1.2

$x = a\cos\omega t$
$y = a\sin\omega t$
$z = bt$

$$\bar r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \bar V = \begin{pmatrix} -a\omega\sin\omega t \\ a\omega\cos\omega t \\ b \end{pmatrix}$$

$$\bar w = \frac{\partial^2 \bar r}{dt^2} = \begin{pmatrix} -a\omega^2\cos\omega t \\ -a\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\bar V| = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2} \Rightarrow |W_\tau| = \left(\frac{dV}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \bar W_n = \bar W \Rightarrow W_n = \sqrt{a^2\omega^4\cos^2\omega t + a^2\omega^4\sin^2\omega t} = a\omega^2$$

$$\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$$

1.18

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

$\rho^2\dot\varphi = const \ (1)$ $\quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\bar e_i = \frac{\partial \bar r}{\partial x^i}$ в нашем случае $x^i = \rho$ или φ

$$\bar e_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \bar V = \frac{dr}{dt} = \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$V_\varphi = (\bar V, \bar e_\varphi) = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\varphi - \rho\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot\rho\sin\varphi + \rho\dot\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$= -\dot{\rho}\,\rho \sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi + \rho\dot{\rho}\sin\varphi\cos\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi =$

$= \rho^2\dot{\varphi} = const$

$W_\varphi = (\dot{\overline{V}}, \overline{e_\varphi}) = \left(\dot{(\overline{V}, \overline{e_\varphi})} - (\overline{V}, \dot{\overline{e_\varphi}}) \right) = (\dot{V_\varphi} - (\overline{V}, \dot{\overline{e_\varphi}}) =$

$= -(\overline{V}, \dot{e_\varphi}) = \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\rho}\cos\varphi + \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix} =$

$= \dot{\rho}^2\sin\varphi\cos\varphi + \rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\cos^2\varphi - \rho\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin^2\varphi - \rho^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi$

$- \dot{\rho}^2\sin\varphi\cos\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\rho\sin^2\varphi - \dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi$

$= 0 \Rightarrow W_\varphi = 0 \Rightarrow \overline{W} \parallel \overline{W_\rho} \parallel \overline{\rho}$

1.37 e) $x = a\,sh(u)\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$

$y = a\,sh(u)\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$

$z = a\,ch(u)\cos(\vartheta)$

$V_j = g_{ij}\dot{q}^i$

Вычислим метрический тензор g_{ij}

$\overline{e_u} = \begin{pmatrix} a\,ch(u)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ a\,ch(u)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\,sh(u)\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \overline{e_\vartheta} = \begin{pmatrix} a\,sh(u)\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ a\,sh(u)\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -a\,ch(u)\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$

$$\overline{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -a\,sh(u)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\,sh(u)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{e_u}, \overline{e_\vartheta}) = a^2 ch(u)\,sh(u)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos^2\varphi +$$
$$+ a^2 ch(u)\,sh(u)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin^2\varphi - a^2 ch(u)\,sh(u)\cdot$$
$$\cdot\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) = 0$$

$$(\overline{e_u}, \overline{e_\varphi}) = -a^2 ch(u)\,sh(u)\sin^2(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) +$$
$$+ a^2 ch(u)\,sh(u)\sin^2(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 0$$

$$(\overline{e_\varphi}, \overline{e_\vartheta}) = -a^2 sh^2(u)\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) +$$
$$+ a^2 sh^2(u)\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 0$$

Получаем, что в нашем случае g_{ij} диагональна

$$g_{\varphi\varphi} = a^2 sh^2(u)\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + a^2 sh^2(u)\cdot\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) =$$
$$= a^2 sh^2(u)\sin^2(\vartheta)$$

$$g_{uu} = a^2 ch^2(u)\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + a^2 ch^2(u)\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta) = a^2 ch^2(u)\sin^2(\vartheta) + a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta) =$$

$$= a^2 sh^2(u)\sin^2(\vartheta) + a^2\sin^2(\vartheta) + a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta) =$$

$$= a^2 sh^2(u) + a^2\sin^2(\vartheta)$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta)\cos^2\varphi + a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + a^2 ch^2(u)\sin^2(\vartheta) = a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta) + a^2 ch^2(u)\sin^2(\vartheta) =$$

$$= a^2 sh^2(u)\cos^2(\vartheta) + a^2\sin^2(\vartheta) + a^2 sh^2(u)\sin^2(\vartheta) =$$

$$= a^2 sh^2(u) + a^2\sin^2(\vartheta)$$

Получаем $v = a\sqrt{(\dot{u}^2+\dot{\vartheta}^2)(sh^2u+\sin^2\vartheta) + sh^2(u)\sin^2(\vartheta)\cdot\dot{\varphi}^2}$

$$\overline{v} = \sum \dot{q}^i\,\overline{e_i} = \dot{u}\begin{pmatrix} a\,ch(u)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ a\,ch(u)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\,sh(u)\cos(\vartheta) \end{pmatrix} + \dot{\vartheta}\begin{pmatrix} a\,sh(u)\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ a\,sh(u)\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -a\,ch(u)\cdot\sin(\vartheta) \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -a\,sh(u)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ a\,sh(u)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Используем №1.36:

$$W_j = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^j}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^j}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^j}\right)^2}} \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right)$$

$$W_u = \frac{1}{a\sqrt{sh^2u + \sin^2 \gamma}} \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{u}}\left(\frac{V^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{sh^2u + \sin^2\gamma}} \cdot \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{a^2 \cdot 2\dot{u}(sh^2u + \sin^2\gamma)}{2} - \frac{a^2}{2}\left(\dot{\gamma}^2 \cdot 2chu\,shu + \dot{u}^2 \cdot 2ch(u)sh(u) + \dot{\varphi}^2 \cdot 2ch(u)\,sh(u)\sin^2(\gamma)\right)\right) = \frac{a}{\sqrt{sh^2u + \sin^2\gamma}}\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{u}(sh^2u + \sin^2\gamma)\right) - \right.$$

$$\left. - (\dot{u}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\gamma)\, shu\, chu\right)$$

$$W_\gamma = \frac{1}{a\sqrt{sh^2u + \sin^2\gamma}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{a^2 \cdot 2\dot{\gamma}\,(sh^2u + \sin^2\gamma)}{2}\right) - \frac{a^2}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\dot{u}^2 \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma + \dot{\gamma}^2 \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma + \dot{\varphi}^2 sh^2u \cdot 2\sin\gamma\cos\gamma\right)\right) =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{sh^2u + \sin^2\gamma}}\left(\frac{d}{dt}\left(\dot{\gamma}\,(sh^2u + \sin^2\gamma)\right) - (\dot{u}^2 + \dot{\gamma}^2 + \dot{\varphi}^2 sh^2u)\sin\gamma\cos\gamma\right)$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow b = \frac{(\overline{W}_0 - \overline{W})(\omega^2 \overline{\omega} + [\overline{\omega} \times \overline{\varepsilon}])}{([\overline{\omega} \times \overline{\varepsilon}])^2}$$

1.46 Введём вектор $\overline{L} = [\overline{r} \times \overline{v}]$ - удельный момент импульса материальной точки относительно центра поля

$$\dot{\overline{L}} = [\dot{\overline{r}} \times \dot{\overline{r}}] + [\overline{r} \times \ddot{\overline{r}}] = [\overline{r} \times \ddot{\overline{r}}]$$

$$\ddot{\overline{r}} = \overline{W} = \frac{\gamma}{r^3}[\dot{\overline{r}} \times \overline{r}]$$

$$\dot{\overline{L}} = [\overline{r} \times \frac{\gamma}{r^3}[\dot{\overline{r}} \times \overline{r}]] = \frac{\gamma}{r^3}[\overline{r} \times [\dot{\overline{r}} \times \overline{r}]]$$

Введём сферическую систему координат и рассмотрим вектор $\overline{e}_r$: $|\overline{e}_r| = 1$

$$\dot{\overline{r}} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\overline{e}}_r$$

$$\frac{[\overline{r} \times [\dot{\overline{r}} \times \overline{r}]]}{r^3} = [\overline{e}_r \times [\dot{\overline{e}}_r \times \overline{e}_r]] =$$

$$= \dot{\overline{e}}_r(\overline{e}_r, \overline{e}_r) - \overline{e}_r(\overline{e}_r, \dot{\overline{e}}_r)$$

т.к. $|\overline{e}| = const \Rightarrow \overline{e}_r \perp \dot{\overline{e}}_r \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\overline{L}} = \gamma \dot{\overline{e_r}} \Rightarrow \overline{L} - \gamma \overline{e_r} = \overline{C}$

тут $\overline{C}$ - некоторый const вектор

$\overline{L} \perp \overline{e_r} \Rightarrow (\overline{C}, \overline{e_r}) = -\gamma = const \Rightarrow$ точка движется

по поверхности кругового конуса

Scanned with CamScanner

T5 $x_i = g_{ij} x^j \Rightarrow \dot{x}_i = \dot{g}_{ij} x^j + g_{ij} \dot{x}^j$

$$x_i \dot{x}^i - x^i \dot{x}_i = g_{ij} x^j \dot{x}^i - x^i \dot{g}_{ij} x^j - x^i g_{ij} \dot{x}^j = -x^i \dot{g}_{ij} x^j$$

т.к. $g_{ij} x^j \dot{x}^i = x_j \dot{x}^i = x_j (\dot{g}^{ij} x_j + g^{ij} \dot{x}_j) = \dot{g}^{ij} x_j^2 + g^{ij} x_j \dot{x}_j =$

$$= \dot{g}^{ii} x_i^2 + g^{ii} x_i \dot{x}_i = x_i (\dot{g}^{ii} x_i + g^{ii} \dot{x}_i) = x_i \dot{x}^i = x^i g_{ij} \dot{x}^j$$