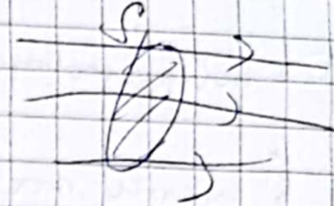
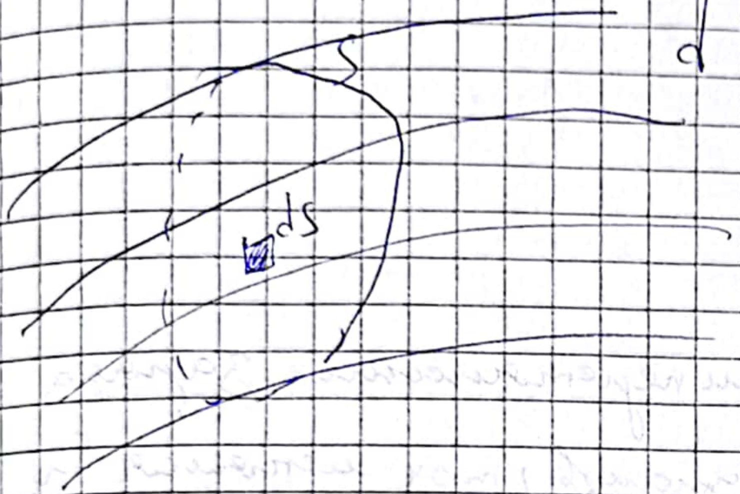
(8) Постоянный ток. Сила тока, объёмная и поверхностная плотности тока. Закон Ома в интегральной и локальной формах. Уравнение непрерывности для плотности заряда. Закон Джоуля–Ленца в интегральной и локальной формах. Токи в неограниченных средах.

объёмная плотность тока

$$|\vec{j}| = \frac{dq}{dt \cdot dS}$$ по направлению движения





$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt}$$

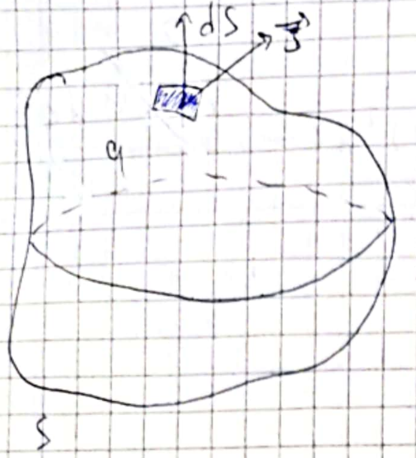
$\boxed{\Pi J}$ $i = \frac{I}{S}$ - поверхностная плотность тока

Локальный закон Ома $\vec{j} = \lambda \vec{E}^{полн}$ (проводимость) $\left(\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_{стор}}{e}\right)$

$$\int (\vec{E} + \vec{E}_{стор})\, dl = U = I\int \frac{dl}{\lambda S} \qquad R = \int \frac{dl}{\lambda S}$$

$$R = \frac{\Delta l}{\lambda \Delta S} \qquad \lambda^{-1} = \rho$$ удельное сопрот.

Закон сохранения заряда



$$\frac{dq}{dt} = -\oint \vec{j}\, d\vec{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\int_V \operatorname{div}\vec{j}\cdot dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$ – уравнение непрерывности

Свойства постоянного тока

1) стационарность

в выделенной области $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$

$\vec{j} = \lambda \vec{E}$ => поле постоянно

2) однородный проводник => $q_{объёмн} = 0$

$$0 = \frac{\partial q}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j} = -\operatorname{div}(\lambda\cdot\vec{E}) = -\lambda \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho\cdot\lambda$$

$\rho = 0$ $\quad$ $q_{объёмн} = 0$

на поверхности это неверно

3) в цепи постоянного тока есть сторонние (неэлектростатические) силы

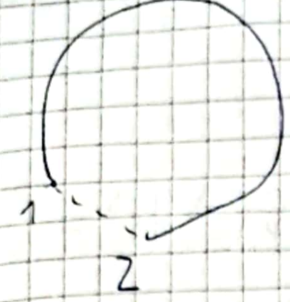
$$\oint_L \vec{E}^{пот}\cdot d\vec{l} = 0$$

Если бы это было не так, то при перетекании заряда выравнивалась бы разность потенциалов, ток менялся бы

$$\underbrace{\oint_L \vec{E}^{эл.стат}\, d\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\oint_L \vec{E}^{стор}\cdot d\vec{l}}_{\neq 0}$$

→ во всём контуре

→ локально (в батарейке – хим. реакции)



$$\Delta\varphi_{12} = \int_1^2 \vec{E}^{\text{электрост.}}\, d\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}}^{\text{стор}}\, d\vec{l} \quad \text{— ЭДС}$$

Закон Джоуля-Ленца

∃ заряд движется со скоростью $\vec{v}$, на него действует const сила $\vec{F} = e\vec{E}$

Скорость заряда $\vec{v} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{дрейфовая}}}{\vec{u}} + \vec{v}_{сл}$ — обусловленная столкновениями с частицами среды

$$dA = \vec{F}\vec{v}\,dt = \vec{F}(\vec{u} + \vec{v}_{сл})\,dt$$

За 1цу времени над зарядами в 1-це объёма совершается работа $w = n\vec{F}\vec{u} = \vec{j}\vec{E}$ — закон Джоуля-Ленца в диф. форме

$(\vec{j} = en\vec{u} = \rho\vec{u})$

$$\vec{j} = \lambda\vec{E}$$

$$w = \frac{\vec{j}^2}{\lambda} = \lambda\vec{E}^2$$

работа над зарядами в объёме V =

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{\vec{j}^2}{\lambda}\,dV$$

применим к току в проводнике

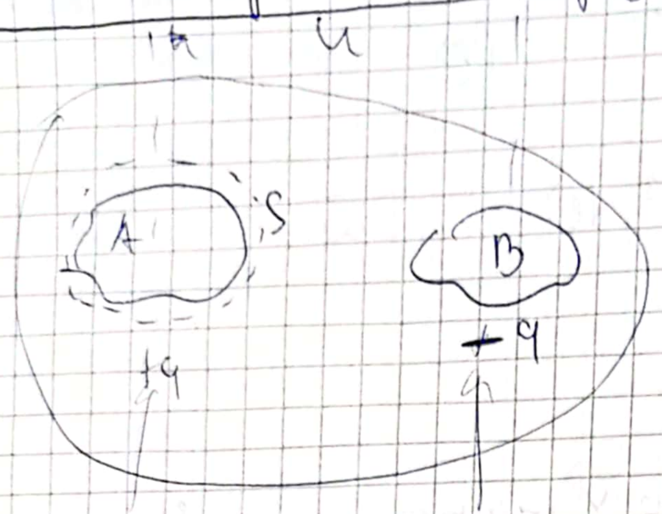
$$j = \frac{J}{S} \qquad dV = S\,dl$$

$$W = \int_V w\,dV = \int_V \frac{1}{\lambda}\left(\frac{J}{S}\right)^2 S\,dl = J^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = J^2 R = W$$

— закон Джоуля-Ленца в интег. форме

V=const => энергия, приобретаемая зарядом = энергия, теряемая зарядом => эта работа рассеивается в системе и идёт на увеличение внутр. энергии

Токи в неограниченных средах



ε, λ

$$J = \oint_S j_n\, dS = \oint_S \lambda \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\lambda}{\varepsilon} \vec{D}\cdot d\vec{S}$$

т.к. заряд может перетекать только с A на B

$$J = \frac{\lambda}{\varepsilon}\oint_S D_n\, dS = \frac{\lambda}{\varepsilon}\, 4\pi \underbrace{q}_{\text{заряд на } A} = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} C U = \left(\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} C\right) U$$

$R = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}$ – сопротивление между A и B

C с определённого момента перестаёт зависеть от расстояния между проводниками (на больших расстояниях она зависит только от их геометрии) => R тоже не будет меняться

пример: ЛЭП