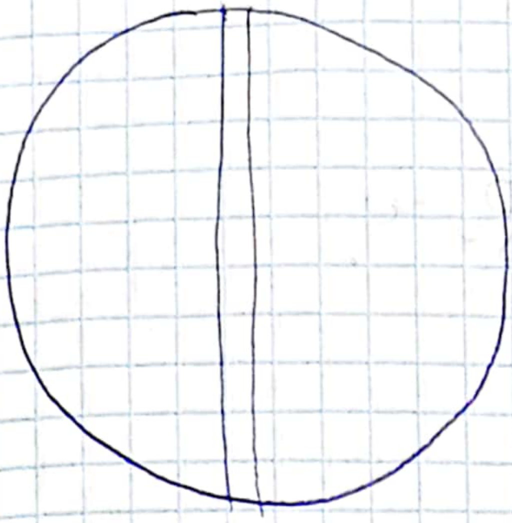
(2)



По теореме Гаусса

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r 4\pi x^2 dx \cdot \rho(x) =$$

$$= 4\pi \int_0^r 4\pi x^2 \rho_0 \left(1 - \frac{2x}{R}\right) dx =$$

$$= 4\pi \cdot 4\pi \rho_0 \int_0^r x^2 dx - 4\pi \cdot 4\pi \rho_0 \int_0^r \frac{2x^3}{R} dx =$$

$$= 16\pi^2 \rho_0 \frac{r^3}{3} - 16\pi^2 \rho_0 \cdot \frac{2}{R} \cdot \frac{r^4}{4} = 16\pi^2 \rho_0 \frac{r^3}{3}\left(1 - \frac{3r}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4}{3}\pi \rho_0 r \left(1 - \frac{3r}{2R}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{4}{3}\pi \rho_0 - \frac{4\pi \rho_0}{R} r \Rightarrow$$ положение равновесия

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 0 \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$

Сила, действующая на диполь $m\ddot{r} = p\frac{\partial E}{\partial r}$

$$m\ddot{r} + \frac{4\pi \rho_0 p r}{R} - \frac{4}{3}\pi \rho_0 = 0$$

Перейдём к $r' = r - \frac{R}{3}$

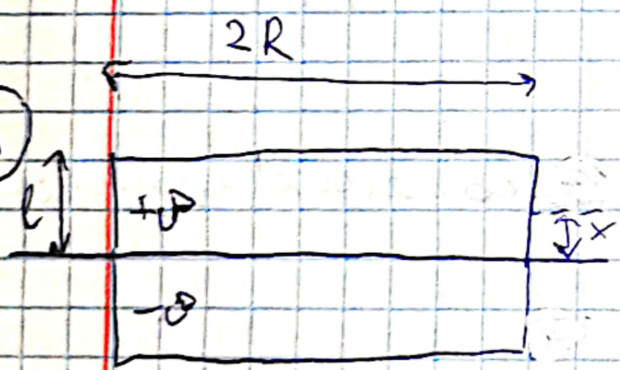
$$m\ddot{r}' + \frac{4\pi\rho_0 \rho (r' + \frac{R}{3})}{R} - \frac{4}{3}\pi\rho_0 = 0$$

$$\ddot{r}' + \frac{4\pi\rho_0 \rho r'}{mR} = 0$$

Получили уравнение гармонического осциллятора

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi\rho_0 \rho}{mR}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{\pi R m}{\rho_0 \rho}}$$

3



Воспользуемся методом изображений

$$2DS = 4\pi\rho\cdot 2(l-x)S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) = 4\pi\rho(l-x)$$

Плотность энергии электростатического поля $= w = \frac{D^2(x)}{8\pi\varepsilon}$

$$W = \int_0^l wS\,dx = \int_0^l \frac{16\pi^2\rho^2(l-x)^2\pi R^2}{8\pi\varepsilon}dx = \frac{2\pi^2\rho^2 R^2}{\varepsilon}\int_0^l (l-x)^2 dx$$

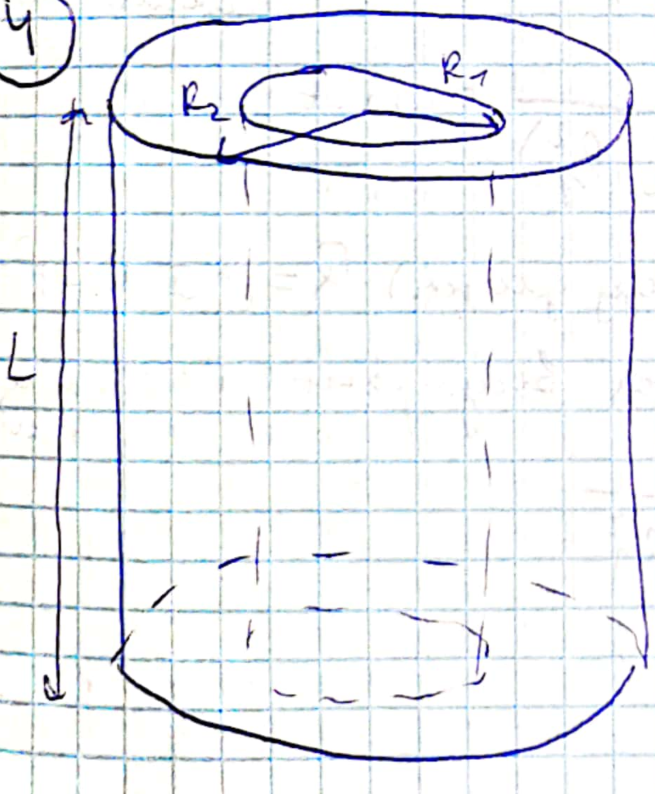
Scanned with CamScanner

$$= \frac{2\pi^2 \rho^2 R^2}{\varepsilon} \left(\int_0^l l^2 dx - l \int_0^l 2x\, dx + \int_0^l x^2 dx \right) =$$

$$= \frac{2\pi^2 \rho^2 R^2}{\varepsilon} \cdot \left(l^3 - 2l \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \right) = \frac{2\pi^2 \rho^2 R^2}{3\varepsilon}$$

(поле вне пластин по теореме Гаусса $= 0$)

4



$$j(r) = \lambda(r) E(r)$$

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r L}$$

удельное сопротивление

$$\rho(r) = \frac{1}{\lambda(r)}$$

сопротивление цилиндра толщиной dr, радиуса r

$$R(r) = \frac{\rho(r)\, dr}{2\pi r L} \Rightarrow$$ сопротивление цилиндра

$$R=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho(r)\,dr}{2\pi rL}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{r^2\,dr}{2\pi rLk}=\frac{1}{2\pi Lk}\left(\frac{R_2^2}{2}-\frac{R_1^2}{2}\right)$$

Ток $\mathcal{J}=\dfrac{V}{R}=\dfrac{2\pi LkV}{R_2^2-R_1^2}$ => плотность тока

$$j(r)=\frac{\mathcal{J}}{2\pi rL}=\frac{2kV}{r(R_2^2-R_1^2)}\Rightarrow E(r)=\frac{j(r)}{\lambda(r)}=\frac{2Vr}{R_2^2-R_1^2}$$

$\operatorname{div}D=4\pi\rho'(r)$, где $\rho'(r)$ – плотность заряда

$$\operatorname{div}D=\operatorname{div}E=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(rE_r)}{\partial r}$$ – для цилиндрической симметрии

$$\operatorname{div}E=\frac{4V}{R_2^2-R_1^2}\Rightarrow\rho'=\frac{V}{\pi(R_2^2-R_1^2)}=\text{const}\Rightarrow$$

=> заряд в диэлектрике (на 1 ед. длины) $Q=\rho'\pi(R_2^2-R_1^2)$

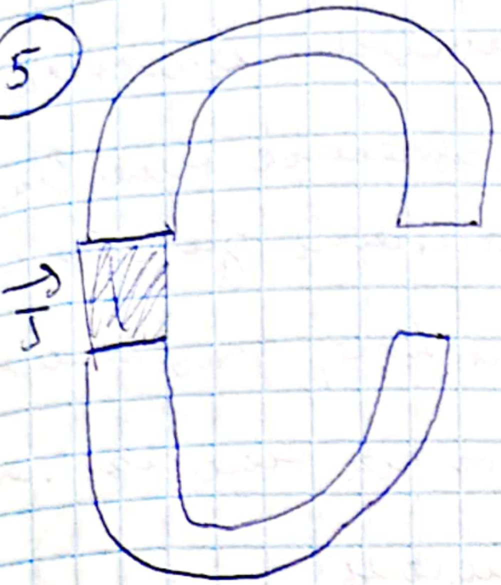
q – заряд (на единицу длины) на внутренней поверхности

$$E=\frac{2q}{R_1}=\frac{2VR_1}{R_2^2-R_1^2}\Rightarrow q=\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}$$

$$C=\frac{q+Q}{V}=\frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$$

Scanned with CamScanner

5



$\mu(x) = \mu_0 / (1 + a\cos(\frac{x}{R}))$

$a < 1, \; \mu_0 \gg 1$

B_0 – искомое поле

$H(x)$ – напряжённость магнитного поля в магнетике

H_0 – в зазоре, H_1 – в магните

Найдём циркуляцию H в магнетике

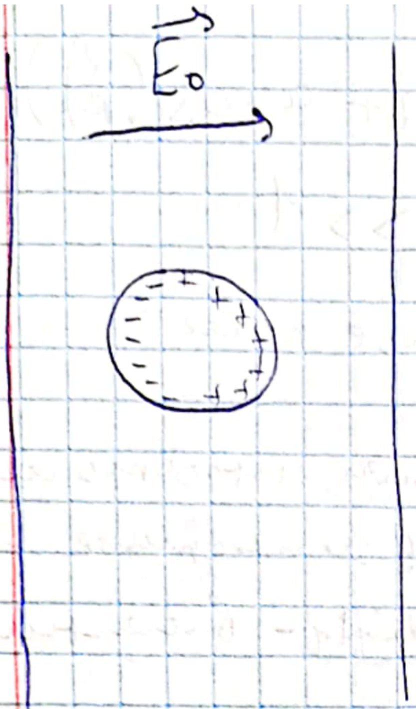
$$\oint_0^{2\pi R} H(x)\,dx = \int_0^{2\pi R} \frac{B_0}{\mu(x)}\,dx = \frac{B_0}{\mu_0}\int_0^{2\pi R}\left(1 + a\cos\frac{x}{R}\right)dx =$$

$$= \frac{B_0}{\mu_0}\left(2\pi R + a\int_0^{2\pi R}\cos\frac{x}{R}\,dx\right) = \frac{B_0}{\mu_0}\,2\pi R$$

$$\oint_0^{2\pi R} H\,dx + \overset{=B_0}{H_0 L} + \underbrace{B_0 L - 4\pi J L}_{= H_1 L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{2\pi J L}{L + \frac{\pi R}{\mu_0}}$$

1



шарик достаточно маленький $\Rightarrow$ поле, создаваемое им вне его можно считать дипольным и можно считать, что внешнее поле действует на него как на точечный диполь

$\exists\, q$ - заряд на обкладках

Энергия поля в ~~кон~~ перед помещением шарика $= \dfrac{q^2}{2C_0}$, после $= \dfrac{q^2}{2C_1}$

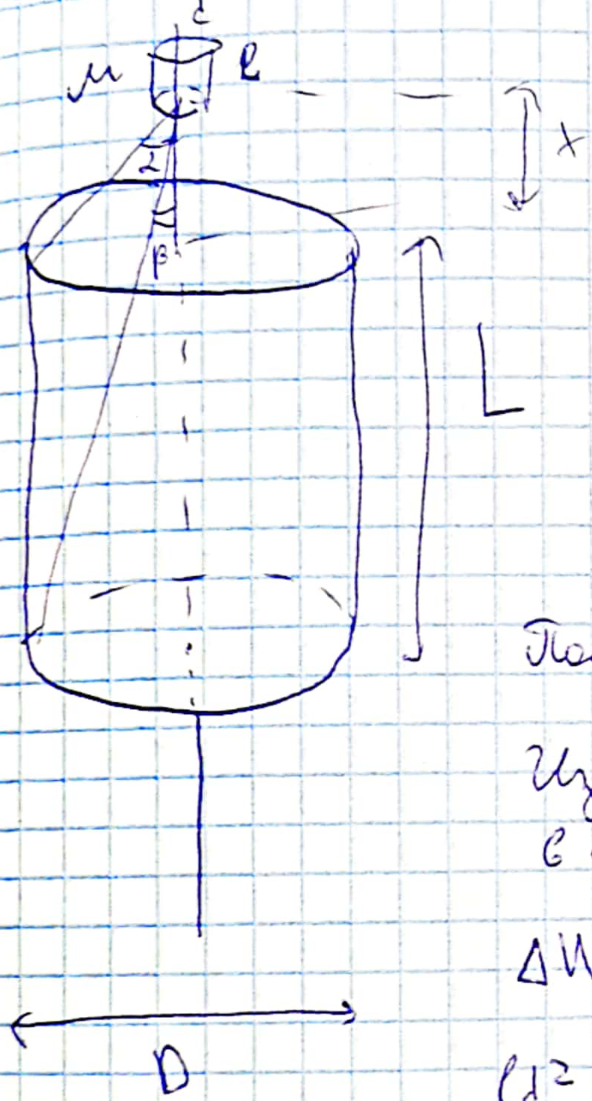
Сила, действующая на диполь во внешнем поле $= (p\vec{\nabla})\vec{E} = p\dfrac{dE}{dx} \Rightarrow$ работа, которую нужно совершить, чтобы переместить диполь из бесконечности в конденсатор $= \displaystyle\int_{\infty}^{0} r^3 E \frac{dE}{dx}\,dx = \frac{r^3 E_0^2}{2}$

$$\frac{q^2}{2C_1} = \frac{r^3 E_0^2}{2} + \frac{q^2}{2C_0} \Rightarrow C_0 C_1 \frac{r^3 E_0^2}{q^2} = C_0 - C_1$$

Принимая $C_0 - C_1 \ll C_0$ получаем

$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 \approx \varepsilon_0^2 \quad \frac{r^3 E_0^2}{q^2} = \frac{S^2}{16\pi^2 d^2} \cdot r^3 \frac{16\pi^2 q^2}{S^2 q^2} = \frac{r^3}{d^2}$

6



$$B(x) = 2\pi I_0 (\cos\beta - \cos\alpha) =$$

$$= 2\pi I_0 \left(\frac{x+L}{\sqrt{\frac{D^2}{4} + (x+L)^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{D^2}{4}}} \right) =$$

$$= 2\pi I_0 \left(1 - \frac{D^2}{8L^2} - 1 + \frac{D^2}{8x^2} \right) =$$

$$= 2\pi I_0 \frac{D^2}{8} \left(\frac{L^2 - x^2}{L^2 x^2} \right) \approx \frac{\pi I_0}{4} \cdot \frac{D^2}{x^2}$$

Поле внутри образца $B = B(x)$

Изменение энергии системы в связи с внедрением образца

$$\Delta W = \cancel{\pi} \frac{d^2}{4} l \cdot \frac{1}{8\cancel{\pi}} \left(\frac{B^2}{\mu} - B^2(x) \right) =$$

$$= \frac{l d^2}{32} \cdot (\mu - 1) \cdot \frac{\pi^2 D^4 I_0^2}{16 x^4} =$$

$$= \frac{l d^2 (\mu - 1) \pi^2 D^4 I_0^2}{256 x^2}$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial x}(x) = \frac{l d^2 (\mu - 1) \pi^2 I_0^2 D^4}{128 x^5}$$