Lista nr 14 z matematyki dyskretnej

1. Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w grafie G, dla $i \geq 0$.
   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N}(6-i)t_i \geq 12$.
   (b) Wywnioskuj stąd, że graf G ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

2. Pokaż, że graf G^* dualny do grafu planarnego jest planarny.

3. Pokaż, że dla każdego nieparzystego naturalnego n istnieje turniej n-wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek jest *królem*. Wierzchołek jest królem, jeśli można z niego dojść do każdego innego wierzchołka w grafie po ścieżce skierowanej o długości co najwyżej 2.

4. (+) Niech $T = (V, E)$ będzie drzewem o parzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden rozpinający podgraf T, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty.

5. (+) Dany jest graf prosty skierowany G. *Pokrycie cyklowe* grafu G to zbiór Z skierowanych cykli G taki, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego z cykli z Z (cykle o długości 2 są dozwolone). Pokaż jak, mając do dyspozycji algorytm obliczania największego skojarzenia w grafie dwudzielnym nieskierowanym, skonstruować algorytm znajdujący pokrycie cyklowe G, o ile takowe istnieje.

   Wskazówka: Można rozszczepić każdy wierzchołek na dwie kopie.

6. Niech Z będzie n-elementowym zbiorem. Pokaż, że jeśli wybierzemy więcej niż połowę jego wszystkich podzbiorów, to wśród nich jakieś dwa będą takie, że jeden jest podzbiorem drugiego.

7. Niech $T = (A \cup B, E)$ będzie turniejem dwudzielnym (tzn. dla każdego $a \in A$ i każdego $b \in B$ turniej zawiera krawędź z a do b albo z b do a), w którym co najwyzej jeden wierzchołek ma stopień wchodzący 0. Pokaż, że w tym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego w co najwyżej 4 krokach.

8. W grafie spójnym G każda krawędź została pokolorowana na jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski, w taki sposób, że nie powstał żaden cykl monochromatyczny. Zaprojektuj wielomianowy algorytm, który znajduje drzewo rozpinające G minimalizujące (bezwzględną) różnicę między liczbami krawędzi czerwonych i niebieskich w tym drzewie.

9. (-) Ile wynosi liczba chromatyczna grafu prostego planarnego bez trójkątów? Ile krawędzi maksymalnie może mieć taki graf w zależności od liczby wierzchołków?

10. Niech $l : E \to R \geq 0$ będzie pewną funkcją na zbiorze krawędzi. Opracuj algorytm, który sprawdza czy w danej sieci $G = (V, E)$ o źródle s, ujściu t i funkcji przepustowości $c : E \to R \geq 0$ istnieje przepływ, który dla każdej krawędzi spełnia $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$.