④ Уравнения Пуассона и Лапласа. Проводники в электрическом поле. Граничные условия на поверхности проводника. Единственность решения электростатической задачи. Метод изображений. Изображение точечного заряда в проводящих плоскости и сфере.

$$\varphi_A = \int_A^0 \vec{E}\, d\vec{l} \qquad \vec{E} = -(\operatorname{grad} \varphi) \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

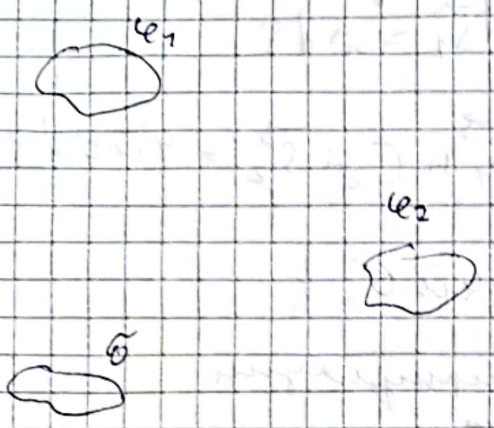
оператор Лапласа

$\Delta\varphi = -4\pi\rho$ – уравнение Пуассона

Если $\rho = 0$ $\Delta\varphi = 0$ – уравнение Лапласа

Основная задача электростатики

Найти поле в каждой точке внутри некоторой замкнутой поверхности (конечной или бесконечной)



При этом заданы некоторые граничные условия

1) заданы потенциалы в разных точках поверхности (условие Дирихле)

или

2) заданы заряды на этой поверхности т.е. нормальная производная потенциала (условие Неймана)

Решение ∃!

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho \\ \varphi\big|_{\text{на границе}} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{на границе}} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases}$$

Доказательство:

∃ задача имеет 2 решения $\varphi_1(\vec{r})$ и $\varphi_2(\vec{r})$ тождественно не равных друг другу

$$\begin{cases} \Delta\varphi_1 = -4\pi\rho \\ \varphi_1\big|_{\text{на границе}} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta\varphi_2 = -4\pi\rho \\ \varphi_2\big|_{\text{на границе}} = \varphi_0(\vec{r}) \end{cases}$$

Введём функцию $\psi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) - \varphi_2(\vec{r})$

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \\ \psi\big|_{\text{на границе}} = 0 \end{cases}$$

Покажем, что решение $= 0$

$\exists$ где-то в области $\psi \neq 0$

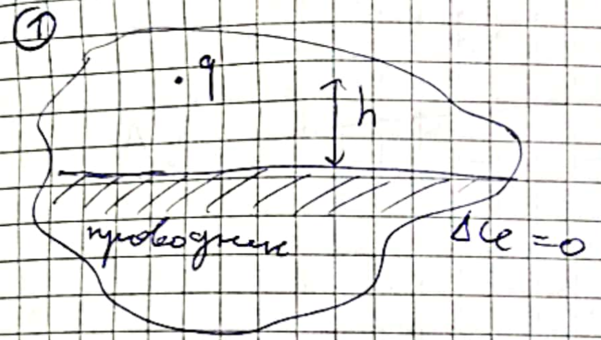
На границе $\psi = 0 \Rightarrow$ внутри области достигается экстремум. $\exists$ для определённости это максимум

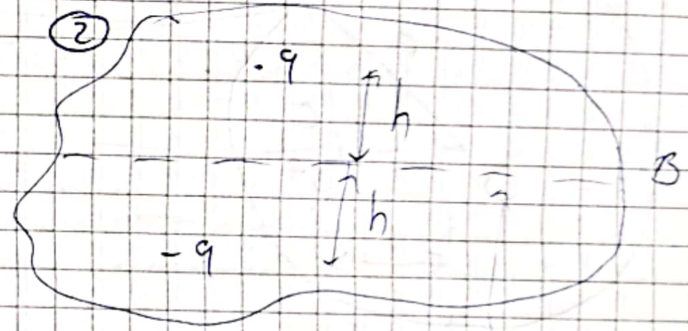
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} < 0$$

$$\Rightarrow \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} < 0 \text{ противоречие}$$

$\Rightarrow \psi$ тождественно $= 0 \Rightarrow \varphi_1(\vec{r})$ тождественно $= \varphi_2(\vec{r})$

Метод зеркальных изображений

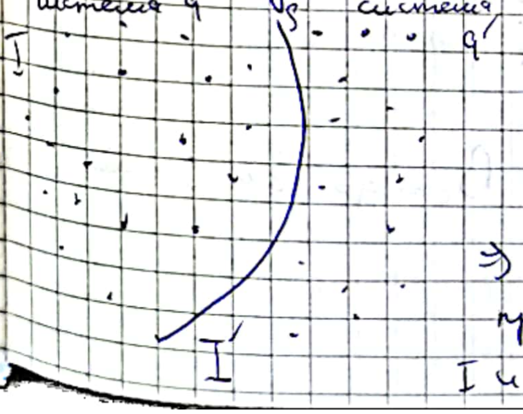




С точки зрения граничных условий, на AB потенциал $= 0$ для верхней части пространства (1) $\Leftrightarrow$ (2)

Теорема о единственности $\Rightarrow$ поле в этих случаях одинаково

Общий случай



Задавая величины и расположения зарядов q и потенциала поверхности S поле в I определяется однозначно аналогично для I' $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если S сделать проводящей, поле во всем пространстве не изменится, поля в полупрос. I и I' будут независимы

Получаем решение 2 задач:

1) в I по одну сторону от поверхности проводящего тела S находятся заряды q. Найти поле в I

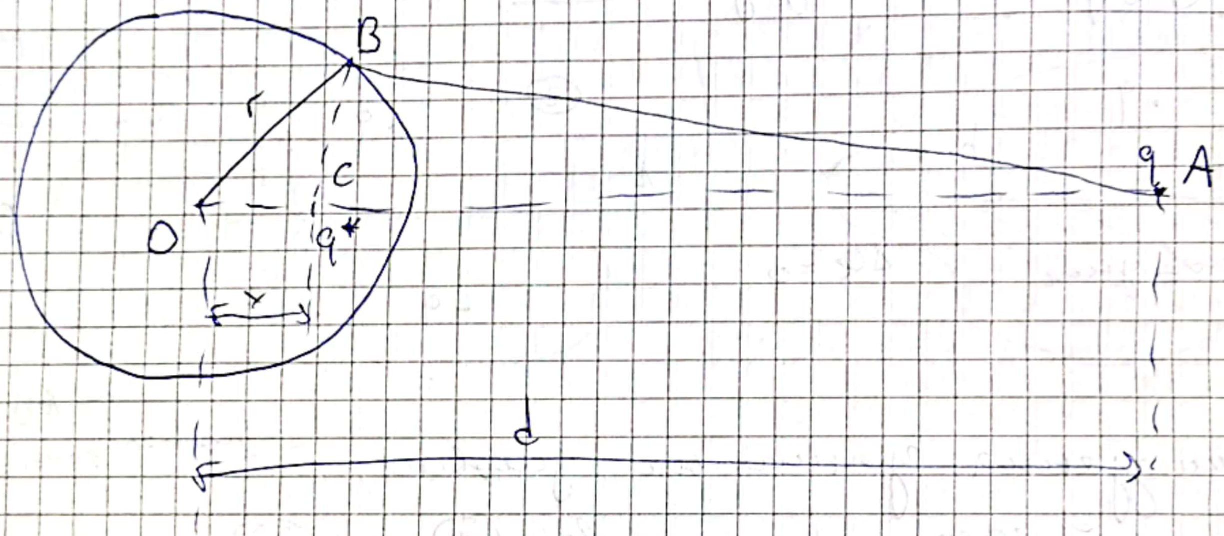
Это поле векторно складывается из полей q и индуцированных на S

T единственности => поле инд. зарядов в I экв. полю, создаваемому q'

2) точечный заряд над бесконечной поверхностью

Изображение точечного заряда в сфере

а) сфера заземлена



Расположим на расстоянии x от центра сферы заряд q^* такой, чтобы поверхность сферы была поверхностью нулевого потенциала

$$\varphi_B = 0 = \frac{q^*}{BA} + \frac{q}{BC} \Rightarrow q^* = -q\frac{BC}{BA}$$

Чтобы q^* не зависел от положения B, подберём C так, чтобы $\Delta OBA \sim \Delta OBC$

$$\frac{BC}{BA} = \frac{r}{d} \Rightarrow q^* = -q\frac{r}{d}$$

$\frac{d}{r} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{r^2}{d}$

б) сфера имеет ненулевой потенциал

в отличие от пункта а), сфера нейтральна

Убедимся, что дополнительное расположение $-q^*$ в центре шара обеспечит потенциал $\frac{q}{d}$

q^* и q обеспечивают 0-й потенциал

принцип суперпозиции $\Rightarrow$ потенциал сферы

$\varphi = -\frac{q^*}{r} = q\frac{r}{d}\cdot\frac{1}{r} = \frac{q}{d}$

<u>Проводники в электростатическом поле</u>

(вещество с большим количеством свободных носителей заряда)

Свойства проводников в электростатике:

1) внутри проводника поля нет

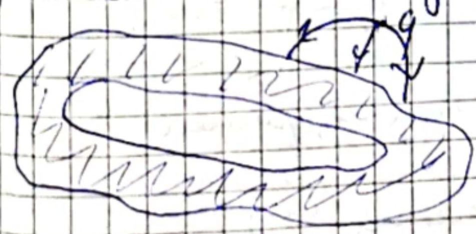
(Док-во:] оно есть $\Rightarrow$ возникают токи, которые будут течь до тех пор, пока заряды не расположатся так, чтобы поле отсутствовало всюду в объёме вещества)

2) поле у поверхности проводника $E_\tau = 0$, $E_n = 4\pi\sigma$

3) внутри проводника нет объёмного заряда

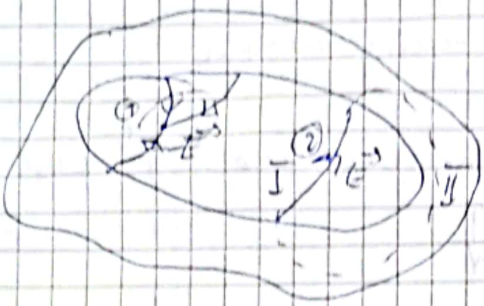
(иначе, по Т Гаусса получим поток через некоторую поверхность внутри проводника, т.е. наличие поля)

4) поле в полости проводника $= 0$



Док-во: ∃ это не так

возможны 2 случая и их суперпозиция

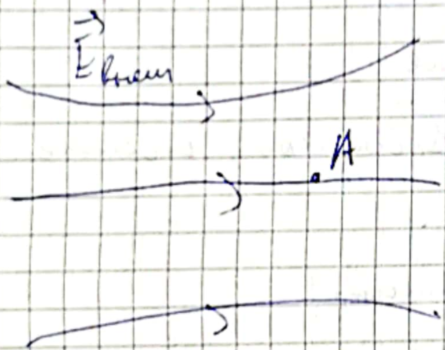


ситуация ① противоречит Т Гаусса (силовые линии входят в поверхность, т.е. есть поток, т.е. заряд)

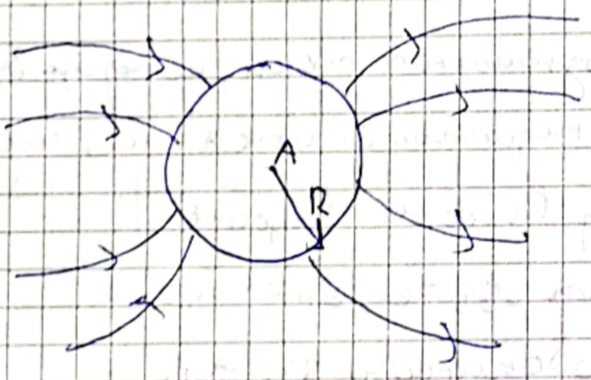
ситуация ② противоречит теореме о циркуляции
на участке I $\int \vec{E}\, d\vec{l} = 0$, на участке II $\int \vec{E}\, d\vec{l} = 0$

5) заряд на острие проводника > чем на тупом крае

Проводящий шар в электростатическом поле



$$\varphi_A = \int_A^{\infty} \vec{E}_{внеш}\, d\vec{r}$$



если поместить шар, то линии исказятся
его потенциал — ?
шар эквипотенциален (т.к. внутри него нет поля, то при переходе от одной точки к другой, мы никакую работу не совершаем)

найдём потенциал φ в центре

$$\vec{E} = \vec{E}_{внеш} + \vec{E}_{шара}$$

$$\varphi = \underbrace{\int_A^{\infty} \vec{E}_{внеш}\, d\vec{r}}_{\varphi_A} + \int_A \vec{E}_{шара}\, d\vec{r} = \sum \frac{dq_i}{r_{Ai}} = \sum \frac{dq_i}{R} = \frac{\sum dq_i}{R} = 0$$

т.к. шар незаряжен

φ_A т.е. потенциал центра до внесения шара