С 11.120 $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda) - 2 = 2 + 3\lambda + \lambda^2 - 2 =$$

$$= \lambda(\lambda+3) \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -3$$

Собственный вектор, соотв. λ_1

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собств. вектор, соотв. λ_2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Матрица, составленная из собственных векторов $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Матрица A в базисе h_1, h_2 имеет вид $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = Te^{t\Lambda}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ e^{-3t} & -e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + e^{-3t} & 1 - e^{-3t} \\ 2 - 2e^{-3t} & 1 + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Задача Коши $\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1+2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2C_1 + C_1e^{-3t} + C_2 - C_2e^{-3t} \\ 2C_1 - 2C_1e^{-3t} + C_2 + 2C_2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2C_1 + C_1 + C_2 - C_2 \\ 2C_1 - 2C_1 + C_2 + 2C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+e^{-3t} & 1-e^{-3t} \\ 2-2e^{-3t} & 1+2e^{-3t} \end{pmatrix}$

C 11.124 $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 8 + \lambda^2 - 6\lambda + 1 = (\lambda - 3)^2$$ $\lambda = 3$ - корень кратности 2

$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to (1 \quad 1)$ $h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Присоединённый к h_1 $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

В базисе из этих векторов матрица A имеет вид $J=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$

$$e^{tJ}=e^{3t}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix} \qquad H^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$e^{tA}=He^{tJ}H^{-1}=e^{3t}\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}-1&-t\\1&t+1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&-t\\t&1+t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&-t\\t&1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$$

Задача Коши $\begin{cases}x(0)=1\\y(0)=1\end{cases}$

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}\Rightarrow C_1=C_2=1$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1-t&-t\\t&1+t\end{pmatrix}$

С 11.129 $\begin{cases} \dot{x} = -x+y \\ \dot{y} = -5x+3y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3+\lambda^2-3\lambda+\lambda+5 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0$$

$D = 4-8 = -4$ $\lambda_1 = 1+i$

$\lambda_2 = 1-i$

$$A_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -(2+i)(2-i) & 2-i \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} \to (-5 \quad 2-i)$$

Собственный вектор, соотв λ_1 $h_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix}$

Собственный вектор, соотв λ_2 $h_2 = \overline{h_1} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 5 \end{pmatrix}$

Матрица, составленная из собственных векторов $H = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ $H^{-1} = \dfrac{-1}{10i} \begin{pmatrix} 5 & -2-i \\ -5 & 2-i \end{pmatrix}$

В этом базисе A имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = H e^{\Lambda t} H^{-1} = \frac{i}{5}\begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 5 & -2-i \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} = \frac{i}{10}\begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5e^{(1+i)t} & (-2-i)e^{(1+i)t} \\ -5e^{(1-i)t} & (2-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{10}\begin{pmatrix} 5(2-i)e^{(1+i)t} - 5(2+i)e^{(1-i)t} & -5e^{(1+i)t} + 5e^{(1-i)t} \\ 25e^{(1+i)t} - 25e^{(1-i)t} & -5(2+i)e^{(1+i)t} + 5(2-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 1 = \frac{i}{10}\left(C_1 5(2-i) - C_1 5(2+i) - 5C_2 + 5C_2\right) =$$

$$= \frac{i}{10}\left(10C_1 - 5iC_1 - 10C_1 - 5iC_1\right) = \frac{i}{10}(-10i\,C_1) =$$

$$= C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$y(0) = 1 = \frac{i}{10}\left(25C_1 - 25C_1 - 5(2+i)C_2 + 5(2-i)C_2\right) =$$

$$= \frac{i}{10}\left(-10C_2 - 5iC_2 + 10C_2 - 5C_2 i\right) \Rightarrow C_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} (2-i)e^{(1+i)t} - (2+i)e^{(1-i)t} - e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \\ 5e^{(1+i)t} - 5e^{(1-i)t} - (2+i)e^{(1+i)t} + (2-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} (1-i)e^{(1+i)t} - (1+i)e^{(1-i)t} \\ (3-i)e^{(1+i)t} + (-3-i)e^{(1-i)t} \end{pmatrix} = \frac{ie^t}{2}\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} (1-i)(\cos t + i\sin t) - (1+i)(\cos t - i\sin t) \\ (3-i)(\cos t + i\sin t) - (3+i)(\cos t - i\sin t) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{ie^t}{2}\begin{pmatrix} -2i\cos t + 2i\sin t \\ -2i\cos t + 6i\sin t \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$$

Ontem: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$

T3 $\dot{\overline{x}} = A\overline{x} \quad \dot{\overline{x}}(0) = \overline{X}_0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a \\ 0 & -\lambda & a \\ a & -a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + a^2) + a^2\lambda = -\lambda^3 - \lambda a^2 + a^2\lambda = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \left(E + At + A^2 \frac{t^2}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2t^2}{2} & -\frac{a^2t^2}{2} & at \\ \frac{a^2t^2}{2} & 1 - \frac{a^2t^2}{2} & at \\ at & -at & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{x}(t) = \overline{x_0}(t) \begin{pmatrix} 1 + \frac{a^2t^2}{2} & -\frac{a^2t^2}{2} & at \\ \frac{a^2t^2}{2} & 1 - \frac{a^2t^2}{2} & at \\ at & -at & 1 \end{pmatrix}$$