21.18 $S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz\right)dt$ — на прямом пути

$$S_{o\kappa} - S = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{2}\left((\dot{x}+\delta\dot{x})^2 + (\dot{y}+\delta\dot{y})^2 + (\dot{z}+\delta\dot{z})^2\right) - mg(z+\delta z)\right)dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz\right)dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{2}(2\dot{x}\delta\dot{x} + 2\dot{y}\delta\dot{y} +\right.$$

$$\left.+ 2\dot{z}\delta\dot{z}) + \frac{m}{2}(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z}^2) - mg\delta z\right)dt =$$

$$= \underbrace{\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz\right)dt}_{\shortparallel} + \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z})^2 dt$$

$$\Rightarrow S_{o\kappa} > S$$

$\delta = 0$ из принципа Гамильтона — Остроградского

21.13 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$ $q(0) = q_0$ $\dot{q}(0) = 0$

$$\Downarrow \ \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$q = q_0 \cos\omega t \Rightarrow \dot{q}(t) = -\omega q_0 \sin\omega t$$

На прямом пути $W = \int_0^{\pi\tau_0/\omega} \frac{1}{2}(\omega^2 q_0^2 \sin^2\omega t - \omega^2 q_0^2 \cdot$

$\cdot \cos^2\omega t)dt =$

$$= \frac{-q_0^2\omega^2}{2}\int_0^{\sqrt{10}/\omega}\cos(2\omega t)\,dt = -\frac{\omega q_0^2}{4}\sin(2\sqrt{10})$$

$$q_{ок} = q + \delta q \qquad \delta q = \alpha t(t_1 - t) \qquad \delta\dot q = \alpha(t_1 - 2t)$$

$$q_{ок}^2 = (q_0\cos(\omega t) + \alpha t(t_1-t))^2 = q_0^2\cos^2(\omega t) +$$

$$+ 2q_0\cos(\omega t)\,\alpha t(t_1-t) + \alpha^2 t^2(t_1-t)^2$$

$$(\dot q_{ок})^2 = (\dot q + \delta\dot q)^2 = (-\omega q_0\sin\omega t + \alpha(t_1-2t))^2 =$$

$$= q_0^2\omega^2\sin^2\omega t - 2q_0\omega\alpha\sin(\omega t)\cdot(t_1-2t) + \alpha^2(t_1-2t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{ок} = L_{пр} + \alpha q_0\omega(-(t_1-2t)\sin(\omega t) - \omega t(t_1-t)\cos(\omega t)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^2((t_1-2t)^2 - \omega^2 t^2(t_1-t)^2) = L_{пр} + (\dot q\,\delta\dot q - \omega^2 q\,\delta q) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\delta\dot q^2 - \omega^2 q^2)$$

$$W_{ок} = W_{пр} + \underbrace{\int_0^{\sqrt{10}/\omega}(\dot q\,\delta\dot q - \omega^2 q\,\delta q)\,dt}_{\delta W_{пр} = 0} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{10}/\omega}(\delta\dot q^2 - \omega^2\delta q^2)\,dt =$$

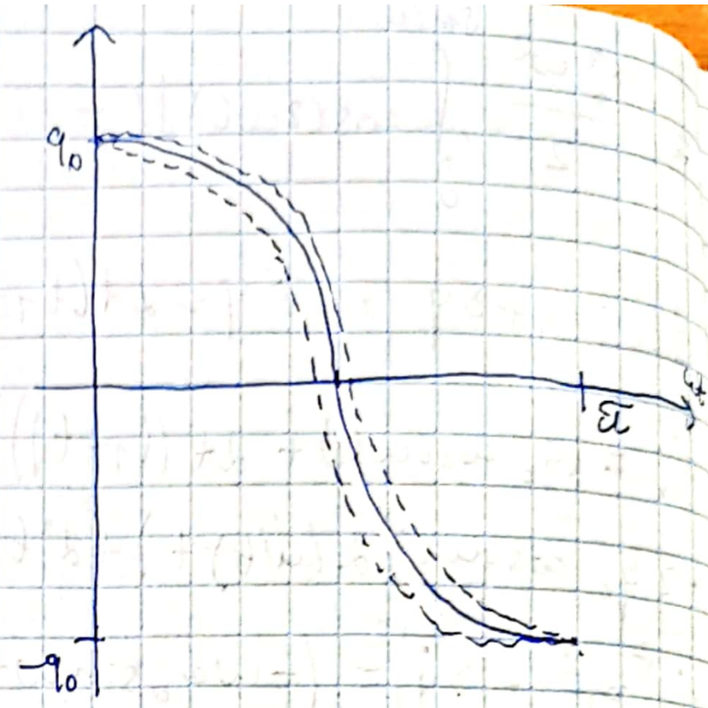
$$= W_{пр} + \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^{\sqrt{10}/\omega}(t_1-2t)^2\,dt - \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\int_0^{\sqrt{10}/\omega}t^2(t_1-t)^2\,dt = W_{пр} +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha^2\frac{10\sqrt{10}}{\omega^3} - \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\frac{10\sqrt{10}}{\omega^5} = W_{пр} \Rightarrow \text{при } \omega t_1 = \sqrt{10}$$

$$\forall\alpha \quad W_{ок} = W_{пр}$$

при $\omega t_1 < \sqrt{\varepsilon_0}$ $W_{ок} > W_{пр}$

$\omega t_1 > \sqrt{\varepsilon_0}$ $W_{ок} < W_{пр}$



21.37 21.13 $\Rightarrow$ нет, не верно

прямой путь определяется $\alpha = 0$, но $\forall \alpha$ $\delta W_{ок}(\alpha) = 0 = \delta W_{пр}(\alpha)$

T17 1) Элемент длины цепной линии $dl = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$d\Pi = \rho g y\,dl = \rho g y \sqrt{1+y'^2}\,dx$ – потенциальная энергия элемента длины

$\Pi = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ Для цепной линии Π минимальна

Будем рассматривать $L(y, y', x) = y\sqrt{1+y'^2}$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2} \qquad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) =$$

$$= \frac{(y'^2+yy'')\sqrt{1+y'^2} - yy'\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} = \frac{y'^2+yy''}{\sqrt{1+y'^2}} -$$

$$- \frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{y'^2+yy''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{1+y'^2} = 0$$

$$y'^2 + yy'' - 1 - y'^2 - \frac{yy'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y''y\left(1 - \frac{y'^2}{1+y'^2}\right) = 1 - \frac{y''y}{1+y'^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y''y = 1+y'^2$$

Замена $p(y) = y' \Rightarrow y'' = pp'_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow pp'_y y = 1+p^2 \Rightarrow \int \frac{p\,dp}{1+p^2} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \ln y + \tilde{C} \Rightarrow p^2+1 = Ce^{\ln y^2} = Cy^2$$

$$y' = p = \sqrt{Cy^2-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{Cy^2-1}} = \int dx = x + B$$

Замена $y = \frac{ch\,s}{\sqrt{C}}$ $\quad dy = \frac{sh\,s}{\sqrt{C}}\,ds$

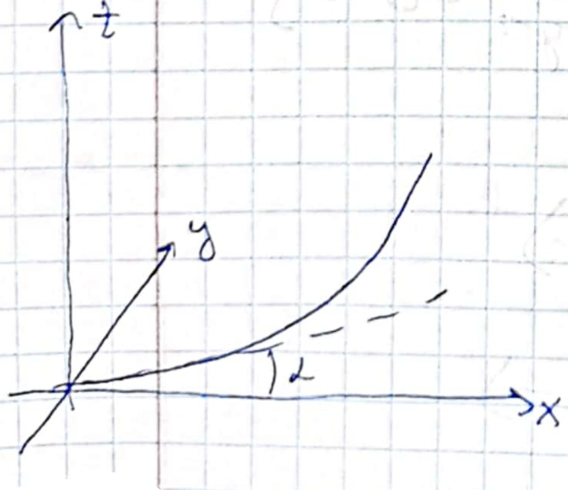
$$\int \frac{dy}{\sqrt{cy^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int \frac{sh\,s}{sh\,s}\,ds = \frac{1}{\sqrt{c}}\,s = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{arcch}\sqrt{c}\,y$$

$$\frac{1}{c}\,\mathrm{arcch}(cy) = x + B$$

$$y = c\,ch\left(\frac{x+B}{c}\right)$$

2) $n = n_0 + n_z z$

Направим ось Ox так, чтобы она лежала в одной плоскости с лучём и Oz



Из принципа наименьшего времени

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dl}{V(z)} = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} n(z)\sqrt{1+z'^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} (n_0 + n_z z)\sqrt{1+z'^2}\,dx =$$

$$= \frac{n_z}{c}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{n_0}{n_z}+z\right)\sqrt{1+z'^2}\,dx = \Big/\ y = \frac{n_0}{n_z}+z\ \Big/ =$$

$$= \frac{n_z}{c}\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Аналогично пункту 1 $\quad y = C\,ch\left(\frac{x+B}{C}\right)$

$$z = c\,ch\left(\frac{x+B}{c}\right) - \frac{n_0}{n_z}$$