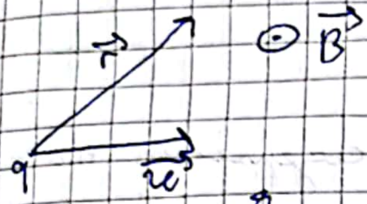
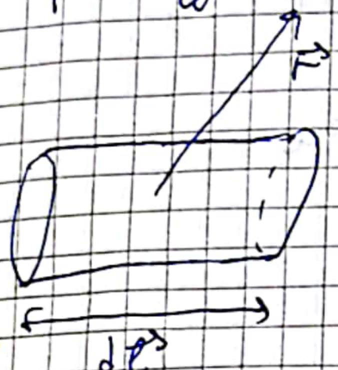
10) Магнитное поле постоянного тока в вакууме. Вектор магнитной индукции. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био-Савара. Теорема о циркуляции магнитного поля в вакууме. Теорема Гаусса для магнитного поля. Магнитное поле прямого провода, соленоида, тороидальной катушки

1) магнитное поле действует на движущиеся заряды
2) движущиеся заряды создают магнитное поле

Закон Био-Савара



$$\vec B = \frac{q[\vec v \times \vec r]}{cr^3}$$

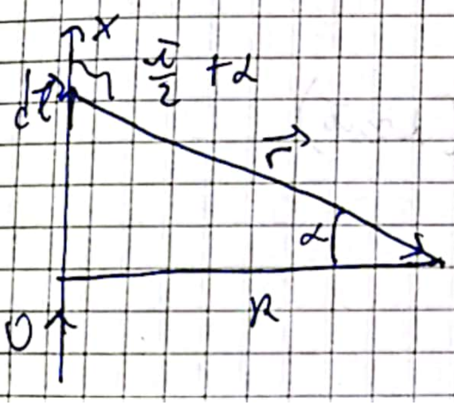


$$\vec r \gg d\vec l$$

$$d\vec B = \frac{q[\vec v \times \vec r]}{cr^3}\, dN = \frac{q[\vec v \times \vec r]}{cr^3} n S dl = \left| nq\vec v = \vec j \right| = \frac{[\vec j \times \vec r] S dl}{cr^3} = \left| \vec j S dl = I d\vec l \right| =$$

$$= \frac{I[d\vec l \times \vec r]}{cr^3} \qquad B = \frac{1}{c}\int \frac{[\vec j \times \vec r] dV}{r^3} \qquad \vec B = \frac{1}{c}\oint \frac{I[d\vec l \times \vec r]}{cr^3}$$

Бесконечный провод с током



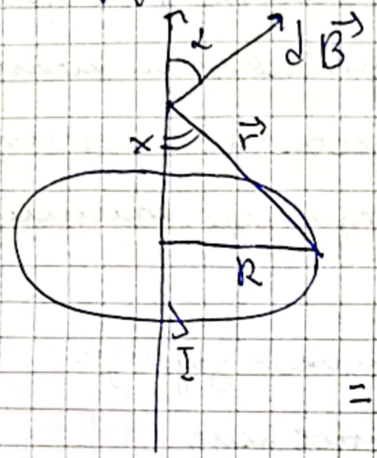
$$d\vec B = \frac{I}{cr^3}[d\vec l \times \vec r] \Rightarrow dB = \frac{1}{cr^3} dx\, r\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow dx = \frac{R\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$dB = \frac{I}{cr^2}\frac{R\, d\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha = \left| r = \frac{R}{\cos\alpha} \right| = \frac{I\cos\alpha}{cR} d\alpha$$

$$B = \frac{I}{cR}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{2I}{cR}$$

<u>Поле кругового тока на его оси</u>



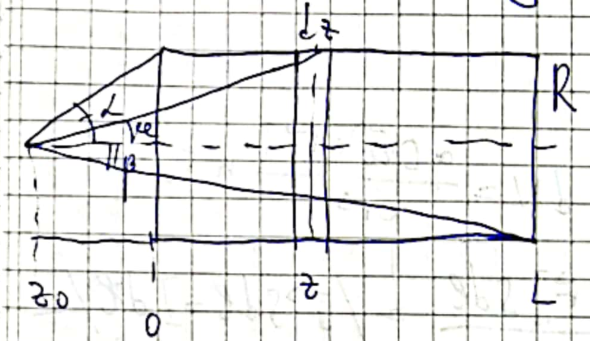
$dB_x = dB\cos\alpha$ (горизонтальные компоненты взаимоуничтожаются)

$$dB_x = \frac{I\,dl}{cr^2}\cos\alpha$$

$$B_x = \frac{2\pi R I}{cr^2}\cos\alpha \qquad B_x = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3} = \frac{2\pi R^2}{c(R^2+z^2)^{3/2}}$$

если $r \gg R$, то $B_x \simeq \frac{2\pi R^2 I}{cx^3} \simeq \frac{2IS}{cx^3}$

<u>Поле на оси соленоида</u>



слой длины dz содержит $n\,dz$ витков

$$dB = \frac{2\pi I n\, dz}{cR}\sin^3\varphi$$

$$z - z_0 = R\,\mathrm{ctg}\,\varphi$$

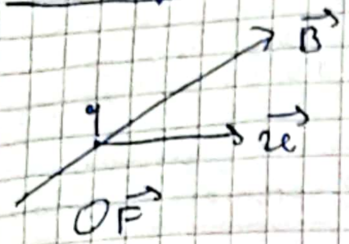
$$dz = -\frac{R\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$B = \int_{\alpha}^{\beta} -\frac{2\pi I n}{c}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi I n}{c}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

на торце $(\alpha \approx \frac{\pi}{2})$ $\quad B = \frac{2\pi n I}{c}$

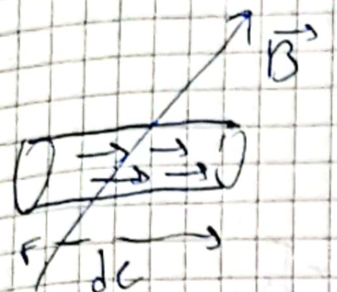
в глубине вдали от края $\quad B = \frac{4\pi I n}{c}$ $\quad (\alpha \approx \pi)$

Сила Лоренца



$$\vec F_Л = \frac{1}{c} q [\vec v \times \vec B]$$

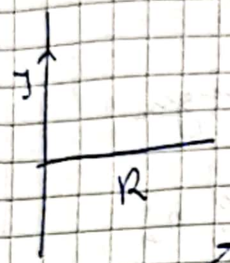
$$d\vec F = \frac{q}{c}[\vec v \times \vec B]\, dN = \frac{q}{c}[\vec v \times \vec B]\, nS\, dl$$



$$d\vec F_A = \frac{I}{c}[d\vec l \times \vec B]$$

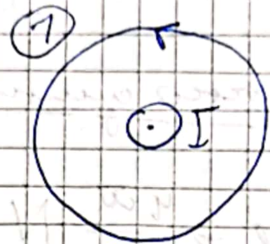
$$\vec F_A = \frac{1}{c}\int [d\vec l \times B] \cdot I$$

Теорема о циркуляции в интегральной форме



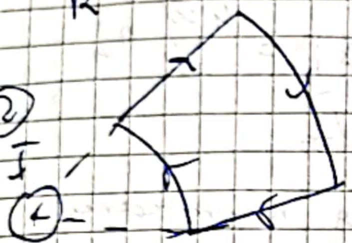
$$B = \frac{2I}{cR}$$

1



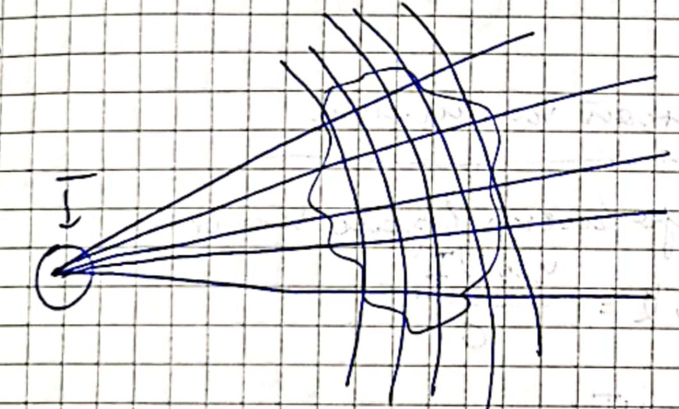
$$\oint(\vec B, d\vec l) = 2\pi R \frac{2I}{cR} = \frac{4\pi}{c} I$$

2



$$\oint(\vec B, d\vec l) = 0$$

3

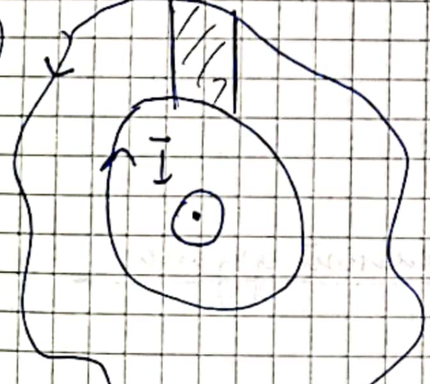


Разбиваем на сетки

Циркуляция на внутренних сторонах компенсируется, т.к. направления обхода противоположны

$$\oint(\vec B, d\vec l) = \sum_i \oint(\vec B, d\vec l_i) = 0$$

4



$$\int_{окр}(\vec B, \vec l) = -\frac{4\pi}{c} I$$

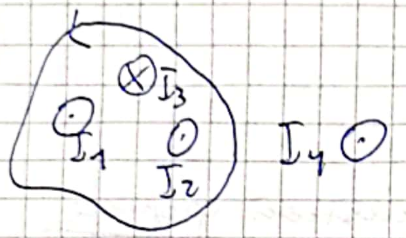
когда сделали разрез (узкий) ток не протыкает контур и циркуляция = 0

(вклад по бокам нулевой, т.к. поле напр. по радиусу ⇒)

=> ~~интеграл~~ циркуляция по большому контуру + циркуляция по окружности = 0 => $\oint(\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c} I$

теорема о циркуляции в интегральной форме

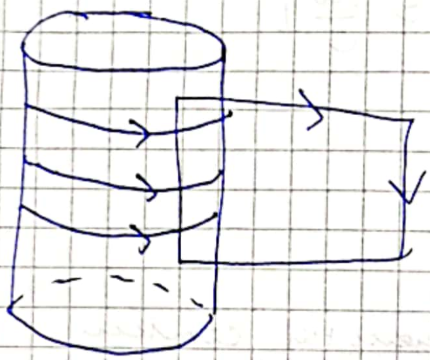
применение



$$\oint(\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c}(I_1 + I_2 - I_3)$$

$$\oint(\vec{B}, d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c}\int(\vec{j}, d\vec{S})$$

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида

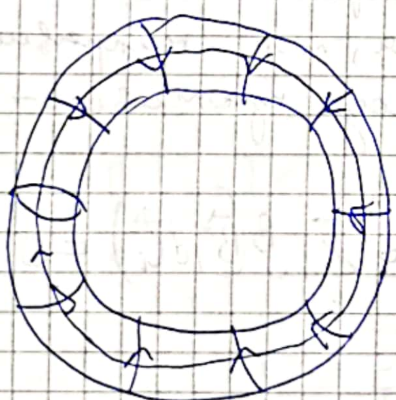


$$Bl = \frac{4\pi}{c} NI \Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} nI$$

$$B = \frac{4\pi}{c} i \qquad i = \frac{NI}{l}$$

i — линейная плотность тока

Магнитное поле тороидальной катушки

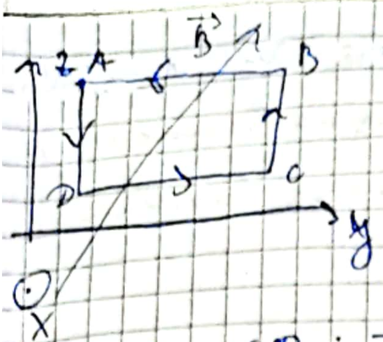


Поле направлено вдоль контура

$$B \cdot 2\pi R = \frac{4\pi NI}{c}$$

$$B = \frac{2NI}{cR}$$

Теорема о циркуляции в дифференциальной форме



$\oint(\vec B, d\vec l)$

от AD и CB: $-B_z(x,y,z)\,dz + B_z(x,y+dy,z)\,dz =$

$$= dz\left(B_z(x,y+dy,z) - B_z(x,y,z)\right) = \frac{\partial B_z}{\partial y}\,\underbrace{dy\,dz}_{dS}$$

от AB и CD $\quad -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dS$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)dS$$

$$\Rightarrow \oint(\vec B, d\vec l) = \frac{4\pi}{c}\int(\vec j, d\vec S) = \frac{4\pi}{c}\int j_x\,dS$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x \\
&\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y \\
&\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec B = \frac{4\pi}{c} j$$

Теорема Гаусса для магнитного поля

$\vec B = q\frac{[\vec v \times \vec r]}{cr^3} \Rightarrow \oint(\vec B, d\vec S) = 0$ — интегральная форма

$\int_V \operatorname{div}\vec B\,dV = \oint_{S(V)}(\vec B, d\vec S) \Rightarrow \operatorname{div}\vec B = 0$ — дифференциальная форма

по Т Гаусса – Остроградского

из этого следует, что $\exists!$ изолированных магнитных зарядов