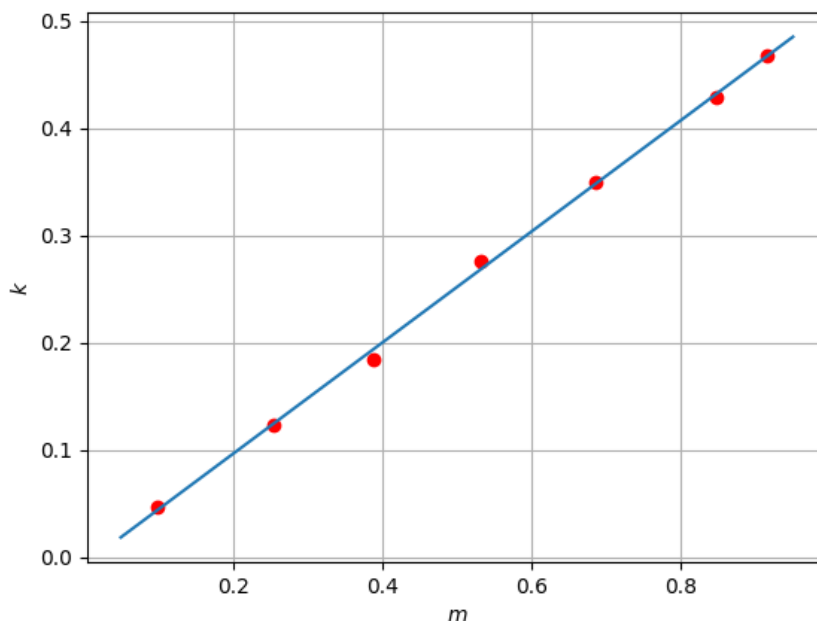


Рис. 14: Зависимость  $\frac{A_{бок}}{A_{осн}}$  от глубины модуляции

## Вывод

В ходе работы

1. было проведено исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов, а именно
  - (а) качественно проверена зависимость спектра от частоты повторения импульсов и от длительности импульса
  - (б) построена зависимость длительности ширины спектра от длительности импульса. Произведение этих величин было получено с относительной погрешностью 2% и в пределах погрешности совпало с теоретическим значением, чем было проверено соотношение неопределённостей
2. было проведено исследование спектра периодических последовательностей цугов, а именно
  - (а) качественно проверена зависимость спектра от частоты несущей и от длительности импульса
  - (б) построена зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от частоты повторения импульсов. Отношение этих величин было определено с относительной погрешностью 1% и в пределах погрешности совпало с теоретическим значением
3. было проведено исследование спектра амплитудно модулированного сигнала, а именно был получен угловой коэффициент зависимости отношения основной компоненты спектра к боковой от глубины модуляции. Относительная погрешность составила 15%, полученное значение совпало с теоретическим в пределах погрешности.