14 Коэффициенты само- и взаимоиндукции. Теорема взаимности. Взаимная индуктивность 2 катушек на общем магнитопроводе. Взаимная энергия токов. Локализация магнитной энергии в пространстве, объемная плотность магнитной энергии

∃ L - замкнутый контур, S - опирающаяся на него поверхность

$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$. ∃ по L течет ток J, создающий магнитное поле $\vec{B}$: $B \sim J \Rightarrow \Phi \sim J$ $\quad \Phi = \frac{1}{c} L J$

L - коэффициент самоиндукции

Имеются 2 витка, по одному из них течёт ток J_1 поле, создаваемое этим током $B \sim J_1$, магнитный поток через второй виток $\Phi_{21} = \frac{1}{c} L_{21} J_1$

L_{21} - коэффициент взаимной индукции

Взаимная индуктивность 2 катушек на общем магнитопроводе

магнитное поле внутри соленоида $B = \mu H = \frac{4\pi}{c}\mu i = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{NJ}{l}$

поток через каждый виток $\Phi_1 = BS = \frac{4\pi\mu N}{cl} SJ$

через все N витков

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{4\pi\mu N^2}{cl} SJ = \frac{1}{c} LJ \Rightarrow L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$$

I по катушке 1 течёт ток $J_1 \Rightarrow B_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 J_1}{l}$

$\Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 J_1}{l} S$ - этот поток пронизывает все N_2 витков второй катушки $\Phi_{21} = N_2\Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 N_2 J_1}{l} S = \frac{1}{c} L_{21} J_1$

$$L_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S$$

аналогично $L_{12} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l} S$

$\Rightarrow L_{21} = L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$ - справедливость связана с тем, что мы пренебрегли рассеянием магн. потока, 2) магн. проницаемость сердечника не связана с величиной магнитного поля

Магнитная энергия токов

$\delta A = -\mathcal{E}_{инд}\, dq = -\mathcal{E}_{инд} J\, dt \qquad \mathcal{E}_{инд} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$

$$\delta A = \frac{1}{c} J\, d\Phi = \Big/ \Phi = \frac{LJ}{c} \Big/ = d\left(\frac{LJ^2}{2c^2}\right) = d\left(\frac{J\Phi}{2c}\right) = d\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right)$$

$$U = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}$$ — магнитная энергия тока

Локализация магнитной энергии в пространстве

Само магнитное поле работы над зарядами не производит, её производит вихревое электрическое поле, возникающее (по закону индукции) на стадии „включения" магнитного поля

Закон Джоуля-Ленца $\Rightarrow$ работа электрического поля $\vec{E}$ над токами $\vec{j}$ в 1-чном объёме в 1-цу времени $= \vec{j}\vec{E}$

$$\delta A_{поле} = dt \int_V \vec{j}\vec{E}\, dV$$

По циркуляции в диф. форме $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H}$

$$\delta A_{поле} = \frac{dt}{4\pi} \int_V \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}\, dV$$ — интегрируем по всему пространству

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}$$

$$\delta A_{поле} = \frac{dt}{4\pi} \int_V \left(\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})\right) dV$$

Преобразуя второй интеграл по формуле Гаусса-Остроградского в поверхностный, учитывая, что на удалённой поверхности $|H|, E \to 0$

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})\, dV = \int_{S(V)} (\vec{E} \times \vec{H})\, d\vec{S} = 0$$

$$\delta A_{поле} = \frac{dt}{4\pi} \int_V \vec{H} \operatorname{rot} \vec{E}\, dV$$

закон электромагнитной индукции $rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{dt}$

$$\delta A_{поле} = -\frac{dt}{4\pi}\int\limits_V \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{dt}dV$$

$$d\vec{B} = dt\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\delta A_{поле} = -dU_m$$

$$dU_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \vec{H}\,d\vec{B}\,dV = \int\limits_V (du_m)\,dV$$

$$du_m = \frac{\vec{H}\,d\vec{B}}{4\pi}$$

если имеется связь $\vec{B} = \mu\vec{H}$ $\quad u_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\vec{B}\vec{H}}{8\pi} = \frac{\vec{B}^2}{8\pi\mu}$

<u>Теорема взаимности</u>

Пусть имеется система токов

$$\Phi_i = \frac{1}{c}\sum_k L_{ik}J_k \qquad d\Phi_i = \frac{1}{c}\sum_k L_{ik}\,dJ_k$$

$$dU = \frac{1}{c}\sum_i J_i\,d\Phi_i = \frac{1}{c^2}\sum_{i,k} L_{ik}J_i\,dJ_k$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial J_i\partial J_k} = \frac{1}{c^2}L_{ik} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial J_k\partial J_i} = \frac{1}{c^2}L_{ki} \rightarrow L_{ik} = L_{ki}$$

<u>Энергия системы токов</u>

$$dU = \underbrace{\frac{1}{c^2}\sum_i L_{ii}J_i\,dJ_i}_{\Downarrow} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\sum_{i\neq k} L_{ik}J_i\,dJ_k}_{dU_B}$$

$$U_c = \frac{1}{2c^2}\sum_i L_{ii}J_i^2$$

энергия самоиндукции

$$dU_B = \frac{1}{c^2}\left((L_{12}J_1dJ_2 + L_{21}J_2dJ_1) + \ldots\right) \overset{}{\underset{L_{12}=L_{21}}{=\!=\!=}} \frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} L_{ik}\,d(J_iJ_k)$$

$$U_B = \frac{1}{2c^2}\sum_{\substack{i,k\\ i\neq k}} L_{ik}J_iJ_k \qquad U = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik}J_iJ_k$$