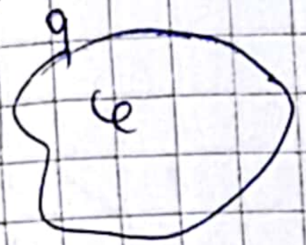
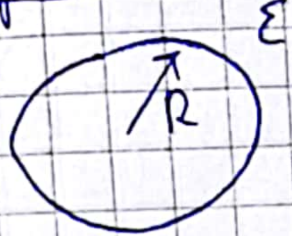
6) Электрическая ёмкость. Конденсаторы. Вычисление ёмкостей плоского, сферического, цилиндрического конденсаторов. Энергия электрического поля и её локализация в пространстве. Объёмная плотность энергии. Взаимная энергия зарядов. Энергия в системе заряженных проводников



$$C = \frac{q}{\varphi} \qquad 1\Phi = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$$

Пример:

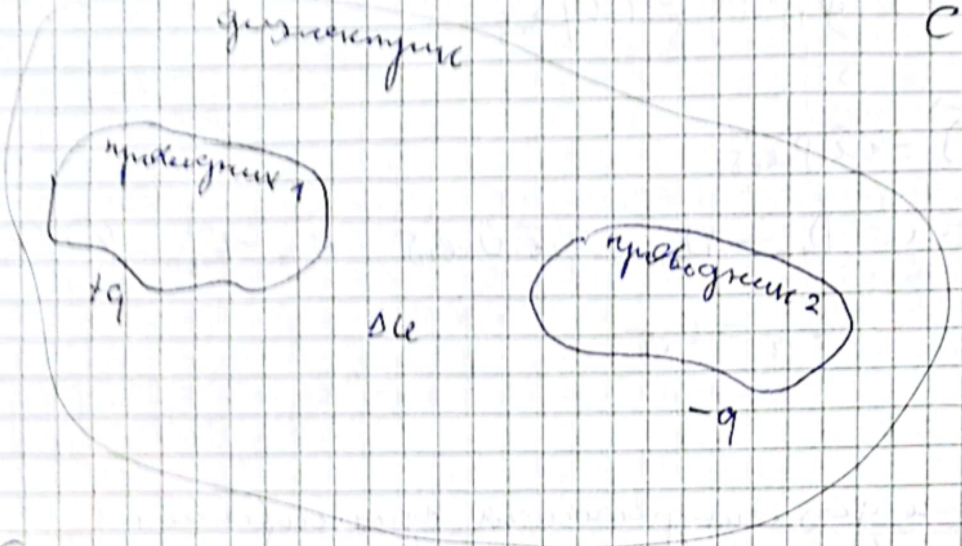


$$4\pi r^2 \cdot D = 4\pi q \qquad D = \frac{q}{r^2} \qquad D = \varepsilon E$$

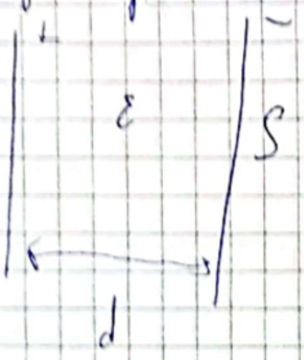
$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2} \qquad \varphi = \int_R^{\infty} E\,dr = \frac{q}{\varepsilon R} \Rightarrow C = \varepsilon R$$

Ёмкость конденсатора

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$$



Пример 1

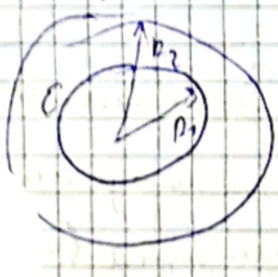


$$D = 4\pi\sigma \qquad E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}$$

$$\Delta\varphi = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} d$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{S\sigma}{\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} d} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

Пример 2



$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2}$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{\varepsilon r^2}\, dr = \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2} \cdot \frac{q}{\varepsilon}$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{R_1 R_2 \varepsilon}{R_2 - R_1}$$

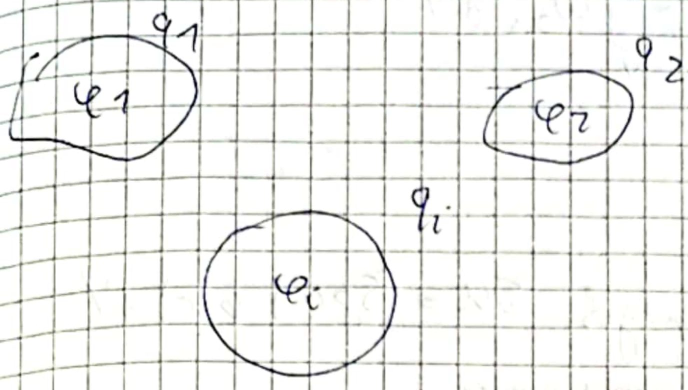
Пример 3

$$E = \frac{2q/L}{\varepsilon r}$$

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2q/L}{\varepsilon r^2} = \frac{2q}{\varepsilon L} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{\varepsilon L}{2\ln R_2/R_1}$$

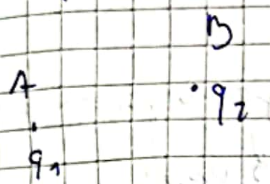
Ёмкостные коэффициенты



$$q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j$$

Энергия системы зарядов

2 заряда — энергия взаимодействия зарядов

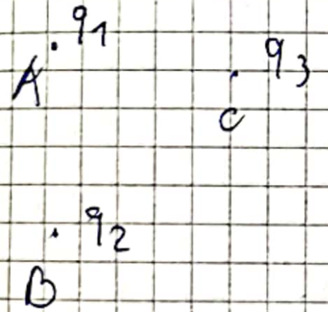


$$W_{12} = q_2 \cdot \varphi_B = q_1 \cdot \varphi_A$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1 \cdot \varphi_A + q_2 \cdot \varphi_B)$$

полная энергия $W = W_{12} + W_{q_1} + W_{q_2}$

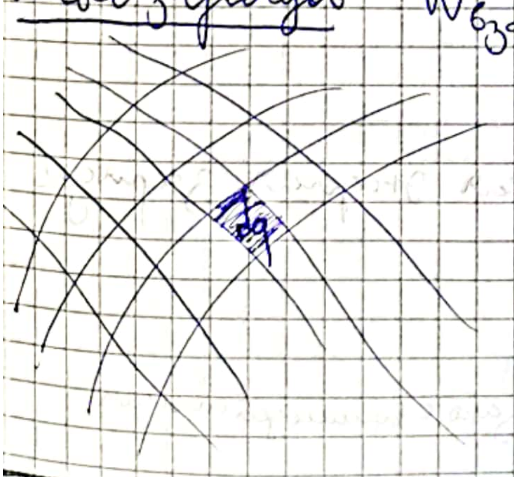
3 заряда



$$W_{взаимод} = \frac{1}{2}\Big(q_1(\overbrace{\varphi_{2A} + \varphi_{3B}}^{\varphi_1}) + q_2(\overbrace{\varphi_{1B} + \varphi_{3B}}^{\varphi_2}) + q_3(\overbrace{\varphi_{1C} + \varphi_{2C}}^{\varphi_3})\Big)$$

$$W_{взаимод} = \frac{1}{2}(\varphi_1 q_1 + \varphi_2 q_2 + \varphi_3 q_3)$$

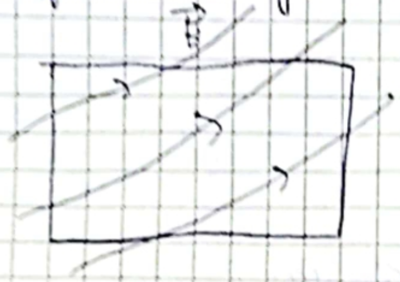
Много зарядов $W_{взаимод} = \frac{1}{2} \sum q_i \cdot \varphi_i$ (*)



$\rho(x,y,z)$ $\quad dq = \rho\, dV$

$$W_{взаимод} = \frac{1}{2} \int \varphi\, dq = \frac{1}{2}\int_V \varphi \rho\, dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma \varphi\, dS$$

Энергия электрического поля



$$W_{эл} = \int_V w_{эл}\, dV$$

Вариация энергии системы зарядов $\delta U = \int \delta\rho(r)\,\varphi(r)\, dV$

$\delta\rho$ - изменение объёмной плотности

Т Гаусса => $\delta\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\delta\bar{D}$

$$\delta U = \frac{1}{4\pi}\int \varphi \operatorname{div}\delta\bar{D}\, dV = \frac{1}{4\pi}\int \left(\operatorname{div}(\varphi\,\delta\bar{D}) - \delta\bar{D}\operatorname{grad}\varphi\right) dV$$

Интегрирование по всему пр-ву, но на большом расстоянии от системы зарядов поле обращается в нуль

$$\int \operatorname{div}(\varphi\,\delta\bar{D})\, dV = \oint_{S_\infty} (\varphi\,\delta\bar{D})\, d\bar{S} = 0$$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

$$\delta U = \int_0^{\bar{D}} \frac{\bar{E}\,\delta\bar{D}}{4\pi}\, dV$$

$$U = \frac{\bar{E}\bar{D}}{8\pi} \quad (**)$$

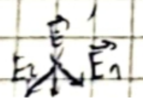
(*) может быть <0

(**) нет

отличие: в (**) включена собственная энергия зарядов

пример: система 2 зарядов

q_1, q_2



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ — связано чисто с q_1; связано чисто с q_2

$E^2 = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$ — связано с взаимодействием

$$W_{\text{эл}} = \int\limits_V \frac{E_1^2}{8\pi}\, dV + \int\limits_V \frac{E_2^2}{8\pi}\, dV + \underbrace{\int\limits_V \frac{\vec{E_1} \cdot \vec{E_2}}{4\pi}\, dV}_{\text{"} \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV}$$