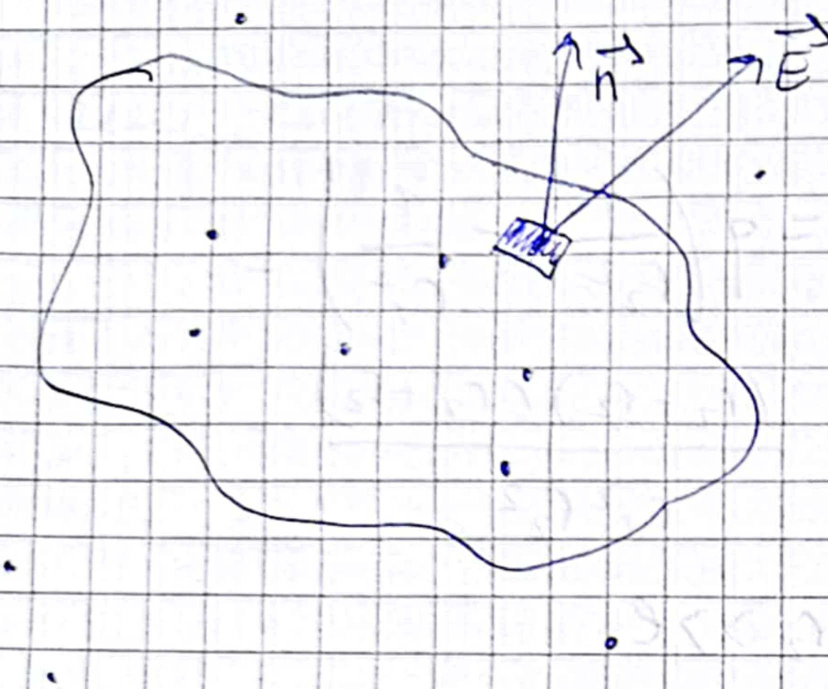
② Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме в интегральной и дифференциальной формах. Её применение для нахождения электростатических полей



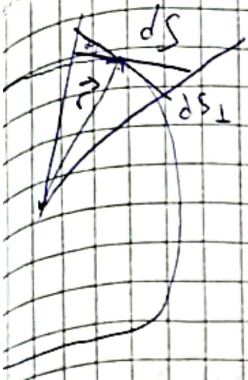
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

Доказательство:



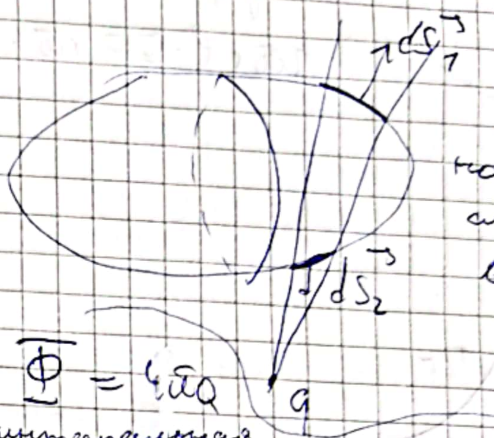
$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} \qquad dS_\perp = dS\cdot\cos\alpha$$

$$dS_\perp = \frac{d\vec S\cdot\vec r}{r}$$

$$d\Phi = \vec E\, d\vec S = \frac{q}{r^3}\vec r\, d\vec S = \frac{q}{r^3}\cdot\frac{d\vec S\cdot\vec r}{r} = q\,\frac{dS_\perp}{r^2} = q\,d\Omega$$

$$\Phi = \int d\Phi = q\underbrace{\int d\Omega}_{4\pi} \rightarrow 0$$

4π если внутри



нормали смотрят в разные стороны

Принцип суперпозиции $\Rightarrow$ $\Phi = 4\pi Q$ — интегральная форма

Теорема Гаусса–Остроградского $\oint_S \vec a\, d\vec S = \int_V div\,\vec a\, dV$

V заключён внутри S

$$\oint_S \vec E\, d\vec S = \int_V div\,\vec E\, dV$$

$$\| $$

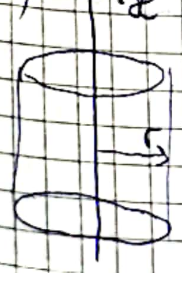
$$\int_V 4\pi\rho\, dV \Rightarrow div\,\vec E = 4\pi\rho$$ — дифференциальная форма

$$\vec\nabla\cdot\vec E = 4\pi\rho \qquad \left(div\,\vec E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\vec\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Примеры применения

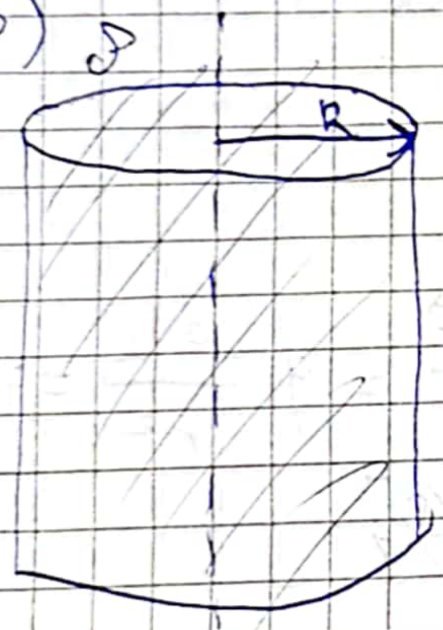
а)



$$\Phi = 2\pi r l\cdot E = 4\pi\varkappa l$$

$$E = \frac{2\varkappa}{r}$$

б)



внутри

$$\Phi = 2\pi r l E = 4\pi\cdot(\pi r^2 l \rho)$$

$$E = 2\pi\rho r$$

снаружи

$$2\pi r l\cdot E = 4\pi\cdot\pi R^2\cdot l\rho \qquad E = \frac{2\pi R^2\rho}{r} = \frac{2\varkappa}{r}$$