15.48 $z = x^2 - xy + y^2$

$\Pi = mgz = mg(x^2 - xy + y^2)$

$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 2x - y = 0 \qquad x = \frac{y}{2}$

$\Rightarrow x = 0,\ y = 0$

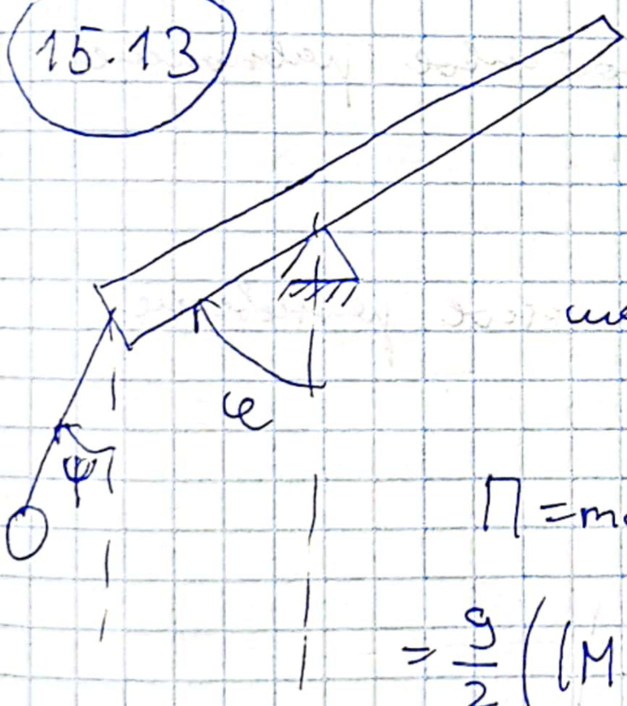
$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = -x + 2y = 0 \qquad -\frac{y}{2} + 2y = 0$

$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = -1$

$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – положительно определённая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ устойчивое равновесие

15.13



$OC = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Потенциальная энергия

стержня $\Pi_M = \frac{M(l_2 - l_1)}{2} g \cos\alpha$

шарика $\Pi_m = -mg(l_1 \cos\alpha + l \cos\varphi)$

$\Pi = mg\left(\frac{M(l_2 - l_1)}{2m} \cos\alpha - l_1 \cos\alpha - l \cos\varphi\right) =$

$= \frac{g}{2}\left((M(l_2 - l_1) - 2 l_1 m) \cos\alpha - ml \cos\varphi\right)$

Scanned with CamScanner

положение равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{g}{2}\left(M(l_2-l_1)-2l_1 m\right)\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{mgl}{2}\sin\psi \Rightarrow \psi = 0 \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2}\right|_{\psi=0} = \frac{mgl}{2}$$

первая точка: $\varphi=0, \psi=0$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{l_2-l_1}{2}Mg + l_1 mg & 0 \\ 0 & lmg \end{pmatrix}$$

положительно опр. при $-\frac{l_2-l_1}{2}M + l_1 m > 0$

при $\frac{l_2-l_1}{2}M < l_1 m$ – устойчивое равновесие

$\frac{l_2-l_1}{2}M > l_1 m$ неустойчивое равновесие

$\frac{l_2-l_1}{2} = l_1 m$ безразличное равновесие

вторая точка $\varphi=\pi, \psi=0$

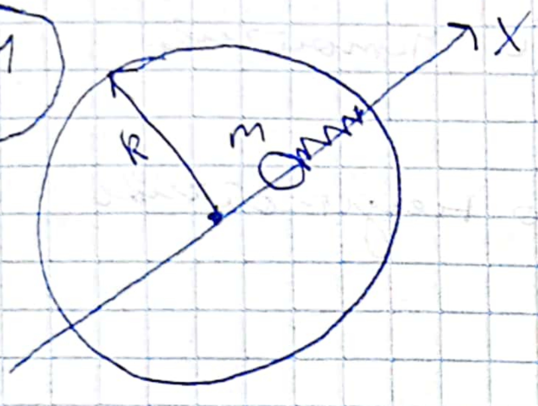
$$H = \begin{pmatrix} M\frac{l_2-l_1}{2}g - l_1 mg & 0 \\ 0 & lmg \end{pmatrix}$$

при $\dfrac{M(l_2-l_1)}{2} > l_1 m$ устойчивое

при $\dfrac{M(l_2-l_1)}{2} < l_1 m$ неустойчивое

при $\dfrac{M(l_2-l_1)}{2} = l_1 m$ безразличное

15.21



$$\Pi = mgx\sin\varphi + \frac{c}{2}\left(x-\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = mg\sin\varphi + c\left(x-\dfrac{R}{2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgx\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

а) $x=0 \Rightarrow mg\sin\varphi = \dfrac{cR}{2} \Rightarrow \varphi = \arcsin\dfrac{cR}{2mg}$

если $\left|\dfrac{cR}{2mg}\right| \leq 1$ $\quad \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial x^2} > kx \quad \dfrac{\partial^2\Pi}{\partial \varphi^2} = -mgx\sin\varphi$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial x\partial\varphi} = mg\cos\varphi \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & mg\cos\varphi \\ mg\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 0 \quad \Delta_2 < 0$

$\Rightarrow$ неустойчивое равновесие

б) $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{R}{2} \pm \frac{mg}{k}$

1. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{R}{2} - \frac{mg}{c}$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = kx = \frac{kR}{2} - mg \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = -mg\left(\frac{R}{2} - \frac{mg}{k}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} = 0$$

$\frac{R}{2} - \frac{mg}{k} < 0$ устойчиво

$\frac{R}{2} - \frac{mg}{c} > 0$ неустойчиво

2. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{R}{2} + \frac{mg}{c} > 0$ – положение устойчиво

Scanned with CamScanner