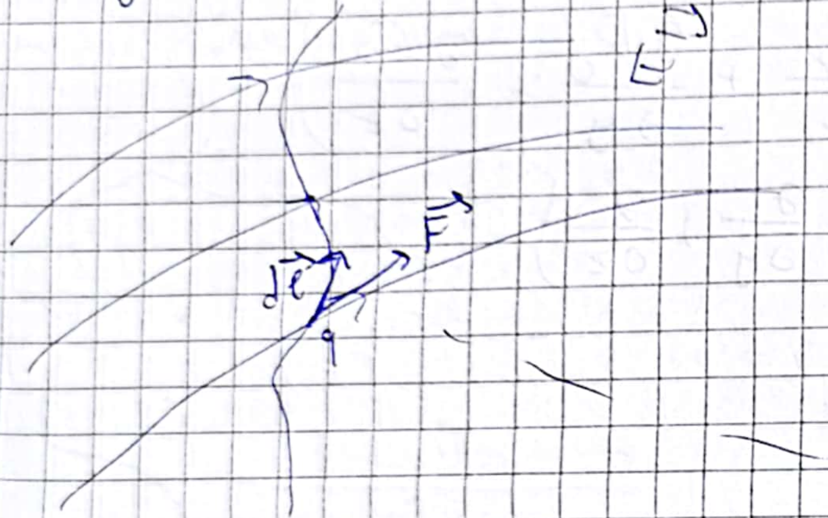
③ Потенциальный характер электростатического поля. Теорема о циркуляции электростатического поля. Потенциал и разность потенциалов. Связь напряжённости поля с градиентом потенциала. Граничные условия для вектора $\vec{E}$

<u>Консервативность электростатического поля</u>



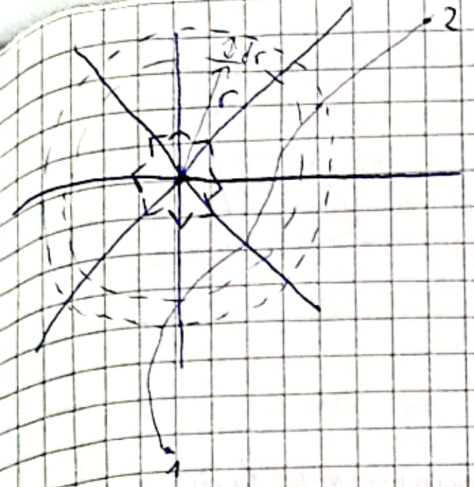
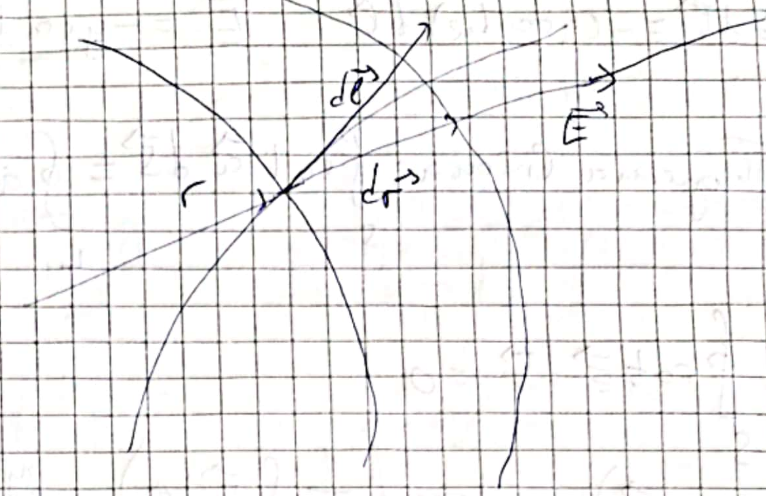
$$\delta A = \vec{F}\,d\vec{l} = q\vec{E}\,d\vec{l}$$

Замкнутый контур

$$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$$ – <u>теорема о циркуляции</u> (<u>интегральная форма</u>)

Доказательство:

1) поле единичного заряда

$$\vec{E}\,d\vec{l} = \frac{Q}{r^3}\,\vec{r}\,d\vec{l} = \frac{Q}{r^3}\,r\,dr = \frac{Q}{r^2}\,dr$$

$$\int_1^2 \vec{E}\,d\vec{l} = Q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$ – работа зависит только от начального и конечного положения

если $r_1 \equiv r_2$ $\quad \oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$

2. Произвольная система зарядов

Принцип суперпозиции $\quad \vec{E} = \sum \vec{E_i}$

Потенциал

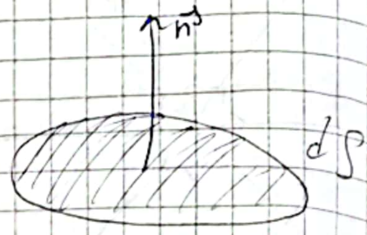
$\varphi_A = \int_A^0 \vec{E}\,d\vec{l}$ – потенциал A относительно O

$$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{l} = \int_A^0 \vec{E}\,d\vec{l} + \int_0^B \vec{E}\,d\vec{l} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\vec{E}\,d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2 = -(\varphi_2 - \varphi_1) = -d\varphi \qquad d\vec{l} = \begin{pmatrix} d_x \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot dz \qquad d\varphi = (\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}\, d\vec{l} = -(\mathrm{grad}\,\varphi)\, d\vec{l}$ $\qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$



Теорема Стокса: $\int\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{a}\, d\vec{S} = \oint\limits_L \vec{a}\, d\vec{l}$

$$\oint\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

$$\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{1}{\Delta S}\oint\limits_L \vec{E}\, d\vec{l}\right)$$

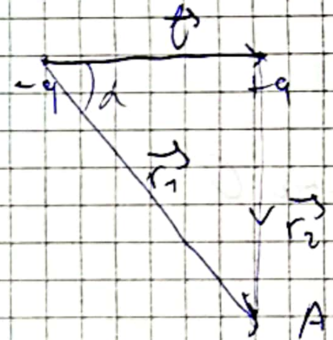
произвольность выбора контура

$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

<u>теорема о циркуляции (дифференциальная форма)</u>

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

<u>Потенциал точечного диполя</u>



$$\varphi_A = \varphi_{A+} + \varphi_{A-} = \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} = q\,\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$$\vec{r_1} = \vec{l} + \vec{r_2}$$

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - 2r_1 l\cos\alpha + \cancel{l^2}} \qquad (r_1, r_2) \gg l)$$

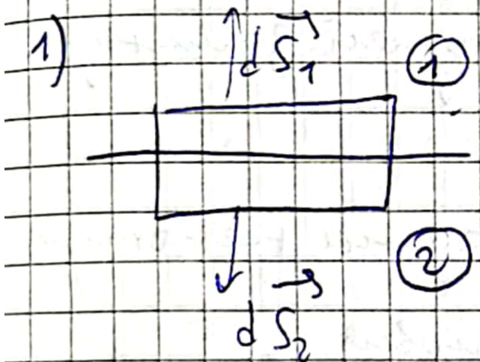
$$r_2 = r_1\sqrt{1 - \frac{2l}{r_1}\cos\alpha} \approx r_1 - l\cos\alpha$$

$$\varphi_A = q\,\frac{l\cos\alpha}{r^2} = \frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^3}$$

<u>Граничные условия для вектора $\vec{E}$</u>

При переходе через границу раздела 2 сред электрическое поле меняется по определённым законам

1)



① – бесконечно малый параллелепипед

$$dS_1 = dS_2 = dS$$

$$q = \sigma dS$$

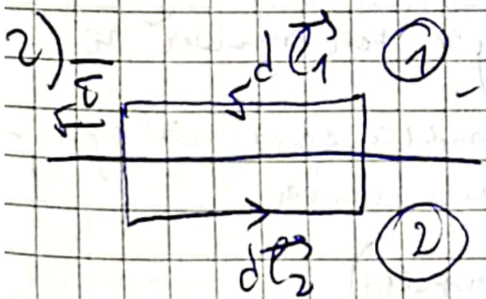
$$d\vec{S}_2 = -d\vec{S}_1$$

$$d\vec{S}_1 = \vec{n}\, dS$$

Т Гаусса $\oint \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q \Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{S}_1 + \vec{E}_2 d\vec{S}_2 = 4\pi\sigma dS$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{n} = 4\pi\sigma \Rightarrow E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$$

2)



① – бесконечно малый прямоуг. контур

Т о циркуляции

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 d\vec{l}_2 = 0$$

$d\vec{l}_1 = -d\vec{l}_2$ $\quad$ $d\vec{l}_1 = \vec{\tau}\, dl$

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$