Algebra liniowa 1

Tomasz Elsner

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wrocław 2023

Spis treści

Część I

Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$

Rozdział 1

Wektory na płaszczyźnie

1.1 Pojęcie wektora. Układy równań

Definicja 1.1: Wektor (geometrycznie)

(Uporządkowaną) parę punktów płaszczyzny A i B nazywamy *wektorem (na płaszczyźnie) o początku A i końcu B* i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. *Długością* wektora $\overrightarrow{AB}$ (oznaczaną $|\overrightarrow{AB}|$) nazywamy długość odcinka AB, a jego *kierunkiem* – prostą AB (przy czym przyjmujemy, że proste równoległe wyznaczają ten sam kierunek). Wektor o ustalonej długości i kierunku może mieć dwa różne *zwroty*:

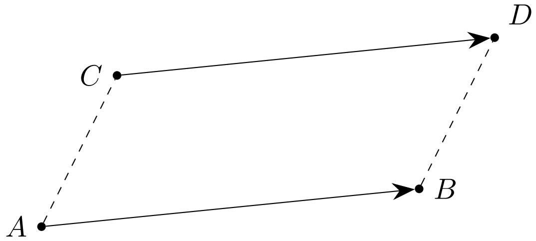
Dwa wektory są równe, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty[1].

Szczególnym przypadkiem wektora jest *wektor zerowy* (oznaczany $\vec{0}$), tzn. wektor, którego początek i koniec pokrywają się, np. $\overrightarrow{AA}$. Wektor taki nie ma określonego kierunku ani zwrotu, a jego długość wynosi 0. Rozciągając powyższą definicję równości wektorów na ten przypadek przyjmujemy, że jest tylko jeden wektor zerowy (tzn. tylko jeden wektor o długości 0).

Fakt 1.2: Równość wektorów (geometrycznie)

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich powstaje przez równoległe przesunięcie drugiego. W przypadku gdy punkty A, B, C, D nie leżą na jednej prostej jest to równoważne temu, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.

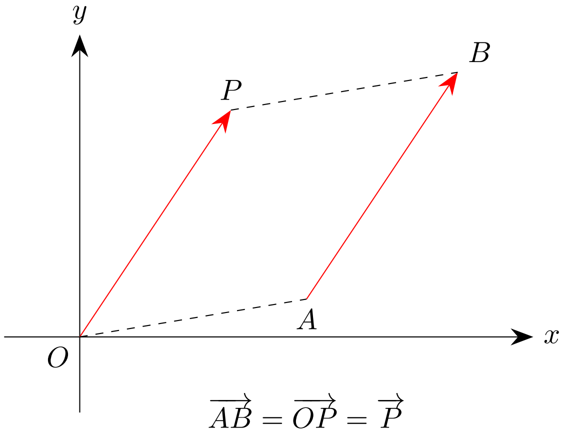
Dowód. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe długości ($|AB| = |CD|$), jednakowe kierunki ($AB \| CD$) oraz zgodne zwroty, co (jeśli tylko punkty A, B, C, D nie leżą na jednej prostej) jest równoważne temu, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.



□

[1]Pod koniec semestru, po przygotowaniu w ramach Wstępu do matematyki, będzie można lepiej sformalizować definicje wektora oraz kierunku przy pomocy pojęć *relacja równoważności* i *klasa abstrakcji*.

Zgodnie z Faktem 1.2 każdy wektor można umieścić w układzie współrzędnych tak, żeby miał początek w początku układu współrzędnych, tzn. w punkcie[2] $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (wystarczy odpowiednie przesunięcie równoległe). Wektor $\overrightarrow{OP}$ będziemy w skrócie oznaczać $\vec{P}$ (tzn. początek układu współrzędnych będzie „domyślnym” początkiem wektora).



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = \vec{P}$

Zwróćmy uwagę, że wektor (w rozumieniu Definicji 1.1) nie ma jednoznacznie wyznaczonego początku ani końca – o wektorze myślimy jako o „strzałce”, którą możemy swobodnie przesuwać w pionie i w poziomie (dlatego wektory występujące w niniejszym skrypcie nazywane są czasami *wektorami swobodnymi*). Z tego powodu, zamiast oznaczać wektor przy pomocy dwóch wielkich liter (przykładowe początek i koniec wektora), często będziemy stosować oznaczenie pojedynczą (zazwyczaj małą) literą ze strzałką, np. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Definicja 1.3: Dodawanie wektorów (geometrycznie)

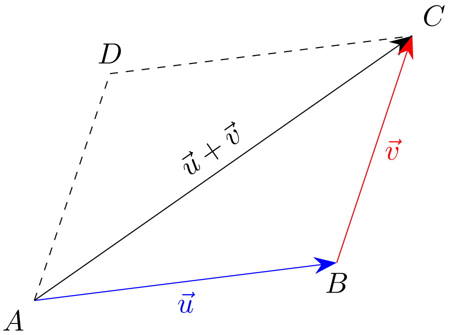
Dla dowolnych dwóch wektorów (na płaszczyźnie) wprowadzamy *operację dodawania* w następujący sposób:

1) sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ (koniec pierwszego jest początkiem drugiego) nazywamy wektor $\overrightarrow{AC}$ (*reguła przykładania*);

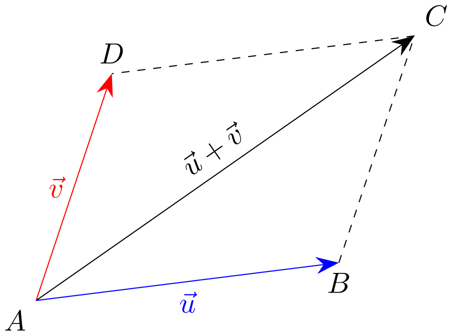
2) sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ (wektory o wspólnym początku) nazywamy przekątną $\overrightarrow{AC}$ równoległoboku $ABCD$ (*reguła równoległoboku*);

3) sumę wektorów w pozostałych przypadkach wyznaczamy przesuwając równolegle jeden z wektorów, a następnie stosując regułę 1) lub 2).

Wynik dodawania wektorów nie zależy od zastosowanej reguły dodawania, co widać na poniższym rysunku ($ABCD$ jest równoległobokiem, więc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$, zgodnie z Faktem 1.2).



reguła przykładania

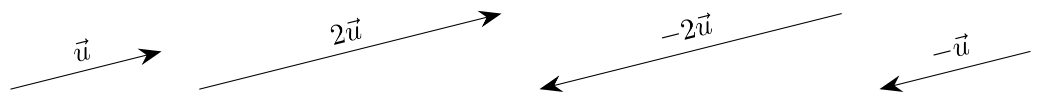


reguła równoległoboku

[2]Współrzędne punktu, a także współrzędne wektora będziemy zapisywać pionowo w nawiasach okrągłych.

Definicja 1.4: Mnożenie wektora przez skalar (geometrycznie)

Niech t będzie liczbą rzeczywistą (którą będziemy też nazywać *skalarem*), zaś $\vec{u}$ wektorem na płaszczyźnie. Wówczas $t \cdot \vec{u}$ jest wektorem o długości $|t| \cdot |\vec{u}|$, o kierunku wyznaczonym przez wektor $\vec{u}$ i o zwrocie zgodnym z $\vec{u}$, gdy $t > 0$, zaś przeciwnym niż $\vec{u}$, gdy $t < 0$. Jako że jedynym wektorem długości 0 jest wektor zerowy, więc $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$. Wektor $(-1) \cdot \vec{u}$ nazywamy *wektorem przeciwnym* do $\vec{u}$ i oznaczamy $-\vec{u}$.



Fakt 1.5: Wektor przeciwny (geometrycznie)

Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ jest wektor $\overrightarrow{BA}$.

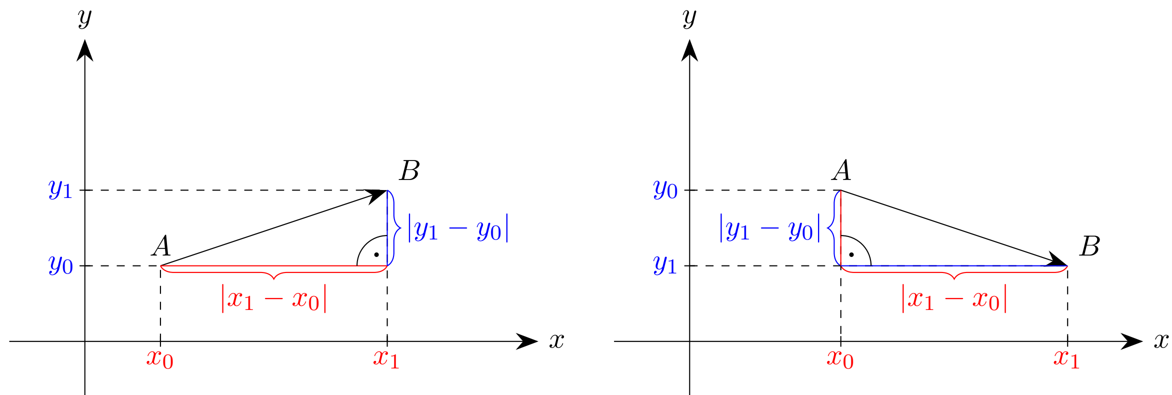
Dowód. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ mają jednakowe długości i kierunki, ale przeciwne zwroty. □

Definicja 1.6: Wektor (algebraicznie)

Jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ są punktami płaszczyzny, to *współrzędnymi wektora* $\overrightarrow{AB}$ nazywamy parę liczb:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ interpretujemy jako przesunięcie w poziomie (pierwsza współrzędna) i przesunięcie w pionie (druga współrzędna) potrzebne dla przemieszczenia z punktu A do punktu B. Wartość bezwzględna współrzędnej podaje długość przesunięcia, natomiast znak współrzędnej rozróżnia pomiędzy przesunięciem w kierunku dodatnim i ujemnym (kierunek dodatni wyznaczają strzałki na osiach współrzędnych).



$x_1 - x_0 > 0$ oraz $y_1 - y_0 > 0$ $\qquad$ $x_1 - x_0 > 0$ oraz $y_1 - y_0 < 0$

Wektor zerowy ma współrzędne $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ponieważ wektor nie ma jednoznacznie ustalonego początku ani końca (zgodnie z Faktem 1.2 dwa wektory są równe, jeśli jeden z nich jest przesunięciem równoległym drugiego), więc aby powyższa definicja współrzędnych wektora była prawidłowa, równe wektory muszą mieć jednakowe współrzędne. Stąd potrzeba udowodnienia następującego faktu:

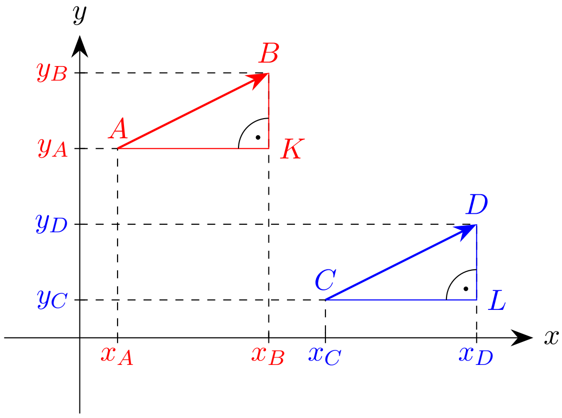
Fakt 1.7: Równość wektorów (algebraicznie)

Dwa wektory na płaszczyźnie są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Dowód. Zgodnie z Faktem 1.2 wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{CD}$ powstaje przez przesunięcie równoległe wektora $\overrightarrow{AB}$. To zaś jest równoważne temu, że trójkąt prostokątny $\triangle CDL$ powstaje przez przesunięcie równoległe trójkąta $\triangle ABK$ (oba zaznaczone na rysunku trójkąty mają przyprostokątne równoległe do osi współrzędnych), tzn.

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$$

co oznacza, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają równe współrzędne.



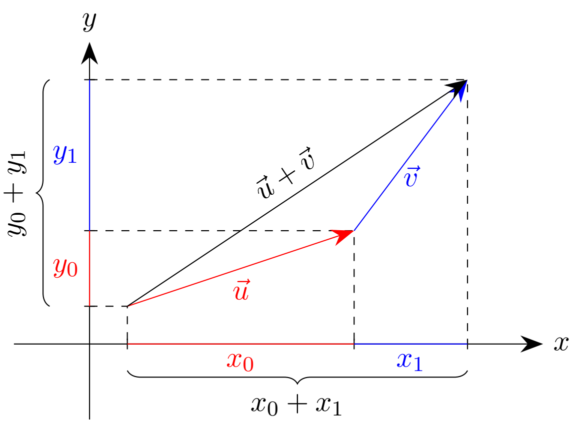
□

Ponieważ, zgodnie z Faktem 1.7, współrzędne jednoznacznie określają wektor, od tej pory będziemy utożsamiać wektor z parą liczb (jego współrzędnych) i pisać: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Fakt 1.8: Dodawanie wektorów (algebraicznie)

Sumą wektorów o współrzędnych $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ jest wektor o współrzędnych:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \end{pmatrix}$$



Dowód. Niech $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i niech obie współrzędne wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą nieujemne. Jak widać na rysunku na poprzedniej stronie:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \end{pmatrix}$$

Rozpatrzenie przypadku, gdy przynajmniej jedna ze współrzędnych jest ujemna pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

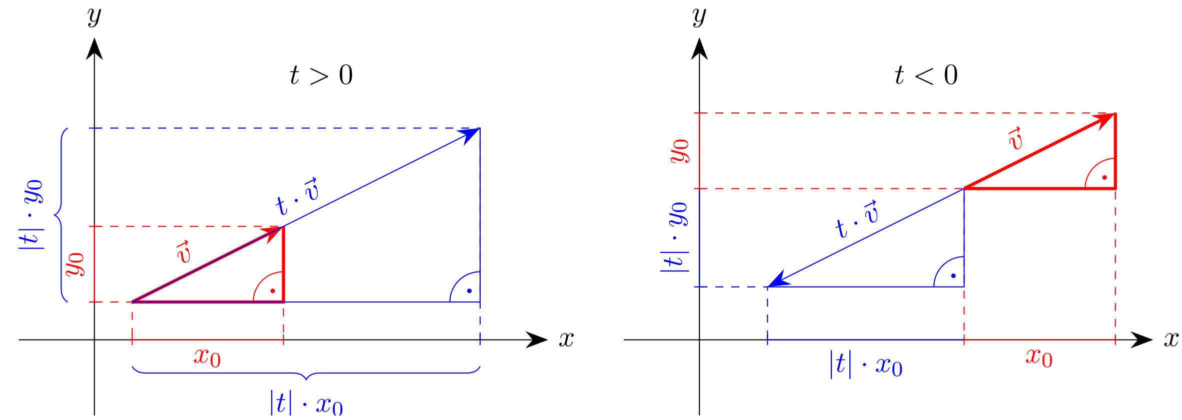
Fakt 1.9: Mnożenie wektora przez skalar (algebraicznie)

Iloczynem wektora o współrzędnych $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ przez skalar t jest wektor o współrzędnych:

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

W szczególności, wektorem przeciwnym do $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ jest wektor $(-1) \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$.

Dowód. Oznaczmy $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i załóżmy, że obie współrzędne wektora $\vec{v}$ są dodatnie. W zależności od znaku skalara t mamy do czynienia z sytuacją z pierwszego, bądź drugiego rysunku.



W każdym przypadku zaznaczone trójkąty prostokątne (niebieski i czerwony) są podobne w skali $|t|$, a zatem uwzględniając zwrot wektora $t \cdot \vec{v}$ otrzymujemy:

$$t \cdot \vec{v} = \begin{cases} \begin{pmatrix} +|t| \cdot x_0 \\ +|t| \cdot y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix}, & \text{gdy } t > 0 \\ \begin{pmatrix} -|t| \cdot x_0 \\ -|t| \cdot y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \end{pmatrix}, & \text{gdy } t < 0 \end{cases}$$

czyli wzór (1.1). Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie przypadku $t = 0$ oraz sytuacji, gdy przynajmniej jedna ze współrzędnych wektora $\vec{v}$ jest niedodatnia. $\square$

Definicja 1.10: Odejmowanie wektorów

Różnicą wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy sumę wektora $\vec{u}$ i wektora przeciwnego do $\vec{v}$, tzn.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

co we współrzędnych ma postać:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ y_0 - y_1 \end{pmatrix}$$

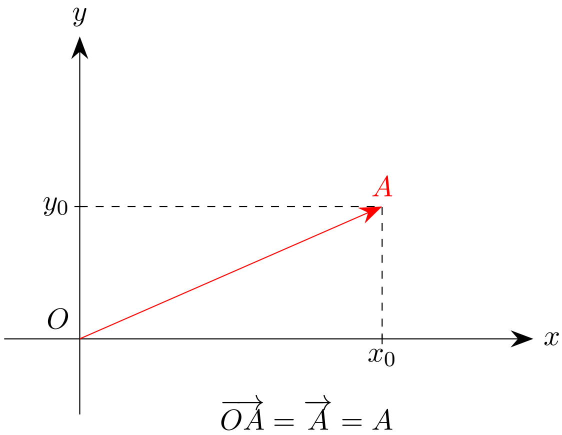
Przykład 1

Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz współrzędne wektora $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

Rozwiązanie.

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że punkt $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ wyznacza wektor $\vec{A}$ (z domyślnym początkiem w punkcie $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) o współrzędnych $\overrightarrow{OA} = \vec{A} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Ponieważ współrzędne punktu A są takie same jak współrzędne wektora $\vec{A}$, w dalszym tekście nie będziemy odróżniać punktów od wektorów, oba oznaczając A.



$$\overrightarrow{OA} = \vec{A} = A$$

Podobnie, przy oznaczeniach wektora pojedynczą małą literą, np. $\vec{u}$, $\vec{v}$ będziemy pomijać strzałkę i pisać u, v itd. Konwencja ta pozwala w prosty sposób zapisać regułę wyznaczania wektora o znanym początku i końcu:

Fakt 1.11: Różnica dwóch punktów

Dla dowolnego wektora $\overrightarrow{AB}$ zachodzi:

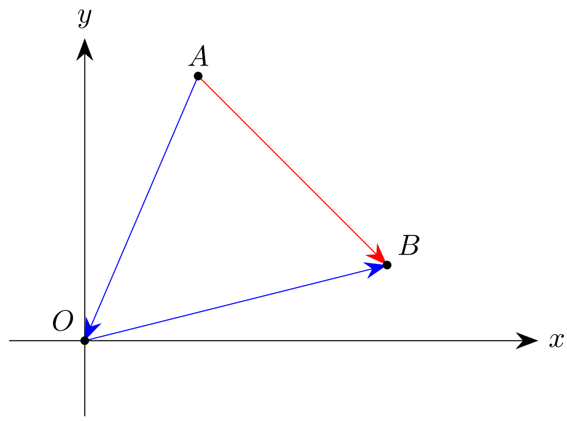
$$\overrightarrow{AB} = B - A \tag{1.2}$$

Powyższą równość można też zapisać w postaci:

$$A + \overrightarrow{AB} = B$$

i interpretować: „jeśli startując z punktu A wykonamy przesunięcie o wektor $\overrightarrow{AB}$, to znajdziemy się w punkcie B”.

Dowód. Wiemy, że $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ (reguła przykładania) oraz $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$ (Fakt 1.5).



Ponieważ O jest domyślnym początkiem każdego wektora, a zgodnie z opisaną wcześniej konwencją możemy pomijać strzałkę przy jednoliterowym oznaczeniu wektora, więc:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -A + B = B - A$$

$\square$

Przykład 2

Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ wyznacz współrzędne punktu B.

Rozwiązanie. Skoro $\overrightarrow{AB} = B - A$, to $B = A + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

W dotychczasowych rachunkach domyślnie przyjmowaliśmy, że działania na wektorach rządzą się takimi samymi prawami jak działania na liczbach rzeczywistych. Poniżej ujmujemy te prawa bardziej formalnie:

Fakt 1.12: Własności działań na wektorach

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ na płaszczyźnie oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (+ jest przemienne)
2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (+ jest łączne)
3) $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ jest elementem neutralnym +)
4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ jest elementem przeciwnym do $\vec{u}$)
5) $(s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
6) $t \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
7) $s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$
8) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Dowód. Pokażemy dowód własności (2) (łączności dodawania wektorów). Dowody pozostałych własności są podobne i ich przeprowadzenie zostawiamy czytelnikowi.

Oznaczmy $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Wyliczmy lewą i prawą stronę wzoru (2):

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1+w_1 \\ u_2+v_2+w_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1+w_1 \\ u_2+v_2+w_2 \end{pmatrix}$$

W ten sposób wykazaliśmy równość obu stron wzoru. □

Definicja 1.13: Wektory współliniowe (geometrycznie)

Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy *współliniowymi* (*równoległymi*) jeśli mają ten sam kierunek (przyjmujemy przy tym, że wektor $\vec{0}$ jest współliniowy z każdym wektorem).

Fakt 1.14: Wektory współliniowe (algebraicznie)

Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar t, że

$$\vec{u} = t \cdot \vec{v}$$

Wektor zerowy jest współliniowy z każdym wektorem[3].

Dowód. Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy różnią się jedynie długością i zwrotem, co oznacza, że:

$$\vec{u} = t \cdot \vec{v} \qquad \text{oraz} \qquad \vec{v} = \tfrac{1}{t} \cdot \vec{u}$$

dla pewnej liczby t ($t > 0$, gdy zwroty $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są zgodne, zaś $t < 0$, gdy zwroty te są przeciwne). □

Przykład 3

Wśród wektorów $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wskaż wszystkie pary wektorów współliniowych.

Rozwiązanie. Wektory $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ są współliniowe, gdyż $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ jest współliniowy z każdym z wektorów, gdyż $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dla dowolnych x i y.

Definicja 1.15: Kombinacja liniowa

Kombinacją liniową wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy każdy wektor postaci $s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ gdzie s i t są dowolnymi skalarami. Skalary s i t nazywamy *współczynnikami* tej kombinacji liniowej.

[3]Zauważmy, że jeśli $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$, to $\vec{v} = \frac{1}{t}\vec{u}$. Zachodzi również $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$ przy dowolnym wektorze $\vec{v}$, co tłumaczy przyjęcie zasady, że wektor $\vec{0}$ jest współliniowy z każdym wektorem.

Przykład 4

Przedstaw wektor $\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Szukamy takich liczb s i t, że

$$\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s-2t\\2s+t\end{pmatrix}$$

Musimy zatem rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} s - 2t = -1 \\ 2s + t = 8 \end{cases}$$

Rozwiązaniem jest $\begin{cases} s = 3 \\ t = 2 \end{cases}$ czyli: $\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

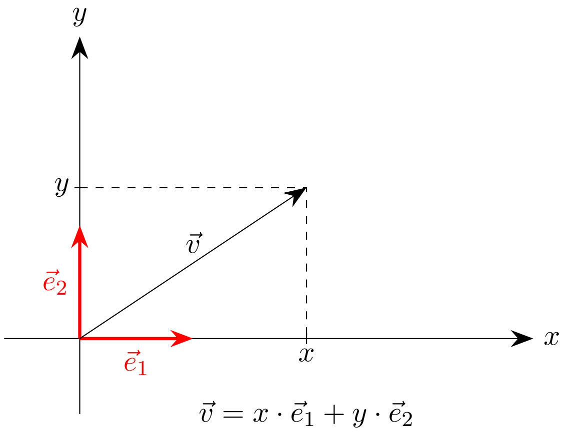
Definicja 1.16: Wersory

Wersorami na płaszczyźnie nazywamy wektory $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ i $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Fakt 1.17: Kombinacja liniowa wersorów

Każdy wektor na płaszczyźnie można przedstawić jako kombinację liniową wersorów, przy czym współczynnikami tej kombinacji są współrzędne wektora:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$$



$$\vec{v} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$$

Przykład 5

Znane są współrzędne trzech wierzchołków równoległoboku $ABCD$: $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka.

Rozwiązanie. Zgodnie z regułą dodawania wektorów (reguła równoległoboku):

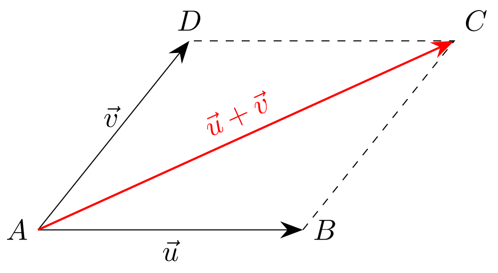
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

czyli zgodnie ze wzorem (1.2):

$$(B - A) + (D - A) = C - A$$

Stąd dostajemy

$$C = B - A + D = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$



Przykład 6

Wyznacz współrzędne środka odcinka AB, jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy środek odcinka AB przez S i niech $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wówczas:

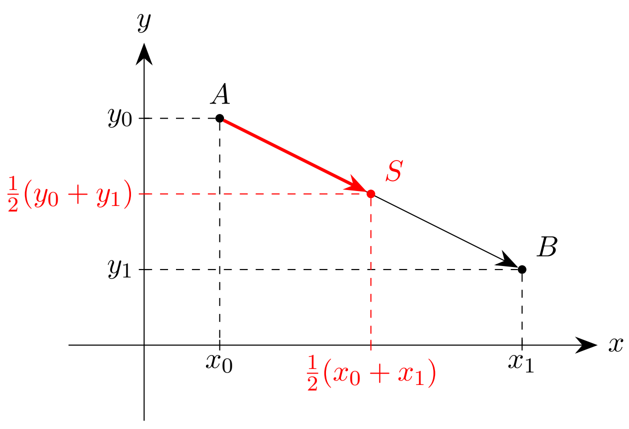
$$\overrightarrow{AS} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0 \\ \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_0 \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy układ równań z dwoma niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_0 \\ y - y_0 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ dostajemy:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ y = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \end{cases} \qquad \text{a zatem} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \end{pmatrix}$$



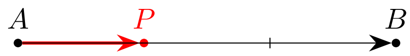
Rozwiązanie (sposób II). Warunek $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ można przekształcić bez odwoływania się do współrzędnych, korzystając ze wzoru (1.2), do postaci $S - A = \frac{1}{2}(B - A)$, skąd dostajemy:

$$S = \tfrac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Przykład 7

Wyznacz współrzędne takiego punktu P, który dzieli odcinek AB w stosunku $1 : 2$ (tzn. $|AP| : |PB| = 1 : 2$), jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Postępujemy podobnie jak w Przykładzie 6. Zauważmy, że $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$:



co, zgodnie ze wzorem (1.2), możemy zapisać w postaci:

$$P - A = \tfrac{1}{3}(B - A)$$

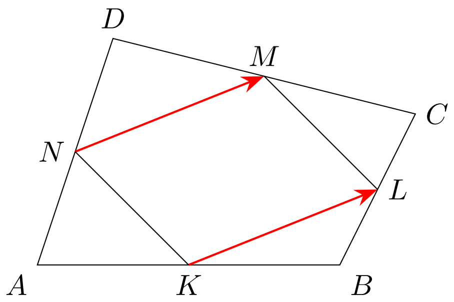
Stąd otrzymujemy

$$P = A + \tfrac{1}{3}(B - A) = \tfrac{2}{3}A + \tfrac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{2}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Przykład 8

Udowodnij, że środki boków dowolnego czworokąta $ABCD$ są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie. Oznaczmy środki boków czworokąta przez K, L, M, N (jak na rysunku).



Aby pokazać, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, wystarczy sprawdzić, że $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ (Fakt 1.2). Równość tę dowodzimy przy pomocy wzorów (1.2) oraz (1.3):

$$\overrightarrow{KL} = L - K = \tfrac{1}{2}(B + C) - \tfrac{1}{2}(A + B) = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}A$$

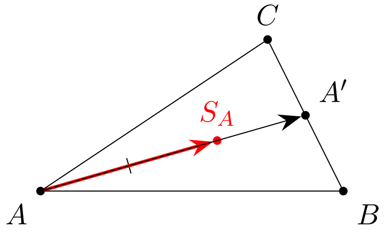
$$\overrightarrow{NM} = M - N = \tfrac{1}{2}(C + D) - \tfrac{1}{2}(A + D) = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}A$$

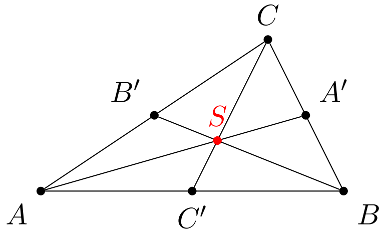
Przykład 9

Udowodnij, że trzy środkowe trójkąta (tzn. odcinki łączące wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku) przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą środkową w stosunku $2 : 1$. Wyznacz współrzędne tego punktu (nazywanego *środkiem ciężkości trójkąta*), jeśli $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Niech S_A będzie punktem dzielącym środkową AA' w stosunku 2 : 1. Wówczas

$$S_A = A + \overrightarrow{AS_A} = A + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = A + \tfrac{2}{3}(A' - A) = A + \tfrac{2}{3} \cdot (\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - A) = \tfrac{1}{3}(A + B + C)$$





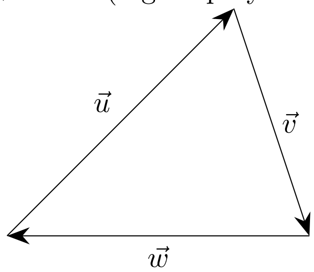
Podobnie dowodzimy, że dla punktów S_B i S_C dzielących, odpowiednio, środkowe BB' i CC' w stosunku 2 : 1 zachodzi $S_B = S_C = \frac{1}{3}(A + B + C)$. Wobec tego $S_A = S_B = S_C = S$, czyli środkowe przecinają się w jednym punkcie, który każdą z nich dzieli w stosunku 2 : 1. Współrzędne tego punktu, zgodnie z powyższym rachunkiem to:

$$S = \tfrac{1}{3}(A + B + C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{3}y_0 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Przykład 10

Czy przesuwając równolegle środkowe dowolnego trójkąta można ułożyć z nich trójkąt?

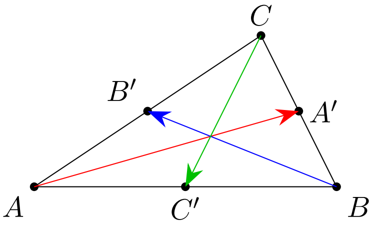
Rozwiązanie. Zauważmy, że z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ da się ułożyć trójkąt, wtedy i tylko wtedy gdy spełniają one warunek $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (reguła przykładania):

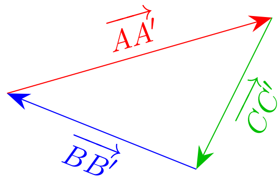


W trójkącie o środkowych AA', BB', CC' wyliczamy (zgodnie ze wzorami (1.2) i (1.3)):

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (A' - A) + (B' - B) + (C' - C) =$$

$$(\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - A) + (\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}A - B) + (\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - C) = 0$$





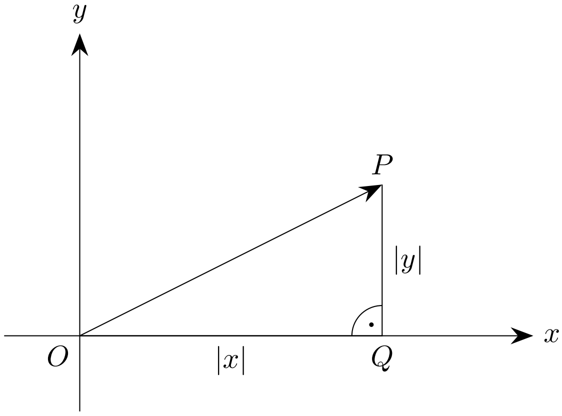
czyli przesuwając równolegle środkowe AA', BB', CC' można z nich ułożyć trójkąt.

Fakt 1.18: Długość wektora

Długość wektora $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wynosi $\sqrt{x^2+y^2}$. Odległość punktów $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ jest równa długości wektora $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ i wynosi $\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$.

Dowód. Na mocy Twierdzenia Pitagorasa wektor $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ma długość:

$$|\overrightarrow{P}| = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|OQ|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{|x|^2+|y|^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$



W takim razie odległość punktów A i B wynosi:

$$|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \left|\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$$

□

Fakt 1.19: Nierówność trójkąta (dla punktów)

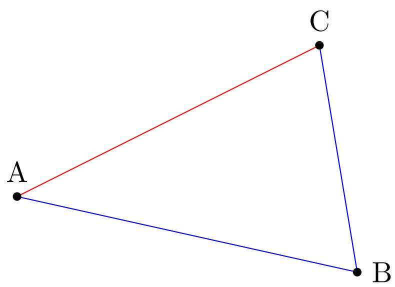
Dla dowolnych punktów A, B, C na płaszczyźnie zachodzi warunek

$$|AC| \le |AB| + |BC|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt B należy do odcinka AC.

Dowód. Jeśli punkty A, B i C tworzą trójkąt (czyli nie leżą na jednej prostej), to długość łamanej ABC jest większa od długości odcinka AC, czyli zachodzi:

$$|AC| < |AB| + |BC|$$



Jeśli natomiast punkty A, B, C leżą na jednej prostej, to $|AC| = |AB| + |BC|$, gdy B należy do odcinka AC (włączając w to możliwość $B = A$ lub $B = C$), zaś $|AC| < |AB| + |BC|$ w przeciwnym razie.

$|AC| = |AB| + |BC|$ $\qquad\qquad$ $|AC| < |AB| + |BC|$

□

Fakt ten można również zapisać w wersji wektorowej, której będziemy używać znacznie częściej niż wersji dla punktów:

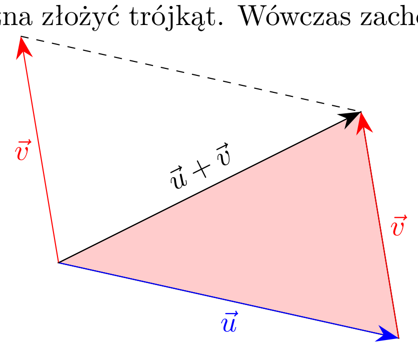
Fakt 1.20: Nierówność trójkąta (dla wektorów)

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ na płaszczyźnie spełniony jest następujący warunek:

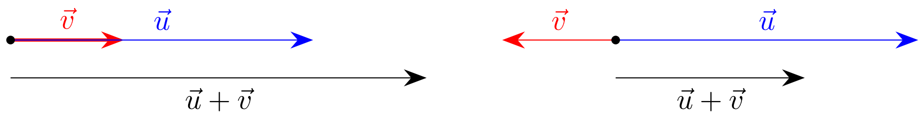
$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są współliniowe i mają zgodne zwroty.

Dowód. Jeśli wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nie są współliniowe, to z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$ (po odpowiednim przesunięciu równoległym) można złożyć trójkąt. Wówczas zachodzi warunek $|\vec{u}+\vec{v}| < |\vec{u}|+|\vec{v}|$.



Jeśli wektory u i v są współliniowe, to $|\vec{u}+\vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ w przypadku, gdy ich zwroty są zgodne lub $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$, gdy ich zwroty są przeciwne.



$|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ $\qquad\qquad$ $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u}| + |\vec{v}|$

□

Układy równań

Jedną z kluczowych metod algebry jest opis problemu matematycznego w terminach niewiadomych i równań (zapisywanych w formie układu równań). Rozwiązywanie problemu sprowadza się wówczas do znalezienia wszystkich rozwiązań układu równań, którą to czynność można dość mocno zalgorytmizować.

Podstawową metodą rozwiązywania wszelkich układów równań jest *metoda podstawiania*, którą w szkole stosuje się do rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi. Zakres stosowania tej metody jest jednak znacznie szerszy – obejmuje dowolną liczbę równań i niewiadomych oraz nie ogranicza się do równań liniowych (niemniej w ramach algebry liniowej będziemy mieć do czynienia niemal wyłącznie z równaniami liniowymi). Jest to najbardziej uniwersalna ze wszystkich metod rozwiązywania układów równań jakie poznamy.

Fakt 1.21: Metoda podstawiania

Rozwiązanie układu n równań z n niewiadomymi można otrzymać[4] stosując następującą procedurę:

1) Wyznaczamy dowolnie wybraną niewiadomą z dowolnie wybranego równania i podstawiamy do **wszystkich** pozostałych równań. W ten sposób zarówno liczba równań układu, jak i liczba niewiadomych zmniejsza się o 1.

Krok 1 powtarzamy $n-1$ razy, otrzymując w efekcie 1 równanie z 1 niewiadomą.

2) Rozwiązujemy otrzymane 1 równanie z 1 niewiadomą, wyznaczając w ten sposób wartość jednej (z n początkowych) niewiadomych.
3) Znając wartość jednej z niewiadomych (wyznaczonej w kroku 2), wykorzystujemy podstawienia z kolejnych iteracji kroku 1 (zaczynając od ostatniego, a kończąc na pierwszym) do wyznaczenia wartości pozostałych $n-1$ niewiadomych.

Stosując powyższy algorytm pamiętamy, że co prawda w każdej iteracji Kroku 1 można wybrać dowolne z (pozostałych) równań i dowolną z (pozostałych) niewiadomych, niemniej najlepiej dokonywać takich wyborów, które zminimalizują stopień komplikacji obliczeń.

Przykład 11

Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2x - y - 3z + 2t = -2 \\ x + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy niewiadomą x z pierwszego równania i podstawiamy do trzech pozostałych równań (Krok 1):

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2x - y - 3z + 2t = -2 \\ x + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases} \xrightarrow{x=1-y-z-t} \begin{cases} (1-y-z-t) + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2(1-y-z-t) - y - 3z + 2t = -2 \\ (1-y-z-t) + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases}$$

Po uproszczeniu równań, wyznaczamy niewiadomą y z drugiego z trzech równań i podstawiamy do obu pozostałych (Krok 1):

$$\begin{cases} 2y + z + 6t = 1 \\ y - z + 4t = 0 \\ 3y + 3z + 2t = -4 \end{cases} \xrightarrow{y=z-4t} \begin{cases} 2(z-4t) + z + 6t = 1 \\ 3(z-4t) + 3z + 2t = -4 \end{cases}$$

Po uproszczeniu równań, wyznaczamy niewiadomą t z pierwszego z dwóch równań i podstawiamy do jedynego pozostałego (Krok 1):

$$\begin{cases} 3z - 2t = 1 \\ 6z - 10t = -4 \end{cases} \xrightarrow{t=\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}} 6z - 10(\tfrac{3}{2}z - \tfrac{1}{2}) = -4$$

Upraszczamy i rozwiązujemy otrzymane jedno równanie z jedną niewiadomą (Krok 2):

$$-9z + 5 = -4 \qquad \to \qquad z = 1$$

[4] Metoda podstawiania stosuje się do dowolnych układów równań, aczkolwiek w przypadku równań nieliniowych może ona prowadzić do bardzo skomplikowanych rachunków.

Wykorzystujemy zastosowane podstawienia (w kolejności od ostatniego do pierwszego) do wyliczenia pozostałych niewiadomych (Krok 3):

$$\begin{cases} z = 1 \\ t = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} = 1 \\ y = z - 4t = -3 \\ x = 1 - y - z - t = 2 \end{cases}$$

Pomijanie równań wykorzystywanych do podstawienia w kolejnych krokach ułatwia rozwiązywanie i lepiej pokazuje ideę metody podstawiania, jednak bardziej formalne podejście wymagałoby przepisywania za każdym razem wszystkich równań. Warto wówczas jasno oddzielić równania „wykorzystane” od pozostałych (np. zapisując je na górze układu). Przy takim zapisie kolejne etapy rozwiązywania układu z powyższego przykładu wyglądałyby następująco:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 3y + 2z + 7t = 2 \\ -2x - y - 3z + 2t = -2 \\ x + 4y + 4z + 3t = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y - z - t \\ 2y + z + 6t = 1 \\ y - z + 4t = 0 \\ 3y + 3z + 2t = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y - z - t \\ y = z - 4t \\ 3z - 2t = 1 \\ 6z - 10t = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - y - z - t \\ y = z - 4t \\ t = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Metoda podstawiania nadaje się również do rozwiązywania układów równań nieliniowych:

Przykład 12

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wyznaczamy niewiadomą z z trzeciego równania i podstawiamy do obu pozostałych równań:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x + y - z = 5 \end{cases} \xrightarrow{z=x+y-5} \begin{cases} 2x + y - 3(x + y - 5) = 12 \\ x^2 + y^2 + (x + y - 5)^2 = 21 \end{cases}$$

Po uproszczeniu pierwszego równania wyznaczamy z niego niewiadomą x i podstawiamy do jedynego pozostałego równania:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 + y^2 + (x + y - 5)^2 = 21 \end{cases} \xrightarrow{x=3-2y} (3 - 2y)^2 + y^2 + (-y - 2)^2 = 21$$

Rozwiązujemy otrzymane jedno równanie z jedną niewiadomą:

$$6y^2 - 8y - 8 = 0 \to y = 2 \text{ lub } y = -\frac{2}{3}$$

Wykorzystujemy zastosowane podstawienia (w kolejności od ostatniego do pierwszego) do wyliczenia pozostałych niewiadomych:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 - 2y = -1 \\ z = x + y - 5 = -4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 3 - 2y = \frac{13}{3} \\ z = x + y - 5 = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Rachunki wykonywane przy realizacji metody podstawiania czasami istotnie upraszczają się, jeśli wcześniej odpowiednio „przygotujemy" rozwiązywany układ równań. Jest to szczególnie istotne, gdy nie jest to układ równań liniowych. W tym celu należy najpierw dobrze zrozumieć jakie operacje wykonywane na równaniach (układzie równań) są dozwolone.

Definicja 1.22: Równoważne równania (układy równań)

Równania (układy równań) nazywamy *równoważnymi*, jesli mają taki sam zbiór rozwiązań.

Fakt 1.23: Przekształcanie równoważne równania (układu równań)

Każde z następujących przekształceń równania (układu równań) prowadzi do równoważnego równania (układu równań):

1) dodanie/odjęcie od obu stron (wybranego) równania takiego samego wyrażenia;
2) pomnożenie/podzielenie obu stron (wybranego) równania przez takie samo **niezerowe** wyrażenie;
3) podniesienie obu stron (wybranego) równania do kwadratu (lub innej parzystej potęgi), **o ile obie strony są nieujemne**;
4) nałożenie na obie strony (wybranego) równania pierwiastka kwadratowego (lub innego pierwiastka stopnia parzystego), **o ile obie strony są nieujemne**;
5) podniesienie obu stron (wybranego) równania do potęgi nieparzystej lub nałożenie na obie strony równania pierwiastka stopnia nieparzystego.

Operacje opisane w (1), (2), (5) prowadzą do równań (układów równań) równoważnych dlatego, że są one odwracalne. Na przykład przekształcenie polegające na odjęciu takiego samego wyrażenia od obu stron równania:

$$3x + 2y = 7 + y \quad \Longrightarrow \quad 3x + y = 7$$

można odwrócić, stosując przekształcenie polegające na dodaniu takiego samego wyrażenia do obu stron równania:

$$3x + y = 7 \quad \Longrightarrow \quad 3x + 2y = 7 + y$$

Ograniczenie w (4) jest oczywiste, gdyż pierwiastek stopnia parzystego jest określony jedynie dla liczb nieujemnych. Natomiast ograniczenie w (3) związane jest właśnie z odwracalnością. Na przykład podnosząc równanie stronami do kwadratu:

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4$$

a następnie pierwiastkując otrzymane równanie stronami:

$$x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad |x| = 2$$

nie powrócimy do wyjściowego równania ($x = 2$). Widać również, że w powyższym przykładzie równania $x = 2$ i $x^2 = 4$ mają różne zbiory rozwiązań (pierwsze jest spełnione tylko przez liczbę 2, a drugie – przez liczby 2 i -2).

Fakt 1.24: Przekształcanie równoważne układu równań

Jeśli do wybranego równania układu równań dodamy lub od niego odejmiemy stronami inne równanie tego układu, to otrzymamy równoważny układ równań.

Opisana powyżej operacja prowadzi do równoważnego układu równań, gdyż jest odwracalna. Na przykład przekształcenie polegające na dodaniu do pierwszego równania (stronami) drugiego równania:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x = 10 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

można odwrócić, stosując przekształcenie polegające na odjęciu od pierwszego równania (stronami) drugiego równania:

$$\begin{cases} 3x = 10 \\ x - y = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Fakt 1.24 pomaga uprościć rozważany układ równań, lepiej „przygotowując” go do zastosowania metody podstawiania, co widać w nastepującym przykładzie.

Przykład 13

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Odejmując drugie równanie od pierwszego i trzeciego otrzymujemy równoważny układ złożony z dwóch równań liniowych i jednego kwadratowego (zamiast trzech równań kwadratowych):

$$\begin{cases} (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 2z + 1) = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 + 6z + 9) = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2x - 6y - 2z = -16 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -4x - 2y + 6z = -22 \end{cases}$$

Otrzymany układ równań (po uproszczeniu) rozwiązujemy metodą podstawiania:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -2x - y + 3z = -11 \end{cases} \xrightarrow{x=8-3y-z} \begin{cases} (8-3y-z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ -2(8-3y-z) - y + 3z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8-3y-z)^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ 5y + 5z = 5 \end{cases} \xrightarrow{y=1-z} (5+2z)^2 + (1-z)^2 + z^2 = 14$$

$$6z^2 + 18z + 12 = 0 \longrightarrow z = -1 \text{ lub } z = -2$$

Skąd dostajemy dwa rozwiązania:

$$\begin{cases} z = -1 \\ y = 1 - z = 2 \\ x = 8 - 3y - z = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} z = -2 \\ y = 1 - z = 3 \\ x = 8 - 3y - z = 1 \end{cases}$$

1.2 Równania i nierówności na płaszczyźnie

Podzbiór płaszczyzny $A \subset \mathbb{R}^2$ można opisać na dwa sposoby:

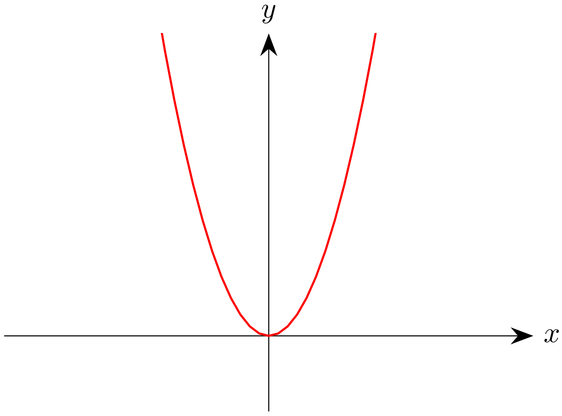
1) opisać A jako zbiór wszystkich punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ spełniających pewne równanie (układ równań, nierówność) z niewiadomymi x i y, np.

$$A \text{ to zbiór punktów } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ spełniających równanie } y = x^2$$

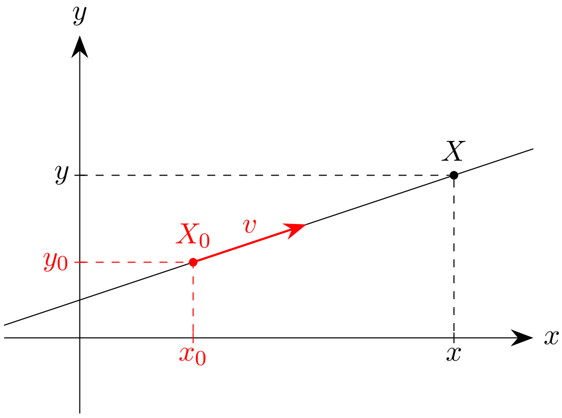
2) podać (przy pomocy parametru) postać pojedynczego punktu zbioru A, np.

$$A \text{ to zbiór punktów } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mających postać } \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \text{ gdzie } t \text{ jest dowolną liczbą rzeczywistą}$$

Oba powyższe przykłady opisują tę samą parabolę:



Głównym celem tego rozdziału jest opisanie (oboma sposobami) prostej na płaszczyźnie. Zaczniemy od drugiego sposobu, tzn. od opisu parametrycznego prostej. Prosta jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie (jakiegokolwiek) należącego do niej punktu $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ oraz (niezerowego) wektora $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ wyznaczającego jej kierunek.



Chcemy wyznaczyć postać dowolnego punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ należącego do opisanej powyżej prostej. Zauważmy, że wektory $\overrightarrow{X_0X}$ i v są współliniowe oraz v jest niezerowy, więc (zgodnie z Faktem 1.14) istnieje liczba rzeczywista t, dla której:

$$\overrightarrow{X_0X} = t \cdot v, \quad \text{czyli} \quad X - X_0 = t \cdot v$$

Stąd otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 1.25: Równanie prostej (parametryczne)

Prosta (na płaszczyźnie) przechodząca przez punkt $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i równoległa do wektora $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, to zbiór punktów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ postaci:

$$X = t \cdot v + X_0 \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

gdzie parametr t może przyjmować dowolną wartość rzeczywistą. Równanie (1.6) nazywamy *równaniem parametrycznym prostej*, zaś wektor v nazywamy *wektorem kierunkowym* tej prostej.

Przykład 1

Sprawdź, czy punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ leży na prostej zadanej równaniem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Należy ustalić, czy istnieje liczba t spełniająca równanie wektorowe:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

czyli spełniająca układ dwóch równań skalarnych:

$$\begin{cases} 1 = t \cdot 3 + 1 \\ 2 = t \cdot (-1) + 1 \end{cases}$$

Powyższy układ równań jest sprzeczny, więc punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nie leży na rozważanej prostej.

Zauważmy, że jedna prosta jest opisywana przez wiele różnych równań parametrycznych, gdyż ani punkt X_0 (dowolny punkt na prostej), ani wektor v (dowolny niezerowy wektor równoległy do prostej) nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Przykład 2

Dana jest prosta ℓ o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Znajdź inne równanie opisujące tę samą prostą.

Rozwiązanie. Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ należy do prostej ℓ. Wektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest równoległy do wektora kierunkowego prostej ℓ, więc sam też jest wektorem kierunkowym tej prostej. Zatem innym równaniem parametrycznym prostej ℓ jest np.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Równanie parametryczne prostej interpretujemy następująco: punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ należy do prostej o równaniu:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista t spełniająca układ równań:

$$\begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \end{cases}$$

Jeśli $p \neq 0$, to układ ten można przekształcić (przy pomocy metody podstawiania) do postaci:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{p}x - \frac{1}{p}x_0 \\ y = \frac{q}{p}x - \frac{q}{p}x_0 + y_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Zatem punkt X leży na prostej o równaniu parametrycznym (1.7) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia drugie z równań układu (1.8) (wówczas istnieje t spełniające pierwsze równanie), czyli (po przekształceniu), gdy spełnia równanie:

$$-qx + py + (qx_0 - py_0) = 0 \tag{1.9}$$

Równanie (1.9) możemy zapisać w postaci:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.10}$$

gdzie $A = -q$, $B = p$, $C = qx_0 - py_0$ są pewnymi liczbami rzeczywistymi. W ten sposób udowodniliśmy następujący fakt (rozpatrzenie przypadku $p = 0$ zostawiamy czytelnikowi):

Fakt 1.26: Równanie prostej (ogólne)

Prosta (na płaszczyźnie) to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających równanie:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1.11}$$

dla pewnych ustalonych liczb rzeczywistych A, B, C takich, że A i B nie są jednocześnie równe 0. Równanie (1.11) nazywamy *równaniem ogólnym prostej*, a liczby A, B, C nazywamy *współczynnikami* tego równania.

Przykład 3

Sprawdź, czy punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ leży na prostej zadanej równaniem ogólnym $2x - 5y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Wstawiając $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ do równania prostej otrzymujemy prawdziwe równanie:

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0$$

co oznacza, że punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ należy do rozważanej prostej.

Zwróćmy uwagę, że współczynniki A, B i C równania ogólnego (1.11) nie są wyznaczone jednoznacznie, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 4

Dana jest prosta ℓ o równaniu ogólnym $2x-y+3=0$. Znajdź inne równania ogólne opisujące tę samą prostą.

Rozwiązanie. Jeśli pomnożymy to równanie stronami przez pewną niezerową liczbę rzeczywistą, to otrzymamy równanie równoważne, czyli mające ten sam zbiór rozwiązań. Zatem każde z równań:

$$4x-2y+6=0, \qquad 6x-3y+9=0, \qquad -2x+y-3=0$$

jest równaniem ogólnym prostej ℓ.

Powyższej wady nie ma, znane ze szkoły, *równanie kierunkowe* prostej:

$$y = ax + b \tag{1.12}$$

Współczynniki a i b równania (1.12) są wyznaczone jednoznacznie, ale równanie to nie pozwala na opisanie dowolnej prostej – nie daje możliwości opisania prostej równoległej do osi Oy, czyli prostej o równaniu ogólnym $x-C=0$. Z tego powodu będziemy się posługiwać równaniem ogólnym prostej, a nie równaniem kierunkowym. Zauważmy, że równanie kierunkowe (1.12) można przekształcić w równanie ogólne:

$$ax - y + b = 0$$

a równanie ogólne prostej (1.11) można zamienić na równanie kierunkowe, o ile tylko $B \neq 0$:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Przykład 5

Opisz prostą przechodzącą przez punkty $P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $Q = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ przy pomocy:

(a) równania ogólnego,

(b) równania parametrycznego.

Rozwiązanie. (a) Równanie ogólne prostej ma postać $Ax+By+C=0$. Aby prosta przechodziła przez punkty $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, współczynniki A, B i C muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} A+2B+C=0 \\ 3A+5B+C=0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$\begin{cases} A=3C \\ B=-2C \end{cases}$$

czyli równanie ogólne $3x-2y+1=0$ (za C możemy przyjąć dowolną niezerową wartość).

(b) Do napisania równania parametrycznego potrzebujemy wyznaczyć jakikolwiek wektor kierunkowy, np. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ oraz dowolny punkt na prostej, np. $P = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Stąd dostajemy równanie parametryczne szukanej prostej:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Oba opisy prostej (równanie parametryczne i równanie ogólne) przedstawiają prostą jako zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających pewne równanie lub układ równań. W związku z tym zamianę postaci parametrycznej na równanie ogólne i na odwrót można traktować jako przekształcenia układu równań.

Przykład 6

Zamień równanie parametryczne prostej: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ na równanie ogólne.
Rozwiązanie. Równanie parametryczne możemy przedstawić w postaci układu równań:

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

z którego (jak we wzorze (1.8)) musimy wyeliminować zmienną t. Wyliczając z drugiego równania $t = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ i wstawiając do pierwszego równania otrzymujemy:

$$x - \frac{3}{2}y - \frac{5}{2} = 0, \quad \text{czyli} \quad 2x - 3y - 5 = 0$$

Przykład 7

Zamień równanie ogólne prostej: $5x - 2y + 3 = 0$ na równanie parametryczne.
Rozwiązanie. Potrzebujemy wyrazić zmienne x i y przy pomocy parametru t, czyli zastąpić jedno równanie $5x - 2y + 3 = 0$ dwoma równaniami, z których pierwsze zawiera wyłącznie niewiadome x i t, zaś drugie – wyłącznie niewiadome y i t. Pierwsze z równań możemy przyjąć dość dowolnie, np. $x = t$. Wówczas równanie ogólne można zastąpić układem równań:

$$\begin{cases} x = t \\ 5t - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

co po uproszczeniu prowadzi do równania parametrycznego prostej:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{5}{2}t + \frac{3}{2} \end{cases} \qquad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Skoro prostą opisujemy jako zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających pewne równanie (układ równań), to punkt przecięcia prostych można opisać jako rozwiązanie odpowiedniego układu równań.

Przykład 8

Znajdź punkt przecięcia prostych o równaniach:

(a) $-3x + y - 5 = 0$ i $4x + 3y - 2 = 0$,

(b) $2x + y + 3 = 0$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Rozwiązujemy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi:

$$\begin{cases} -3x + y - 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

otrzymując punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) Rozwiązujemy układ złożony z równania skalarnego i wektorowego, który możemy zamienić na układ trzech równań skalarnych z trzema niewiadomymi (x, y, t):

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x = t - 2 \\ y = 2t - 3 \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymujemy punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ustalenie wartości t nie jest potrzebne).

(c) Zwróćmy uwagę, że szukany punkt ma spełniać oba równania parametryczne, ale niekoniecznie dla tej samej wartości parametru t, co oznacza, że tworząc układ równań musimy dla każdej prostej parametr oznaczyć inną niewiadomą. W ten sposób dostajemy układ dwóch równań wektorowych, czyli czterech równań skalarnych z czterema niewiadomymi:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x = t + 4 \\ y = 2t - 1 \\ x = 3s + 1 \\ y = -s \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ dostajemy punkt przecięcia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ustalenie wartości niewiadomych t i s nie jest potrzebne).

Fakt 1.27: Proste równoległe

Dana jest prosta ℓ o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$. Wówczas równanie:

$$Ax + By + C' = 0 \quad \text{gdzie} \quad C' \neq C \tag{1.13}$$

opisuje prostą równoległą do ℓ i różną od ℓ. Co więcej, każda prosta równoległa do ℓ i różna od ℓ jest opisywana równaniem (1.13).

Dowód. Jeśli $C' \neq C$, to układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + C' = 0 \end{cases}$$

jest sprzeczny, co dowodzi, że rozważane proste są rozłączne. Z drugiej strony przez dowolny punkt $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ przechodzi prosta o równaniu $Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$, która (jak pokazaliśmy) jest równoległa do prostej ℓ. □

Przykład 9

Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i równoległej do prostej o równaniu:

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $5x - 4y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. (a) Proste równoległe mają jednakowe wektory kierunkowe, więc szukana prosta ma wektor kierunkowy $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, stąd jej równanie parametryczne to:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Każda prosta równoległa do $5x - 4y + 1 = 0$ ma równanie $5x - 4y + C = 0$, dla pewnej wartości C (Fakt 1.27). Szukana prosta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, więc:

$$5 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + C = 0$$

skąd otrzymujemy $C = -9$. Równanie szukanej prostej to zatem $5x - 4y - 9 = 0$.

Geometryczny opis prostych pozwoli nam ustalić jak wygląda zbiór rozwiązań dowolnego układu dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi.

Fakt 1.28: Układ dwóch równań liniowych

Zbiorem rozwiązań układu dwóch równań liniowych (z niewiadomymi x i y):

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \tag{1.14}$$

jest punkt, gdy równania tego układu opisują dwie przecinające się proste, a w przeciwnym razie jest to prosta, zbiór pusty lub cała płaszczyzna.

Dowód. Zgodnie z Faktem 1.26 powyższy układ zazwyczaj opisuje zbiór punktów wspólnych dwóch prostych na płaszczyźnie, czyli:

1) pojedynczy punkt, gdy proste się przecinają,

2) prostą, gdy proste się pokrywają,

3) zbiór pusty, gdy proste są równoległe i rozłączne.

Wyjątkiem jest sytuacja, gdy $a = b = 0$ lub $c = d = 0$, czyli gdy jedno (lub oba) z równań układu są sprzeczne lub tożsamościowe (tzn. zawsze prawdziwe). Wówczas zbiorem rozwiązań układu jest zbiór pusty, cała płaszczyzna lub prosta. □

Równania ogólnego prostej można również użyć do wyprowadzenia nierówności opisującej półpłaszczyznę:

Fakt 1.29: Nierówność półpłaszczyzny

Prosta ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$ dzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Jedna z tych półpłaszczyzn składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + C \geq 0 \tag{1.15}$$

a druga z półpłaszczyzn składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + C \leq 0 \tag{1.16}$$

Prostą graniczną zaliczamy do obu półpłaszczyzn.

Dowód. Równanie $Ax + By + C = k$ dla każdego $k \in \mathbb{R}$ reprezentuje prostą ℓ_k równoległą do prostej $\ell = \ell_0$. Punkt przecięcia prostej ℓ_k z osią OY to punkt $P_k = \begin{pmatrix} 0 \\ y_k \end{pmatrix}$, gdzie

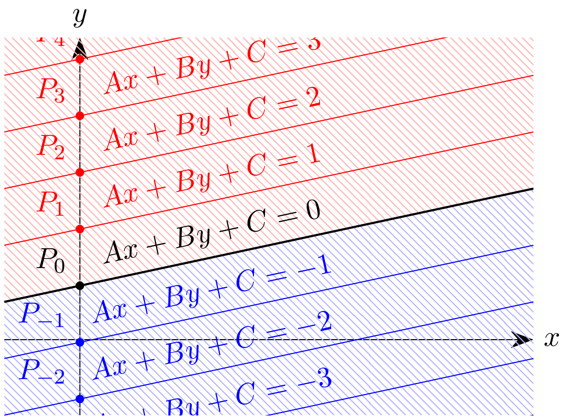
$$A \cdot 0 + B \cdot y_k + C = 0$$

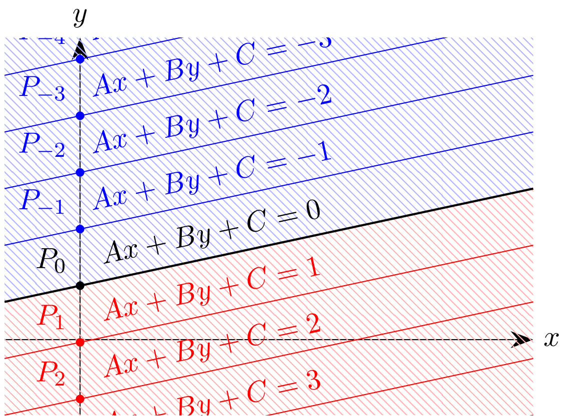
czyli

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k-C}{B} \end{pmatrix}$$

(przypadek, gdy prosta ℓ jest równoległa do osi OY należy rozpatrzyć osobno – pozostawiamy to czytelnikowi). Wobec tego proste ℓ_k ułożone są w kolejności:

- rosnącego k (pierwszy rysunek), jeśli $B > 0$,
- malejącego k (drugi rysunek), jeśli $B < 0$.





Stąd widać, że jedna z półpłaszczyzn (czerwona) składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax + By + C \geq 0$$

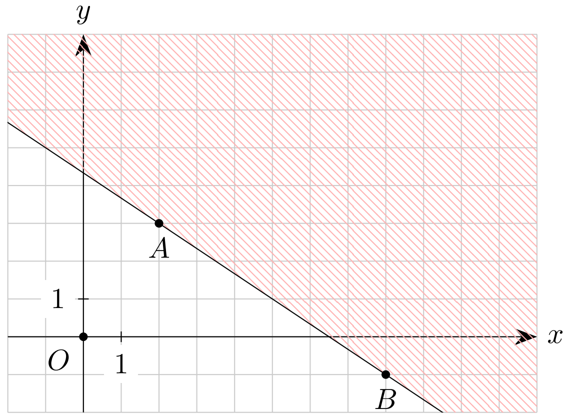
a druga z półpłaszczyzn (niebieska) – z punktów spełniających warunek:.

$$Ax + By + C \leq 0$$

Prosta graniczna ℓ_0 (czarna) o równaniu $Ax+By+C = 0$ zaliczona jest do obu półpłaszczyzn. $\square$

Przykład 10

Napisz nierówność półpłaszczyzny zaznaczonej na poniższym rysunku.



Rozwiązanie. Prosta graniczna półpłaszczyzny przechodzi przez $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, więc nietrudno wyprowadzić jej równanie: $2x + 3y - 13 = 0$. Wobec tego nierówność zaznaczonej półpłaszczyzny to:

$$2x + 3y - 13 \geq 0 \qquad \text{lub} \qquad 2x + 3y - 13 \leq 0$$

Żeby wybrać właściwą z tych dwóch możliwości wystarczy wybrać dowolny punkt nieleżący na prostej AB, np. $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i ustalić czy należy on do badanej półpłaszczyzny. W naszym przypadku punkt O nie należy do badanej półpłaszczyzny, czyli nie może spełniać jej nierówności. Stąd szukaną nierównością jest $2x + 3y - 13 \geq 0$.

Omawiane na początku rozdziału dwa sposoby opisu podzbiorów płaszczyzny można zastosować również do krzywych na płaszczyźnie, np. okręgów:

Fakt 1.30: Równanie okręgu

Okrąg (na płaszczyźnie) o środku w punkcie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających następujące równanie (zwane *równaniem okręgu*):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{1.17}$$

Dowód. Okrąg o środku $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odległych o r od punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, czyli spełniających warunek:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \tag{1.18}$$

Ponieważ obie strony równania (1.18) są dodatnie, więc podnosząc stronami do kwadratu otrzymujemy równoważną postać (1.18):

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

□

Okrąg można również opisać parametrycznie. Dla okręgu o środku $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ pokazuje to poniższy fakt. Uogólnienie tego opisu na dowolny okrąg pozostawimy czytelnikowi.

Fakt 1.31: Opis parametryczny okręgu

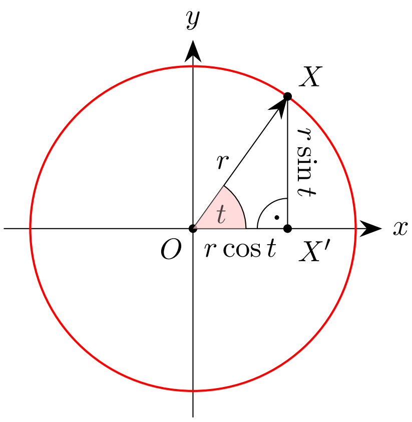
Okrąg o środku w punkcie $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ postaci:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos t\\r\sin t\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

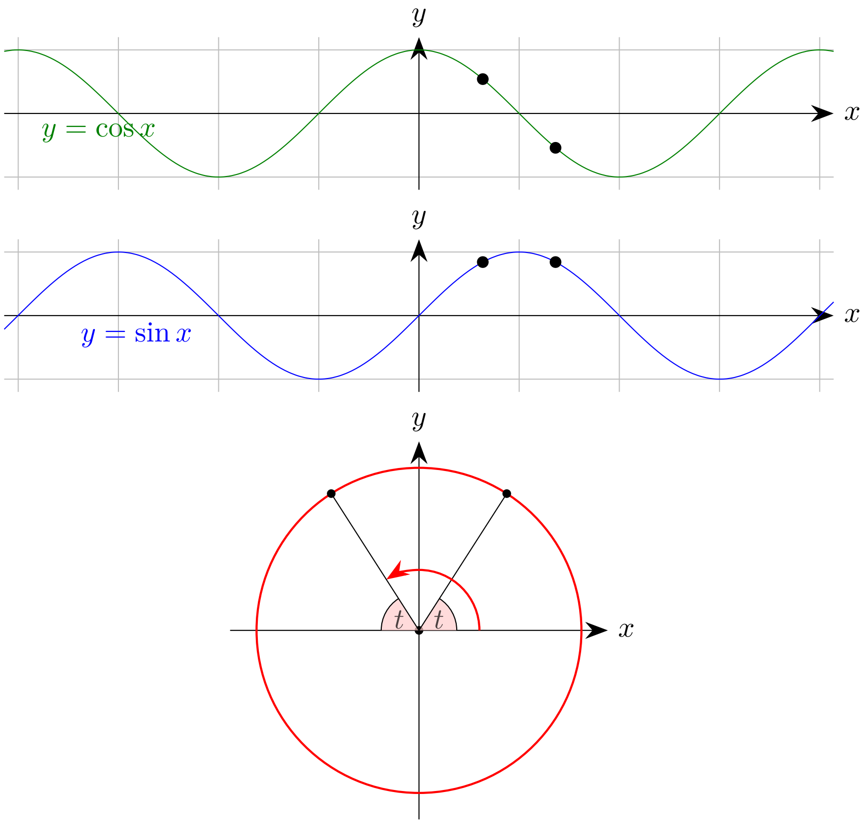
gdzie parametr t może przyjmować dowolną wartość z przedziału $[0, 2\pi)$

Dowód. Trójkąt o wierzchołkach w punktach $O = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ oraz $X' = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ jest prostokątny. Stąd jeśli punkt X leży w pierwszej ćwiartce, to:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= \frac{|OX'|}{|OX|} = \cos t \quad \text{czyli} \quad x = r\cos t\\
\frac{y}{r} &= \frac{|XX'|}{|OX|} = \sin t \quad \text{czyli} \quad y = r\sin t
\end{aligned}$$



Jeśli X leży w drugiej ćwiartce, prawdziwość wzoru (1.19) wynika z analizy wykresów funkcji $\cos x$ i $\sin x$:



$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\pi - t) \\ r\sin(\pi - t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$

Jeśli X leży w trzeciej lub czwartej ćwiartce prawdziwość wzoru (1.19) sprawdzamy w podobny sposób jak dla drugiej ćwiartki.

□

Wniosek 1.32: Nierówność koła

Koło (na płaszczyźnie) o środku w punkcie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających następującą nierówność:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2 \tag{1.20}$$

Dowód. Koło o środku $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ i promieniu r to zbiór punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ odległych o nie więcej niż r od punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, czyli spełniających warunek:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r \tag{1.21}$$

Ponieważ obie strony nierówności (1.21) są dodatnie, więc podnosząc (1.21) stronami do kwadratu otrzymujemy równoważną postać:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$$

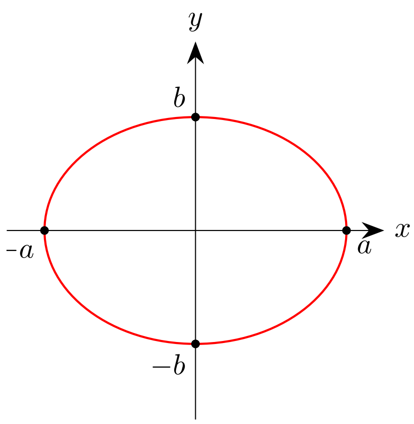
□

Okrąg jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej krzywej, zwanej *elipsą*:

Definicja 1.33: Elipsa

Elipsą o *długiej półosi* długości a i *krótkiej półosi* długości b ($a \geq b$) nazywamy krzywą na płaszczyźnie zadaną[5] równaniem:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.22}$$



Gdy długa i krótka półoś elipsy są tej samej długości, równanie (1.22) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{czyli} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

co rozpoznajemy jako równanie okręgu o środku $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i promieniu r. Promień okręgu stanowi wówczas półoś elipsy (a średnica okręgu to oś elipsy).

Elipsa to jedna z trzech krzywych drugiego stopnia, czyli krzywych, które można opisać równaniem kwadratowym. Pozostałe dwie to hiperbola i parabola.

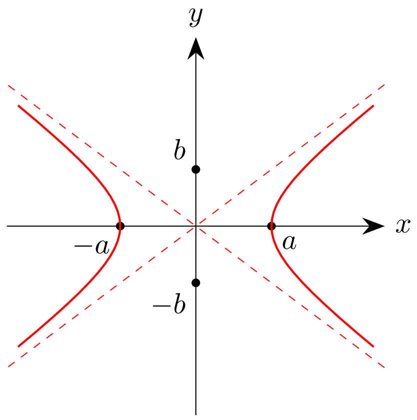
Definicja 1.34: Hiperbola

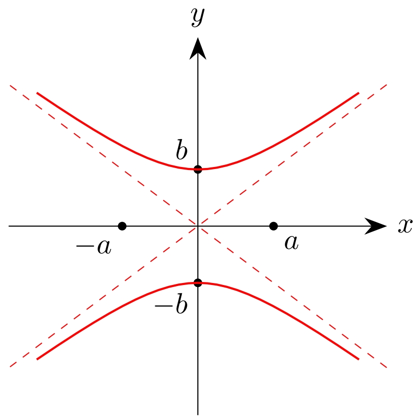
Hiperbolą nazywamy krzywą na płaszczyźnie zadaną[6] równaniem:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{lub} \qquad -\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.23}$$

[5] Bardziej precyzyjnie należałoby napisać: elipsa, to krzywa, która w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych ma równanie (1.22).

[6] Bardziej precyzyjnie należałoby napisać: hiperbola, to krzywa, która w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych ma równanie (1.23).





Zauważmy, że równanie (1.23) można przekształcić do postaci:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{y}{b}\right)^2 \pm 1$$

czyli dla dużych (w sensie wartości bezwględnych) x i y zachodzi:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \approx \left(\frac{y}{b}\right)^2$$

co inaczej można zapisać jako

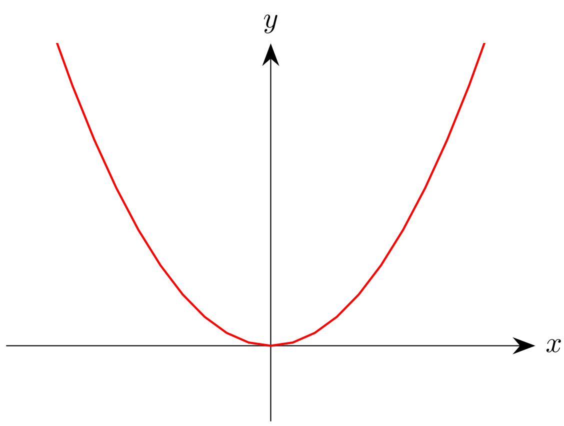
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \qquad \text{lub} \qquad \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$$

które to równania opisują dwie proste przecinające się w punkcie 0. Są to (zaznaczone na powyższych rysunkach) asymptoty hiperboli.

Definicja 1.35: Parabola

Parabolą nazywamy krzywą na płaszczyźnie zadaną[7] (dla pewnego $a \neq 0$) równaniem:

$$y = ax^2 \tag{1.24}$$



Przykład 11

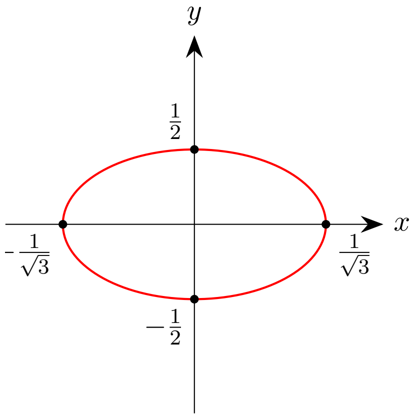
Narysuj krzywą o równaniu $3x^2 + 9y^2 = 1$.

[7] Bardziej precyzyjnie należałoby napisać: parabola, to krzywa, która w odpowiednio dobranym układzie współrzędnych ma równanie (1.24).

Rozwiązanie. Podane równanie możemy przekształcić do postaci (1.22):

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{1}{3}}\right)^2 = 1$$

co jest równaniem elipsy.



Przykład 12

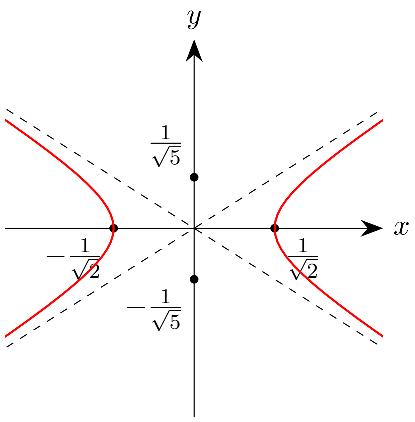
Narysuj krzywą o równaniu $2x^2 - 5y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Podane równanie możemy przekształcić do postaci (1.23):

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right)^2 = 1$$

co jest równaniem hiperboli przechodzącej przez punkty $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$, której asymptotami są proste o równaniach:

$$\frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \qquad \text{czyli} \qquad x\sqrt{2} = \pm y\sqrt{5}$$



1.3 Iloczyn skalarny i wyznacznik

Definicja 1.36: Iloczyn skalarny (geometrycznie)

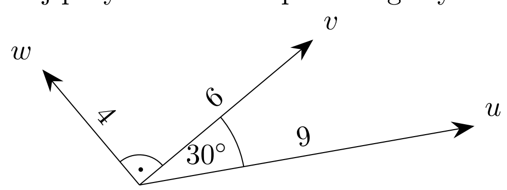
Iloczynem skalarnym wektorów u i v nazywamy liczbę:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) \tag{1.25}$$

gdzie $\angle(u, v)$ oznacza miarę mniejszego z kątów utworzonych przez wektory u i v. Jeśli jeden z wektorów u i v jest zerowy, przyjmujemy $u \circ v = 0$.

Przykład 1

Oblicz iloczyn skalarny każdej pary wektorów z poniższego rysunku.



Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}
v \circ u = u \circ v &= |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) = 9 \cdot 6 \cdot \cos 30^\circ = 27\sqrt{3} \\
w \circ v = v \circ w &= |v| \cdot |w| \cdot \cos \angle(v, w) = 6 \cdot 4 \cdot \cos 90^\circ = 0 \\
u \circ w = w \circ u &= |w| \cdot |u| \cdot \cos \angle(w, u) = 4 \cdot 9 \cdot \cos 120^\circ = -18
\end{aligned}$$

Fakt 1.37: Kąt między wektorami

Jeśli u i v są niezerowymi wektorami, to:

1) $u \circ v > 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest ostry (lub zerowy),
2) $u \circ v = 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest prosty,
3) $u \circ v < 0$, gdy $\angle(u, v)$ jest rozwarty (lub półpełny).

Dowód. Długości niezerowych wektorów są liczbami dodatnimi, więc znak liczby $u \circ v$ jest taki sam jak znak liczby $\cos \angle(u, v)$. Ponadto dla kąta $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ zachodzi:

1) $\cos \theta > 0$, gdy $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$,
2) $\cos \theta = 0$, gdy $\theta = 90^\circ$,
3) $\cos \theta < 0$, gdy $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

Są to wszystkie możliwości, gdyż $\angle(u, v) \in [0^\circ, 180^\circ]$. □

Fakt 1.38: Nierówność Schwarza

Dla dowolnych wektorów u i v na płaszczyźnie zachodzi nierówność:

$$|u \circ v| \leq |u| \cdot |v| \tag{1.26}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe.

Dowód. Ponieważ $\cos\theta \in [-1, 1]$ dla dowolnego kąta θ, więc jeśli żaden z wektorów u i v nie jest wektorem zerowym, to:

$$|u \circ v| = |u| \cdot |v| \cdot |\cos\angle(u, v)| \leq |u| \cdot |v| \cdot 1 = |u| \cdot |v|$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|\cos\angle(u, v)| = 1$ (czyli kąt między wektorami u i v to $0°$ lub $180°$, tzn. wektory te są współliniowe).
Jeśli jeden z wektorów u i v jest wektorem zerowym, to $|u \circ v| = |u| \cdot |v| = 0$ (czyli we wzorze (1.26) zachodzi równość). Ponieważ jednak w Definicji 1.13 przyjęliśmy, że wektor zerowy jest współliniowy z każdym wektorem, więc w tym przypadku wektory u i v również są współliniowe. □

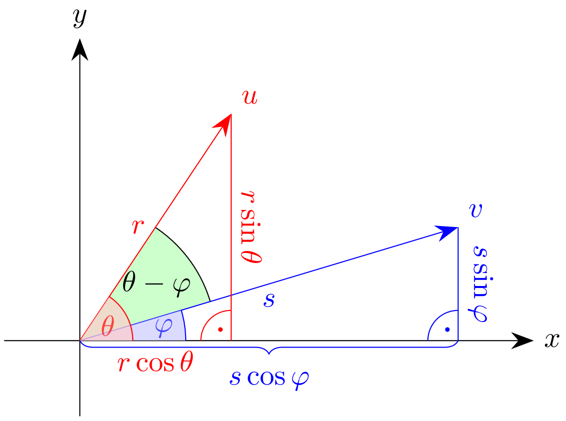
Wyprowadzimy teraz wzór pozwalający wyliczać iloczyn skalarny wektorów bez znajomości miary kąta między nimi, jedynie przy pomocy ich współrzędnych.

Fakt 1.39: Iloczyn skalarny (algebraicznie)

Iloczynem skalarnym wektorów $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ jest liczba:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{1.27}$$

Dowód. Oznaczmy długości wektorów u i v przez r i s, zaś kąty jakie tworzą z dodatnią półosią Ox przez θ i φ. Przyjmijmy, że u i v leżą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych oraz $\theta > \varphi$ (pozostałe przypadki pozostawiamy do rozpatrzenia czytelnikowi).



Z definicji funkcji sin i cos wyznaczamy współrzędne wektorów u i v:

$$u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

Powyższy zapis nazywamy *postacią biegunową* wektorów u i v. Kąt między tymi wektorami to $\theta - \varphi$, więc:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\angle(u, v) = r \cdot s \cdot \cos(\theta - \varphi) = rs \cdot (\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)$$

$$= (r\cos\theta)(s\cos\varphi) + (r\sin\theta)(s\sin\varphi) = x_1x_2 + y_1y_2$$

□

Pojęcie *postaci biegunowej* wektora użyte w powyższym dowodzie jeszcze wielokrotnie pojawi się w kolejnych rodziałach, dlatego powtórzymy je w następującym fakcie:

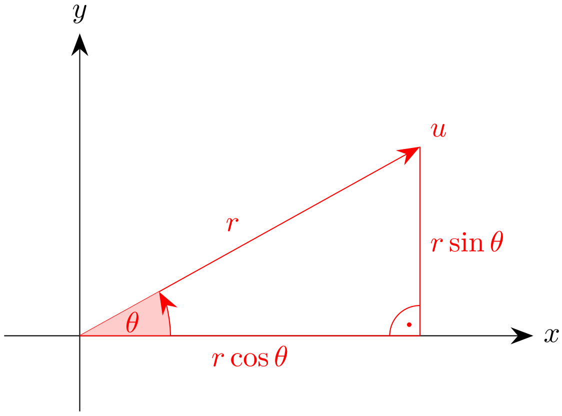
Fakt 1.40: Postać biegunowa wektora

Wektor u (na płaszczyźnie) o długości r, tworzący kąt θ z dodatnią półosią osi Ox ma współrzędne:

$$u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Przedstawienie (1.29) nazywamy *postacią biegunową* wektora u. Wektor długości $r = 1$ nazywamy *wektorem jednostkowym.*

Dowód. Dla wektora u znajdującego się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wynika to z poniższego rysunku. Dowód w pozostałych przypadkach pozostawiamy czytelnikowi.



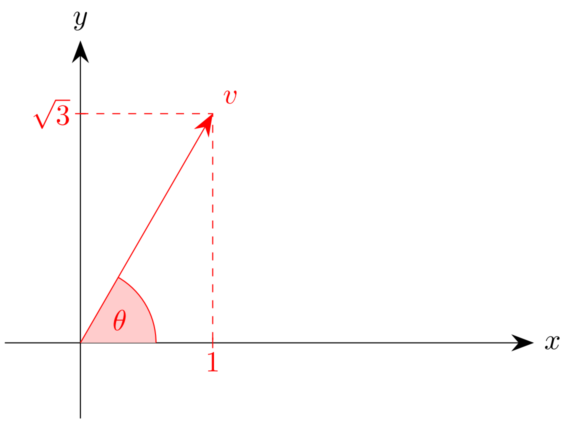
□

Przykład 2

Zapisz wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ w postaci biegunowej.

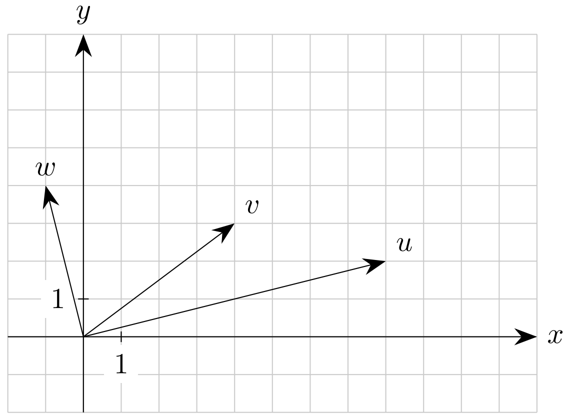
Rozwiązanie. Długość wektora v to $r = |v| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Kąt θ między v a dodatnią półosią Ox spełnia warunek $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$, skąd $\theta = 60°$. Zatem postać biegunowa wektora to

$$v = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 60° \\ 2 \cdot \sin 60° \end{pmatrix}$$



Przykład 3

Oblicz iloczyn skalarny każdej pary wektorów z poniższego rysunku.



Rozwiązanie. Odczytując z rysunku współrzędne wektorów otrzymujemy:

$$v \circ u = u \circ v = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 38$$

$$w \circ v = v \circ w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 8$$

$$u \circ w = w \circ u = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 0$$

Przy pomocy Faktu 1.39 możemy wyznaczyć miarę kąta między dwoma wektorami, których współrzędne są znane:

Fakt 1.41: Kąt między wektorami

Jeśli θ jest kątem między niezerowymi wektorami u i v na płaszczyźnie, to:

$$\cos\theta = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} \tag{1.30}$$

Dowód. Wzór (1.30) jest inną postacią wzoru (1.25) definiującego iloczyn skalarny. □

Przykład 4

Wyznacz miarę kąta θ między wektorami u i v z Przykładu 3 i ustal czy jest to kąt ostry, prosty czy rozwarty.
Rozwiązanie.

$$\cos\theta = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} = \frac{38}{\sqrt{8^2+2^2} \cdot \sqrt{4^2+3^2}} = \frac{38}{\sqrt{68} \cdot 5} = \frac{38}{10\sqrt{17}} = \frac{19\sqrt{17}}{85}$$

Ponieważ wiemy, że szukany kąt θ należy do przedziału $[0, \pi]$, więc podanie wartości $\cos\theta$ jednoznacznie wyznacza kąt θ. Odpowiedzią jest zatem:

$$\theta \text{ to taki kąt z przedziału } [0,\pi], \text{ że } \cos\theta = \tfrac{19\sqrt{17}}{85}$$

co inaczej[8] zapisujemy $\theta = \arccos \frac{19\sqrt{17}}{85}$. Jest to kąt ostry, bo $\cos\theta > 0$.

Przykład 5

Sprawdź czy trójkąt o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}$ jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny.

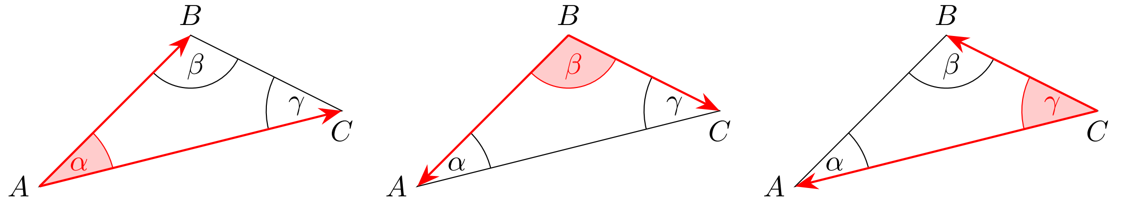
Rozwiązanie. Wystarczy ustalić znaki odpowiednich iloczynów skalarnych:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} = 32 + 8 = 40 > 0, \qquad \text{czyli } \alpha < 90^\circ$$

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = -16 + 8 = -8 < 0, \qquad \text{czyli } \beta > 90^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} = 32 - 4 = 28 > 0, \qquad \text{czyli } \gamma < 90^\circ$$

Zatem trójkąt ABC jest rozwartokątny. Zwróćmy uwagę, że znalezienie w trójkącie kąta prostego lub rozwartego jednoznacznie klasyfikuje trójkąt, dlatego trzecie z wyliczeń było zbędne.



Poniższy fakt przedstawia najważniejsze własności iloczynu skalarnego.

Fakt 1.42: Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych wektorów u, v, w (na płaszczyźnie) i dowolnego skalara t zachodzi:

1) $u \circ v = v \circ u$ ($\circ$ jest przemienny)
2) $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$ ($\circ$ jest rozdzielny względem $+$)
   $(v + w) \circ u = v \circ u + w \circ u$
3) $(tu) \circ v = u \circ (tv) = t(u \circ v)$
4) $u \circ u = |u|^2$
5) $u \circ v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \perp v$
   (przyjmujemy przy tym, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora).

Dowód. Własność (1) jest bezpośrednią konsekwencją wzoru (1.25), podobnie własność (4) (kąt o pokrywających się ramionach ma miarę 0):

$$u \circ u = |u| \cdot |u| \cdot \cos 0 = |u|^2$$

Podobnie zauważamy, że $|u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\cos(u, v) = 0 \text{ (tzn. } u \perp v) \text{ lub } u = 0 \text{ lub } v = 0$$

Ponieważ przyjmujemy, że wektor 0 jest prostopadły do każdego wektora, więc dwie ostatnie możliwości ($u = 0$ lub $v = 0$) zawierają się w pierwszej ($u \perp v$), co dowodzi własności (5).

[8]Funkcja arccos (czyt. *arkus kosinus*) to funkcja odwrotna do funkcji cos, tzn. $\arccos x$ to taki kąt $\theta \in [0, \pi]$, że $\cos\theta = x$. Każdy kalkulator naukowy wylicza tę funkcję, choć czasami opisana jest ona jako $\cos^{-1}$.

Włanośći (2) i (3) wynikają z algebraicznej charakteryzacji iloczynu skalarnego (1.27). Ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny (własność (1)), wystarczy sprawdzić tylko jedną z równości z punktu (2). Przyjmując $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ dostajemy:

$$u \circ (v + w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3)$$

$$= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = u \circ v + u \circ w$$

Dowód własności (3) jest podobny i pozostawiamy go czytelnikowi. □

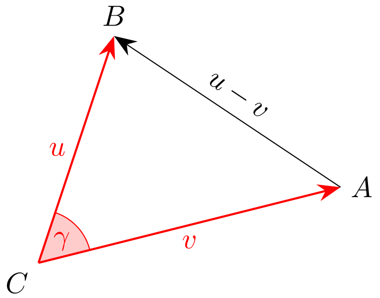
Wyprowadzone powyżej własności umożliwią nam udowodnienie Twierdzenia cosinusów:

Twierdzenie 1.43: Twierdzenie cosinusów

Jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, a γ miarą kąta naprzeciwko boku c, to:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{1.31}$$

Dowód. Oznaczmy wierzchołki trójkąta A, B, C i rozważmy wektory: $u = \overrightarrow{CB}$, $v = \overrightarrow{CA}$.



Wówczas:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -v + u = u - v$$

Wykorzystując Fakt 1.42 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |u - v|^2 = (u - v) \circ (u - v) && \text{(własność (4))} \\ &= u \circ (u - v) - v \circ (u - v) = (u \circ u - u \circ v) - (v \circ u - v \circ v) && \text{(własność (2)} \\ &= u \circ u + v \circ v - 2 \cdot u \circ v && \text{(własność (1))} \\ &= |u|^2 + |v|^2 - 2(u \circ v) = |CB|^2 + |CA|^2 - 2 \cdot |CB| \cdot |AB| \cdot \cos \gamma && \text{(własność (4))} \end{aligned}$$

Przyjmując $a = |CB|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ otrzymujemy wzór (1.31). □

Przykład 6

Dany jest (niezerowy) wektor $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Znajdź:

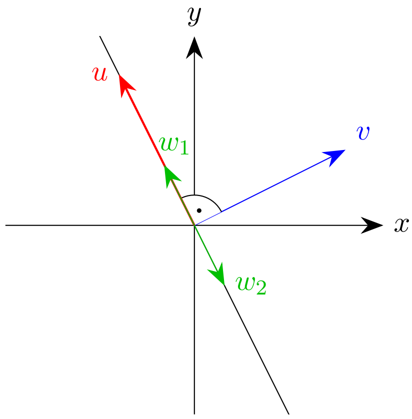
(a) jakikolwiek wektor prostopadły do v,

(b) wszystkie wektory prostopadłe do v,

(c) wektor jednostkowy (tzn. wektor długości 1) prostopadły do v.

Rozwiązanie. Przykładem takiego wektora jest wektor $u = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, gdyż:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$$



Pozostałe wektory prostopadłe do v są współliniowe z u, czyli są postaci $tu = t \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix}$ dla pewnego t rzeczywistego. Szukamy wśród nich wektora długości 1:

$$\left| \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \right| = 1, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{(-bt)^2 + (at)^2} = 1$$

Stąd dostajemy:

$$t^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}, \quad \text{czyli} \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Są więc dwa jednostkowe wektory prostopadłe do wektora $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

Fakt 1.44: Wektor normalny prostej

Wektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest prostopadły do prostej ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$. Wektor ten nazywamy *wektorem normalnym* prostej ℓ.

Dowód. Niech $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ i $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ leżą na prostej ℓ. Wówczas:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

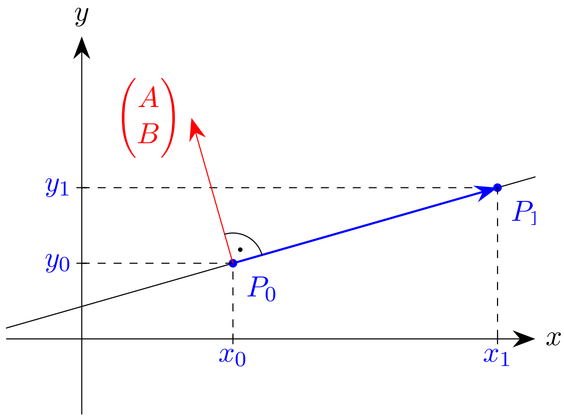
Odejmując stronami równania (1.32) otrzymujemy

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$$

co możemy przepisać w następującej postaci:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{czyli} \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \circ \overrightarrow{P_0P_1} = 0$$

Zgodnie z Faktem 1.42(5) oznacza to, że wektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{P_0P_1}$ (wektora kierunkowego prostej), czyli jest prostopadły do rozważanej prostej.



□

Dla lepszego zrozumienia zależności między wektorem normalnym prostej a jej wektorem kierunkowym, przyjrzyjmy się jeszcze raz operacjom zamiany równania parametrycznego na ogólne i na odwrót.

Przykład 7

Zamień postać parametryczną równania prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ na postać ogólną.

Rozwiązanie. Z postaci parametrycznej odczytujemy wektor kierunkowy: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ jest do niego prostopadły, więc jest wektorem normalnym. Stąd ogólne równanie ma postać:

$$5x - y + C = 0$$

Wiedząc (z postaci parametrycznej), że punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ leży na tej prostej, znajdujemy $C = -13$.

Przykład 8

Zamień postać ogólną równania prostej $2x - 3y + 7 = 0$ na postać parametryczną.

Rozwiązanie. Z postaci ogólnej odczytujemy wektor normalny: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, jako prostopadły do wektora normalnego, jest zatem wektorem kierunkowym. Znajdując jakikolwiek punkt na prostej, np. $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, dostajemy postać parametryczną:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

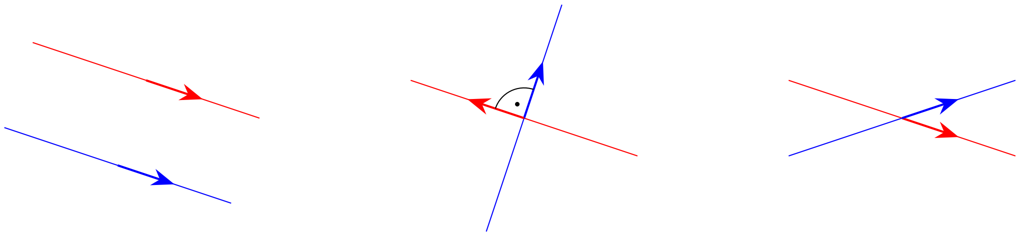
Badanie wzajemnego położenia wektorów kierunkowych lub wektorów normalnych prostych, pozwala na ustalenie wzajemnego położenia samych prostych, co pokazują kolejne dwa fakty.

Fakt 1.45: Proste prostopadłe i proste równoległe

Proste ℓ_0 i ℓ_1 na płaszczyźnie są:

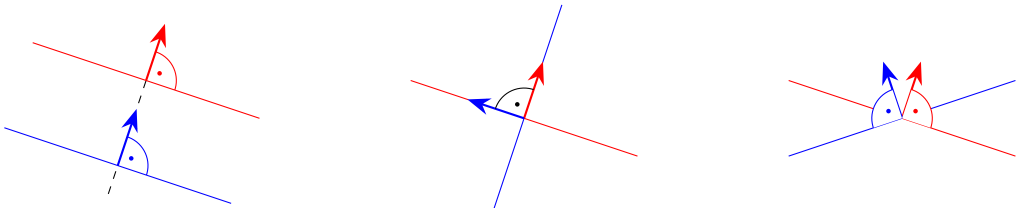
1) równoległe $\Leftrightarrow$ ich wektory kierunkowe są równoległe $\Leftrightarrow$ ich wektory normalne są równoległe;
2) prostopadłe $\Leftrightarrow$ ich wektory kierunkowe są prostopadłe $\Leftrightarrow$ ich wektory normalne są prostopadłe.

Dowód. Poniżej przedstawiono wektory kierunkowe prostych przy różnym położeniu tych prostych:



proste równoległe — proste prostopadłe — proste przecinające się pod kątem ostrym

Na kolejnym rysunku przedstawiono wektory normalne prostych przy różnym położeniu tych prostych:



proste równoległe — proste prostopadłe — proste przecinające się pod kątem ostrym

$\square$

Przykład 9

Dany jest punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ oraz wektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Napisz równanie ogólne prostej:

(a) przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do wektora v,

(b) przechodzącej przez punkt A i równoległej do wektora v,

Rozwiązanie. (a) Równanie prostej prostopadłej do wektora v ma postać $3x + y + C = 0$. Skoro prosta ta przechodzi przez punkt A, to $3+5+C = 0$, skąd $C = -8$, a szukane równanie to $3x + y - 8 = 0$.

(b) Jeśli wektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest równoległy do prostej, to (prostopadły do niego) wektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ jest do tej prostej prostopadły. Zatem równanie szukanej prostej to $-x + 3y + C = 0$. Skoro prosta ta przechodzi przez punkt A, to $-1 + 15 + C = 0$, czyli $C = -14$, a szukane równanie to $-x + 3y - 14 = 0$.

Przykład 10

Napisz równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz

(a) prostopadłej do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$,

(b) równoległej do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$.

Rozwiązanie. (a) Wektor normalny prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$ to $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Wektor do niego prostopadły, czyli $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, to wektor normalny szukanej prostej. Szukana prosta ma więc równanie $3x + 2y + C = 0$. Wiedząc, że prosta ta przechodzi przez A wyznaczamy $C = -7$, co daje równanie $3x + 2y - 7 = 0$.
(b) Proste są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są równoległe, stąd prosta równoległa do prostej o równaniu $2x - 3y + 4 = 0$ ma równanie $2x - 3y + C = 0$. Podobnie jak poprzednio wyliczamy $C = 4$, co daje równanie $2x - 3y + 4 = 0$.

Przykład 11

Napisz równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz

(a) prostopadłej do prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(b) równoległej do prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Wektor kierunkowy szukanej prostej jest prostopadły do $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, więc wektorem tym może być $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Szukana prosta przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, stąd jej równanie parametryczne to $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(b) Szukana prosta ma wektor kierunkowy $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ i przechodzi przez punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, stąd jej równanie parametryczne to $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Fakt 1.45 można uogólnić tak, aby wyznaczyć kąt między dowolną parą prostych badając ich wektory kierunkowe lub normalne:

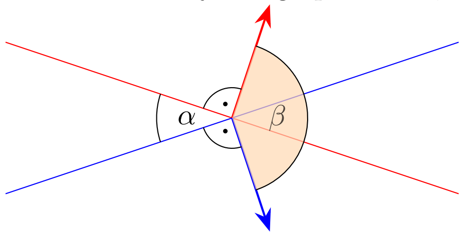
Fakt 1.46: Kąt między prostymi

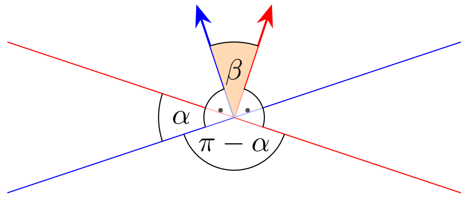
Jeśli dwie proste na płaszczyźnie się przecinają, to tworzą dwie pary równych kątów, o miarach α i $\pi - \alpha$. Wówczas:

1) kąt między wektorami kierunkowymi tych prostych to α lub $\pi - \alpha$,
2) kąt między wektorami normalnymi tych prostych to α lub $\pi - \alpha$.

Dowód. (1) Wektor kierunkowy prostej jest równoległy do tej prostej, więc kąt między wektorami

kierunkowymi to jeden z czterech kątów między prostymi.
(2) Jeśli kąt ostry między prostymi ma miarę α, to kąt β między wektorami normalnymi, w zależności od ich wzajemnego położenia, ma miarę:





$$\beta = 2\pi - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha \qquad \text{lub} \qquad \beta = 2\pi - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha$$

$\square$

Przykład 12

Wyznacz miarę kąta ostrego między prostymi:

(a) zadanymi równaniami ogólnymi $x + 3y - 1 = 0$ i $7x + y - 4 = 0$;

(b) zadanymi równaniami parametrycznymi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Obliczamy cosinus kąta między wektorami normalnymi prostych:

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Wiemy, że proste, które nie są prostopadłe ani równoległe tworzą dwa jednakowe kąty ostre i dwa jednakowe kąty rozwarte. Ponieważ $\cos\theta > 0$, więc $\theta = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ jest kątem ostrym, zaś $\pi - \theta = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ jest[9] kątem rozwartym między prostymi.

(b) Obliczamy cosinus kąta między wektorami kierunkowymi prostych:

$$\cos\theta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1}{5\cdot\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ponieważ $\cos\theta < 0$, więc $\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ jest kątem rozwartym między prostymi, natomiast $\pi - \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$ jest kątem ostrym między prostymi.

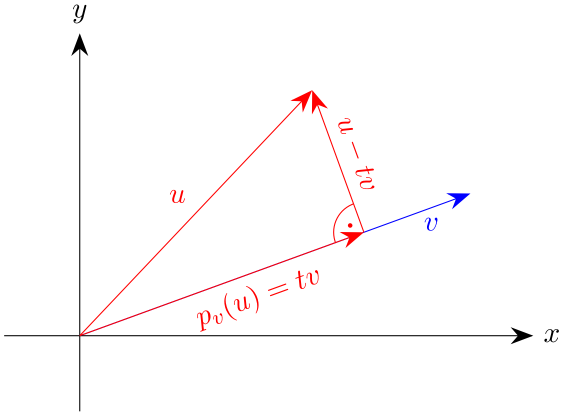
Fakt 1.47: Rzut wektora na wektor

Rzut (prostopadły) wektora u na wektor v jest wektorem

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{u \circ v}{|v|^2} \cdot v \tag{1.33}$$

[9] Znany wzór $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ można zapisać w postaci $\pi - \theta = \arccos(-\cos\theta)$, skąd po podstawieniu $x = \cos\theta$ otrzyjmujemy: $\pi - \arccos x = \arccos(-x)$.

Dowód. Rzut na wektor v jest wektorem postaci $p_v(u) = t \cdot v$, dla pewnego skalara t.



Ponieważ $u - tv \perp v$, więc:

$$(u - tv) \circ v = 0 \quad \text{czyli} \quad (u \circ v) - t(v \circ v) = 0$$

skąd

$$t = \frac{u \circ v}{v \circ v}$$

co dowodzi wzoru (1.33). □

Przykład 13

Wyznacz rzut wektora $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na wektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (1.33) rzut u na v jest wektorem:

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{16}{5} \end{pmatrix}$$

Zwróćmy uwagę, że otrzymany wektor (zgodnie z definicją rzutu) jest współliniowy z wektorem v (na który rzutowaliśmy).

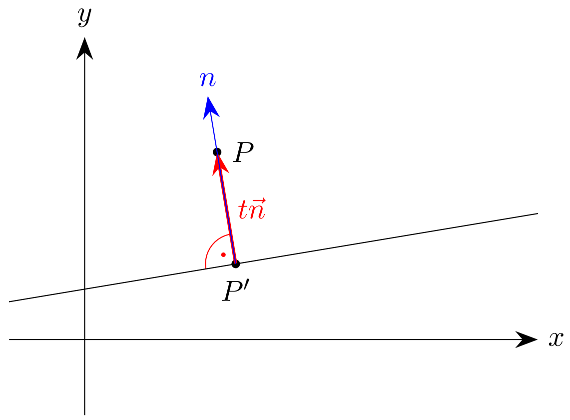
Fakt 1.48: Odległość punktu od prostej

Odległość punktu $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ od prostej ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{1.34}$$

Dowód. Niech punkt $P' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ będzie rzutem punktu P na prostą ℓ. Odległość punktu P od prostej ℓ jest równa długości wektora $\overrightarrow{P'P}$. Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest prostopadły do prostej ℓ, czyli równoległy do wektora normalnego $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Wobec tego $\overrightarrow{P'P} = t \cdot \vec{n}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$, skąd:

$$P = P' + t \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x_0 = x_1 + tA \\ y_0 = y_1 + tB \end{cases}$$



Punkt P' leży na prostej ℓ, czyli:

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$A(x_0 - tA) + B(y_0 - tB) + C = 0$$

skąd

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

Wobec tego odległość punktu P od prostej ℓ wynosi:

$$d = |t\vec{n}| = |t| \cdot |\vec{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

□

Wzór (1.34) możemy również przedstawić w postaci, która w niektórych zastosowaniach będzie dla nas wygodniejsza, wprowadzając pojęcie *znakowanej odległości od prostej*:

Wniosek 1.49: Znakowana odległość od prostej

Dany jest punkt $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ oraz prosta ℓ o równaniu $Ax + By + C = 0$. Wzór:

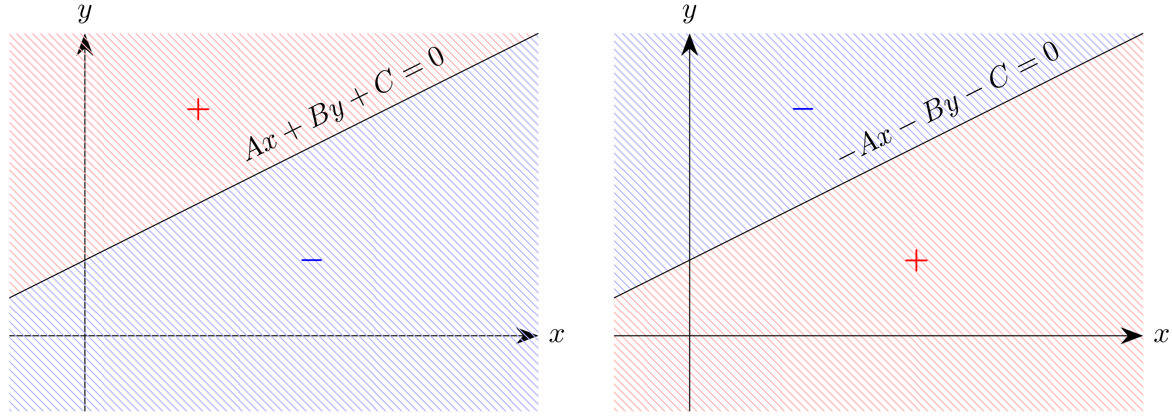
$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{1.35}$$

podaje odległość punktu P od prostej ℓ ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, po której stronie prostej ℓ znajduje się punkt P. Wartość tę nazywamy *znakowaną odległością* punktu od prostej.

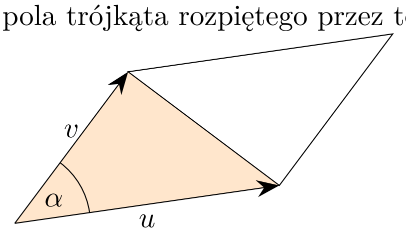
Dowód. Wzór (1.35) różni się od wzoru (1.34) jedynie brakiem wartości bezwzględnej w liczniku, czyli różni się jedynie znakiem. Ponadto, zgodnie z Faktem 1.29, znak liczby po prawej stronie wzoru (1.35) jest dodatni dla punktów leżących po jednej stronie prostej ℓ i ujemny dla punktów leżących po drugiej stronie prostej ℓ. □

Zauważmy, że znak ułamka ze wzoru (1.35) zależy nie tylko od samej prostej, ale od jej konkretnego równania: „dodatnią” stronę prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$ stanowi półpłaszczyzna $Ax + By + C \geq 0$, zaś „ujemną” stroną – półpłaszczyzna $Ax + By + C \leq 0$. Niemniej w przypadku równania $-Ax - By - C = 0$ (które opisuje tę samą prostą) „dodatnią” stronę stanowi półpłaszczyzna $-Ax - By - C \geq 0$, natomiast ujemną $-Ax - By - C \leq 0$ (czyli dokładnie na odwrót).
W praktyce zależność znakowanej odległości od wyboru konkretnego równania prostej okaże się nieistotna, gdyż ze wzoru (1.35) korzystać będziemy jedynia dla ustalenia, czy rozważane

znakowane odległości dwóch punktów są tego samego znaku, nie zaś dla ustalenia, który z nich ma znakowaną odległość ujemną, a który dodatnią.



Rozważmy teraz problem obliczenia pola trójkąta lub pola równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v, jeśli znamy współrzędne tych wektorów. Zauważmy, że pole równoległoboku, jest dokładnie dwa razy większe od pola trójkąta rozpiętego przez te wektory:

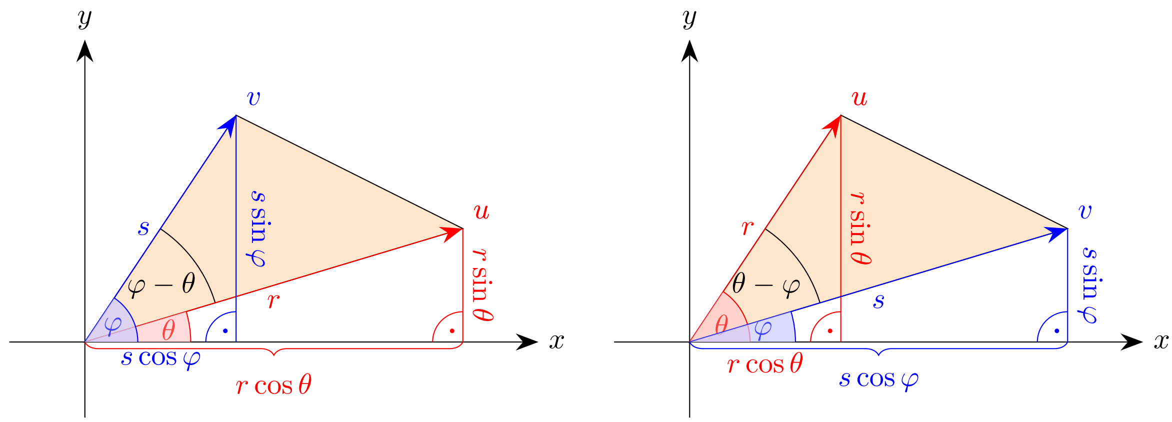


Pole trójkąta można obliczyć ze wzoru:

$$P_\triangle = \tfrac{1}{2}|u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha \tag{1.36}$$

gdzie α to kąt między wektorami u i v. Zapiszmy oba wektory w postaci biegunowej:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \end{pmatrix}$$



W sytuacji na pierwszym rysunku wzór (1.36) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} P_\triangle &= \tfrac{1}{2}rs\sin(\varphi-\theta) = \tfrac{1}{2}rs(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi) \\ &= \tfrac{1}{2}\left((r\cos\theta)(s\sin\varphi) - (r\sin\theta)(s\cos\varphi)\right) = \tfrac{1}{2}(u_1v_2 - u_2v_1) > 0 \end{aligned}$$

a w sytuacji na drugim rysunku:

$$P_\triangle = \tfrac{1}{2}rs\sin(\theta-\varphi) = -\tfrac{1}{2}rs\sin(\varphi-\theta) = -\tfrac{1}{2}(u_1v_2 - u_2v_1) > 0$$

Przyjmując oznaczenie: $\det(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1$ widzimy, że w obu przypadkach $P_\triangle = \frac{1}{2}|\det(u, v)|$, przy czym w sytuacji z pierwszego rysunku $\det(u, v) > 0$, a w sytuacji z drugiego rysunku $\det(u, v) < 0$. Stąd otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 1.50: Wyznacznik (geometrycznie i algebraicznie)

Pole trójkąta rozpiętego przez wektory $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ wynosi $\frac{1}{2}|\det(u, v)|$, zaś pole równoległoboku rozpiętego przez te wektory wynosi $|\det(u, v)|$, gdzie liczbę:

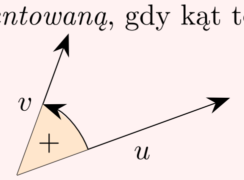
$$\det(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1 \tag{1.37}$$

nazywamy *wyznacznikiem* pary wektorów[10] (u, v).

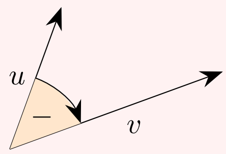
Fakt 1.50 pokazuje interpretację geometryczną wartości bezwzględnej liczby $\det(u, v)$. Znak liczby $\det(u, v)$ zależy od tego, czy wektory u i v ułożone są tak jak na pierwszym, czy jak na drugim rysunku, co podsumowują poniższa definicja i fakt:

Definicja 1.51: Orientacja pary wektorów (geometrycznie)

Parę niewspółliniowych wektorów (u, v) na płaszczyźnie nazywamy *dodatnio zorientowaną*, jeśli kąt wypukły (tzn. mniejszy od 180°) skierowany od u do v jest dodatni, zaś *ujemnie zorientowaną*, gdy kąt ten jest ujemny.



(u, v) dodatnio zorientowana



(u, v) ujemnie zorientowana

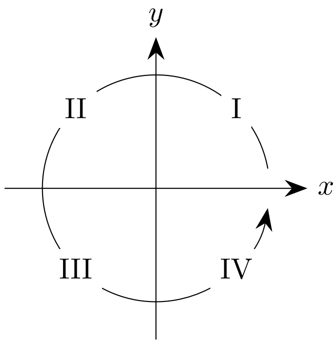
Fakt 1.52: Orientacja pary wektorów (algebraicznie)

Para wektorów (u, v) na płaszczyźnie jest:

1) dodatnio zorientowana, gdy $\det(u, v) > 0$,
2) ujemnie zorientowana, gdy $\det(u, v) < 0$,
3) parą wektorów współliniowych, gdy $\det(u, v) = 0$.

Zwróćmy uwagę, że standardowo za „dodatni” kierunek kąta przyjmuje się kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara, a za „ujemny” – kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara. Zauważmy też, że konwencja numerowania ćwiartek układu współrzędnych jest zgodna z konwencją określającą dodatni kierunek kąta.

[10] W dalszej części skryptu, zazwyczaj, zamiast o wyznaczniku pary wektorów, będziemy mówić o wyznaczniku macierzy 2×2 i zamiast $\det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$ będziemy pisać $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.



Fakty 1.50 oraz 1.52 możemy połączyć w jeden fakt:

Wniosek 1.53: Wyznacznik (geometrycznie)

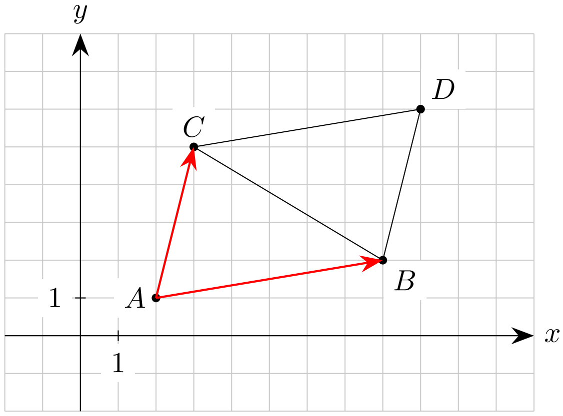
Niech $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ będą wektorami na płaszczyźnie. Wówczas liczba:

$$\det(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

jest *znakowanym polem równoległoboku* rozpiętego przez parę wektorów (u, v) (tzn. polem tego równoległoboku ze znakiem $+$, gdy para (u, v) jest dodatnio zorientowana lub ze znakiem $-$, gdy para (u, v) jest ujemnie zorientowana). Podobnie liczba $\frac{1}{2}\det(u, v)$ oznacza *znakowane pole trójkąta* rozpiętego przez parę wektorów (u, v).

Przykład 14

Wyznacz pole trójkąta ABC oraz równoległoboku $ABDC$ z poniższego rysunku.



Rozwiązanie. Zarówno trójkąt ABC jak i równoległobok $ABDC$ rozpięte są przez wektory $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 1.50 pole równoległoboku wynosi:

$$|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \left|\det\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\right| = |24 - 1| = 23$$

zaś pole trójkąta jest dwukrotnie mniejsze i wynosi $\frac{1}{2} \cdot 23 = 11\frac{1}{2}$.

Fakt 1.54: Zamiana kolumn wyznacznika

Zamiana kolejności wektorów (kolumn) zmienia znak wyznacznika, tzn.

$$\det(u,v) = -\det(v,u)$$

Dowód. Zmiana kolejności niewspółliniowych wektorów zmienia orientację tej pary wektorów. Jeśli natomiast wektory u i v są współliniowe, to obie strony równości wynoszą 0. □

Przykład 15

Dane są wektory $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$. Ustal która z par (u,v) i (v,u) jest dodatnio, a która ujemnie zorientowana.
Rozwiązanie. Ponieważ

$$\det(u,v) = \det\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}\right) = 7 - 6 = 1 > 0$$
$$\det(v,u) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 6 - 7 = -1 < 0$$

więc para (u,v) jest dodatnio zorientowana, a para (v,u) jest ujemnie zorientowana.

Następujący fakt uogólnia wzór na pole trójkąta podany w Fakcie 1.50:

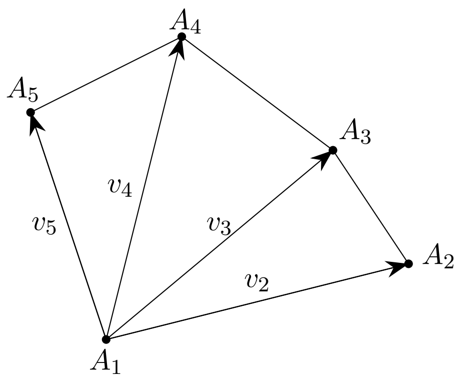
Fakt 1.55: Pole wielokąta

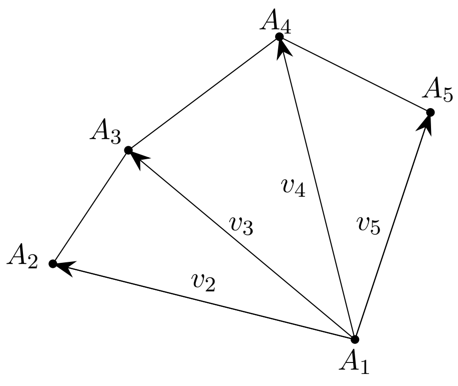
Na płaszczyźnie dany jest wielokąt $A_1A_2\ldots A_n$. Jeśli oznaczymy $v_i = \overrightarrow{A_1A_i}$, to pole tego wielokąta wynosi:

$$\tfrac{1}{2}|\det(v_2,v_3) + \det(v_3,v_4) + \cdots + \det(v_{n-1},v_n)| \qquad (1.38)$$

Dowód. Udowodnimy ten fakt dla wielokątów wypukłych. Przyjmijmy $n = 5$ (dowód w pozostałych przypadkach jest analogiczny). Pole P pięciokąta wypukłego $A_1A_2A_3A_4A_5$ można przedstawić jako sumę pól trzech trójkątów:

$$P = P_{\triangle A_1A_2A_3} + P_{\triangle A_1A_3A_4} + P_{\triangle A_1A_4A_5}$$

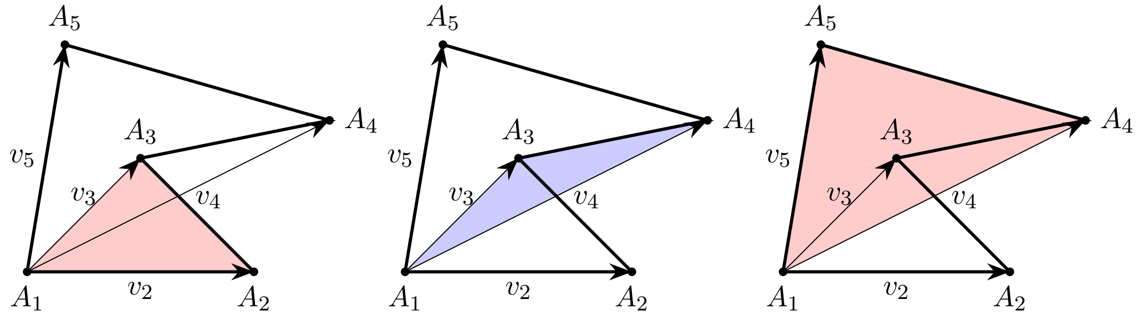




Wszystkie pary (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_5) są jednakowo zorientowane (dodatnio, jak na pierwszym rysunku lub ujemnie, jak na drugim), więc:

$$P = \pm\tfrac{1}{2}(\det(v_2,v_3) + \det(v_3,v_4) + \det(v_4,v_5))$$

gdzie wybór znaku + lub − zależy od (jednakowej) orientacji wszystkich trzech par wektorów. Ponieważ pole jest liczbą dodatnią, więc w każdym przypadku prowadzi to do wzoru (1.38).
Dowód dla wielokątów wklęsłych jest trudniejszy i wykracza poza ramy niniejszego skryptu. Nie przedstawimy tego dowodu, natomiast pokażemy jego ideę na przykładzie pewnego pięciokąta wklęsłego:

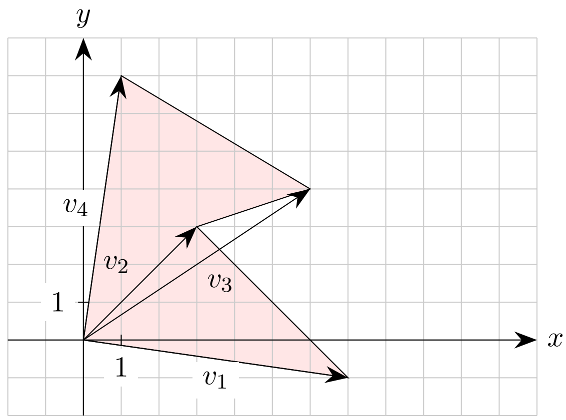


$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\det(v_2,v_3) & +\frac{1}{2}\det(v_3,v_4) & +\frac{1}{2}\det(v_4,v_5) \\ P_{\triangle A_1A_2A_3} & -P_{\triangle A_1A_3A_4} & +P_{\triangle A_1A_4A_5} \end{array}}_{P_{A_1A_2A_3A_4A_5}}$$

Pole rozważanego pięciokąta wklęsłego powstaje przez dodanie pól dwóch trójkątów i odjęcie pola trzeciego trójkąta, co przekłada się na sumę trzech wyznaczników. □

Przykład 16

Oblicz pole wielokąta z poniższego rysunku.



Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (1.38) pole to jest równe:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|\det(v_1,v_2)+\det(v_2,v_3)+\det(v_3,v_4)| \\ =&\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}7 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}6 & 1\\ 4 & 7\end{pmatrix}\right| \\ =&\frac{1}{2}\cdot|24-6+38| = 28 \end{aligned}$$

Rozdział 2

Przekształcenia płaszczyzny

2.1 Macierze

Definicja 2.1: Macierz

Macierzą rozmiaru $m \times n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb o m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liczby z tej tablicy nazywamy *wyrazami macierzy*. Macierz o jednakowej liczbie wierszy i kolumn nazywamy *macierzą kwadratową*.

W części I (dotyczącej przestrzeni 2-wymiarowych) będziemy rozważać jedynie macierze o co najwyżej 2 wierszach i co najwyżej 2 kolumnach, czyli macierze następujących rozmiarów:

$$\underset{\text{macierz } 2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{macierz } 2\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{macierz } 1\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{macierz } 1\times 1}{(7)}$$

Jak widać wektor $v \in \mathbb{R}^2$ można traktować jako szczególny przypadek macierzy (rozmiaru 2×1, tzn. mającej 2 wiersze i 1 kolumnę). Podobnie liczby rzeczywiste można traktować jako macierze rozmiaru 1×1 (tzn. mające 1 wiersz i 1 kolumnę).

Na zbiorze macierzy tego samego rozmiaru (np. na zbiorze macierzy 2×2) można wprowadzić dwa działania: dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar.

Definicja 2.2: Dodawanie macierzy

Dodawanie macierzy 2×2 definiujemy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Analogicznie definiujemy dodawanie jakichkolwiek dwóch macierzy tego samego rozmiaru (np. macierzy 2×1 lub macierzy 1×2).

Definicja 2.3: Mnożenie macierzy przez skalary

Mnożenie macierzy 2×2 przez skalary definiujemy w następujący sposób:

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$$

Macierzą przeciwną do $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy macierz $(-1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.
Analogicznie definiujemy mnożenie macierzy innych rozmiarów przez skalary oraz macierze przeciwne do macierzy innych rozmiarów.

Zauważmy, że Definicje 2.2 i 2.3 stanowią uogólnienie zarówno działań na wektorach (patrz Fakt 1.8 i Fakt 1.9) traktowanych jako macierze 2×1, jak i działań na liczbach rzeczywistych, traktowanych jako macierze 1×1. *Macierz zerową* (którą oznaczamy zazwyczaj symbolem 0, tym samym co liczbę zero, bądź wektor zerowy) definiujemy podobnie jak wektor zerowy:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prawa działań na macierzach są analogiczne do opisanych w Fakcie 1.12 praw działań na wektorach:

Fakt 2.4: Własności działań na macierzach

Dla dowolnych macierzy A, B, C (tego samego rozmiaru) oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

1) $A + B = B + A$ (+ jest przemienne)
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (+ jest łączne)
3) $0 + A = A + 0 = A$ (0 jest elementem neutralnym +)
4) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ jest elementem przeciwnym do A)
5) $(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
6) $t \cdot (A + B) = t \cdot A + t \cdot B$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
7) $s \cdot (tA) = (st) \cdot A$ (mnożenie skalarów jest łączne)
8) $1 \cdot A = A$ (1 jest elementem neutralnym mnożenia przez skalar)

Dowód. Pokażemy dowód łączności dodawania dla macierzy 2×2. Dowody pozostałych własności oraz dowód łączności dodawania dla macierzy innych rozmiarów przebiegają analogicznie i ich przeprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$. Wyliczmy lewą i prawą stronę wzoru (2):

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' + a'' & b + b' + b'' \\ c + c' + c'' & d + d' + d'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' + a'' & b' + b'' \\ c' + c'' & d' + d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' + a'' & b + b' + b'' \\ c + c' + c'' & d + d' + d'' \end{pmatrix}$$

W ten sposób wykazaliśmy równość obu stron wzoru. □

Na zbiorze macierzy można również wprowadzić trzecią operację (nie mającą odpowiednika wśród działań na wektorach): mnożenie macierzy. W odróżnieniu od dodawania (które zachowuje rozmiar macierzy), mnożenie może dawać w wyniku macierz innego rozmiaru niż rozmiary czynników. Co więcej, warunek wykonalności mnożenia macierzy jest zupełnie inny niż dla dodawania macierzy (gdzie potrzeba i wystarcza, by macierze były tego samego rozmiaru). Mnożenie dwóch macierzy jest wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\text{liczba kolumn pierwszej macierzy} = \text{liczba wierszy drugiej macierzy} \tag{2.1}$$

Poniższa definicja mnożenia macierzy pokazuje skąd bierze się warunek (2.2):

Definicja 2.5: Mnożenie macierzy

Iloczyn macierzy 2×2 definiujemy w nastepujący sposób:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

(wyraz w i-tym wierszu i j-tej kolumnie wynikowej macierzy jest sumą iloczynów odpowiednich wyrazów i-tego wiersza pierwszej macierzy i j-tej kolumny drugiej macierzy). Iloczyn macierzy innych rozmiarów (spełniających warunek (2.2)) definiujemy analogicznie, w szczególności:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Przykład 1

Oblicz następujące iloczyny macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wykonywanie mnożenia macierzy może być wygodniejsze, jeśli wynik mnożenia (czerwony) będziemy zapisywali na prawo od pierwszego czynnika i pod drugim czynnikiem.

(a) $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$, (b) $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{array}$, (c) $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$

Zwróćmy uwagę, że mnożenie macierzy **nie jest przemienne**. Po pierwsze, zdarza się, że z mnożeń $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ tylko jedno jest wykonalne (np. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ jest wykonalne, natomiast $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ już nie jest). Po drugie, nawet gdy oba mnożenia są wykonalne, mogą one dawać różne wyniki, co pokazuje kolejny przykład.

Przykład 2

Obliczyć iloczyny $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak widać $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Fakt 2.6: Własności mnożenia macierzy

Jeśli A, B i C są takimi macierzami, że mnożenia $A \cdot B$ i $B \cdot C$ są wykonalne, zaś t jest dowolnym skalarem, to:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (· jest łączne)
2) $t \cdot (A \cdot B) = (tA) \cdot B = A \cdot (tB)$
3) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (· jest rozdzielne względem +)
4) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (· jest rozdzielne względem +)

Dowód. (1) Rozważmy przypadek, gdy A, B i C są macierzami 2×2:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'a'' + bc'a'' + ab'c'' + bd'c'' & aa'b'' + bc'b'' + ab'd'' + bd'd'' \\ ca'a'' + dc'a'' + cb'c'' + dd'c'' & ca'b'' + dc'b'' + cb'd'' + dd'd'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'a'' + b'c'' & a'b'' + b'd'' \\ c'a'' + d'c'' & c'b'' + d'd'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right)$$

Dowód dla macierzy innych rozmiarów oraz dowody własności (2)–(4) przebiegają podobnie i ich przeprowadzenie pozostawiamy czytelnikowi. □

Ważnym przykładem macierzy są macierze diagonalne. Mnożenie macierzy diagonalnych, a w konsekwencji ich potęgowanie, wykonuje się wyjątkowo prosto (podczas gdy potęgowanie dowolnej macierzy kwadratowej jest trudnym zadaniem):

Definicja 2.7: Macierz diagonalna

Macierz kwadratową nazywamy *macierzą diagonalną*, jeśli wszystkie jej wyrazy poza główną przekątną (diagonalą) są zerowe. Innymi słowy, macierz 2×2 jest diagonalna, jeśli jest postaci:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a i b.

Fakt 2.8: Mnożenie macierzy diagonalnych

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi warunek:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Macierz identycznościowa jest szczególnie ważnym przykładem macierzy diagonalnej i pełni wśród macierzy rolę „jedynki".

Fakt 2.9: Macierz identycznościowa

Macierz $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwana *macierzą identycznościową* jest elementem neutralnym mnożenia macierzy, tzn.

1) $A \cdot I = A$, dla dowolnej macierzy A, dla której mnożenie jest wykonalne (np. $A \in M_{2\times2}$ lub $A \in M_{1\times2}$),
2) $I \cdot B = B$, dla dowolnej macierzy B, dla której mnożenie jest wykonalne (np. $B \in M_{2\times2}$ lub $B \in M_{2\times1}$).

Dowód. Nietrudno sprawdzić, że:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sprawdzenie dla macierzy A i B innych rozmiarów pozostawiamy czytelnikowi. □

Z uwagi na nieprzemienność mnożenia macierzy nie będziemy definiować dzielenia macierzy, ale zdefiniujemy macierz odwrotną:

Definicja 2.10: Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy $A \in M_{2\times2}$ nazywamy taką macierz $A^{-1} \in M_{2\times2}$, że[1]

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Macierz A, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy *macierzą odwracalną*.

Nie każda macierz jest odwracalna. Oczywistym przykładem macierzy nieodwracalnej jest macierz zerowa, ale macierzy nieodwracalnych jest znacznie więcej, o czym przekonamy się w poniższym przykładzie:

Przykład 3

Wyznacz macierze odwrotne do poniższych macierzy albo ustal, że są one nieodwracalne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. (a) Macierz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ odwrotna do macierzy A musiałaby spełniać warunek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ x + 3z = 0 \\ y + 3t = 1 \end{cases}$$

[1] Ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy definicja musi zawierać dwa warunki: $A \cdot A^{-1} = I$ oraz $A^{-1} \cdot A = I$.

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że rzeczywiście:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

co dowodzi, że $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Macierz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ odwrotna do macierzy B musiałaby spełniać warunek:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + 4z = 1 \\ 2y + 4t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y + 2t = 1 \end{cases}$$

Nietrudno przekonać się, że powyższy układ równań jest sprzeczny, co oznacza, że macierz B jest nieodwracalna.

Fakt 2.11: Własności macierzy odwrotnych

Dla dowolnych odwracalnych macierzy A i B rozmiaru 2×2 zachodzą warunki:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dowód. (1) Z uwagi na symetrię, warunek:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

oznacza zarówno, że A^{-1} jest macierzą odwrotną do A, jak i że A jest macierzą odwrotną do A^{-1}, tzn. $A = (A^{-1})^{-1}$.
(2) Na mocy prawa łączności mnożenia macierzy:

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$
$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

czyli macierze $B^{-1}A^{-1}$ i AB są wzajemnie odwrotne. □

Brak dzielenia macierzy będziemy zastępować mnożeniem przez macierz odwrotną. Zasadniczym powodem jest potrzeba odróżniania iloczynu $A \cdot B^{-1}$ od iloczynu $B^{-1} \cdot A$ (gdyby mnożenie było przemienne, każdy z tych iloczynów nazywalibyśmy ilorazem A i B).
Zdefiniowawszy mnożenie macierzy, możemy zdefiniować potęgowanie o wykładniku naturalnym:

Definicja 2.12: Potęgowanie macierzy

Potęgą macierzy A rozmiaru 2×2 o wykładniku całkowitym dodatnim n nazywamy macierz:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$

Potęgą odwracalnej macierzy A rozmiaru 2×2 o wykładniku całkowitym ujemnym $-n$ $(n > 0)$ nazywamy macierz:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1}}_{n}$$

Przyjmujemy przy tym $A^1 = A$ oraz $A^0 = I$. Macierz odwrotna A^{-1} to równocześnie potęga macierzy A o wykładniku -1.

Potęgowanie macierzy spełnia analogiczne własności jak potęgowanie liczb rzeczywistych, tzn.

Fakt 2.13: Własności potęgowania macierzy

Dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych m i n oraz dowolnej macierzy A rozmiaru 2×2 zachodzą własności:

1) $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$
2) $(A^n)^m = A^{nm}$

Jeśli macierz A jest odwracalna, powyższe własności zachodzą dla dowolnych całkowitych m i n

Dowód. Gdy $m, n > 0$ własność (1) wynika z równości:

$$\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m} \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n} = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{m+n}$$

a własność (2) wynika z równości:

$$\underbrace{\underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n} \cdot \ldots \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n}}_{m} = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n \cdot m}$$

Dowód w pozostałych przypadkach pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Zwróćmy uwagę, że własność:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

wyprowadzona w Fakcie 2.11 jest szczególnym przypadkiem Faktu 2.13(2).

Wyznaczanie potęgi macierzy (zwłaszcza o dużym wykładniku) jest dość pracochłonne dla dowolnej macierzy, ale niezwykle proste dla macierzy diagonalnych. Fakt ten będziemy wykorzystywać w dalszych rozdziałach i będzie on motywacją do wprowadzenia narzędzia zwanego *diagonalizacją macierzy*.

Fakt 2.14: Potęgowanie macierzy diagonalnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dla dowolnej[2] liczby całkowitej n zachodzi warunek:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

W szczególności:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

Dowód. Przypadek $n \geq 1$ wynika ze wzoru (2.3). Przypadek $n = 0$ jest konsekwencją wzoru $A^0 = I$ prawdziwego dla dowolnej macierzy A rozmiaru 2×2. Dla uzasadnienia przypadku $n < 0$ wystarczy sprawdzić, że macierze $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ są wzajemnie odwrotne. To nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a^{-1} & 0 \\ 0 & b \cdot b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Wyznacznik pary wektorów zdefiniowany wzorem (1.37) można traktować jako wyznacznik macierzy rozmiaru 2×2, jeśli rozważane wektory przyjmiemy za kolumny macierzy. Stąd następująca definicja (zwróćmy uwagę, że wzór (2.4) jest przy tym rozumieniu tożsamy ze wzorem (1.37)):

Definicja 2.15: Wyznacznik macierzy 2×2

Wyznacznikiem macierzy 2×2 nazywamy liczbę zdefiniowaną następującym wzorem:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \tag{2.4}$$

Najważniejsze własności wyznacznika macierzy podsumowuje następujący fakt:

Fakt 2.16: Własności wyznacznika

Dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 2×2 zachodzą wzory:

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
2) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Dowód. Dowód (1) można przeprowadzić sprawdzając rachunkowo, za pomocą wzorów (2.2) oraz (2.4), że:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Dowód nie wymagający rachunków będziemy mogli przeprowadzić po przedstawieniu (w kolejnych rozdziałach) geometrycznej interpretacji wyznacznika macierzy jako współczynnika skalowania pól przez przekształcenie liniowe.

[2] Jeśli $a = 0$ lub $b = 0$ to musimy dodatkowo założyć, że n jest liczbą nieujemną.

Z (1) wynika, że:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

Stąd otrzymujemy wzór (2). $\square$

Macierze 2×2 pozwalają na wyprowadzenie wygodnego wzoru na rozwiązanie układu dwóch równań liniowych z dwoma niewiadomymi.

Fakt 2.17: Wzory Cramera

Dany jest następujący układ równań z niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \tag{2.5}$$

w którym zakładamy, że przynajmniej jeden ze współczynników a, b, c, d jest niezerowy. Wyznacznik $D = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu (2.5).

1) Jeśli $D \neq 0$, to układ (2.5) ma jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \quad \text{gdzie } D_x = \det \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix} \text{ oraz } D_y = \det \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$$

2) Jeśli $D = 0$ oraz $D_x \neq 0$ i $D_y \neq 0$, to układ (2.5) jest sprzeczny.
3) Jeśli $D = 0$ oraz $D_x = D_y = 0$, to układ (2.5) ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Niemożliwe jest, by $D = 0$ oraz tylko jeden z wyznaczników D_x i D_y był niezerowy.

Dowód. Wyznaczając kombinację liniową obu równań układu (2.5) otrzymujemy:

$$d(ax + by) - b(cx + dy) = dp - bq$$

czyli po przekształceniu:

$$(ad - bc)x = pd - bq$$

Stąd, o ile $D = ad - bc \neq 0$, dostajemy:

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} = \frac{D_x}{D}$$

Podobnie wyliczamy:

$$a(cx + dy) - c(ax + by) = aq - cp$$
$$(ad - bc)y = aq - pc$$
$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc} = \frac{D_y}{D}$$

Jeśli $D = 0$, to na mocy Faktu 1.52 wektory $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ są współliniowe. Wówczas, zapisując układ (2.5) w postaci wektorowej:

$$x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

otrzymujemy równanie (wektorowe) mające nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli wektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest współliniowy z wektorami $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ (czyli $D_x = D_y = 0$) lub równanie sprzeczne, jeśli wektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ nie jest współliniowy z wektorami $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ (czyli $D_x \neq 0$ i $D_y \neq 0$). □

Przykład 4

Rozwiąż następujące układy równań:

(a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 3x - 9y = 3 \end{cases}$

Rozwiązanie. (a) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = -7, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 1, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5$$

czyli układ ma jedno rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{D_y}{D} = -\frac{5}{7} \end{cases}$$

(b) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 9$$

czyli układ jest sprzeczny.
(c) Obliczamy:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = 0, \quad D_x = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = 0, \quad D_y = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Rozwiązaniem tego układu jest zbiór punktów leżących na prostej $x - 3y = 1$ (równanie $3x - 9y = 3$ to równanie tej samej prostej).

Przykład 5

Przedstaw wektor $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Rozwiązanie. Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu równań:

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2s + 4t = 3 \\ s + 5t = 4 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ metodą Cramera otrzymujemy:

$$\begin{cases} s = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{6} \\ t = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Spróbujemy teraz znaleźć wzór macierz odwrotnej do (odwracalnej) macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Szukamy zatem takiej macierzy $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, że:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Pierwsze z równań (2.6) można zapisać w postaci układu dwóch równań wektorowych:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2.7}$$

które można zapisać jako dwa układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$

Jeśli $\det A \neq 0$, to zgodnie ze wzorami Cramera każdy z układów ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{d}{\det A} \\ z = \dfrac{\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{-c}{\det A} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} y = \dfrac{\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{-b}{\det A} \\ t = \dfrac{\det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}}{\det A} = \dfrac{a}{\det A} \end{cases}$$

wobec czego szukaną macierzą odwrotną powinna być macierz:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, więc sprawdzamy jeszcze, że znaleziona macierz spełnia również drugie z równań (2.6):

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy fakt:

Fakt 2.18: Macierz odwrotna

Macierz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, a macierzą do niej odwrotną jest macierz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Dowód. Wzór (2.8) wyprowadziliśmy powyżej. Pozostaje uzasadnić, że gdy $\det A = 0$, macierz A jest nieodwracalna. W tym celu zauważmy, że na mocy Faktu 2.16 odwracalność macierzy A pociąga równość:

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$$

Wobec tego odwracalność macierzy implikuje $\det A \neq 0$. □

Przykład 6

Wyznacz (o ile istnieją) macierze odwrotne do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\det A = -10$, zaś $\det B = 0$, więc jedynie macierz A jest odwracalna. Zgodnie ze wzorem (2.8) macierz odwrotna do A to:

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

Nietrudno sprawdzić, że faktycznie:

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-2}{10} & \frac{4}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierze odwrotne pozwalają na jeszcze inne podejście do problemu rozwiązywania układów równań liniowych. Układ:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

można zapisać jako równanie wektorowe:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

czyli:

$$AX = B$$

i rozwiązywać korzystając z własności macierzy odwrotnej:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy trzeba zawsze zwracać uwagę na to, z której strony mnożymy przez macierz odwrotną, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 7

Rozwiąż następujące równania macierzowe:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. W każdym przypadku mnożymy obie strony równania przez macierz odwrotną, zwracając uwagę na to, by zarówno lewą jak i prawą stronę równości mnożyć przez macierz odwrotną z tej samej strony (mnożenie macierzy nie jest przemienne).

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

Ostatnią ważną operacją na macierzach (dowolnego rozmiaru) jest operacja *transpozycji.*

Definicja 2.19: Transpozycja macierzy

Transpozycją macierzy A (niekoniecznie kwadratowej), oznaczaną $A^\top$, nazywamy macierz, która jest „symetrycznym odbiciem" macierzy A względem głównej przekątnej, jak na poniższym rysunku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Macierz A, dla której $A^\top = A$ nazywamy *macierzą symetryczną.*

Zwróćmy uwagę, że w przypadku macierzy niekwadratowej, operacja transpozycji zmienia rozmiar macierzy. Zauważmy również, że wiersze macierzy A stają się kolumnami macierzy $A^\top$, zaś kolumny macierzy A stają się wierszami macierzy $A^\top$.

Przykład 8

Wyznacz macierze transponowane do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ oraz $B^\top = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

Przykład 9

Podaj ogólny wzór na macierz symetryczną rozmiaru 2×2.

Rozwiązanie. Macierz 2×2 jest postaci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Macierz ta jest symetryczna, jeśli:

$$A^\top = A \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tzn. $b = c$. Stąd macierz A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Operacja transpozycji pozwala zapisać iloczyn skalarny jako iloczyn dwóch macierzy:

Fakt 2.20: Iloczyn skalarny (transpozycja)

Dla dowolnych wektorów u i v na płaszczyźnie zachodzi wzór:

$$u \circ v = u^\top \cdot v$$

gdzie po lewej stronie u i v traktujemy jako wektory (a $\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów), zaś po prawej stronie u i v traktujemy jako macierze (a $\cdot$ oznacza mnożenie macierzy).

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Wówczas, utożsamiając liczby rzeczywiste z macierzami rozmiaru 1×1, otrzymujemy:

$$u \circ v = u_1 v_1 + u_2 v_2 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u^\top \cdot v$$

□

Fakt 2.21: Własności transpozycji

Niech A i B będą macierzami, a t skalarem. Wówczas zachodzą wzory:

1) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$, o ile A i B są tego samego rozmiaru,
2) $(tA)^\top = t \cdot A^\top$,
3) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$, o ile iloczyn $A \cdot B$ ma sens,
4) $\det A^\top = \det A$, o ile macierz A ma rozmiar 2×2.

Dowód. Udowodnimy własność (3) dla macierzy rozmiaru 2×2. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Wówczas:

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right)^\top = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ca' + dc' \\ ab' + bd' & cb' + dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Dowód dla macierzy innych rozmiarów oraz dowód własności (1) i (2) jest analogiczny.
Własność (4) wynika stąd, że:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

□

2.2 Przekształcenia afiniczne

Definicja 2.22: Funkcja

Funkcja $f : D \to C$ (zwana też *przekształceniem* lub *odwzorowaniem*) to przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru D (zwanego *dziedziną*) **dokładnie jednego** elementu zbioru C (zwanego *przeciwdziedziną*).

W niniejszym rozdziale będziemy zajmować się funkcjami, których zarówno dziedziną, jak i przeciwdziedziedziną jest zbiór $\mathbb{R}^2$. Funkcje takie będziemy nazywali *przekształceniami płaszczyzny*:

Definicja 2.23: Przekształcenie płaszczyzny

Przekształcenie płaszczyzny (w siebie) to funkcja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tzn. przyporządkowanie każdemu punktowi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ punktu $F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Dla przekształceń płaszczyzny obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ często oznaczamy $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, podobnie obrazy punktów A, B, C, D itd., często oznaczamy, odpowiednio, A', B', C', D' itd. Podobnie jak dla każdej funkcji, F to nazwa przekształcenia, natomiast $F(P)$ to punkt płaszczyzny będący obrazem punktu P (przy czym, o ile nie będzie to powodowało niejasności, oznaczenie $F(P)$ będziemy stosowali wymiennie z oznaczeniem P').

Zwróćmy uwagę, że przekształcenie płaszczyzny (tak jak każda funkcja) to jedynie **przyporządkowanie** każdemu punktowi płaszczyzny jakiegoś (innego lub tego samego) punktu. Dlatego np. obrót o $+270°$ wokół punktu S jest **tym samym** przekształceniem co obrót o $-90°$ wokół S.

Wygodnym opisem przekształcenia płaszczyzny jest podanie jego wzoru, tzn. sposobu wyliczenia współrzędnych obrazu $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ przy pomocy współrzędnych argumentu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. W obszarze zainteresowania algebry liniowej będą jedynie te przekształcenia płaszczyzny, dla których wzór ten ma pewną szczególną postać:

Definicja 2.24: Przekształcenie afiniczne płaszczyzny

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

gdzie a, b, c, d, e, f to pewne liczby rzeczywiste.

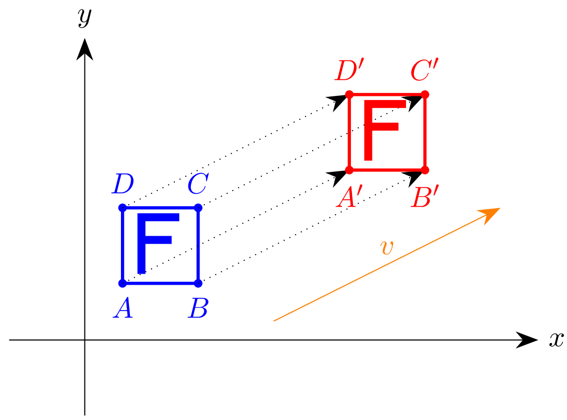
Wzór (2.9) można również zapisać w postaci:

$$F(X) = AX + v \tag{2.10}$$

gdzie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

Definicja 2.25: Translacja

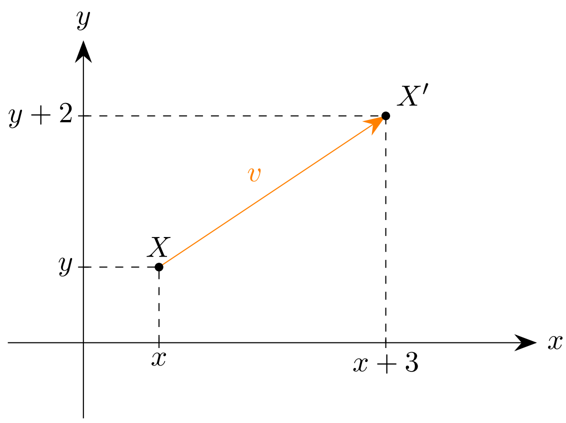
Translacja (przesunięcie) o wektor v to przekształcenie $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} = v$.



Przykład 1

Wyznacz wzór translacji (przesunięcia) T_v o wektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

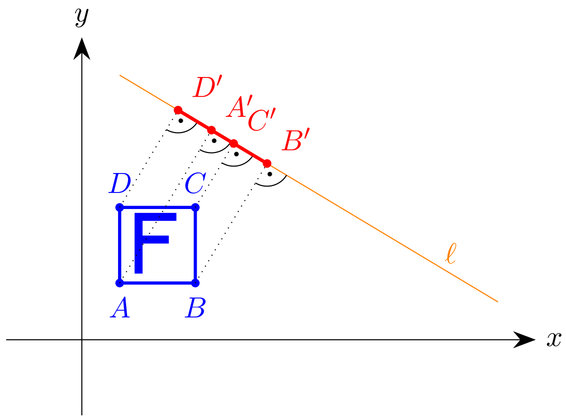


Jak widać na powyższym rysunku funkcja T_v przyporządkowuje punktowi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ punkt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T_v\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Definicja 2.26: Rzut prostokątny

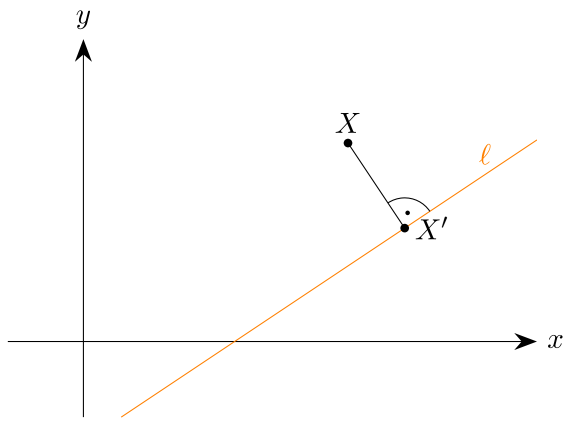
Rzut (prostokątny) na prostą ℓ to przekształcenie $P_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$.



Przykład 2

Wyznacz wzór rzutu (prostokątnego) P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego prostej $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, czyli $\overrightarrow{XX'} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.



Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y - 3t \end{pmatrix}$$

Skoro punkt X' leży na prostej ℓ, to:

$$2(x + 2t) - 3(y - 3t) - 4 = 0$$

skąd

$$t = \frac{1}{13}(-2x + 3y + 4)$$

Wobec tego:

$$X' = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ma spełniać dwa warunki:

- punkt X' leży na prostej ℓ,
- wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest prostopadły do prostej ℓ.

Pierwszy warunek oznacza, że współrzędne punktu X' spełniają równanie prostej ℓ. Drugi warunek można zapisać jako prostopadłość wektora $\overrightarrow{XX'}$ do wektora kierunkowego prostej ℓ albo jako równoległość wektora $\overrightarrow{XX'}$ do wektora normalnego prostej ℓ. Powyższy układ warunków można więc zapisać w postaci następującego układu równań (z niewiadomymi x' i y'):

$$\begin{cases} 2x' - 3y' - 4 = 0 \\ \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2x' - 3y' - 4 = 0 \\ 3(x' - x) + 2(y' - y) = 0 \end{cases}$$

Przekształcając ten układ do postaci (2.5) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 2x' - 3y' = 4 \\ 3x' + 2y' = 3x + 2y \end{cases}$$

Do rozwiązania tego układu można użyć wzorów Cramera. Wyliczamy wyznacznik główny układu:

$$D = \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 13 \neq 0$$

oraz wyznaczniki $D_{x'}$ i $D_{y'}$:

$$D_{x'} = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3x + 2y & 2 \end{pmatrix} = 9x + 6y + 8$$
$$D_{y'} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3x + 2y \end{pmatrix} = 6x + 4y - 12$$

Zgodnie z Faktem 2.17 rozwiązaniem układu jest:

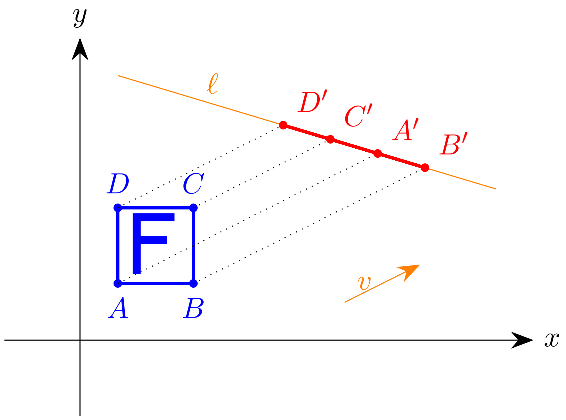
$$\begin{cases} x' = \frac{9x+6y+8}{13} = \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ y' = \frac{6x+4y-12}{13} = \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{cases}$$

czyli:

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{9}{13}x + \frac{6}{13}y + \frac{8}{13} \\ \frac{6}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{pmatrix}$$

Definicja 2.27: Rzut ukośny

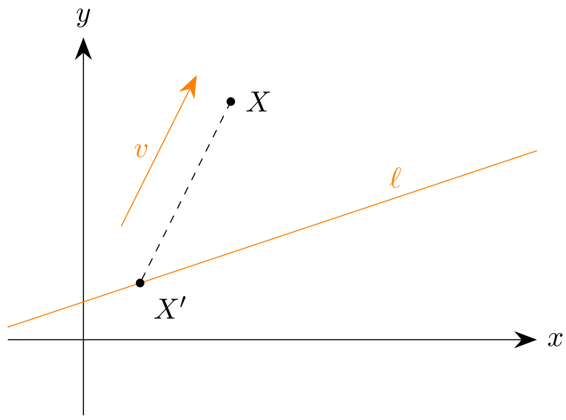
Rzut ukośny na prostą ℓ w kierunku wektora v to przekształcenie płaszczyzny $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że $\overrightarrow{XX'} \parallel v$.



Przykład 3

Wyznacz wzór rzutu na prostą ℓ o równaniu $x - 3y + 1 = 0$ w kierunku wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, czyli $\overrightarrow{XX'} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.



Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 4t \end{pmatrix}$$

Skoro punkt X' leży na prostej ℓ, to:

$$(x + 2t) - 3(y + 4t) + 1 = 0$$

skąd:

$$t = \frac{1}{10}(x - 3y + 1)$$

Zatem:

$$X' = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Obrazem punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ jest punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ spełniający dwa warunki:

- punkt X' leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$,
- wektor $\overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ jest równoległy do wektora $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Warunki te można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x' i y':

$$\begin{cases} x' - 3y' + 1 = 0 \\ \det\left(\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 0 \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x' - 3y' + 1 = 0 \\ 4(x' - x) - 2(y' - y) = 0 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (2.5) otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' - 3y' = -1 \\ 4x' - 2y' = 4x - 2y \end{cases}$$

Do rozwiązania tego układu można użyć wzorów Cramera. Wyliczamy wyznacznik główny układu:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 10 \neq 0$$

oraz wyznaczniki $D_{x'}$ i $D_{y'}$:

$$D_{x'} = \det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4x - 2y & -2 \end{pmatrix} = 12x - 6y + 2$$

$$D_{y'} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4x - 2y \end{pmatrix} = 4x - 2y + 4$$

Zgodnie z Faktem 2.17 rozwiązaniem układu jest:

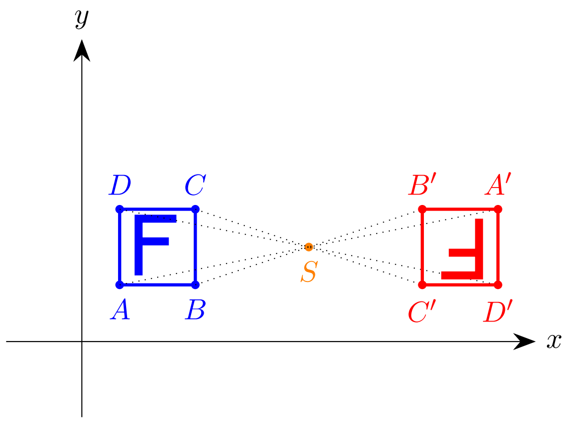
$$\begin{cases} x' = \dfrac{12x - 6y + 2}{10} \\ y' = \dfrac{4x - 2y + 4}{10} \end{cases}$$

czyli

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(12x - 6y + 2) \\ \frac{1}{10}(4x - 2y + 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{10} & -\frac{6}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{10} \\ \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

Definicja 2.28: Symetria środkowa

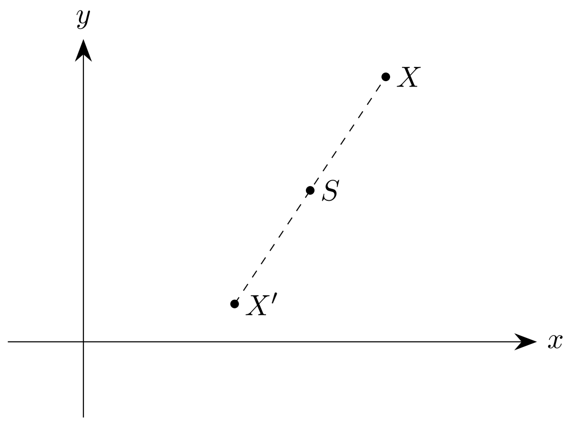
Symetria środkowa[3] *o środku* S to przekształcenie płaszczyzny $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że punkt S jest środkiem odcinka XX'.



Przykład 4

Wyznaczyć wzór symetrii środkowej względem punktu $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Punkt $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ jest środkiem odcinka XX', więc zgodnie ze wzorem (1.3):

$$S = \tfrac{1}{2}(X + X')$$

czyli

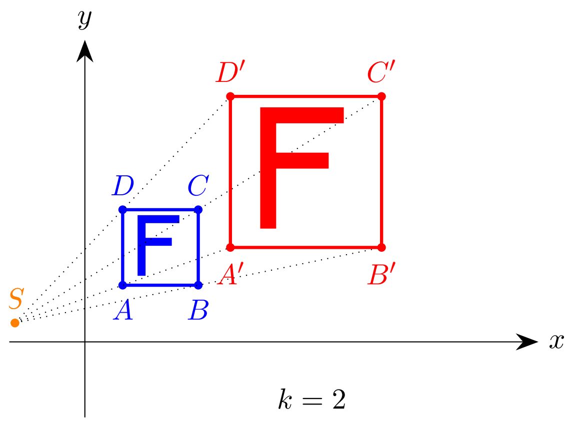
$$X' = 2S - X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+6 \\ -y+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

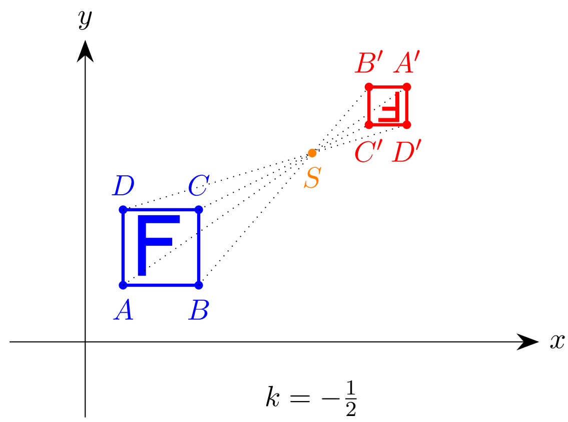
[3]Symetria środkowa o środku S nazywana jest też *odbiciem względem punktu* S. Zauważmy, że symetria środkowa o środku S jest tym samym przekształceniem co obrót o kąt 180° wokół punktu S.

Definicja 2.29: Jednokładność

Jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$ to przekształcenie płaszczyzny $D_k^S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że:

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$$

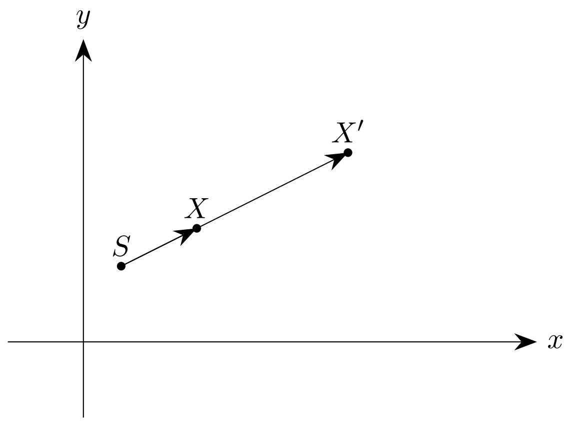




Przykład 5

Wyznacz wzór jednokładności D_k^S o skali $k = 3$ i środku $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ i jego obraz $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ spełniają warunek:

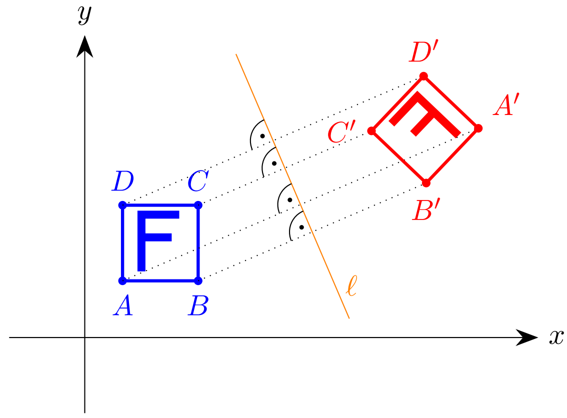
$$\overrightarrow{SX'} = 3 \cdot \overrightarrow{SX} \quad \text{czyli} \quad X' - S = 3 \cdot (X - S)$$

skąd otrzymujemy

$$X' = D_k^S(X) = 3X - 2S = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2 \\ 3y - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Definicja 2.30: Odbicie

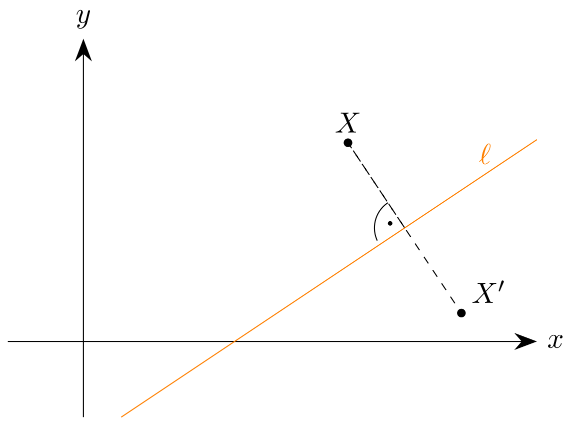
Odbicie (symetria) względem prostej ℓ to przekształcenie $S_\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz X i X' znajdują się w równych odległościach od prostej ℓ i po przeciwnych jej stronach.



Przykład 6

Wyznacz wzór odbicia (symetrii) S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego prostej $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, czyli $\overrightarrow{XX'} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.



Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y - 3t \end{pmatrix}$$

Ponieważ znakowane odległości punktów X i X' od prostej ℓ są liczbami przeciwnymi, więc zgodnie ze wzorem (1.35):

$$\frac{2(x+2t) - 3(y-3t) - 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = -\frac{2x - 3y - 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

czyli

$$2(x+2t) - 3(y-3t) - 4 = -2x + 3y + 4$$

skąd

$$t = -\tfrac{4}{13}x + \tfrac{6}{13}y + \tfrac{8}{13}$$

a zatem

$$X' = \begin{pmatrix} x+2t \\ y-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{16}{13} \\ \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{16}{13} \\ -\frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ musi spełniać dwa warunki:

- wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest prostopadły do prostej ℓ.
- znakowane odległości X i X' od prostej ℓ są liczbami przeciwnymi,

Warunki te, zgodnie z Wnioskiem 1.49 oraz Faktem 1.52 (prostopadłość do prostej ℓ oznacza współliniowość z jej wektorem normalnym) można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x' i y':

$$\begin{cases} \det\left(\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \dfrac{2x'-3y'-4}{\sqrt{2^2+3^2}} = -\dfrac{2x-3y-4}{\sqrt{2^2+3^2}} \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} -3(x'-x) - 2(y'-y) = 0 \\ 2x' - 3y' - 4 = -2x + 3y + 4 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (2.5) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3x' + 2y' = 3x + 2y \\ 2x' - 3y' = -2x + 3y + 8 \end{cases}$$

Do rozwiązania tego układu można użyć wzorów Cramera. Wyliczamy wyznacznik główny układu:

$$D = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -13 \neq 0$$

oraz wyznaczniki $D_{x'}$ i $D_{y'}$:

$$D_{x'} = \det\begin{pmatrix} 3x+2y & 2 \\ -2x+3y+8 & -3 \end{pmatrix} = -5x - 12y - 16$$

$$D_{y'} = \det\begin{pmatrix} 3 & 3x+2y \\ 2 & -2x+3y+8 \end{pmatrix} = -12x + 5y + 24$$

Zgodnie z Faktem 2.17 rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x' = \frac{5x+12y+16}{13} \\ y' = \frac{12x-5y-24}{13} \end{cases}$$

czyli

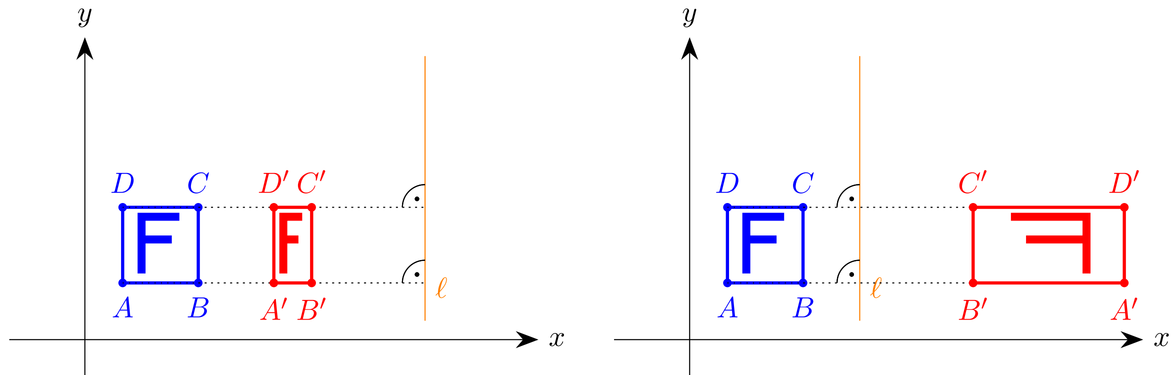
$$X' = \begin{pmatrix} \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + \frac{16}{13} \\ \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - \frac{24}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{13} \\ -\frac{24}{13} \end{pmatrix}$$

Definicja 2.31: Powinowactwo prostokątne

Powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali $k \neq 0$ to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz

$$\operatorname{dist}(X', \ell) = k \cdot \operatorname{dist}(X, \ell)$$

gdzie $\operatorname{dist}(\cdot, \ell)$ oznacza **znakowaną** odległość punktu od prostej ℓ.

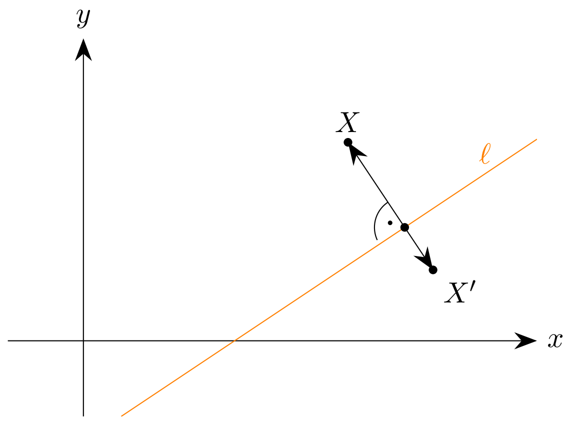


$k = \frac{1}{2}$ $\quad$ $k = -2$

Przykład 7

Wyznacz wzór powinowactwa prostokątnego o skali $-\frac{1}{2}$ i osi ℓ o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Oznaczmy $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego prostej $n = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, czyli $\overrightarrow{XX'} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$.



Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y - 3t \end{pmatrix}$$

Zgodnie ze wzorem (1.35) na znakowaną odległość od prostej:

$$\frac{2(x + 2t) - 3(y - 3t) - 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x - 3y - 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}}$$

czyli

$$2(x + 2t) - 3(y - 3t) - 4 = -\tfrac{1}{2}(2x - 3y - 4)$$

skąd

$$t = -\frac{3}{13}x + \frac{9}{26}y + \frac{6}{13}$$

a zatem

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{7}{13}x + \frac{9}{13}y + \frac{12}{13} \\ \frac{9}{13}x - \frac{1}{26}y - \frac{18}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{1}{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie (sposób II). Punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ musi spełniać dwa warunki:

- znakowana odległość X' od prostej ℓ to $(-\frac{1}{2})$ znakowanej odległości X od ℓ,
- wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest prostopadły do prostej ℓ.

Warunki te, zgodnie z Wnioskiem 1.49 i Faktem 1.52 (prostopadłość do prostej ℓ oznacza współliniowość z jej wektorem normalnym), można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi x' i y':

$$\begin{cases} \dfrac{2x' - 3y' - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x - 3y - 4}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \\ \det\left(\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = 0 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2 \cdot (2x' - 3y' - 4) = -(2x - 3y - 4) \\ -3(x' - x) - 2(y' - y) = 0 \end{cases}$$

Po przekształceniu do postaci (2.5) otrzymujemy:

$$\begin{cases} 4x' - 6y' = -2x + 3y + 12 \\ 3x' + 2y' = 3x + 2y \end{cases}$$

Wyliczamy wyznacznik główny układu:

$$D = \det\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 26 \neq 0$$

oraz wyznaczniki $D_{x'}$ i $D_{y'}$:

$$D_{x'} = \det\begin{pmatrix} -2x + 3y + 12 & -6 \\ 3x + 2y & 2 \end{pmatrix} = 14x + 18y + 24$$

$$D_{y'} = \det\begin{pmatrix} 4 & -2x + 3y + 12 \\ 3 & 3x + 2y \end{pmatrix} = 18x - y - 36$$

Zgodnie ze wzorami Cramera (Fakt 2.17) otrzymujemy:

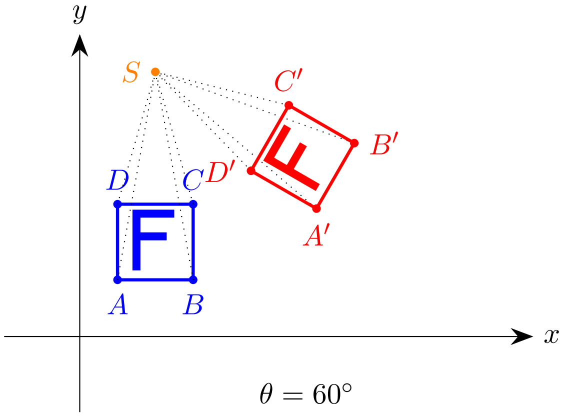
$$\begin{cases} x' = \dfrac{14x + 18y + 24}{26} \\ y' = \dfrac{18x - y - 36}{26} \end{cases}$$

czyli

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{7}{13}x + \frac{9}{13}y + \frac{12}{13} \\ \frac{9}{13}x - \frac{1}{26}y - \frac{18}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{9}{13} & -\frac{1}{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{18}{13} \end{pmatrix}$$

Definicja 2.32: Obrót

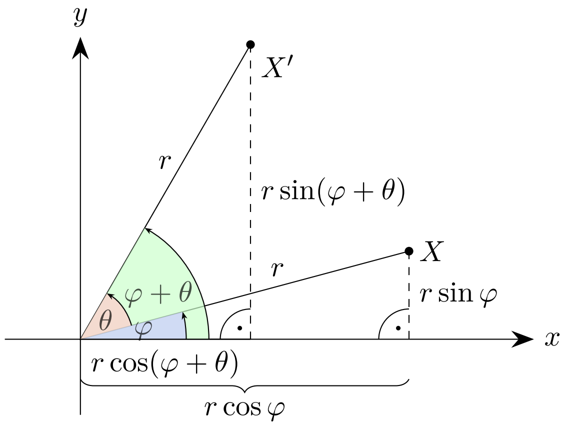
Obrót o kąt θ wokół punktu S to przekształcenie płaszczyzny $R^S_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $|SX'| = |SX|$ oraz **skierowany** kąt $\angle XSX'$ ma miarę θ.



Przykład 8

Wyznacz wzór obrotu R_θ wokół punktu $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o kąt θ.

Rozwiązanie.



Obrót przeprowadza punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ na punkt $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (1.29) możemy zapisać oba te wektory w postaci biegunowej:

$$X = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$

Korzystając ze wzorów trygonometrycznych dostajemy:

$$X' = \begin{pmatrix} r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) \\ r(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r\cos\varphi)\cos\theta - (r\sin\varphi)\sin\theta \\ (r\cos\varphi)\sin\theta + (r\sin\varphi)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

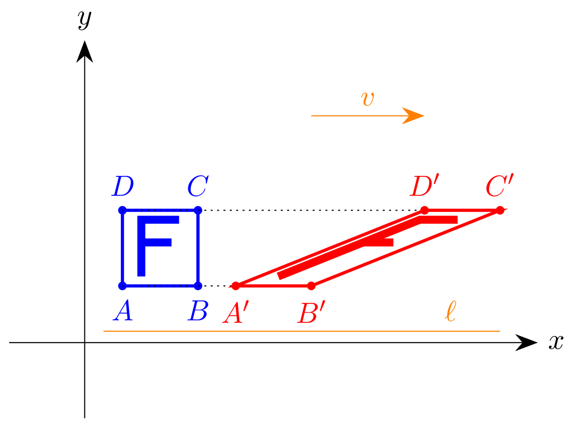
$$X' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

Definicja 2.33: Powinowactwo ścinające

Powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze v (gdzie v jest wektorem kierunkowym prostej ℓ) to przekształcenie, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że:

$$\overrightarrow{XX'} = \mathrm{dist}(X, \ell) \cdot v$$

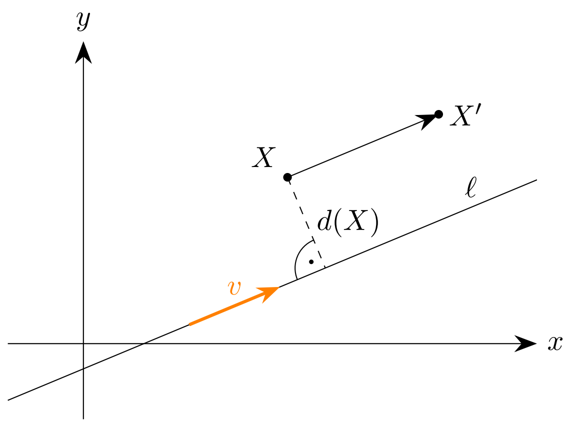
gdzie $\mathrm{dist}(X, \ell)$ to **znakowana** odległość punktu X od prostej ℓ.



Przykład 9

Wyznacz wzór powinowactwa ścinającego o osi ℓ o równaniu $5x - 12y - 8 = 0$ i wektorze $v = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.



Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Punkt X' spełnia warunek:

$$\overrightarrow{XX'} = \mathrm{dist}(X, \ell) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gdzie $\mathrm{dist}(X, \ell)$ zgodnie z Wnioskiem 1.49 jest równa[4]:

$$\mathrm{dist}(X, \ell) = \frac{5x - 12y - 8}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{5x - 12y - 8}{13}$$

Wobec tego:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{5x - 12y - 8}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{73}{13}x - \frac{144}{13}y - \frac{96}{13} \\ \frac{25}{13}x - \frac{47}{13}y - \frac{40}{13} \end{pmatrix}$$

Definicja 2.34: Identyczność

Identyczność to takie przekształcenie $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt X przeprowadza na siebie, tzn. $\mathrm{Id}(X) = X$ (czyli $X' = X$).

Definicja 2.35: Przekształcenie stałe

Przekształcenie stałe to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdy punkt przeprowadza na ten sam ustalony punkt S, tzn. $F(X) = S$ (czyli $X' = S$). Jeśli $S = 0$, to przekształcenie to nazywamy *przekształceniem zerowym*.

Zauważmy, że we wszystkich przykładach otrzymaliśmy wzór postaci:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f. Nie każde przekształcenie płaszczyzny ma wzór postaci (2.14) (jest to bardzo wyjątkowa grupa przekształceń), ale są to dokładnie te przekształcenia płaszczyzny, których badaniem zajmuje się algebra liniowa.

Przykład 10

Znaleźć obraz punktu $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ przez przekształcenie afiniczne o wzorze

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie.

$$F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wśród omawianych przykładów przekształceń afinicznych płaszczyzny można wyróżnić pewną szczególną klasę przekształceń zwanych *izometriami*:

Definicja 2.36: Izometria płaszczyzny

Izometria płaszczyzny, to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które zachowuje odległości, tzn. dla dowolnych $A, B \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{F(A)F(B)}|$$

Duża część rozważanych dotychczas przykładów przekształceń afinicznych to były izometrie płaszczyzny, stąd jedynie krótkie zestawienie przykładów znanych nam już izometrii:

1) obrót wokół dowolnego punktu (w tym symetria środkowa),
2) odbicie względem dowolnej prostej,
3) translacja.

[4] Zwróćmy uwagę, że zgodnie z komentarzem przy Wniosku 1.49 znakowaną odległość można zdefiniować na dwa różne sposoby (w zależności od przyjętego równania prostej), co powoduje, że powyższe zadanie ma jeszcze jedno możliwe rozwiązanie.

Dowód faktu, że izometrie są przekształceniami afinicznymi (sformułowanego poniżej) wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Twierdzenie 2.37: Izometria to przekształcenie afiniczne

Każda izometria płaszczyzny jest przekształceniem afinicznym.

Fakt 2.38: Własności izometrii

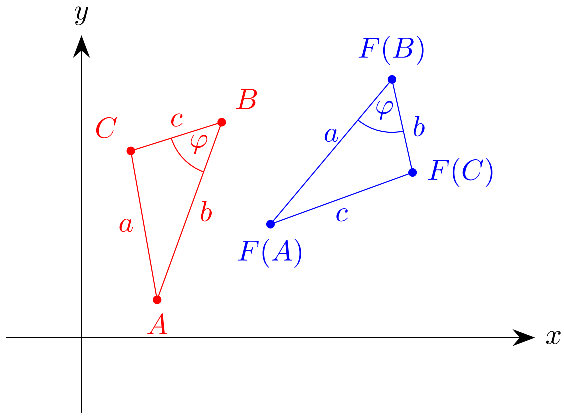
Niech F będzie izometrią płaszczyzny. Wówczas:

1) F zachowuje kąty, tzn. dla dowolnych punktów A, B, C zachodzi:

$$\angle ABC = \angle F(A)F(B)F(C)$$

2) każda figura jest przystająca do swojego obrazu przez izometrię F,
3) F zachowuje pola figur.

Dowód. (1) Trójkąt ABC i jego izometryczny obraz $F(A)F(B)F(C)$ są przystające, gdyż izometria zachowuje długości (cecha przystawania trójkątów bbb). Wobec tego odpowiadające sobie kąty tych trójkątów mają równe miary, w szczególności $\angle ABC = \angle F(A)F(B)F(C)$.



(2) Skoro izometria zachowuje długości boków (Definicja 2.36) oraz miary kątów (własność (1)), to każdy wielokąt przeprowadza na wielokąt do niego przystający. Dowód dla figur nie będących wielokątami wykracza poza ramy niniejszego skryptu.
(3) Zgodnie z (2) każda figura jest przeprowadzana przez F na figurę przystającą, więc w szczególności na figurę o takim samym polu co figura wyjściowa. □

Do szczególnie ważnych punktów charakterystycznych przekształcenia należą jego *punkty stałe*. Punkt stały przekształcenia, to punkt, który jest swoim obrazem:

Definicja 2.39: Punkt stały

Punktem stałym przekształcenia F nazywamy taki punkt X, że $F(X) = X$.

Przykład 11

Wyznacz punkty stałe następujących przekształceń:

(a) obrót wokół punktu S o kąt $\theta \neq 0$,

(b) odbicie (symetria) względem prostej ℓ,

(c) translacja o wektor $v \neq 0$,

(d) identyczność.

Rozwiązanie. (a) Jedynym punktem stałym obrotu jest środek obrotu, czyli punkt S.

(b) Punktem stałym odbicia (symetrii) względem prostej jest każdy punkt leżący na osi odbicia, czyli zbiorem punktów stałych jest prosta ℓ.

(c) Translacja o niezerowy wektor nie ma punktów stałych.

(d) Identyczność to przekształcenie, dla którego każdy punkt jest punktem stałym.

Przykład 12

Wyznacz wszystkie punkty stałe przekształcenia afinicznego danego wzorem:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie. (a) Szukamy punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających równanie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} x + 2y - 2 = x \\ 3x - y - 4 = y \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Szukamy punktów $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ spełniających równanie:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = x \\ 4x + 5y + 4 = y \end{cases}$$

Otrzymany układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań – zbiorem rozwiązań jest prosta o równaniu $x + y + 1 = 0$.

Fakt 2.40: Punkty stałe przekształcenia afinicznego

Zbiór punktów stałych przekształcenia afinicznego to pojedynczy punkt lub prosta lub zbiór pusty lub cała płaszczyzna.

Dowód. Jeśli F jest przekształceniem afinicznym, to

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f. Punkty stałe F to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

czyli układu równań:

$$\begin{cases} ax + by + e = x \\ cx + dy + f = y \end{cases} \tag{2.13}$$

Układ (2.13) zapisany w postaci (2.5) to:

$$\begin{cases} (a-1)x + by = -e \\ cx + (d-1)y = -f \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 1.28 zbiór rozwiązań takiego układu jest punktem lub prostą lub zbiorem pustym lub całą płaszczyzną. $\square$

2.3 Przekształcenia liniowe

Wzór przekształcenia afinicznego płaszczyzny można przedstawić jako sumę *części liniowej* i *części translacyjnej*:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{część liniowa}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\text{część translacyjna}} \tag{2.14}$$

Głównym obiektem zainteresowania algebry liniowej są *przekształcenia liniowe*, czyli takie przekształcenia afiniczne, które nie mają części translacyjnej (tzn. $e = f = 0$ we wzorze (2.14)):

Definicja 2.41: Przekształcenie liniowe

Przekształcenie liniowe płaszczyzny to przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Macierz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nazywamy *macierzą przekształcenia liniowego F* i oznaczamy $m(F)$.

Wzór (2.15) można również zapisać w postaci:

$$F(X) = AX$$

gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Fakt 2.42: Przekształcenie afiniczne a przekształcenie liniowe

Przekształcenie afiniczne F jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Dowód. Przekształcenie zadane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $e = f = 0$. Ponieważ:

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

więc jest to równoważne stwierdzeniu $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Wszystkie przekształcenia opisane w poprzednim rozdziale to przekształcenia afiniczne. Fakt 2.42 pomaga wyodrębnić spośród nich przekształcenia liniowe:

1) translacja o wektor v jest liniowa $\iff$ $v = 0$,
2) rzut (prostokątny lub ukośny) na prostą ℓ jest liniowy $\iff$ ℓ przechodzi przez 0[5],
3) symetria środkowa o środku S jest liniowa $\iff$ $S = 0$,
4) jednokładność o środku S jest liniowa $\iff$ $S = 0$,
5) odbicie względem prostej ℓ jest liniowe $\iff$ ℓ przechodzi przez 0,

6) powinowactwo prostokątne o osi ℓ jest liniowe $\iff$ ℓ przechodzi przez 0,
7) obrót wokół punktu S jest liniowy $\iff$ $S = 0$,
8) powinowactwo ścinające o osi ℓ jest liniowe $\iff$ ℓ przechodzi przez 0,
9) identyczność jest liniowa,
10) przekształcenie stałe jest liniowe $\iff$ jest przekształceniem zerowym.

Tak jak spośród wszystkich przekształceń afinicznych wyodrębniamy przekształcenia liniowe, tak spośród wszystkich izometrii płaszczyzny możemy wyodrębnić *izometrie liniowe*:

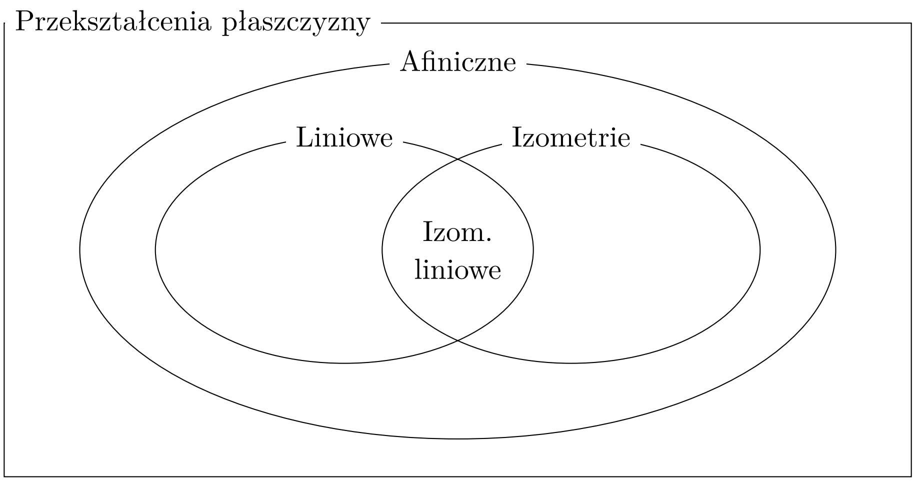
Definicja 2.43: Izometria liniowa płaszczyzny

Izometria liniowa płaszczyzny, to izometria płaszczyzny $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, która jest równocześnie przekształceniem liniowym, tzn.

$$F(X) = AX$$

dla pewnej macierzy A rozmiaru 2×2. Macierz $m(F) = A$ nazywamy wówczas *macierzą izometrii.*

Wzajemne relacje pomiędzy poznanymi typami przekształceń płaszczyzny zebrane są na poniższym diagramie:



Własności działań na macierzach zebrane w Faktach 2.4 i 2.6 pozwalają udowodnić następujące ważne własności przekształceń liniowych:

Fakt 2.44: Addytywność i jednorodność

Jeśli $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych wektorów u i v zachodzi *warunek addytywności*:

$$F(u + v) = F(u) + F(v) \tag{2.16}$$

oraz dla dowolnego wektora u i dowolnego skalara t zachodzi *warunek jednorodności*:

$$F(t \cdot u) = t \cdot F(u) \tag{2.17}$$

Zwróćmy uwagę, że warunek $F(0) = 0$ opisany w Fakcie 2.42 to szczególny przypadek warunku jednorodności (dla $t = 0$).

[5] W dalszym tekście będziemy wymiennie stosować na oznaczenie początku układu współrzędnych $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ symbole O (zazwyczaj na rysunkach) oraz 0 (zazwyczaj w rachunkach).

Dowód. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F, tzn. $F(X) = AX$. Warunek addytywności wynika z rozdzielności mnożenia macierzy względem dodawania (Fakt 2.4), gdzie wektor traktujemy jako szczególny przypadek macierzy:

$$F(u+v) = A \cdot (u+v) = A \cdot u + A \cdot v = F(u) + F(v)$$

Warunek jednorodności wynika z Faktu 2.6:

$$F(t \cdot u) = A \cdot (tu) = t \cdot (Au) = t \cdot F(u)$$

□

Warunki addytywności i jednorodności można połączyć w jeden *warunek liniowości*:

Wniosek 2.45: Liniowość

Jeśli $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych wektorów u i v oraz dowolnych skalarów s i t zachodzi *warunek liniowości*:

$$F(su + tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v) \tag{2.18}$$

W szczególności zachodzi warunek:

$$F(u - v) = F(u) - F(v)$$

Dowód. Z addytywności i jednorodności przekształcenia liniowego (Fakt 2.44) otrzymujemy:

$$F(su + tv) = F(su) + F(tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v)$$

W szczególności, przyjmując $s = 1$ i $t = -1$, otrzymujemy:

$$F(u - v) = F(1 \cdot u + (-1) \cdot v) = 1 \cdot F(u) + (-1) \cdot F(v) = F(u) - F(v)$$

□

Zwróćmy uwagę, że warunki addytywności i jednorodności można traktować jako szczególne przypadki warunku liniowości – dla $s = t = 1$ wzór (2.18) przyjmuje postać:

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

natomiast dla $s = 0$ wzór (2.18) przyjmuje postać:

$$F(tv) = t \cdot F(v)$$

Przykład 1

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wiedząc, że wektory u i v spełniają warunki $F(u+v) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $F(u-v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, wyznacz $F(u)$ i $F(v)$.

Rozwiązanie. Z warunku liniowości (2.18) dostajemy:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = F(u+v) = F(u) + F(v)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = F(u-v) = F(u) - F(v)$$

Dodając stronami obie równości otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2F(u),\quad \text{czyli}\quad F(u)=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

a odejmując stronami obie równości:

$$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2F(v),\quad \text{czyli}\quad F(v)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Przekształcenia liniowe mają tę ważną własność, że są jednoznacznie wyznaczone przez obrazy zaledwie dwóch punktów. Poniższy fakt pokazuje jak uzyskać pełną informację o przekształceniu liniowym (tzn. jego macierz) znając jedynie obrazy wersorów.

Fakt 2.46: Obrazy wersorów

Jeśli $m(F)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, to:

$$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=F(e_1)\qquad \text{oraz}\qquad \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=F(e_2)$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia liniowego to obrazy wersorów).

Dowód. Wyliczamy:

$$F(e_1)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\qquad \text{oraz}\qquad F(e_2)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

□

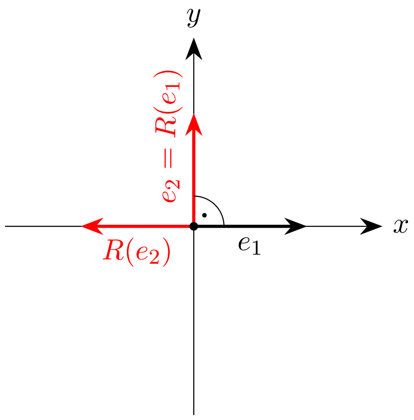
Przykład 2

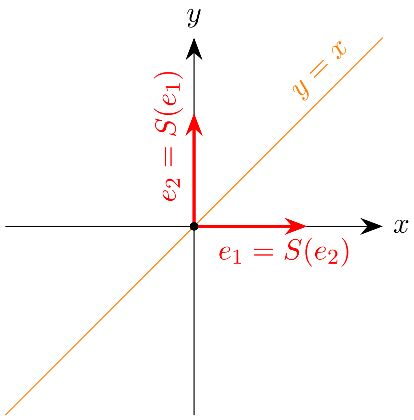
Wyznacz (bez żadnych rachunków) macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) obrót R o $+90°$ wokół punktu O,

(b) odbicie S względem prostej o równaniu $y=x$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.46 kolumny macierzy przekształcenia to obrazy wersorów.





(a) Ponieważ $R(e_1)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ i $R(e_2)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, więc $R(X)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}X$.

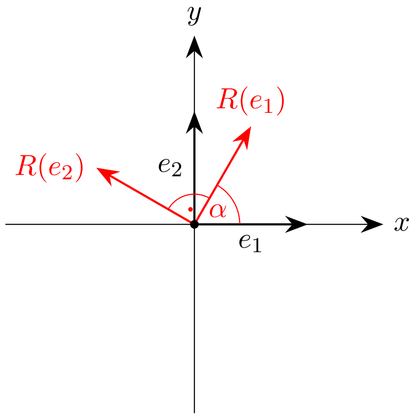
(b) Ponieważ $S(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $S(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, więc $S(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$.

Przykład 3

Wyznacz macierz obrotu R o kąt α wokół punktu O.

Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (1.29) na współrzędne biegunowe, obrazy wersorów to:

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad R(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 90^\circ) \\ \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$



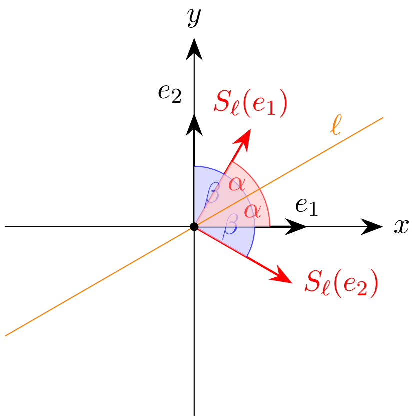
Stąd, zgodnie z Faktem 2.46, otrzymujemy (znaną już) macierz przekształcenia R:

$$R(X) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X$$

Przykład 4

Wyznacz macierz odbicia S_ℓ względem prostej ℓ przechodzącej przez punktu O i nachylonej do dodatniej półosi Ox pod kątem α.

Rozwiązanie.



Zgodnie ze wzorem (1.29) na współrzędne biegunowe wektora, obrazy wersorów to:

$$S_\ell(e_1) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad S_\ell(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\alpha - \beta = 2\alpha - 90^\circ$, czyli:

$$S_\ell(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha - 90^\circ) \\ \sin(2\alpha - 90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 90^\circ + \sin 2\alpha \sin 90^\circ \\ \sin 2\alpha \cos 90^\circ - \cos 2\alpha \sin 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\alpha \\ -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

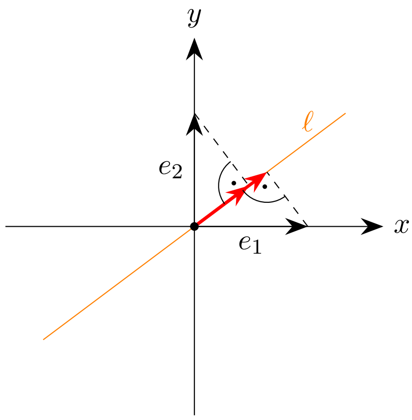
Stąd, zgodnie z Faktem 2.46, otrzymujemy macierz przekształcenia S_ℓ:

$$S_\ell(X) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} X$$

Przykład 5

Wyznacz wzór rzutu (prostokątnego) P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$.

Rozwiązanie.



Zgodnie z Faktem 2.46 wystarczy wyznaczyć rzuty wersorów e_1 i e_2 na prostą ℓ. Ponieważ prosta ℓ przechodzi przez punkt O, więc rzutowanie na prostą ℓ jest tożsame z rzutowaniem na jej wektor kierunkowy $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (1.33) otrzymujemy:

$$p_v(e_1) = \frac{e_1 \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{4}{25} v = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ \frac{12}{25} \end{pmatrix}$$

$$p_v(e_2) = \frac{e_2 \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{3}{25} v = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy macierz przekształcenia P_ℓ:

$$P_\ell(X) = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} X$$

Przekształcenie liniowe jest jednoznacznie wyznaczone nie tylko przez obrazy obu wersorów, ale przez obrazy dowolnych dwóch **niewspółliniowych** wektorów, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 6

Znajdź przekształcenie liniowe płaszczyzny F takie, że $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $F\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wzór tego przekształcenia ma postać $F(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$, gdzie a, b, c, d spełniają układ równań:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} a + 2b = 0 \\ c + 2d = 1 \\ 2a + 3b = -1 \\ 2c + 3d = 2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad F(X) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$$

Fakt 2.47: Obraz prostej

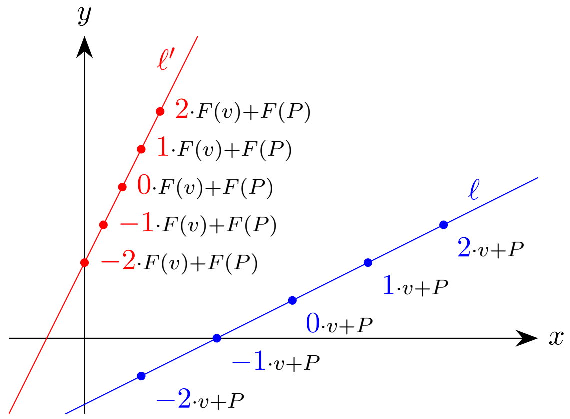
Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym, zaś v takim wektorem, że $F(v) \neq 0$. Wówczas:

1) obrazem prostej ℓ o wektorze kierunkowym v jest prosta ℓ' o wektorze kierunkowym $F(v)$,
2) obrazami punktów rozmieszczonych w równych odstępach na prostej ℓ są punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ'.

Dowód. Niech $X = t \cdot v + P$ będzie równaniem parametrycznym prostej ℓ (gdzie v jest wektorem kierunkowym, a P dowolnym punktem prostej). Wówczas, z uwagi na addytywność i jednorodność przekształcenia liniowego:

$$F(X) = F(t \cdot v + P) = t \cdot F(v) + F(P)$$

co jest przedstawieniem parametrycznym prostej ℓ' o wektorze kierunkowym $F(v)$ i przechodzącej przez punkt $F(P)$. Co więcej, ponieważ obrazem punktu $t \cdot v + P$ jest punkt $t \cdot F(v) + F(P)$, więc punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ są przeprowadzane na punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ', co widać na poniższym rysunku.

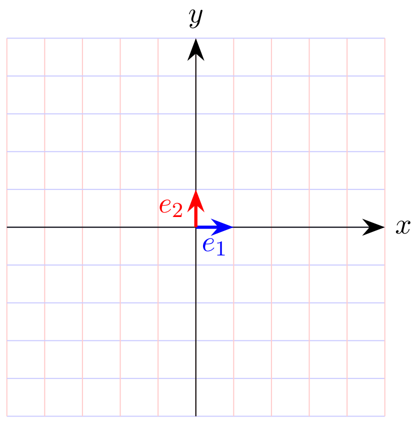


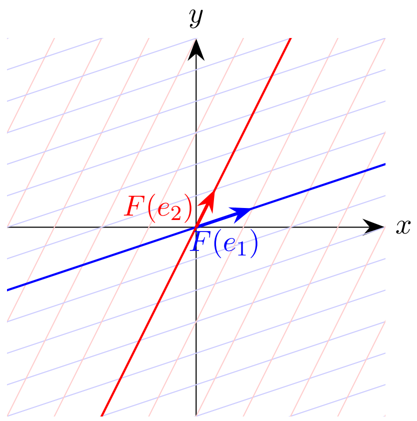
$\square$

Wniosek 2.48: Obraz siatki

Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $F(e_1) \neq 0$ oraz $F(e_2) \neq 0$. Wówczas obrazem siatki kwadratów rozpiętej przez wektory e_1 i e_2 jest siatka równoległoboków rozpięta przez wektory $F(e_1)$ i $F(e_2)$.

Dowód. Zgodnie z Faktem 2.47 obrazem prostych równoległych są proste równoległe, a punkty rozmieszczone w równych odstępach na osiach Ox i Oy są przeprowadzane na punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostych rozpiętych przez wektory $F(e_1)$ i $F(e_2)$. $\square$

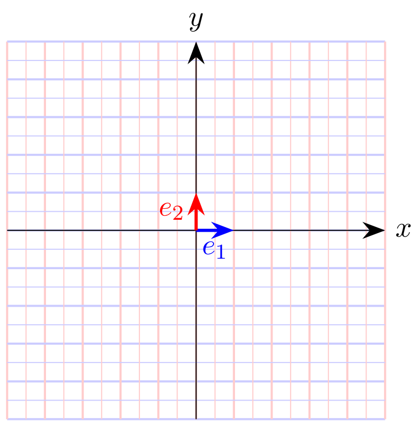


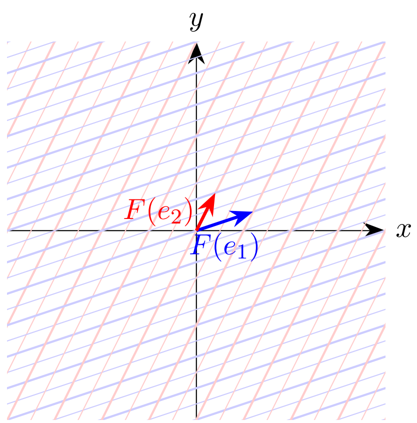


Zauważmy również, że każdy z równoległoboków na prawym rysunku ma pole

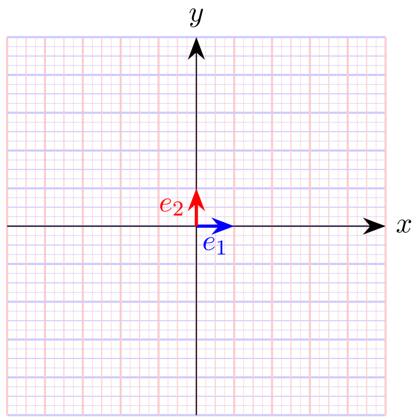
$$|\det(F(e_1), F(e_2)| = |\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|$$

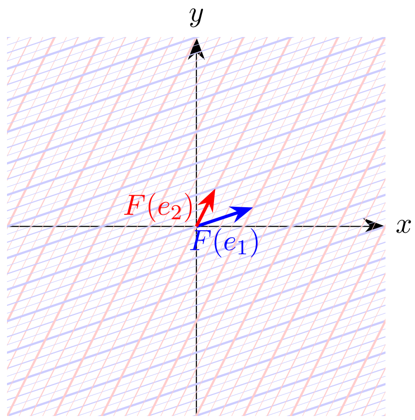
gdzie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego F, zaś każdy z kwadratów na pierwszym rysunku ma pole 1. W związku z tym pole każdej figury składającej się z jednostkowych kwadratów jest skalowane przez przekształcenie F dokładnie $|\det m(F)|$ razy. Ten sam współczynnik skalowania pól pozostaje prawdziwy, gdy każdy kwadrat podzielimy na cztery mniejsze kwadraty:





i gdy każdy z mniejszych kwadratów podzielimy na jeszcze mniejsze kwadraty:





W ten sposób pokazaliśmy, że przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ skaluje $|\det m(F)|$ razy pole każdej figury składającej się z dowolnie małych kwadratów. Stosując przejście graniczne[6] otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 2.49: Wyznacznik macierzy przekształcenia (geometrycznie)

Jeśli $F(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym płaszczyzny, to dla dowolnej figury f zachodzi:

$$P_{F(f)} = |\det A| \cdot P_f$$

gdzie P_f oznacza pole figury f (tzn. pola figur skalowane są $|\det A|$ razy).

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy przekształcenia dotyczy nie tylko wartości bezwzględnej wyznacznika, ale również jego znaku. Stąd następująca definicja:

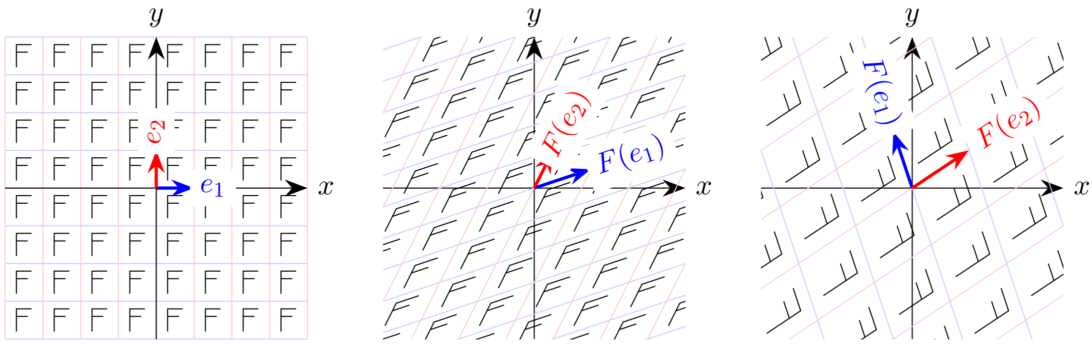
Definicja 2.50: Zachowywanie orientacji (geometrycznie)

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

1) *zachowuje orientację*, jeżeli każdy dodatni kąt skierowany przeprowadza na dodatni kąt skierowany (w szczególności, dla dowolnych niewspółliniowych wektorów u i v pary (u, v) i $(F(u), F(v))$ mają jednakowe orientacje),
2) *zmienia orientację*, jeśli każdy dodatni kąt skierowany przeprowadza na ujemny kąt skierowany (w szczególności, dla dowolnych niewspółliniowych wektorów u i v pary (u, v) i $(F(u), F(v))$ mają przeciwne orientacje).

Nieformalny sposób rozróżniania przekształceń płaszczyzny zachowujących orientację od tych, które ją zmieniają jest następujący: przekształcenie płaszczyzny zachowuje orientację, jeśli obraz np. litery **F** jest literą **F** (być może przeskalowaną lub nieco zdeformowaną), natomiast zmienia orientację, jeśli obraz litery **F** jest jej lustrzanym odbiciem **ꟻ** (być może przeskalowanym lub nieco zdeformowanym). W ten sposób łatwo ocenić, które z przedstawionych na początku Rozdziału 2.2 przekształceń zachowują, a które zmieniają orientację.

[6] Szczegóły tego typu rozumowania pojawią się w ramach Analizy matematycznej 2.



Niech $F(X) = AX$ będzie przekształceniem liniowym płaszczyzny oraz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Para wersorów (e_1, e_2) ma dodatnią orientację, natomiast para ich obrazów $(F(e_1), F(e_2)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ma orientację dodatnią, gdy $\det A > 0$, zaś ujemną, gdy $\det A < 0$. To częściowo wyjaśnia następujący fakt (którego formalny dowód pomijamy – wymagałby on sprawdzenia, że opisaną wcześniej własność ma dowolna dodatnio zorientowana para wektorów (u, v)):

Fakt 2.51: Zachowywanie orientacji (algebraicznie)

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane wzorem $F(X) = AX$:

1) *zachowuje orientację* wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A > 0$,
2) *zmienia orientację* wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A < 0$.

Przykład 7

Ustal, które z poniższych przekształceń zachowuje, a które zmienia orientację:

(a) obrót, (b) odbicie względem prostej, (c) jednokładność,

(d) powinowactwo prostokątne, (e) rzut prostokątny.

Rozwiązanie. Rozważając, które z przekształceń przeprowadzają **F** na **F**, a które na **ꟻ** nietrudno zauważyć, że obrót, jednokładność (zarówno o skali dodatniej, jak i ujemnej) oraz powinowactwo prostokątne o skali dodatniej zachowują orientację, natomiast odbicie względem prostej i powinowactwo prostokątne o skali ujemnej zmieniają orientację. W przypadku rzutu prostokątnego nie można mówić o zachowywaniu bądź zmianie orientacji.

Przykład 8

Ustal, która z poniższych macierzy jest macierzą przekształcenia liniowego zachowującego orientację, a która – przekształcenia zmieniającego orientację:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\det A > 0$, $\det B = 0$ i $\det C < 0$. Zatem A jest macierzą przekształcenia liniowego zachowującego orientację, C – macierzą przekształcenia zmieniającego orientację, zaś B nie należy do żadnej z tych klas.

Wśród macierzy 2×2 istotną rolę grają macierze izometrii, czyli macierze takich przekształceń liniowych, które są izometriami.

Fakt 2.52: Macierz izometrii

Niech A będzie macierzą 2×2. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1) A jest macierzą izometrii,
2) kolumny macierzy A są prostopadłymi wektorami długości 1.
3) A jest odwracalna oraz $A^{-1} = A^{\top}$.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Jeśli A jest macierzą izometrii (warunek (1)), to kolumny $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ (zgodnie z Faktem 2.46) są obrazami wersorów $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ponieważ e_1 i e_2 są prostopadłymi wektorami długości 1, a izometria zachowuje zarówno odległości, jak i kąty, więc kolumny macierzy A również są prostopadłymi wektorami długości 1 (warunek (2)).
Załóżmy teraz, że kolumny macierzy A są prostopadłymi wektorami długości 1 (warunek (2)), tzn.

$$\begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \tag{2.19}$$

Wówczas dla dowolnego punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mamy $AX = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$, skąd:

$$|AX| = \sqrt{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2} = \sqrt{(a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy} = \sqrt{x^2 + y^2} = |X|$$

Wobec tego dla dowolnych punktów P i Q zachodzi:

$$d(P, Q) = |P - Q| = |A(P - Q)| = |AP - AQ| = d(AP, AQ)$$

czyli macierz A jest macierzą izometrii (warunek (1)).
Z kolei warunek (3) można przekształcić do postaci:

$$A^{\top} A = I \qquad \text{czyli} \qquad \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

co jest inną postacią układu równań (2.19), czyli warunek ten jest równoważny warunkowi (2). □

Przykład 9

Wyznacz wszystkie takie wartości a, b, c, dla których macierz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{pmatrix}$ jest macierzą izometrii.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 2.52 pierwsza kolumna musi być wektorem długości 1:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1 \qquad \text{czyli} \qquad b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

a druga kolumna musi być do niej prostopadła i również mieć długość 1. Stąd otrzymujemy cztery macierze izometrii:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.4 Złożenie przekształceń

Niech F i G będą przekształceniami płaszczyzny. Oznaczmy obraz punktu X przez przekształcenie G jako X', zaś obraz punktu X' przez przekształcenie F jako X''. Wówczas przekształcenie, które przeprowadza X na X'' nazywamy *złożeniem przekształcenia* G z przekształceniem F i oznaczamy $F \circ G$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend left, "F \circ G"] & X' \arrow[r, "F"] & X'' \end{tikzcd}$$

Formalnie można to zapisać w nastepujący sposób:

Definicja 2.53: Złożenie przekształceń

Złożeniem przekształcenia G *z przekształceniem* F nazywamy przekształcenie $F \circ G$ zadane wzorem:

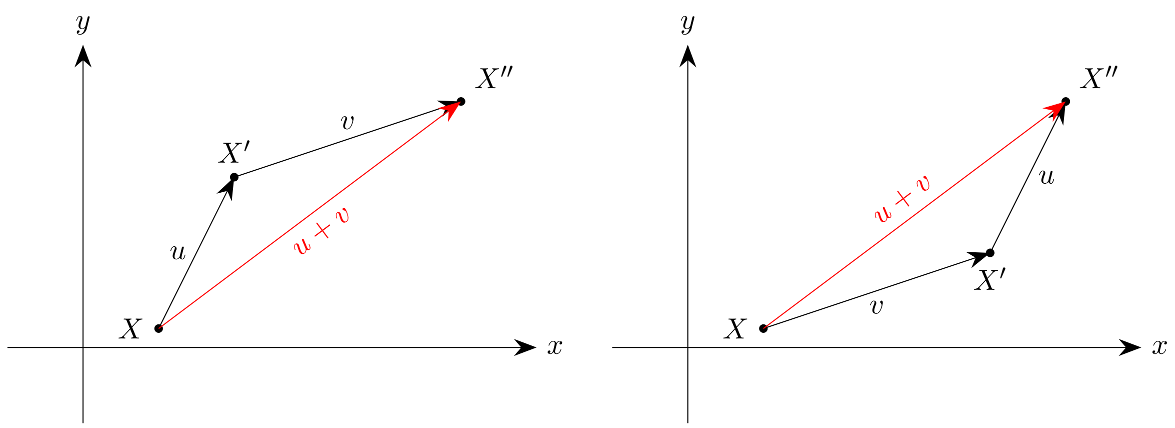
$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) \tag{2.20}$$

Zauważmy, że przekształcenia składowe $F \circ G$ wykonywane są „od prawej do lewej”, tzn. najpierw G, potem F. Taka konwencja powoduje, że wzór (2.20) ma prostą postać (kolejność liter po obu stronach równości jest taka sama).

Przykład 1

Znajdź złożenia $T_v \circ T_u$ i $T_u \circ T_v$ translacji T_u i T_v.

Rozwiązanie (sposób I).



Zauważmy, że dla dowolnego punktu X zachodzi:

$$(T_v \circ T_u)(X) = T_v(T_u(X)) = T_{u+v}(X) \quad \text{(pierwszy rysunek)}$$
$$(T_u \circ T_v)(X) = T_u(T_v(X)) = T_{u+v}(X) \quad \text{(drugi rysunek)}$$

Stąd $T_v \circ T_u = T_u \circ T_v = T_{u+v}$. Jest to dość wyjątkowa sytuacja, gdy złożenie dwóch przekształceń nie zależy od kolejności (na ogół składanie przekształceń nie jest przemienne).

Rozwiązanie (sposób II). Wzory obu przekształceń to:

$$T_u(X) = X + u \quad \text{oraz} \quad T_v(X) = X + v$$

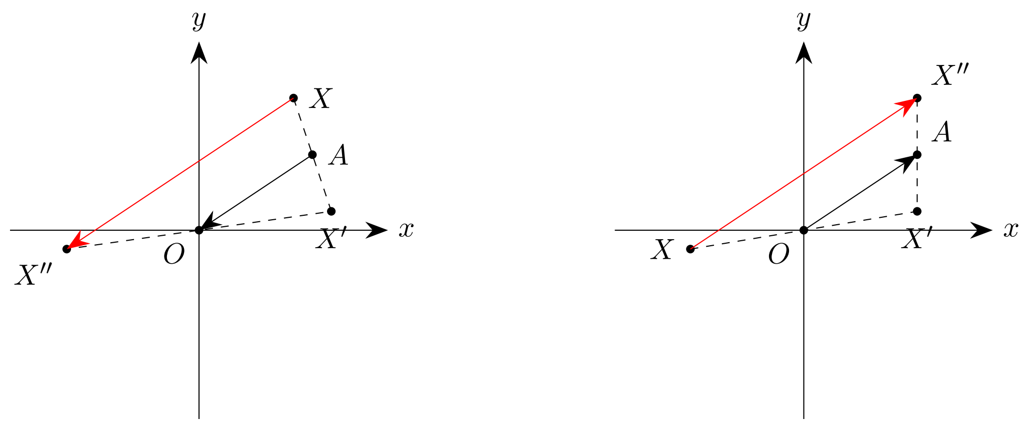
Stąd otrzymujemy:

$$T_v(T_u(X)) = T_v(X + u) = X + u + v = T_{u+v}(X)$$
$$T_u(T_v(X)) = T_u(X + v) = X + v + u = T_{u+v}(X)$$

Przykład 2

Znajdź złożenia $S_O \circ S_A$ oraz $S_A \circ S_O$ symetrii środkowych o środkach O i $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie (sposób I).



Zauważmy, że w obu przypadkach odcinek OA łączy środki boków trójkąta $XX'X''$, skąd na mocy Twierdzenia Talesa mamy (niezależnie od wyboru punktu X):

$$\overrightarrow{XX''} = 2 \cdot \overrightarrow{AO} \text{ (pierwszy rysunek) oraz } \overrightarrow{XX''} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} \text{ (drugi rysunek)}$$

Stąd

$$S_O \circ S_A = T_{2\overrightarrow{AO}} \quad \text{oraz} \quad S_A \circ S_O = T_{2\overrightarrow{OA}}$$

W szczególności $S_O \circ S_A \neq S_A \circ S_O$.

Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_A był wyprowadzany w Przykładzie 4 z Rozdziału 2.2):

$$S_O\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6-x \\ 4-y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$(S_O \circ S_A)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_O\left(S_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_O\left(\begin{pmatrix} 6-x \\ 4-y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-6 \\ y-4 \end{pmatrix} = T_{-2A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

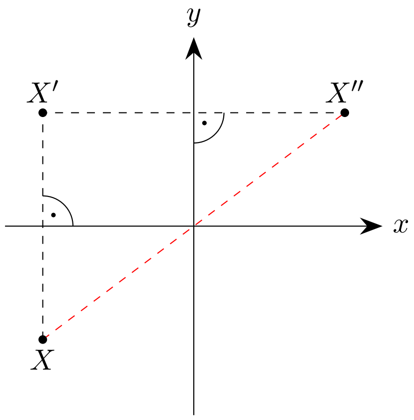
$$(S_A \circ S_O)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_A\left(S_O\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_A\left(\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+6 \\ y+4 \end{pmatrix} = T_{2A}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

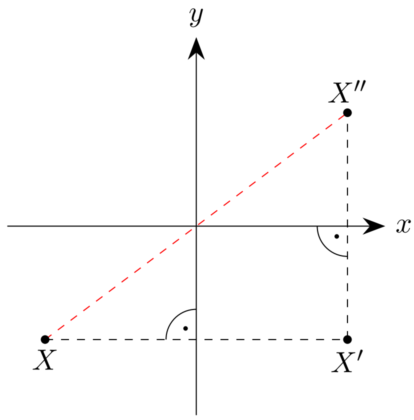
Przykład 3

Znajdź złożenia $S_y \circ S_x$ i $S_x \circ S_y$ odbicia S_x względem osi Ox z odbiciem S_y względem osi Oy.
Rozwiązanie (sposób I). Zauważmy, że dla dowolnego punktu X zachodzi:

$$\begin{aligned} (S_y \circ S_x)(X) &= S_y(S_x(X)) = R_\pi(X) \quad \text{(pierwszy rysunek)} \\ (S_x \circ S_y)(X) &= S_x(S_y(X)) = R_\pi(X) \quad \text{(drugi rysunek)} \end{aligned}$$

gdzie R_π oznacza obrót o kąt π wokół punktu O (czyli symetrię środkową).





Stąd $S_y \circ S_x = S_x \circ S_y = R_\pi$ (znów wyjątkowa sytuacja, gdy złożenie nie zależy od kolejności).

Rozwiązanie (sposób II). Wzory obu przekształceń to:

$$S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

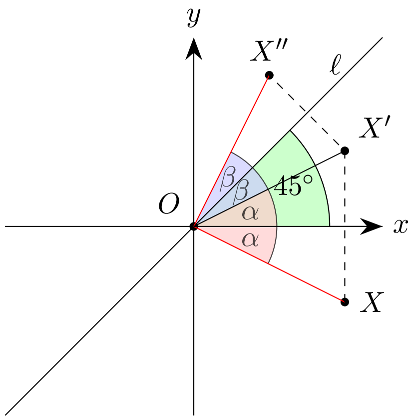
Stąd otrzymujemy:

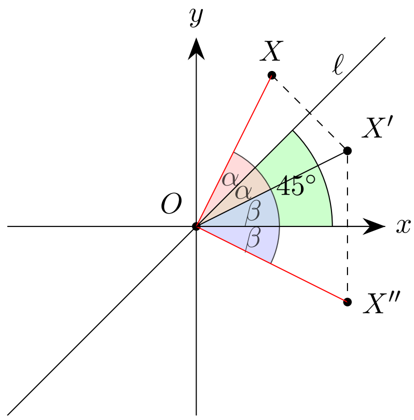
$$S_y\left(S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$S_x\left(S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_x\left(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Przykład 4

Znajdź złożenia odbić $S_\ell \circ S_x$ i $S_x \circ S_\ell$, gdzie ℓ jest prostą o równaniu $y = x$.
Rozwiązanie (sposób I).





Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_x$. Zauważmy, że $\alpha + \beta = 45°$ (kąt nachylenia prostej ℓ do osi Ox), więc $2\alpha + 2\beta = 90°$. Ponieważ, dodatkowo, $OX = OX' = OX''$, więc punkt X obraca się o kąt $+90°$ wokół punktu O. Stąd: $S_\ell \circ S_x = R_{+90°}$.
Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_x \circ S_\ell$. Podobne rozumowanie jak powyżej pokazuje, że punkt X obraca się o kąt $-90°$ wokół punktu O. Stąd: $S_x \circ S_\ell = R_{-90°}$.

Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_ℓ był wyprowadzony w Przykładzie 2 z Rozdziału 2.3):

$$S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$(S_\ell \circ S_x)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_\ell\left(S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
$$(S_x \circ S_\ell)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_x\left(S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_x\left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Zauważmy, że zgodnie ze wzorem z Przykładu 8 z Rozdziału 2.2 są to rzeczywiście wzory obrotów o $+90°$ i $-90°$ wokół punktu O.

Przykład 5

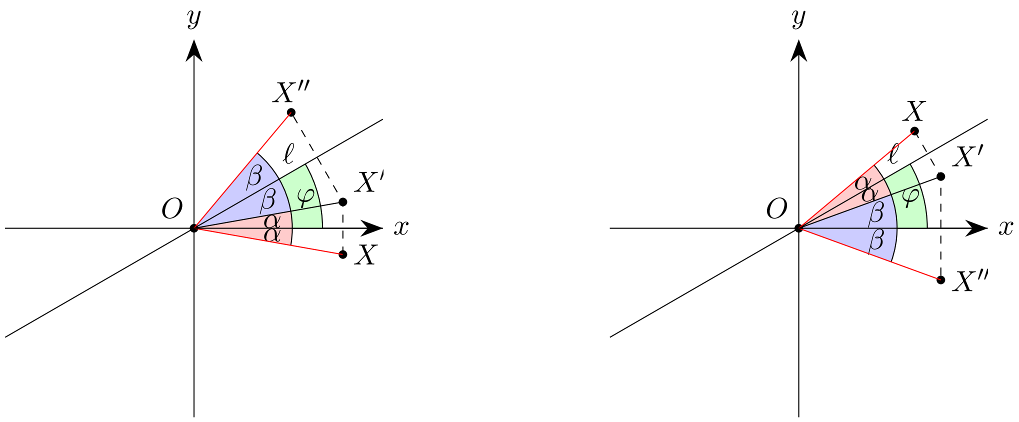
Znajdź złożenia $S_\ell \circ S_x$ i $S_x \circ S_\ell$ odbicia S_ℓ względem prostej ℓ nachylonej pod kątem φ do dodatniej półosi Ox z odbiciem S_x względem osi Ox.

Rozwiązanie (sposób I). Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_x$. Kąt nachylenia prostej ℓ do osi Ox wynosi φ, więc $\alpha + \beta = \varphi$. Ponieważ dodatkowo $OX = OX' = OX''$, więc punkt X obraca się o kąt 2φ wokół punktu O, czyli

$$S_\ell \circ S_x = R_{2\varphi}$$

Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_x \circ S_\ell$. Podobne rozumowanie jak powyżej pokazuje, że punkt X obraca się o kąt -2φ wokół punktu O, czyli

$$S_x \circ S_\ell = R_{-2\varphi}$$



Rozwiązanie (sposób II). Wzory przekształceń to (wzór na S_ℓ był wyprowadzony w Przykładzie 4 z Rozdziału 2.3):

$$S_x\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S_\ell\left(S_x\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\right) &= S_\ell\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = R_{2\varphi}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\\
S_x\left(S_\ell\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)\right) &= S_x\left(\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi\\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-2\varphi) & -\sin(-2\varphi)\\ \sin(-2\varphi) & \cos(-2\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = R_{-2\varphi}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Przykład 6

Znajdź złożenia $S \circ R$ i $R \circ S$ odbicia S względem prostej o równaniu $y = x$ z obrotem R o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu O.

Rozwiązanie. Tym razem złożenie trudno jest zobaczyć na rysunku, ale można wyliczyć jego wzór, podobnie jak w poprzednich przykładach. W Przykładzie 2 z Rozdziału 2.3 wyprowadzono wzory przekształceń S i R:

$$S(X) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X, \qquad R(X) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}X$$

Stąd:

$$(S\circ R)(X) = S(R(X)) = S\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}X\right) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}X = S_x(X)$$

$$(R\circ S)(X) = R(S(X)) = R\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X\right) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}X = S_y(X)$$

Przykład 7

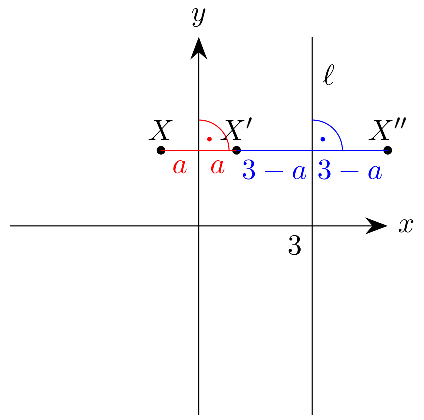
Znajdź złożenia $S_\ell \circ S_y$ i $S_y \circ S_\ell$ odbicia S_ℓ względem prostej o równaniu $x = 3$ i odbicia S_y względem osi Oy.

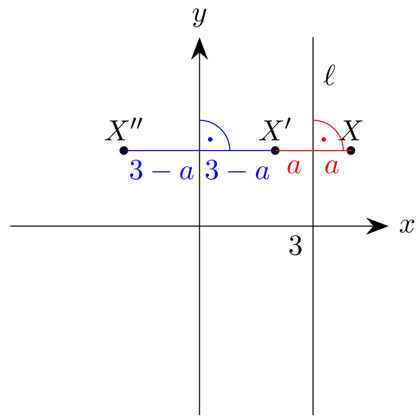
Rozwiązanie (sposób I). Pierwszy rysunek przedstawia złożenie $S_\ell \circ S_y$. Zauważmy, że dla dowolnego X zachodzi $\overrightarrow{XX''} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$, skąd:

$$S_\ell \circ S_y = T_{\left(\begin{smallmatrix}6\\0\end{smallmatrix}\right)}$$

Drugi rysunek przedstawia złożenie $S_y \circ S_\ell$. Dla dowolnego X zachodzi $\overrightarrow{XX''} = \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$, skąd:

$$S_y \circ S_\ell = T_{\left(\begin{smallmatrix}-6\\0\end{smallmatrix}\right)}$$





Rozwiązanie (sposób II). Zauważmy, że dla dowolnego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zachodzi:

$$S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6-x \\ y \end{pmatrix}$$

Stąd otrzymujemy:

$$(S_\ell \circ S_y)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_\ell\left(S_y\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_\ell\left(\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6+x \\ y \end{pmatrix} = T_{\left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$(S_y \circ S_\ell)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S_y\left(S_\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = S_y\left(\begin{pmatrix} 6-x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-6 \\ y \end{pmatrix} = T_{\left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

Przykład 8

Znajdź złożenia $F \circ G$ i $G \circ F$ przekształceń $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X$ i $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}
(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
(G \circ F)(X) = G(F(X)) = G\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} X\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Jak widać w powyższych przykładach, złożenie przekształceń nie jest przemienne, podobnie jak mnożenie macierzy. Można również pokazać, że złożenie przekształceń jest łączne (co również jest własnością analogiczną do własności mnożenia macierzy):

Fakt 2.54: Łączność złożenia przekształceń

Złożenie przekształceń jest łączne, tzn. dla dowolnych przekształceń F, G, H (dla których poniższe złożenia mają sens) zachodzi:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

Składanie przekształceń nie jest przemienne.

Dowód. Zgodnie z Definicją 2.53:

$$((F \circ G) \circ H)(X) = (F \circ G)(H(X)) = F(G(H(X)))$$

$$(F \circ (G \circ H))(X) = F((G \circ H)(X)) = F(G(H(X)))$$

□

W przypadku przekształceń liniowych analogia między złożeniem przekształceń a mnożeniem macierzy sięga dużo głębiej, co pokazują Fakty 2.55 i 2.58. Możemy też zauważyć, że we wszystkich omawianych przykładach składając przekształcenia liniowe (afiniczne) otrzymywaliśmy w wyniku przekształcenie liniowe (afiniczne). Obserwację tę rozwiniemy w następującym fakcie:

Fakt 2.55: Złożenie przekształceń afinicznych

Niech F i G będą przekształceniami płaszczyzny.

1) Jeśli F i G są przekształceniami afinicznymi, to złożenie $F \circ G$ też jest afiniczne.
2) Jeśli F i G są przekształceniami liniowymi, to złożenie $F \circ G$ też jest liniowe oraz

$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$

(tzn. składanie przekształceń liniowych odpowiada mnożeniu ich macierzy).

Dowód. (1) Niech $F(X) = AX + v$ oraz $G(X) = BX + w$, gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, A i B to macierze 2×2, a v i w to wektory. Na mocy prawa łączności mnożenia macierzy oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania (Fakt 2.6) otrzymujemy:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX + w) = A \cdot (BX + w) + v = (AB)X + (Aw + v)$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem afinicznym.
(2) Niech $F(X) = AX$ oraz $G(X) = BX$, gdzie $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, zaś A i B to macierze 2×2. Na mocy prawa łączności mnożenia macierzy (Fakt 2.6):

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX) = A \cdot (BX) = (AB)X$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $A \cdot B = m(F) \cdot m(G)$. □

Każde przekształcenie afiniczne można przedstawić w postaci złożenia translacji z przekształceniem liniowym. To częściowo tłumaczy, dlaczego algebra liniowa zajmuje się przede wszystkim badaniem przekształceń liniowych – dla zrozumienia przekształceń afinicznych wystarczy zrozumieć przekształcenia liniowe i translacje.

Przykład 9

Przedstaw przekształcenie afiniczne $F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ w postaci złożenia:

(a) $T \circ G$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T jest translacją,

(b) $G \circ T$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T jest translacją.

Rozwiązanie. (1) Jeśli $F = T \circ G$, gdzie $G(X) = AX$ dla pewnej macierzy A oraz $T(X) = X + v$ dla pewnego wektora v, to:

$$F(X) = (T \circ G)(X) = T(G(X)) = T(AX) = AX + v$$

Stąd widać, że wystarczy przyjąć $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) Jeśli $F = G \circ T$, gdzie $G(X) = AX$ dla pewnej macierzy A oraz $T(X) = X + v$ dla pewnego wektora v, to:

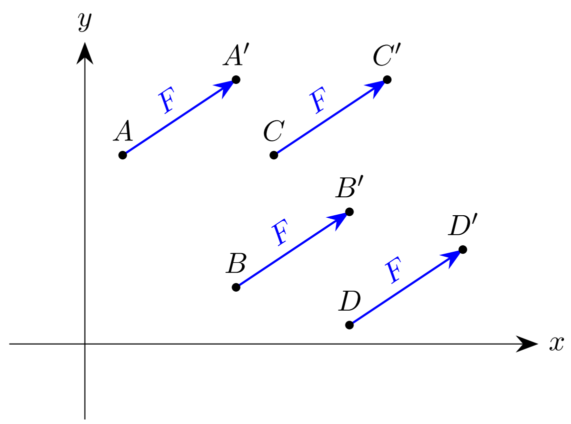
$$F(X) = (G \circ T)(X) = G(T(X)) = G(X + v) = A(X + v) = AX + Av$$

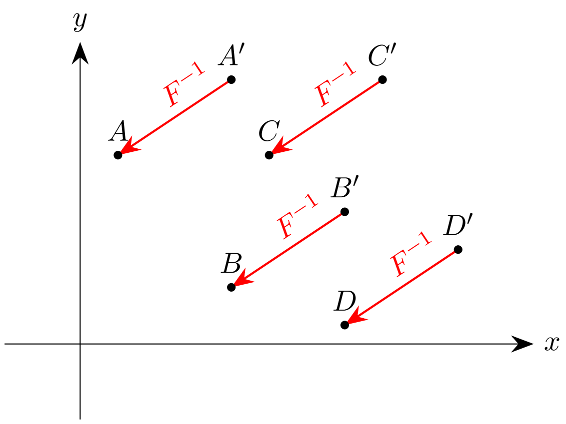
Stąd widać, że należy przyjąć $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ oraz wyznaczyć taki wektor $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, dla którego:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 3p + q = 2 \\ 2p + q = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań wyznaczamy $v = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ważnym pojęciem związanym ze złożeniem przekształceń jest pojęcie *przekształcenia odwrotnego*. Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które każdemu punktowi X przyporządkowuje pewien punkt X' (co można sobie wyobrazić jako strzałkę o początku X i końcu X'). Zdefiniujmy nowe przekształcenie, oznaczane F^{-1}, powstałe przez „odwrócenie” przyporządkowania, tzn. zmianę zwrotów wszystkich strzałek (tzn. przekształcenie F^{-1} punktowi X' przyporządkowuje punkt X).





Definicja 2.56: Przekształcenie odwrotne

Przekształceniem odwrotnym do przekształcenia F nazywamy przekształcenie F^{-1} zdefiniowane w następujący sposób:

$$F^{-1}(X') = X \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } F(X) = X'$$

Jeśli przekształcenie odwrotne do F istnieje (tzn. powyższy warunek określa funkcję[7]), to F nazywamy *przekształceniem odwracalnym*.

Przykład 10

Wyznacz przekształcenia odwrotne (jeśli istnieją) do następujących przekształceń płaszczyzny:

(a) translacja o wektor v,

(b) obrót wokół punktu S o kąt θ,

(c) odbicie względem prostej ℓ,

(d) rzut (prostokątny) na prostą ℓ.

Rozwiązanie. (a) Przekształcenie odwrotne do translacji T_v to translacja T_{-v}.
(b) Przekształcenie odwrotne do obrotu R_θ^S to obrót $R_{-\theta}^S$ (obrót wokół S o kąt $-\theta$).
(c) Odbicie S_ℓ względem prostej ℓ jest odwrotne do siebie, tzn. $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$.
(d) Rzut na prostą nie jest przekształceniem odwracalnym.

Przykład 11

Wyznacz przekształcenie odwrotne do F^{-1} dla każdego odwracalnego przekształcenia F z Przykładu 10.
Rozwiązanie. (a) $(T_v)^{-1} = T_{-v}$ oraz $(T_{-v})^{-1} = T_v$.
(b) $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$ oraz $(R_{-\theta})^{-1} = R_\theta$.
(c) $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$ oraz $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$.

Fakt 2.57: Przekształcenie odwrotne

Dla dowolnego odwracalnego przekształcenia F zachodzą warunki:

1) $(F^{-1})^{-1} = F$
2) $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}$

Dowód. (1) Jeśli $F(X) = X'$, to $F^{-1}(X') = X$, a wówczas dla każdego X:

$$(F^{-1})^{-1}(X) = X' = F(X)$$

Stąd $(F^{-1})^{-1} = F$.
(2) Jeśli $F(X) = X'$, to $F^{-1}(X') = X$, skąd dla każdego X:

$$(F^{-1} \circ F)(X) = F^{-1}(F(X)) = F^{-1}(X') = X$$

czyli $F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}$. Podobnie sprawdzamy, że $F \circ F^{-1} = \mathrm{Id}$. □

[7]Nie zawsze po „odwróceniu” strzałek spełniony jest warunek, że każdemu argumentowi przypisana jest dokładnie jedna wartość. Jeśli ten warunek nie jest spełniony, rozważana funkcja nie jest odwracalna.

Jak już zauważyliśmy przy badaniu złożeń przekształceń liniowych, operacjom na przekształceniach liniowych odpowiadają operacje na ich macierzach. Podobnie jest z operacją odwracania przekształcenia liniowego.

Fakt 2.58: Odwrotność przekształcenia afinicznego

Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwracalnym przekształceniem płaszczyzny. Wówczas:

1) Jeśli F jest przekształceniem afinicznym, to przekształcenie F^{-1} też jest afiniczne.
2) Jeśli F jest przekształceniem liniowym, to przekształcenie F^{-1} też jest liniowe oraz

$$m(F^{-1}) = m(F)^{-1} \tag{2.21}$$

Ponadto przekształcenie liniowe F jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F)$ jest odwracalna.

Dowód. (1) Warunek $X' = AX + v$ jest równoważny warunkowi:

$$X = A^{-1}(X' - v) \qquad \text{czyli} \qquad X = A^{-1}X' - (A^{-1}v)$$

czyli jeśli $F(X) = AX + v$ to $F^{-1}(X) = A^{-1}X - (A^{-1}v)$, co oznacza, że jeśli macierz A jest odwracalna, to przekształcenie F^{-1} jest afiniczne. W przypadku, gdy macierz A jest nieodwracalna, przekształcenie F jest nieodwracalne, co pokażemy we Wniosku 2.66.
(2) Warunek $X' = AX$ jest równoważny warunkowi $X = A^{-1}X'$ czyli jeśli $F(X) = AX$ to $F^{-1}(X) = A^{-1}X$, co oznacza, że jeśli macierz A jest odwracalna, to przekształcenie F^{-1} jest liniowe oraz spełniony jest warunek (2.21). W przypadku, gdy macierz A jest nieodwracalna, przekształcenie F jest nieodwracalne, co pokażemy we Wniosku 2.66. □

Przykład 12
Sprawdź, że macierze obrotów R_θ oraz $R_{-\theta}$ są wzajemnie odwrotne.
Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem z Przykładu 8 z Rozdziału 2.2:

$$m(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Zastępując kąt θ kątem $-\theta$ otrzymujemy:

$$m(R_{-\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Równocześnie $\det m(R_\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, więc zgodnie ze wzorem (2.8):

$$(m(R_\theta))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Przekształcenie F jest odwracalne, jeśli spełnione są następujące dwa warunki:

1) każdy punkt z przeciwdziedziny jest obrazem (przez przekształcenie F) **co najwyżej** jednego punktu (w przeciwnym razie „odwrócenie” przyporządkowania nie dawałoby funkcji, gdyż niektórym punktom przypisane byłoby kilka obrazów),
2) każdy punkt z przeciwdziedziny jest obrazem (przez przekształcenie F) **co najmniej** jednego punktu (w przeciwnym razie „odwrócenie” przyporządkowania nie dawałoby funkcji, gdyż niektórym punktom nie byłby przypisany żaden obraz).

Warunki te będziemy nazywać *różnowartościowością* i *„na”*:

Definicja 2.59: Przekształcenie różnowartościowe

Przekształcenie F nazywamy *różnowartościowym*[8], jeśli dla dowolnych elementów dziedziny u i v takich że $u \neq v$ zachodzi $F(u) \neq F(v)$ (tzn. różne punkty **zawsze** mają różne obrazy).

Definicja 2.60: Przekształcenie „na’

Przekształcenie F nazywamy *„na*[9]*”*, jeśli dla dowolnego elementu P przeciwdziedziny istnieje taki punkt X w dziedzinie, że $F(X) = P$ (tzn. każdy punkt przeciwdziedziny jest obrazem pewnego punktu dziedziny).

Fakt 2.61: Odwracalność przekształcenia

Przekształcenie F jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowe i „na”.

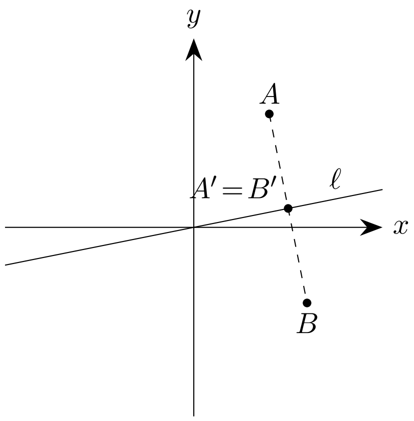
Przykład 13

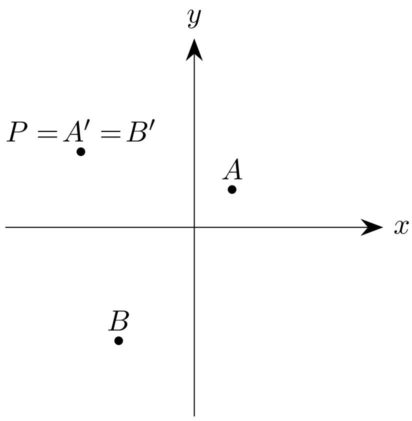
Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nie są różnowartościowe:

(a) rzut na prostą ℓ,

(b) przekształcenie stałe (stale równe P).

Rozwiązanie. W każdym przypadku można wskazać dwa różne punkty A i B takie, że $A' = B'$:





Przykład 14

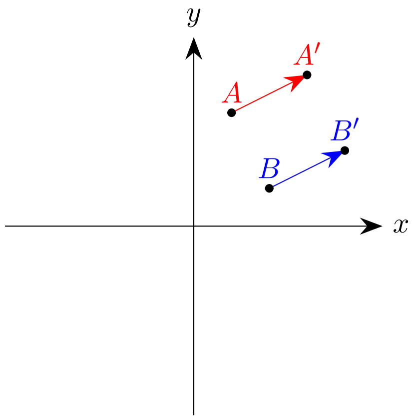
Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ są różnowartościowe:

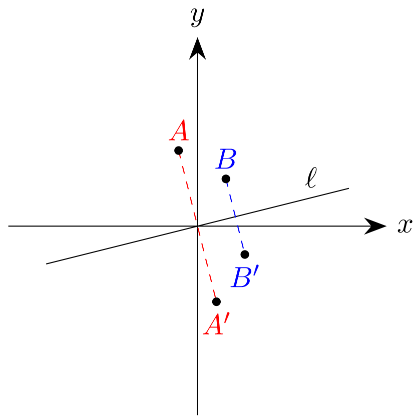
(a) translacja T_v o wektor v,

(b) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ,

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych różnych punktów A i B zachodzi $A' \neq B'$:

[8] Przekształcenie różnowartościowe nazywamy również *przekształceniem injektywnym* lub, krócej, *injekcją*.
[9] Przekształcenie „na” nazywamy również *przekształceniem surjektywnym* lub, krócej, *surjekcją*.





Przykład 15

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nie są „na”:

(a) rzut na prostą ℓ,

(b) przekształcenie stałe (stale równe P).

Rozwiązanie. (a) Punkty poza prostą ℓ nie są obrazem żadnego punktu.

(b) Punkty inne niż P nie są obrazem żadnego punktu.

Przykład 16

Uzasadnij, że poniższe przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ są „na”:

(a) translacja T_v o wektor v,

(b) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ.

Rozwiązanie. (a) Każdy punkt P płaszczyzny jest końcem pewnego wektora $\overrightarrow{XP} = v$ (czyli obrazem pewnego punktu X).

(b) Każdy punkt P płaszczyzny jest odbiciem symetrycznym względem prostej ℓ pewnego punktu X.

Przykład 17

Sprawdź warunek różnowartościowości i warunek „na” dla każdego z poniższych przekształceń (nie są to przekształcenia płaszczyzny w siebie):

(a) przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ przypisujące każdemu punktowi płaszczyzny znakowaną odległość od prostej ℓ o równaniu $x + 2y - 1 = 0$,

(b) przekształcenie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ przypisujące każdej liczbie rzeczywistej punkt $t\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$,

(c) przekształcenie $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ przypisujące każdemu punktowi płaszczyzny X znakowane pole trójkąta OAX, gdzie $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Przekształcenie F nie jest różnowartościowe, gdyż można wskazać dwa różne punkty A i B mające taką samą znakowaną odległość od prostej ℓ. Z drugiej strony, każda liczba rzeczywista jest znakowaną odległością pewnego punktu od prostej ℓ, więc przekształcenie F jest „na".
Przekształcenie G jest różnowartościowe, gdyż dla $t \neq s$ zachodzi:

$$t\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \neq s\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Z drugiej strony, obrazem dowolnej liczby rzeczywistej t jest punkt płaszczyzny leżący na prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Przekształcenie G nie jest więc „na".
Przekształcenie H nie jest różnowartościowe, gdyż można wskazać dwa różne punkty X_1 i X_2 takie, że znakowane pola trójkątów $\triangle OAX_1$ i $\triangle OAX_2$ są równe. Z drugiej strony, każda liczba rzeczywista jest znakowanym polem pewnego trójkąta o podstawie OA, więc przekształcenie H jest „na".

Definicja 2.62: Przeciwobraz punktu

Przeciwobrazem punktu P przez przekształcenie F (oznaczanym $F^{-1}[P]$) nazywamy **zbiór** wszystkich takich punktów X, że $F(X) = P$.

Przykład 18

Wyznacz przeciwobraz punktu $P = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ przez następujące przekształcenia:

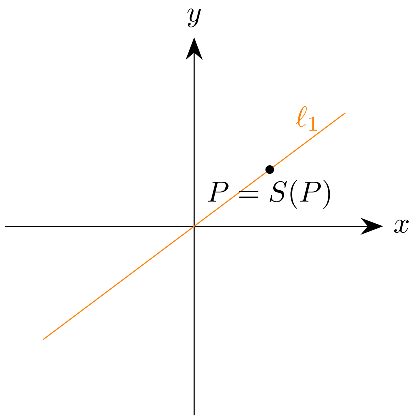
(a) odbicie S względem prostej o równaniu $3x - 4y = 0$,

(b) rzut P_1 na prostą ℓ_1 o równaniu $3x - 4y = 0$,

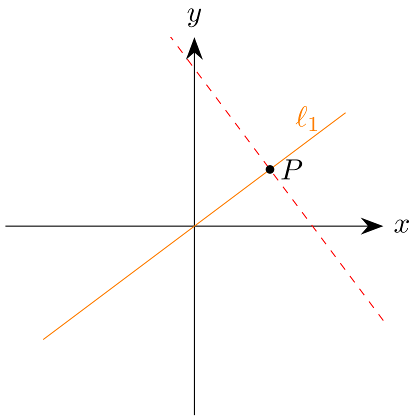
(c) rzut P_2 na prostą ℓ_2 o równaniu $2x - 3y - 4 = 0$,

(d) przekształcenie F stale równe $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Punkt P jest obrazem wyłącznie punktu P, wobec tego do jego przeciwobrazu należy tylko jeden punkt (punkt P):



(b) Przeciwobrazem punktu P jest prosta prostopadła do prostej $3x - 4y = 0$ i przechodząca przez P, co widać na poniższym rysunku:



(c) Punkt $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ nie leży na prostej ℓ_2, nie jest więc obrazem żadnego punktu. Wobec tego przeciwobraz punktu P jest zbiorem pustym.

(d) $F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, dla dowolnego punktu $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, więc przeciwobrazem punktu $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ jest cała płaszczyzna.

Przykład 19

Wyznacz przeciwobraz punktu $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ przez przekształcenie:

(a) afiniczne F o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$,

(b) liniowe G o macierzy $\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}$,

Rozwiązanie. (a) Szukamy punktów spełniających warunek $F(X) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, a więc rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest punkt $\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$.

(b) Szukamy punktów spełniających warunek $G(X) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, a więc rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

Zbiorem rozwiązań powyższego układu równań jest prosta o równaniu $2x + y - 1 = 0$.

Jak widać z powyższych przykładów, przeciwobraz punktu może się składać z jednego punktu, ale może również być zbiorem pustym lub całą prostą, a nawet całą płaszczyzną. W przypadku przekształceń afinicznych płaszczyzny (w szczególności przekształceń liniowych) jest to kompletna lista możliwości, co pokażemy poniżej.

Fakt 2.63: Przeciwobraz punktu

Przeciwobrazem punktu przez przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest punkt[10] lub prosta lub zbiór pusty lub cała płaszczyzna. Przeciwobraz ten jest punktem wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$, gdzie $F(X) = AX + v$ jest wzorem przekształcenia.

Dowód. Niech $F(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ będzie przekształceniem afinicznym. Przeciwobrazem punktu $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ jest zbiór rozwiązań równania (z niewiadomą $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} ax + by = p - e \\ cx + dy = q - f \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 1.28 zbiorem rozwiązań tego układu jest punkt lub prosta lub zbiór pusty lub cała płaszczyzna. Co więcej, wiemy, że rozwiązanie jest jednoznaczne (punkt) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$. □

Definicje różnowartościowości i „na” można przeformułować używając pojęcia przeciwobrazu:

Fakt 2.64: Przekształcenie różnowartościowe

Przekształcenie F jest różnowartościowe, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego punktu jest pojedynczym punktem lub zbiorem pustym (tzn. dla dowolnego P równanie $F(X) = P$ ma **co najwyżej jedno** rozwiązanie)

Dowód. Przekształcenie F jest różnowartościowe, gdy **nie istnieją** takie różne punkty u i v, że $F(u) = F(v)$, czyli gdy przeciwobraz żadnego punktu nie zawiera dwóch lub więcej punktów. □

Fakt 2.65: Przekształcenie „na”

Przekształcenie F jest „na”, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego punktu jest niepustym zbiorem (tzn. dla dowolnego P równanie $F(X) = P$ ma **co najmniej jedno** rozwiązanie).

Dowód. Przekształcenie F jest „na”, wtedy i tylko wtedy gdy **każdy** punkt przeciwdziedziny jest obrazem, czyli jego przeciwobraz jest niepusty. □

W świetle charakteryzacji z Faktów 2.64 i 2.65 przekształcenie F jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego P równanie $F(X) = P$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wobec tego z Faktu 2.63 można wyciągnąć następujący wniosek:

Wniosek 2.66: Odwracalność przekształcenia

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny zadane wzorem $F(X) = AX + v$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. W szczególności, przekształcenie liniowe zadane wzorem $F(X) = AX$ jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna.

[10] Formalnie rzecz ujmując nie *punkt*, tylko *jednoelementowy zbiór* składający się z pojedynczego punktu.

Rozdział 3

Diagonalizacja macierzy 2×2

3.1 Wartości własne i wektory własne

Od tej pory przestajemy się zajmować przekształceniami afinicznymi. Obszar naszych zainteresowań to wyłącznie przekształcenia liniowe.

Definicja 3.1: Wektor własny i wartość własna (przekształcenia)

Wektor własny przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ to wektor X spełniający warunek:

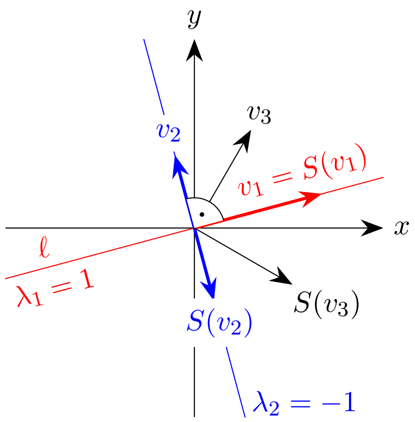
$$F(X) = \lambda \cdot X$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ. Jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* przekształcenia F, zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej* λ. Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ.

Innymi słowy: wektor własny przekształcenia F to taki wektor X, który ma ten sam kierunek co jego obraz $F(X)$, natomiast wartość własna λ to współczynnik jego skalowania przez przekształcenie F. Zauważmy, że szczególnymi przypadkami wektorów własnych przekształcenia liniowego są punkty[1] stałe (dla wartości własnej 1) oraz punkty należące do przeciwobrazu punktu 0 (dla wartości własnej 0).

Przykład 1

Wyznacz wartości i wektory własne odbicia S względem prostej ℓ (przechodzącej przez O).
Rozwiązanie. Dla dowolnego punktu v_1 na prostej ℓ zachodzi $S(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ to zbiór wektorów własnych dla λ_1.



Dla dowolnego wektora v_2 prostopadłego do prostej ℓ zachodzi $S(v_2) = -v_2 = (-1) \cdot v_2$, czyli

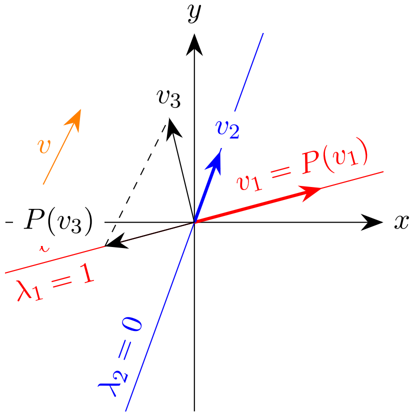
[1] Pamiętamy o utożsamieniu punktów płaszczyzny z ich wektorami wodzącymi.

$\lambda_2 = -1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta prostopadła do ℓ przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2. Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani prostopadły do ℓ, to wektory v_3 i $S(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

Przykład 2

Wyznacz wartości i wektory własne rzutu ukośnego P na prostą ℓ (przechodzącą przez O) w kierunku wektora v.

Rozwiązanie. Dla dowolnego punktu v_1 na prostej ℓ zachodzi $P(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ to zbiór wektorów własnych dla λ_1.



Dla dowolnego wektora v_2 równoległego do v zachodzi $P(v_2) = 0 = 0 \cdot v_2$, czyli $\lambda_2 = 0$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta równoległa do v przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2. Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani do ℓ, ani do v, to wektory v_3 i $P(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

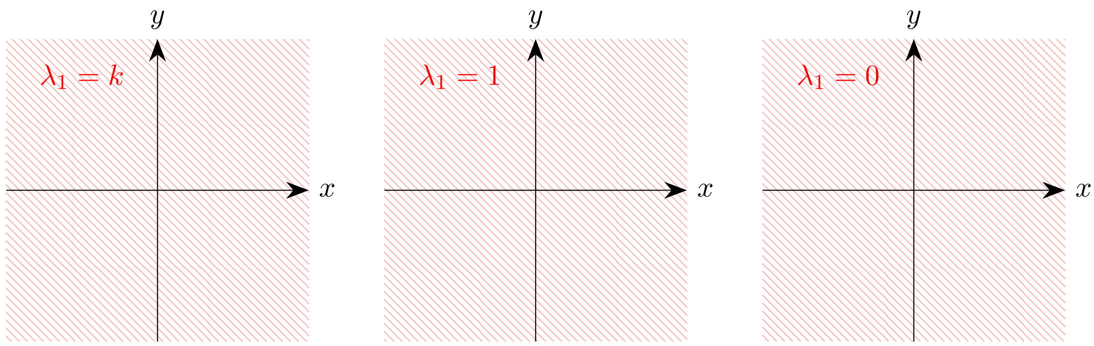
Przykład 3

Wyznacz wartości i wektory własne następujących przekształceń liniowych:

(a) jednokładność o środku O i skali k,

(b) przekształcenie identycznościowe,

(c) przekształcenie zerowe.



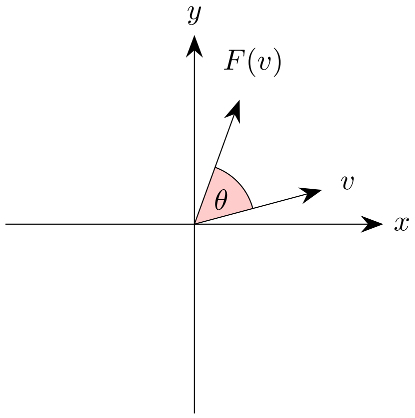
(a) Jednokładność o środku O i skali k spełnia warunek: $F(X) = k \cdot X$ dla każdego wektora X, w związku z tym każdy wektor jest wektorem własnym dla wartości własnej $\lambda_1 = k$.

(b) Przekształcenie identycznościowe spełnia warunek $F(X) = 1 \cdot X$ dla każdego wektora X, czyli każdy wektor jest wektorem własnym dla $\lambda_1 = 1$.

(c) Przekształcenie zerowe spełnia warunek $F(X) = 0 \cdot X$ dla każdego wektora X, czyli każdy wektor jest wektorem własnym dla $\lambda_1 = 0$.

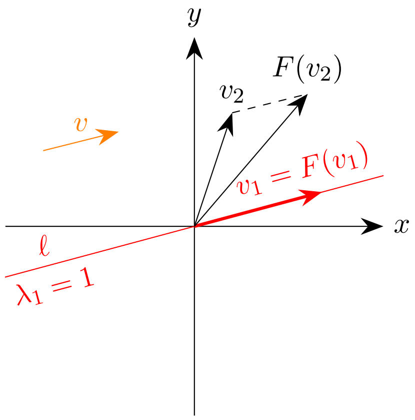
Przykład 4

Wyznacz wszystkie wartości i wektory własne obrotu wokół O o kąt θ (inny niż 0 i π).
Rozwiązanie. Jeśli v jest niezerowym wektorem, to v i $F(v)$ mają różne kierunki. Przekształcenie to nie ma zatem żadnych wartości własnych, ani niezerowych wektorów własnych.



Przykład 5

Wyznacz wszystkie wartości i wektory własne powinowactwa ścinającego F o osi ℓ (przechodzącej przez 0) i wektorze v.
Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 równoległego do prostej ℓ zachodzi $F(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta ℓ jest zbiorem wektorów własnych dla λ_1. Jeśli wektor v_2 nie jest równoległy do ℓ, to wektory v_2 i $F(v_2)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.



Jeśli mamy podaną macierz przekształcenia liniowego, to wyznaczanie wartości i wektorów własnych można sprowadzić do rozwiązywania równań, jak to pokazują kolejne fakty.

Fakt 3.2: Wielomian charakterystyczny (przekształcenia)

Wartości własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ to rozwiązania równania:

$$\det(m(F) - \lambda \cdot I) = 0$$

Wielomian $\chi_F(\lambda) = \det(m(F) - \lambda \cdot I)$ nazywamy *wielomianem charakterystycznym* przekształcenia F.

Dowód. Niech A będzie macierzą przekształcenia F, tzn. $F(X) = AX$. Warunek:

$$F(X) = \lambda X \qquad \text{(w wersji macierzowej } A \cdot X = \lambda X\text{)}$$

można zapisać w postaci

$$(F - \lambda\,\mathrm{Id})(X) = 0 \qquad \text{(w wersji macierzowej } (A - \lambda I) \cdot X = 0\text{)}$$

Zatem λ jest wartością własną F wtedy i tylko wtedy, gdy równanie macierzowe

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \tag{3.1}$$

ma niezerowe rozwiązanie. Ponieważ wektor $X = 0$ jest rozwiązaniem (3.1) niezależnie od wartości λ, więc szukamy takich λ, dla których (3.1) ma przynajmniej dwa rozwiązania ($X = 0$ i rozwiązanie niezerowe). Równanie (3.1) to układ równań o macierzy głównej $(A - \lambda I)$, który zgodnie z Faktem 1.28 ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Wobec tego wartościami własnymi są pierwiastki λ równania $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Przykład 6

Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanego wzorem:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X$$

Rozwiązanie. Tym razem, w odróżnieniu od poprzednich przykładów, wygodniej będzie zacząć od wyznaczenia wartości własnych. Zgodnie z Faktem 3.2 wartości własne przekształcenia F, to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

czyli rozwiązania równania:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Zatem wartościami własnymi są $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 5$. Wyznaczmy teraz wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2x + y = x \\ 3x + 4y = y \end{cases}$$

Każde z równań tego układu przekształca się do postaci $x + y = 0$, więc zbiorem wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ jest prosta o równaniu $x + y = 0$.
Wyznaczmy teraz wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 5$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 2x + y = 5x \\ 3x + 4y = 5y \end{cases}$$

Każde z równań tego układu przekształca się do postaci $3x - y = 0$, więc zbiorem wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda_2 = 5$ jest prosta o równaniu $3x - y = 0$.

Jak pokazuje powyższy przykład i wcześniejszy dowód, czasami wygodniej jest posługiwać się warunkiem macierzowym niż funkcyjnym. Z tego powodu wprowadzimy pojęcie wartości własnej i wektora własnego macierzy (kwadratowej).

Definicja 3.3: Wektor własny i wartość własna (macierzy)

Wektor własny macierzy A rozmiaru 2×2, to wektor X spełniający warunek

$$AX = \lambda X$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ. Jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* macierzy A, zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej* λ. Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ. Wielomian

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy A.

Innymi słowy, wartości i wektory własne macierzy A to wartości i wektory własne przekształcenia liniowego o macierzy A. W związku z tą uwagą, na wszystkie kolejne fakty można patrzyć na dwa sposoby: jako odnoszące się do macierzy A lub jako odnoszące się do przekształcenia liniowego o macierzy A.

Wniosek 3.4: Liczba wartości własnych

Macierz $A \in M_{2\times 2}$ (przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) ma co najwyżej dwie wartości własne.

Dowód. Wartości własne macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$$

Wielomian charakterystyczny, jako wielomian kwadratowy, ma co najwyżej dwa pierwiastki, więc macierz A ma co najwyżej dwie wartości własne. □

Fakt 3.5: Jednoznaczność wartości własnej

Niezerowy wektor własny macierzy $A \in M_{2\times 2}$ (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) przynależy do dokładnie jednej wartości własnej.

Dowód. Załóżmy (nie wprost), że X jest niezerowym wektorem własnym macierzy A dla dwóch różnych wartości własnych λ_1 i λ_2. Oznacza to, że:

$$\begin{cases} AX = \lambda_1 X \\ AX = \lambda_2 X \end{cases}$$

Stąd

$$\lambda_1 X = \lambda_2 X \quad \text{czyli} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)X = 0$$

Otrzymujemy sprzeczność, gdyż $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ oraz $X \neq 0$. □

Fakt 3.6: Przestrzeń własna

Jeśli λ jest wartością własną macierzy $A \in M_{2\times 2}$ (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$), to zbiór wektorów własnych dla λ (nazywany *przestrzenią własną dla* λ) jest albo prostą (przechodzącą przez 0) albo całą płaszczyzną.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Zbiór wektorów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ własnych dla wartości własnej λ to zbiór rozwiązań następującego układu równań (z niewiadomymi x i y):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

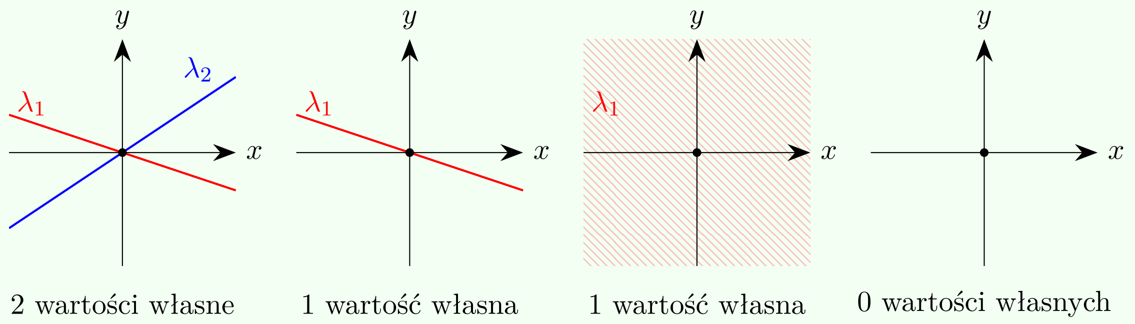
Zbiór rozwiązań układu (3.2) to (zgodnie z Faktem 1.28) zbiór pusty, punkt, prosta lub cała płaszczyzna, przy czym:

- ponieważ $x = y = 0$ spełnia (3.2), więc zbiór rozwiązań jest niepusty,
- ponieważ λ jest wartością własną A, więc (3.2) ma przynajmniej jedno rozwiązanie niezerowe, czyli inne niż $x = y = 0$, więc łącznie układ (3.2) ma przynajmniej dwa rozwiązania.

Stąd możliwe zbiory rozwiązań (3.2) to prosta zawierająca punkt 0 oraz cała płaszczyzna. $\square$

Wniosek 3.7: Wektory własne przekształcenia $\mathbb{R}^2$

Zbiór wektorów własnych macierzy 2×2 (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) jest jednym z poniższych zbiorów:



Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 3.4 macierz A rozmiaru 2×2 ma 0, 1 lub 2 wartości własne.
Jeśli A ma tylko 1 wartość własną λ_1, to zbiór wektorów własnych dla λ_1 to (zgodnie z Faktem 3.6) prosta przechodząca przez 0 lub cała płaszczyzna.
Jeśli A ma 2 wartości własne λ_1 i λ_2, to (zgodnie z Faktem 3.6) zbiór wektorów własnych dla każdej z wartości własnych to prosta przechodząca przez 0 lub płaszczyzna. Ponieważ jednak niezerowy wektor własny może należeć tylko do jednej wartości własnej (Fakt 3.5), więc jedyną możliwością są dwie różne proste przechodzące przez 0.
Stąd możliwe są tylko cztery sytuacje przestawione na rysunkach. Przykłady z początku rozdziału pokazują, że każda z tych sytuacji faktycznie może mieć miejsce. $\square$

Głównym celem wyznaczania wektorów własnych i wartości własnych macierzy jest sprowadzenie macierzy do postaci diagonalnej, czyli *diagonalizacja macierzy.* Diagonalizacja macierzy to jedno z najważniejszych narzędzi algebry liniowej:

Twierdzenie 3.8: Diagonalizacja macierzy

Jeśli macierz A rozmiaru 2×2 ma dwie różne[2] wartości własne λ i μ, to dla dowolnych niezerowych wektorów własnych $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, odpowiednio, dla λ i μ zachodzi wzór:

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ oraz } P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Ponadto, jeśli macierz A jest postaci (3.3), to λ i μ są jej wartościami własnymi, zaś u i v jej niewspółliniowymi wektorami własnymi dla, odpowiednio, λ i μ.

Dowód. Niech $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ będą niezerowymi wektorami własnymi odpowiednio dla wartości własnych λ i μ macierzy A, zaś $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. Macierz AP jest macierzą 2×2, więc wymnażając ją przez pierwszy i drugi wersor:

$$AP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$$
$$AP\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}$$

otrzymujemy odpowiednio pierwszą i drugą kolumną macierzy AP. Wobec tego:

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = PD$$

Skoro $AP = PD$, a macierz P jest odwracalna (bo wektory u i v, zgodnie z Faktem 3.5, są niewspółliniowe), to $A = PDP^{-1}$.
Dla dowodu drugiej części twierdzenia załóżmy, że $A = PDP^{-1}$, czyli $AP = PD$. Wówczas:

$$AP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = PD\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad A\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy

$$A\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

czyli u jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej λ. Podobnie sprawdzamy, że v jest wektorem własnym A dla wartości własnej μ. □

Sprowadzenie macierzy do postaci diagonalnej pozwala na sprawne wyliczanie potęg macierzy:

[2]Twierdzenie jest prawdziwe również, gdy $\lambda = \mu$ (tzn. A ma jedną (podwójną) wartość własną), pod warunkiem, że dla tej wartości własnej można dobrać dwa niewspółliniowe wektory u i v (czyli zachodzi sytuacja z trzeciego rysunku z Wniosku 3.7).

Fakt 3.9: Potęgowanie macierzy

Niech A będzie macierzą 2×2, zaś D i P takimi macierzami 2×2, że P jest odwracalna oraz $A = PDP^{-1}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$A^n = PD^nP^{-1} \tag{3.4}$$

Dowód. Przeprowadźmy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnej wartości $n = k$ zachodzi $A^k = PD^kP^{-1}$. Wówczas dla $n = k + 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = PD^kP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^k(P^{-1} \cdot P)DP^{-1} \\ &= P(D^kID)P^{-1} = P(D^kD)P^{-1} = P(D^{k+1})P^{-1} \end{aligned}$$

□

Wzór (3.4) zachodzi dla dowolnej macierzy D, aczkolwiek w praktyce będziemy go wykorzystywać głównie w sytuacji gdy D jest diagonalna (zaś PDP^{-1} jest diagonalizacją macierzy A), co pozwoli nam sprawnie potęgować macierze kwadratowe, gdyż:

$$A^n = \left(P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Jest to pierwsze ważne zastosowanie diagonalizacji macierzy, co pokazuje poniższy przykład.

Przykład 7

Obliczyć $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ to

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

Wartości własne to $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$. Wektory własne dla λ_1 to zbiór rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = x \\ x + 2y = y \end{cases} \quad \text{czyli} \quad x = -y$$

Wektory własne dla λ_2 to zbiór rozwiązań równania:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 2x + y = 3x \\ x + 2y = 3y \end{cases} \quad \text{czyli} \quad x = y$$

Przykładowe wektory własne dla wartości własnych 1 i 3 to, odpowiednio, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, czyli macierz diagonalizuje się w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Wobec tego, zgodnie z Faktem 3.9:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{100}+1 & 3^{100}-1 \\ 3^{100}-1 & 3^{100}+1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizację macierzy będziemy też wykorzystywać, do wyznaczania macierzy przekształcenia liniowego, dla którego znamy (lub łatwo możemy ustalić) wartości i wektory własne.

Przykład 8

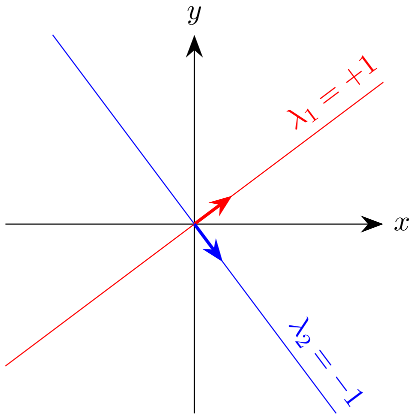
Wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) odbicie względem prostej ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$,

(b) rzut (prostopadły) na prostą ℓ o równaniu $3x - 4y = 0$,

Rozwiązanie.

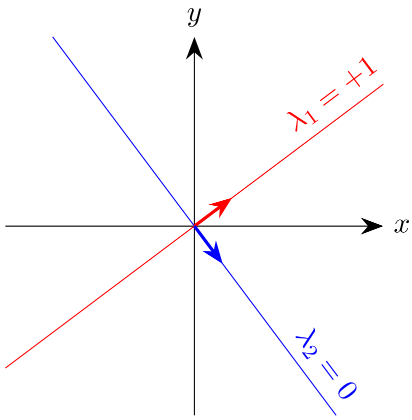
(a) Wektory własne to wektory równoległe do ℓ (dla wartości własnej 1) i prostopadłe do ℓ (dla wartości własnej -1), np. wektor kierunkowy $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ i wektor normalny $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.



W związku z tym macierz odbicia (zapisana w postaci diagonalnej) ma postać:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

(b) Wektory własne to wektory równoległe do ℓ (dla wartości własnej 1) i prostopadłe do ℓ (dla wartości własnej 0), np. wektor kierunkowy $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ i wektor normalny $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.



W związku z tym macierz rzutu (zapisana w postaci diagonalnej) ma postać:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$

Powyższe przykłady pokazują, jak ważne jest diagonalizowanie macierzy. Z Twierdzenia 3.8 wiemy, że nie każda macierz 2×2 diagonalizuje się (bo nie każda macierz 2×2 ma dwa niewspółliniowe wektory własne). Poniższe twierdzenie wyodrębnia zbiór macierzy (symetrycznych), które zawsze diagonalizują się (aczkolwiek nie każda diagonalizująca się macierz musi być symetryczna).

Twierdzenie 3.10: Twierdzenie spektralne dla $\mathbb{R}^2$

Symetryczna macierz A rozmiaru 2×2 zawsze diagonalizuje się, tzn.

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ oraz } P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

i to w taki sposób, że wektory własne $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ są prostopadłe.
Innymi słowy, zachodzi jedna z dwóch możliwości:

1) A ma dwie wartości własne, a zbiory wektorów własnych to prostopadłe proste,
2) A ma jedną (podwójną) wartość własną λ, dla której zbiór wektorów własnych jest całą płaszczyzną (wówczas $A = \lambda I$).

Dowód. Wielomian charakterystyczny macierzy symetrycznej $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ to:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a+c) + (ac - b^2)$$

Wyróżnik tego wielomianu to:

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) = a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

przy czym $\Delta = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - c = 0$ i $b = 0$, czyli $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Stąd, z Faktu 3.2, macierz A:

1) albo ma dwie różne wartości własne (gdy $\Delta > 0$),
2) albo jest postaci aI (gdy $\Delta = 0$).

Niech teraz u i v będą wektorami własnymi dla różnych wartości własnych λ i μ. Zgodnie z Faktem 2.20:

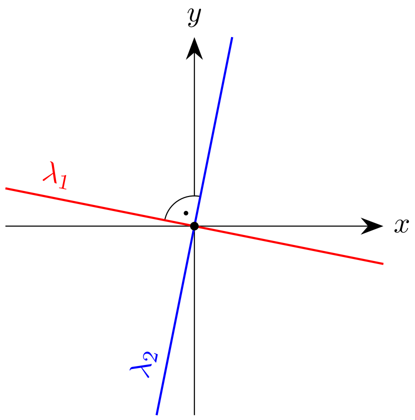
$$\begin{aligned} \lambda(u \circ v) &= (\lambda u) \circ v = (\lambda u)^\top v = (Au)^\top v = u^\top A^\top v = u^\top A v \\ &= u^\top \cdot \mu v = u \circ (\mu v) = \mu(u \circ v) \end{aligned}$$

Zatem $\lambda(u \circ v) = \mu(u \circ v)$, co wobec $\lambda \neq \mu$ daje $u \circ v = 0$, czyli u i v są prostopadłe.

□

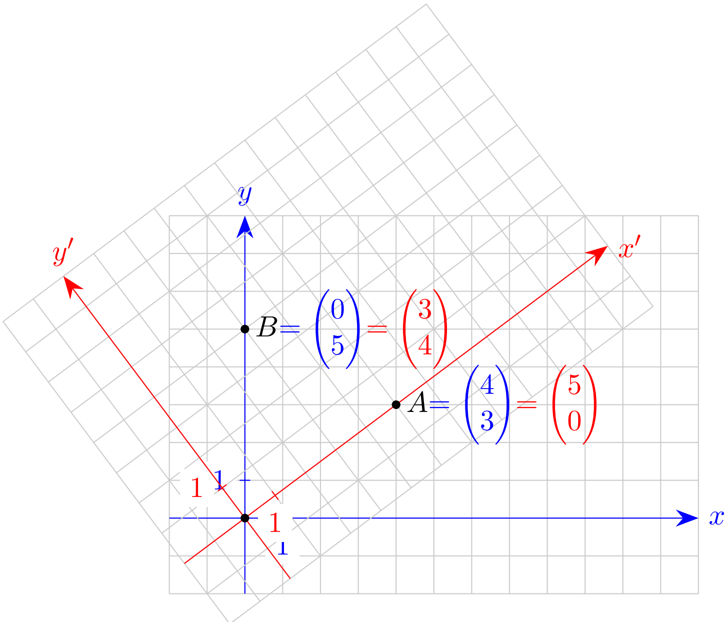
Przykład 9

Podaj przykład macierzy 2×2, której wszystkie wyrazy są dodatnie i która diagonalizuje się.
Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem spektralnym, każda macierz symetryczna jest takim przykładem, np. $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Co więcej, o macierzy tej wiemy też to, że zbiór jej wektorów własnych to dwie proste prostopadłe (jedna prosta dla każdej wartości własnej).


y
x
λ_1
λ_2

3.2 Nowy układ współrzędnych

Na jednej płaszczyźnie możemy mieć dwa różne układy współrzędnych (jak na poniższym rysunku). Wówczas każdemu punktowi można przypisać współrzędne na dwa różne sposoby: względem jednego lub względem drugiego układu współrzędnych. Dla uproszczenia będziemy jeden z nich nazywać *starym* układem współrzędnych (i współrzędne będziemy oznaczać x i y), a drugi – *nowym* układem współrzędnych (i współrzędne będziemy oznaczać x' i y').



Aby rozróżnić (bez używania kolorów) współrzędne danego punktu względem różnych układów współrzędnych, będziemy stosować następującą konwencję: $[v]_{stary}$ będzie oznaczać współrzędne w starym układzie, zaś $[v]_{nowy}$ współrzędne w nowym układzie. Na powyższym rysunku mamy więc:

$$[A]_{stary} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [A]_{nowy} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

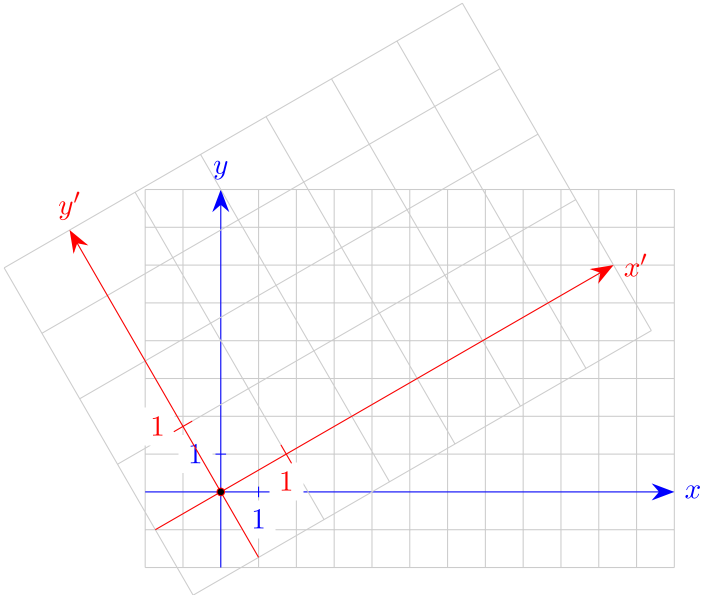
$$[B]_{stary} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad [B]_{nowy} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

W niniejszym skrypcie będziemy rozważać jedynie sytuację, gdy początek układu współrzędnych O jest taki sam zarówno w nowym, jak i w starym układzie współrzędnym, tzn.

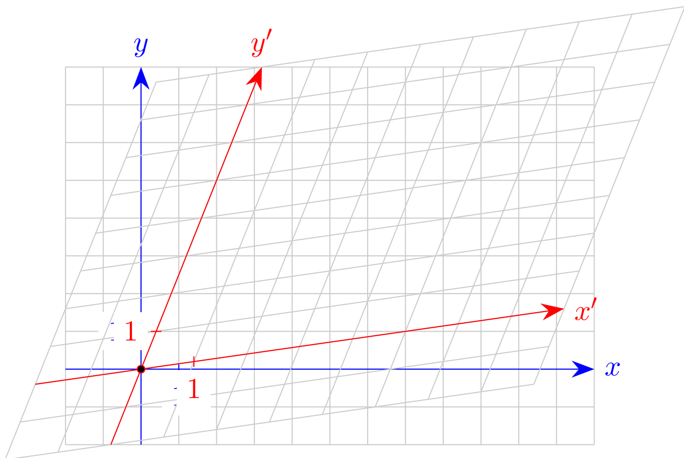
$$[O]_{stary} = [O]_{nowy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pozwala to pozostać przy dotychczasowej konwencji utożsamiania punktów i wektorów (tzn. $\overrightarrow{OA} = A$), gdyż początek układu współrzędnych (będący domyślnym początkiem wektora) nie zależy od wyboru układu. Nie nakładamy natomiast żadnych ograniczeń na jednostki na nowych osiach (nie muszą być tożsame z jednostkami na starych osiach, co więcej każda z osi może mieć inną jednostkę), ani na wzajemne położenie nowych osi współrzędnych (mogą przecinać się pod dowolnym niezerowym kątem), co pokazują rysunki na kolejnej stronie.

Jak widać, nowe jednostki mogą być inne niż stare jednostki:



oraz nowy układ współrzędnych nie musi być układem prostokątnym (tzn. nowe osie nie muszą być prostopadłe):



W tej sytuacji potrzebujemy precyzyjnej definicji układu współrzędnych oraz współrzędnych wektora względem wybranego (niekoniecznie prostokątnego) układu współrzędnych:

Definicja 3.11: Układ współrzędnych

Układem współrzędnych na płaszczyźnie nazywamy dwie przecinające się (pod dowolnym kątem) proste (nazywane *osią* x i *osią* y) wraz z ich wybranymi wektorami kierunkowymi (nazywanymi *pierwszym wersorem* i *drugim wersorem*), które wyznaczają jednostki na osi x i na osi y.

Zgodnie z powyższą definicją, wersor to wektor o początku O (punkt przecięcia osi, czyli początek układu współrzędnych) i końcu wyznaczającym jednostkę na jednej z osi (czyli w punkcie oznaczanym $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).

Podana poniżej definicja współrzędnych wektora w nowym układzie współrzędnych jest uogólnieniem Faktu 1.17 charakteryzującego współrzędne w starym układzie współrzędnych.

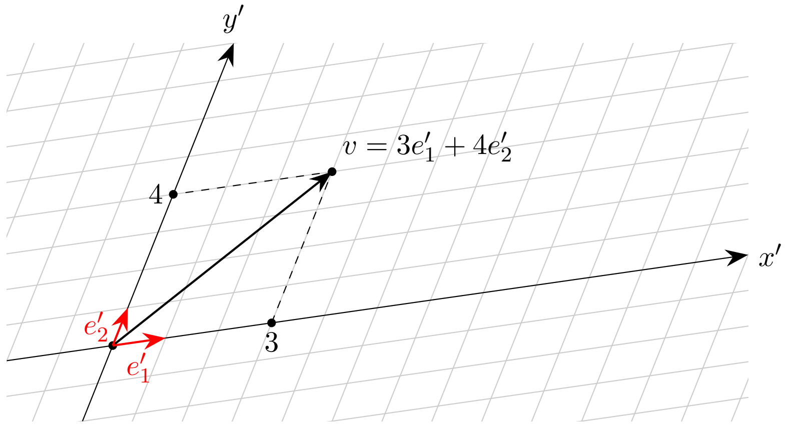
Definicja 3.12: Współrzędne wektora

Współrzędnymi wektora (punktu) v w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e_1' i e_2' nazywamy takie liczby x' i y', że:

$$v = x'e_1' + y'e_2'$$

i oznaczamy:

$$[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



Przykład 1

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$),

(b) stare współrzędne wektora w, takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Szukamy nowych współrzędnych, tzn. takich x' i y', że

$$v = x'e_1' + y'e_2'$$

Oznacza to rozwiązywanie układu równań:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 3 = x' + 3y' \\ 4 = 2x' + y' \end{cases}$$

skąd otrzymujemy $x' = \frac{9}{5}$, $y' = \frac{2}{5}$.
(b) Skoro nowe współrzędne wektora w to 3 i 4, to:

$$w = 3e_1' + 4e_2' = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Fakt 3.13: Zamiana współrzędnych (wektor)

Niech e_1', e_2' będą wersorami nowego układu współrzędnych na płaszczyźnie, zaś P – macierzą, której kolumnami są stare współrzędne nowych wersorów, tzn.

$$P = ([e_1']_{stary}, [e_2']_{stary})$$

Wówczas dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$[v]_{stary} = P \cdot [v]_{nowy} \tag{3.5}$$

Macierz P nazywamy *macierzą zamiany współrzędnych.*

Dowód. Wektor v można zapisać w postaci kombinacji liniowej starych wersorów:

$$v = xe_1 + ye_2, \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{stary} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

oraz w postaci kombinacji liniowej nowych wersorów:

$$v = x'e_1' + y'e_2', \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Jeśli oznaczymy stare współrzędne nowych wersorów jak następuje:

$$[e_1']_{stary} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad e_1' = ae_1 + ce_2$$

$$[e_2']_{stary} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad e_2' = be_1 + de_2$$

to

$$v = x'e_1' + y'e_2' = x'(ae_1 + ce_2) + y'(be_1 + de_2) = (x'a + y'b)e_1 + (x'c + y'd)e_2$$

Zatem stare współrzędne wektora v to:

$$[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x'a + y'b \\ x'c + y'd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \cdot [v]_{nowy}$$

□

Zauważmy, że $[e_1']_{nowy} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $[e_2']_{nowy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, więc podstawiając $v = e_1'$ oraz $v = e_2'$ do wzoru (3.5) otrzymujemy:

$$[e_1']_{stary} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad [e_2']_{stary} = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

co oznacza, że $[e_1']_{stary}$ i $[e_2']_{stary}$ to kolumny macierzy P (zgodnie z Faktem 3.13).
Rozważmy jeszcze raz Przykład 1, tym razem opierając jego rozwiązanie na wzorze (3.5):

Przykład 2

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (tzn. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$),

(b) stare współrzędne wektora w, takiego że $[w]_{nowy} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$,

Rozwiązanie. Wersory nowego układu współrzędnych to $e_1' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $e_2' = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, co oznacza:

$$[e_1']_{stary} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad [e_2']_{stary} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Wobec tego macierz P z Faktu 3.13 ma postać:

$$P = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 3.13, otrzymujemy:

(a) $[v]_{stary} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix} \cdot [v]_{nowy}$, czyli $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}^{-1} \cdot [v]_{stary} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

(b) $[w]_{stary} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix} \cdot [w]_{nowy} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$

Przykład 3

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Wyznacz w nowych współrzędnych równanie prostej, która w starych współrzędnych ma równanie $2x + 3y - 1 = 0$.

Rozwiązanie (sposób I). Zgodnie ze wzorem (3.5) mamy:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = x' + 2y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

Stąd:

$$2x + 3y - 1 = 2(x' + 2y') + 3(x' + y') - 1 = 5x' + 7y' - 1$$

czyli równanie prostej to $5x' + 7y' - 1 = 0$.

Rozwiązanie (sposób II). Równanie $2x + 3y - 1 = 0$ można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$$

co uwzględniając wzór (3.5):

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

daje:

$$\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad 5x' + 7y' = 1$$

co jest równaniem prostej w nowych współrzędnych.

Przykład 4

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz w starych współrzędnych równanie prostej, która w nowych współrzędnych ma równanie $x' + y' - 2 = 0$.
Rozwiązanie (sposób I). Zgodnie ze wzorem (3.5) mamy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

skąd wyliczamy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

Wobec tego:

$$x' + y' - 2 = (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y) + (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) - 2 = x - 2$$

czyli równanie prostej w starych współrzędnych to $x - 2 = 0$.

Rozwiązanie (sposób II). Równanie $x' + y' - 2 = 0$ można zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2$$

co uwzględniając wzór (3.5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

daje:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{czyli} \qquad x = 2$$

co jest równaniem prostej w nowych współrzędnych.

W dalszej części pokażemy, że równanie $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ w odpowiednio wybranym (nowym) prostokątnym układzie współrzędnych przyjmuje postać $A'(x')^2 + C'(y')^2 = 1$, co oznacza (Fakt **??**), że (o ile $A', C' \neq 0$) jest to równanie elipsy, hiperboli lub równanie sprzeczne.

Twierdzenie 3.14: Krzywe drugiego stopnia

Dane jest równanie

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1 \tag{3.6}$$

Niech v_1 i v_2 będą niewspółliniowymi wektorami własnymi symetrycznej macierzy $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$. Wówczas w (nowym, prostokątnym) układzie współrzędnych o wersorach v_1 i v_2 równanie (3.6) przyjmuje postać:

$$\alpha(x')^2 + \beta(y')^2 = 1 \tag{3.7}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dowód. Równanie $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ można zapisać w formie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{czyli} \qquad X \circ QX = 1 \tag{3.8}$$

Niech wektory własne v_1 i v_2 macierzy $Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$ stanowią wersory nowego układu współrzędnych. Oznaczając przez x i y stare współrzędne, zaś przez x' i y' – nowe współrzędne, otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'v_1 + y'v_2$$

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q(x'v_1 + y'v_2) = x' \cdot Qv_1 + y' \cdot Qv_2 = \lambda_1 x'v_1 + \lambda_2 y'v_2$$

Stąd równanie (3.8) przyjmuje postać:

$$(x'v_1 + y'v_2) \circ (\lambda_1 x'v_1 + \lambda_2 y'v_2) = 1$$

czyli

$$\lambda_1(x')^2(v_1 \circ v_1) + \lambda_2(y')^2(v_2 \circ v_2) + \lambda_1 x'y'(v_1 \circ v_2) + \lambda_2 x'y'(v_2 \circ v_1) = 1$$

co po uwzględnieniu prostopadłości wektorów v_1 i v_2 (macierz Q jest symetryczna) oznacza:

$$\lambda_1(x')^2 \cdot |v_1|^2 + \lambda_2(y')^2 \cdot |v_2|^2 = 1$$

□

Przykład 5

Narysuj krzywą o równaniu $11x^2 - 24xy + 4y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 3.14 chcemy zapisać równanie krzywej w nowym układzie współrzędnych, którego wersorami są wektory własne macierzy $Q = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Wielomian charakterystyczny macierzy Q to

$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} 11 - x & -12 \\ -12 & 4 - x \end{pmatrix} = (11 - x)(4 - x) - 144 = x^2 - 15x - 100 = (x - 20)(x + 5)$$

więc wartości własne Q to $\lambda_1 = 20$ i $\lambda_2 = -5$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 11x - 12y = 20x \\ -12x + 4y = 20y \end{cases}$$

tzn. punkty leżące na prostej $3x + 4y = 0$. Przykładem (niezerowego) wektora własnego jest $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Podobnie ustalamy $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (3.5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = 4x' + 3y' \\ y = -3x' + 4y' \end{cases}$$

skąd równanie krzywej przyjmuje postać:

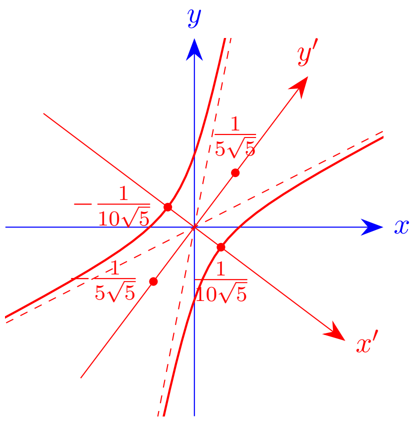
$$11(4x' + 3y')^2 - 24(4x' + 3y')(-3x' + 4y') + 4(-3x' + 4y')^2 = 1$$

co po uproszczeniu daje równanie:

$$500(x')^2 - 125(y')^2 = 1$$

czyli

$$\left(\frac{x'}{1/10\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{1/5\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$



Przykład 6

Narysuj krzywą o równaniu $34x^2 - 24xy + 41y^2 = 1$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 3.14 szukamy wartości i wektorów własnych macierzy $Q = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix}$. Jej wielomian charakterystyczny to

$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} 34 - x & -12 \\ -12 & 41 - x \end{pmatrix} = (34 - x)(41 - x) - 144 = x^2 - 75x + 1250 = (x - 25)(x - 50)$$

czyli wartościami własnymi są $\lambda_1 = 25$ i $\lambda_2 = 50$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 34x - 12y = 25x \\ -12x + 41y = 25y \end{cases}$$

tzn. punkty leżące na prostej $3x - 4y = 0$. Przykładem (niezerowego) wektora własnego jest $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Podobnie ustalamy $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (3.5):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = 4x' - 3y' \\ y = 3x' + 4y' \end{cases}$$

skąd równanie krzywej przyjmuje postać:

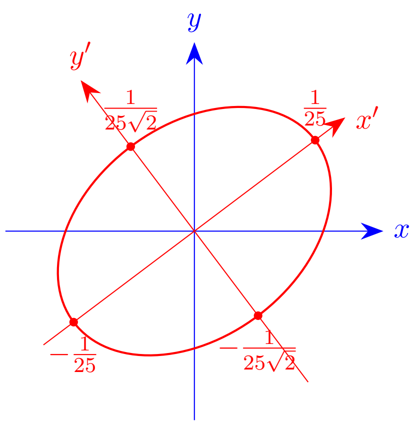
$$34(4x' - 3y')^2 - 24(4x' - 3y')(3x' + 4y') + 41(3x' + 4y')^2 = 1$$

co po uproszczeniu daje równanie:

$$625(x')^2 + 1250(y')^2 = 1$$

czyli

$$\left(\frac{x'}{1/25}\right)^2 - \left(\frac{y'}{1/25\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$



Przykład 7

Narysuj krzywą o równaniu $xy = 1$ (czyli „szkolną” hiperbolę o równaniu $y = \frac{1}{x}$).

Rozwiązanie. Zgodnie z Twierdzeniem 3.14 szukamy wartości i wektorów własnych macierzy $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Jej wielomian charakterystyczny to

$$\chi_Q(x) = \det \begin{pmatrix} -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{pmatrix} = x^2 - \frac{1}{4} = (x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2})$$

czyli wartościami własnymi są $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Wektory własne dla wartości własnej λ_1 to rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

skąd $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Podobnie wyznaczamy $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (3.5):

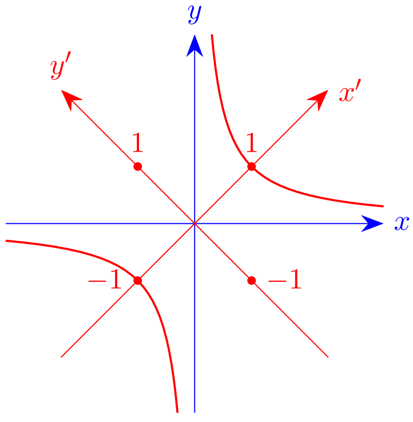
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases}$$

skąd równanie hiperboli przyjmuje postać:

$$(x' - y')(x' + y') = 1$$

czyli

$$(x')^2 - (y')^2 = 1$$



Jeśli zmieniamy układ współrzędnych, to zmianie ulegną również macierze przekształceń liniowych. Dla rozróżnienia macierzy przekształcenia liniowego F w starym i nowym układzie współrzędnych, będziemy je oznaczać, odpowiednio, $m_{stary}(F)$ i $m_{nowy}(F)$.

Definicja 3.15: Macierz przekształcenia (stare i nowe współrzędne)

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Macierzą przekształcenia F *w starym układzie współrzędnych* nazywamy macierz $m_{stary}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{stary} = m_{stary}(F) \cdot [X]_{stary}$$

Macierzą przekształcenia F *w nowym układzie współrzędnych* nazywamy macierz $m_{nowy}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [X]_{nowy}$$

Zauważmy, że definicja macierzy przekształcenia w starym układzie współrzędnych to inaczej zapisana Definicja 2.41. Interpretacja macierzy przekształcenia w nowym układzie współrzędnych jest analogiczna do interpretacji macierzy przekształcenia w starym układzie współrzędnych, opisanej w Fakcie 2.46.

Fakt 3.16: Obrazy wersorów (nowych)

Jeśli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e_1' i e_2', to:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = [F(e_1')]_{nowy} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = [F(e_2')]_{nowy}$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to nowe współrzędne obrazów nowych wersorów).

Dowód.

$$[F(e_1')]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [e_1']_{nowy} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$[F(e_2')]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [e_2']_{nowy} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

□

Pozwala to na sformułowanie następującego uogólnienia Faktu 2.46:

Wniosek 3.17: Obrazy dwóch niewspółliniowych wektorów

Przekształcenie liniowe płaszczyzny jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy dowolnych dwóch **niewspółliniowych** wektorów, tzn. jeśli dane są niewspółliniowe wektory u i v oraz dowolne wektory u' i v', to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takie, że

$$F(u) = u' \qquad \text{oraz} \qquad F(v) = v'$$

Dowód. Rozważając nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = u$ oraz $e_2' = v$ otrzymujemy macierz przekształcenia:

$$m_{nowy}(F) = (u', v')$$

co oznacza, że przekształcenie jest jednoznacznie wyznaczone. □

Przykład 8

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pewne przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w nowym układzie macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(e'_1)$, $F(e'_2)$ oraz $F\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 3.16, skoro $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, to:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = [F(e'_1)]_{nowy} \qquad \text{czyli} \qquad F(e'_1) = 4e'_1 + e'_2 = 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [F(e'_2)]_{nowy} \qquad \text{czyli} \qquad F(e'_2) = e'_1 + e'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_1 + e'_2$, więc:

$$F(v) = F(e'_1 + e'_2) = F(e'_1) + F(e'_2) = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Operowanie macierzami przekształceń w nowych i starych współrzędnych bardzo upraszcza następujący fakt:

Fakt 3.18: Zamiana współrzędnych (macierz przekształcenia)

Niech e'_1 i e'_2 będą wersorami nowego układu współrzędnych, zaś $P = ([e'_1]_{stary}, [e'_2]_{stary})$ macierzą zamiany współrzędnych. Wówczas dla dowolnego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi wzór:

$$m_{stary}(F) = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1} \tag{3.9}$$

Dowód. Oznaczmy $A = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1}$. Chcemy pokazać, że jest to macierz F w starym układzie współrzędnych, czyli że dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^2$ zachodzi:

$$[F(v)]_{stary} = A \cdot [v]_{stary}$$

Macierz P jest macierzą zamiany współrzędnych, więc dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^2$ zachodzi:

$$[X]_{stary} = P \cdot [X]_{nowy}, \quad \text{oraz} \quad P^{-1}[X]_{stary} = [X]_{nowy}$$

Stąd:

$$A \cdot [v]_{stary} = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1}[v]_{stary} = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot [v]_{nowy} = P \cdot [F(v)]_{nowy} = [F(v)]_{stary}$$

□

Przykład 9

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy A ma dwie różne wartości własne λ i μ. Wprowadźmy nowy układ współrzędnych o wersorach $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, gdzie u i v to wektory własne F dla wartości własnych, odpowiednio, λ i μ. Znajdź macierz F w nowym układzie.

Rozwiązanie. Skoro nowe wersory $e_1' = u$ i $e_2' = v$ są wektorami własnymi F, to:

$$F(e_1') = \lambda \cdot e_1' + 0 \cdot e_2' \qquad \text{oraz} \qquad F(e_2') = 0 \cdot e_1' + \mu \cdot e_2'$$

skąd $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Zauważmy, że w takim razie, zgodnie ze wzorem (3.9) otrzymujemy:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{gdzie} \quad P = ([e_1']_{stary}, [e_2']_{stary}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

czyli wzór na diagonalizację macierzy. Wzór (3.9) można więc traktować jako uogólnienie wzoru na diagonalizację macierzy.

Przykład 10

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starym układzie.

(b) Przekształcenie liniowe $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w starym układzie ma macierz $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz G w nowym układzie.

Rozwiązanie. Macierz zamiany współrzędnych to $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Zgodnie ze wzorem (3.9):

$$m_{stary}(F) = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Przekształcając wzór (3.9) zastosowany do G:

$$m_{stary}(G) = P \cdot m_{nowy}(G) \cdot P^{-1}$$

otrzymujemy

$$m_{nowy}(G) = P^{-1} \cdot m_{stary}(G) \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

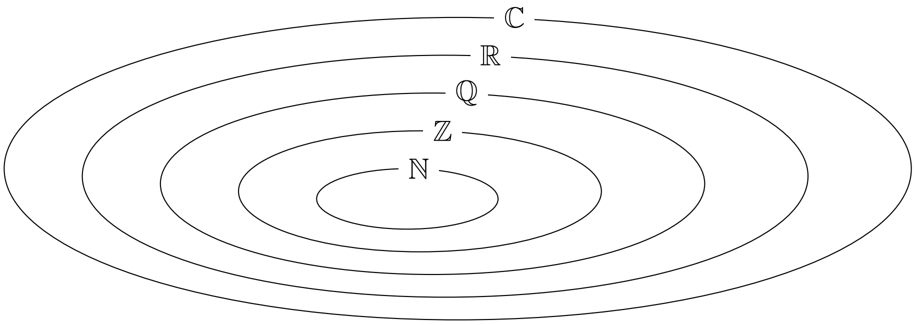
Rozdział 4

Liczby zespolone

Definicja 4.1: Liczba zespolona

Liczba zespolona to liczba postaci $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś i to taka liczba (nierzeczywista), dla której $i^2 = -1$ (myślimy: $i = \sqrt{-1}$). Liczbę a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej $z = a + bi$ (i oznaczamy $\mathrm{Re}z$), a liczbę b – *częścią urojoną* liczby zespolonej z (i oznaczamy $\mathrm{Im}z$).

Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest podzbiorem zbioru liczb zespolonych (oznaczanego $\mathbb{C}$), tzn. każda liczba rzeczywista $r \in \mathbb{R}$ jest liczbą zespoloną o zerowej części urojonej: $r = r + 0 \cdot i$. Wzajemne relacje wszystkich poznanych zbiorów liczb przedstawia poniższy rysunek.



Działania na liczbach zespolonych określamy tak, by zachowane były prawa działań obowiązujące dla liczb rzeczywistych, w szczególności przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania, a także by działania na liczbach rzeczywistych były szczególnym przypadkiem działań na liczbach zespolonych. Stąd następujące definicje:

Definicja 4.2: Działania arytmetyczne na liczbach zespolonych

Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb zespolonych $a + ib$ i $c + id$ (za wyjątkiem dzielenia przez 0) definiujemy następująco:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

O ile definicja dodawania i odejmowania wydaje się naturalna, o tyle definicje mnożenia i dzielenia wymagają wytłumaczenia. Wymnażając liczby zespolone $a + ib$ i $c + id$ oraz stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania (oraz warunek $i^2 = -1$) otrzymujemy zapowiedziany wzór:

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac + ibc + iad + i^2bd = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

Wzór na iloraz liczb zespolonych również wyprowadzamy przy pomocy prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania, wykorzystując mechanizm stosowany przy usuwaniu niewymierności z mianownika:

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2-(id)^2} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

Wynika stąd, że dzielenie przez liczbę zespoloną $c+id$ jest wykonalne, o ile $c^2+d^2 \neq 0$, czyli o ile c i d nie są jednocześnie zerami (tzn. za wyjątkiem dzielenia przez liczbę $0 = 0+0i$).

Przykład 1

Wykonać dzielenie $(1+i) : (1+2i)$.

Rozwiązanie.

$$\frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+i-2i+2}{1+4} = \frac{3-i}{5} = \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{5}i$$

Równania liniowe (jak również układy równań liniowych) w liczbach zespolonych rozwiązuje się dokładnie tak samo, jak w liczbach rzeczywistych.

Przykład 2

Znajdź wszystkie pary liczb zespolonych z i w spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} (1+i)z + w = (1+2i) \\ iz + (1-i)w = (2+i) \end{cases}$$

Rozwiązanie (sposób I). Stosując metodę podstawiania otrzymujemy:

$$w = (1+2i) - (1+i)z$$

co podstawiamy do drugiego równania otrzymując:

$$(-2+i)z + (3+i) = (2+i)$$
$$z = \frac{-1}{-2+i} = \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5}i$$

skąd

$$w = (1+2i) - (1+i)(\tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{5}i) = \tfrac{4}{5} + \tfrac{7}{5}i$$

Rozwiązanie (sposób II). Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$D = \det\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} = (1+i)(1-i) - 1\cdot i = 2 - i \neq 0$$

$$D_z = \det\begin{pmatrix} 1+2i & 1 \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix} = (1+2i)(1-i) - 1\cdot(2+i) = 1$$

$$D_w = \det\begin{pmatrix} 1+i & 1+2i \\ i & 2+i \end{pmatrix} = (1+i)(2+i) - i\cdot(1+2i) = 3+2i$$

Stąd:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{2-i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$
$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Zasadniczym powodem wprowadzenia liczb zespolonych jest to, że umożliwiają znalezienie pierwiastków dowolnego równania wielomianowego (każdy wielomian ma pierwiastek zespolony, nawet gdy nie ma żadnych pierwiastków rzeczywistych). Pierwszym przykładem jest wyliczenie pierwiastka kwadratowego z liczby rzeczywistej ujemnej (czyli rozwiązywanie równania wielomianowego $x^2 + c = 0$, gdzie $c > 0$):

$$\sqrt{-1} = i, \qquad \sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i, \qquad \sqrt{-5} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} = i\sqrt{5}$$

(powyższe wyliczenia stanowią tylko połowę prawdy, o czym mówi Fakt 4.10). W szczególności przy pomocy liczb zespolonych możemy wyznaczyć pierwiastki wielomianu kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych w sytuacji, gdy $\Delta < 0$.

Przykład 3

Rozwiązać równanie:

$$2x^2 + 2x + 5 = 0$$

Rozwiązanie. Zgodnie ze standardowym wzorem:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -36 = (6i)^2$$

skąd

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{-2 \pm 6i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$$

Zbiór liczb zespolonych umożliwia również pierwiastkowanie liczb nierzeczywistych, co pokazuje poniższy przykład. Wygodniejszy algorytm pierwiastkowania zostanie opisany w dalszej części rozdziału.

Przykład 4

Obliczyć $\sqrt{i}$.

Rozwiązanie. Niech $\sqrt{i} = a + bi$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Wówczas:

$$(a+bi)^2 = i, \qquad \text{czyli} \qquad (a^2 - b^2) + 2abi = i$$

Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są zarówno ich części rzeczywiste, jak i urojone, czyli:

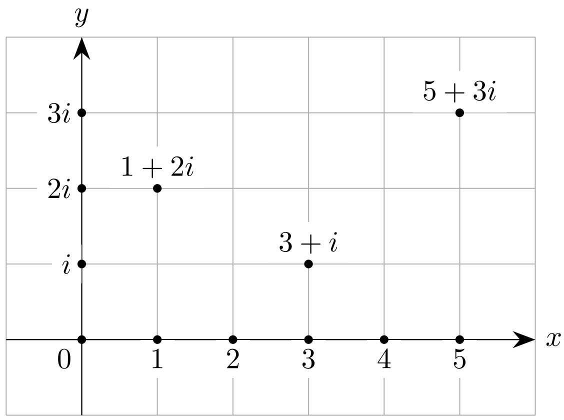
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań (w liczbach rzeczywistych) otrzymujemy $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $a = b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Stąd:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{lub} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wyjaśnienie, dlaczego otrzymaliśmy dwa rozwiązania zawarte jest w Fakcie 4.10.

Liczby rzeczywiste przedstawiamy jako punkty na prostej (osi liczbowej). Liczby zespolone przedstawiamy jako punkty na płaszczyźnie, gdzie część rzeczywista i część urojona odpowiadają współrzędnym punktu płaszczyzny (tzn. liczba $a+bi$ odpowiada punktowi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$).



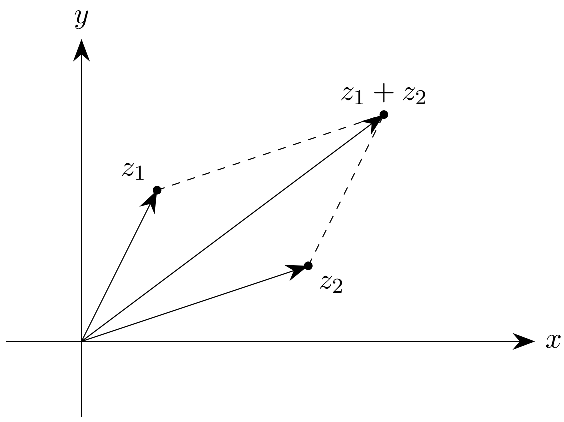
Dodawanie liczb zespolonych odbywa się jak dodawanie wektorów. Nietrudno się o tym przekonać porównując dodawanie wektorów:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

z dodawaniem liczb zespolonych:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

Wektor $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ oraz liczba zespolona $(a+c)+i(b+d)$ oznaczają ten sam punkt płaszczyzny.



Fakt 4.3: Nierówność trójkąta (dla liczb zespolonych)

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzi warunek

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

Dowód. Traktując liczby zespolone jako wektory na płaszczyźnie zauważamy, że jest to inaczej zapisana nierówność trójkąta dla wektorów na płaszczyźnie (Fakt 1.20). □

Wiemy, że punkty na płaszczyźnie można opisywać podając współrzędne kartezjańskie (x i y) albo współrzędne biegunowe (promień r i kąt θ). To drugie przedstawienie jest znacznie wygodniejsze przy mnożeniu liczb zespolonych, dlatego współrzędne biegunowe dla liczb zespolonych mają swoje specjalne nazwy:

Definicja 4.4: Postać trygonometryczna

Jeśli liczbę zespoloną $z = a + ib$ przedstawimy w postaci punktu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ na płaszczyźnie, to współrzędne biegunowe r i θ tego punktu będziemy nazywać:

1) r – *modułem* liczby zespolonej z (ozn. $|z|$),
2) θ – *argumentem* liczby zespolonej z (ozn. $\arg z$).

W ten sposób otrzymujemy *postać trygonometryczną* niezerowej liczby zespolonej z:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4.1}$$

Zwróćmy uwagę, że argument liczby zespolonej z (jako kąt między wektorem z a dodatnią półosią Ox) jest wyznaczony modulo 2π (tzn. dodanie całkowitej wielokrotności 2π nie zmienia $\arg z$).

Fakt 4.5: Postać trygonometryczna

Dla dowolnej liczby zespolonej $z = a + ib$ (gdzie a i b to odpowiednio część rzeczywista i urojona) zachodzi:

1) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
2) $\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{gdy } z \text{ leży w I lub IV ćwiartce} \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, & \text{gdy } z \text{ leży w II lub III ćwiartce} \end{cases}$

Dowód. Zgodnie z definicją, jeśli oznaczymy $|z| = r$ oraz $\arg z = \theta$, to:

$$a = r\cos\theta \qquad \text{oraz} \qquad b = r\sin\theta$$

Stąd

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r$$

jako że $r \geq 0$. Ponadto:

$$\frac{b}{a} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{czyli} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \quad \text{lub} \quad \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

jako że funkcja tg ma okres π, więc znając $\operatorname{tg}\theta$ nie otrzymujemy pełnej informacji o kącie θ (potrzebujemy dodatkowej informacji, w której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się liczba zespolona z). □

Przykład 5

Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby zespolone $z_1 = 1 + i$ oraz $1 + 2i$.
Rozwiązanie. Nietrudno obliczyć moduły obu liczb:

$$|z_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \text{oraz} \qquad |z_2| = r_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

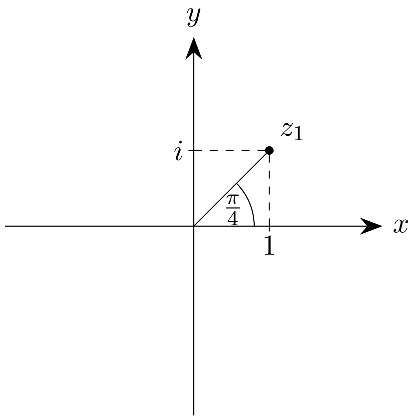
Ich argumenty to:

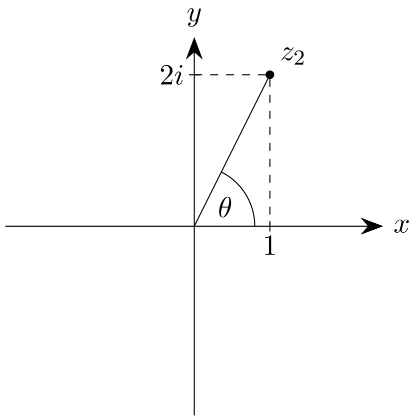
$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\tfrac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \tfrac{\pi}{4} \qquad \text{oraz} \qquad \arg z_2 = \operatorname{arctg} 2$$

Stąd:

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot (\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})$$
$$z_2 = \sqrt{5} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{gdzie} \quad \theta = \operatorname{arctg} 2$$

Wartość $\arg z_1$ można również (bez żadnych rachunków) odczytać z rysunku:





Przedstawienie trygonometryczne liczby zespolonej pozwala lepiej zrozumieć operację mnożenia liczb zespolonych:

Fakt 4.6: Mnożenie liczb zespolonych (postać trygonometryczna)

Dla dowolnych (niezerowych) liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą warunki:

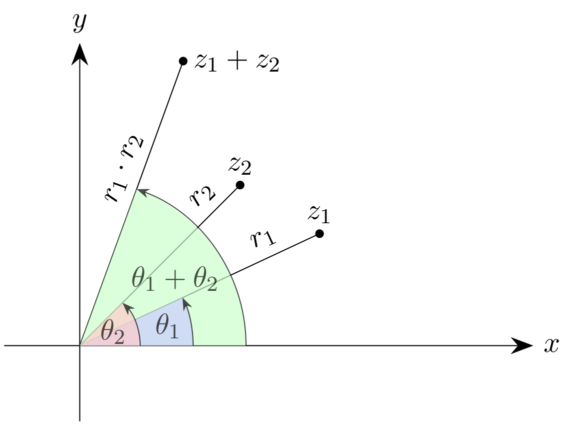
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \text{oraz} \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{4.2}$$

Innymi słowy:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \tag{4.3}$$

Dowód. Jeśli $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ oraz $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, to:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$



□

Analogiczne wzory zachodzą dla dzielenia liczb zespolonych:

Fakt 4.7: Dzielenie liczb zespolonych (postać trygonometryczna)

Dla dowolnych (niezerowych) liczb zespolonych z_1 i z_2 zachodzą warunki:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{oraz} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{4.4}$$

Innymi słowy:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \tag{4.5}$$

Dowód. Z Faktu 4.6 zastosowanego dla liczb zespolonych $\frac{z_1}{z_2}$ i z_2 otrzymujemy:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = \left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = |z_1|$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg z_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right) = \arg z_1 \pmod{2\pi}$$

co po przekształceniu daje wzory (4.4). □

Szczególnym przypadkiem wzoru (4.5) (w sytuacji $z_1 = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$) jest wzór na odwrotność liczby zespolonej:

Fakt 4.8: Odwrotność liczby zespolonej (postać trygonometryczna)

Dla dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ zachodzą warunki:

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \qquad \text{oraz} \qquad \arg(z^{-1}) = -\arg z \tag{4.6}$$

Innymi słowy:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^{-1} = (r^{-1})(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = (r^{-1})(\cos\theta - i\sin\theta) \tag{4.7}$$

Wzór (4.3) w przypadku $r_1 = r_2 = r$ oraz $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ przyjmuje postać:

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \tag{4.8}$$

Indukcyjnie możemy udowodnić jego następujące uogólnienie:

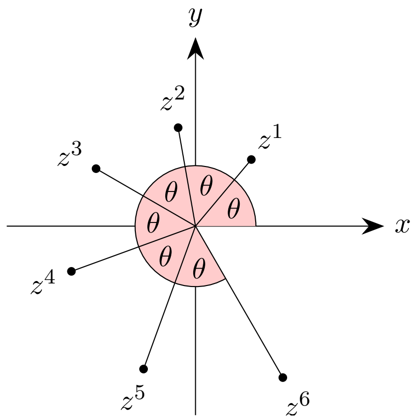
Fakt 4.9: Potęgowanie liczby zespolonej (postać trygonometryczna)

Jeśli liczbę zespoloną z zapiszemy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, to dla dowolnego n całkowitego zachodzi:

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{4.9}$$

W szczególności prawdziwy jest wzór (zwany *wzorem de Moivre'a*):

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{4.10}$$



Dowód. Przypadek $n \geq 0$ dowodzimy indukcyjnie. Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Jeśli wzór (4.9) jest prawdziwy dla $n = k$, to dla $n = k + 1$, zgodnie ze wzorem (4.3), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{k+1} &= [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^k \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) \cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta)\end{aligned}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej to dowodzi przypadku $n \geq 0$.
W przypadku $n < 0$ oznaczmy $n = -k$. Wówczas $k > 0$ i stosując udowodnioną już część faktu oraz wzór (4.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-k} &= \left[(r(\cos\theta + i\sin\theta))^k\right]^{-1} = [r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)]^{-1} \\ &= r^{-k}(\cos(-k\theta) + i\sin(-k\theta))\end{aligned}$$

□

Przykład 6

Obliczyć $(1+i)^{100}$ oraz $(1+2i)^{100}$.
Rozwiązanie. Korzystając z wyznaczonych w poprzednim przykładzie postaci trygonometrycznych, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(1+i)^{100} &= \left(\sqrt{2} \cdot (\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})\right)^{100} = \left(\sqrt{2}\right)^{100} \cdot \left(\cos\tfrac{100\pi}{4} + i\sin\tfrac{100\pi}{4}\right) \\ &= 2^{50} \cdot (\cos 25\pi + \sin 25\pi) = -2^{50}\end{aligned}$$

oraz dla $\theta = \operatorname{arctg} 2$:

$$\begin{aligned}(1+2i)^{100} &= \left(\sqrt{5} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)\right)^{100} = \left(\sqrt{5}\right)^{100}(\cos(100\theta) + i\sin(100\theta)) \\ &= 5^{50}(\cos(100\theta) + i\sin(100\theta))\end{aligned}$$

Fakt 4.9 można wykorzystać również do wyznaczenia pierwiastka n-tego stopnia. Zgodnie z definicją pierwiastkowania, $\sqrt[n]{z}$ to taka liczba zespolona w, że

$$w^n = z \tag{4.11}$$

Postać trygonometryczna: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ oraz $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ pozwala zapisać warunek (4.11) jako:

$$(s(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

czyli zgodnie ze wzorem de Moivre'a:

$$s^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

Równość liczb zespolonych oznacza równość ich modułów i równość (modulo 2π) ich argumentów:

$$s^n = r \qquad \text{oraz} \qquad n\varphi = \theta \mod 2\pi$$

Stąd dostajemy moduł szukanej liczby w:

$$|w| = s = \sqrt[n]{r}$$

oraz n różnych możliwych argumentów liczby w:

$$\varphi = \tfrac{\theta}{n} \quad \text{lub} \quad \varphi = \tfrac{\theta+2\pi}{n} \quad \text{lub} \quad \varphi = \tfrac{\theta+4\pi}{n} \quad \text{lub} \quad \ldots \quad \text{lub} \quad \varphi = \tfrac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$$

Oznacza to, że udowodniliśmy następujący fakt:

Fakt 4.10: Pierwiastkowanie liczby zespolonej (postać trygonometryczna)

(Niezerowa) liczba zespolona $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ma n pierwiastków n-tego stopnia:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\tfrac{\theta}{n} + i\sin\tfrac{\theta}{n}) \\
w_1 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\tfrac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\tfrac{\theta+2\pi}{n}) \\
w_2 &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\tfrac{\theta+4\pi}{n} + i\sin\tfrac{\theta+4\pi}{n}) \\
&\ldots \\
w_{n-1} &= \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\tfrac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\tfrac{\theta+2(n-1)\pi}{n})
\end{aligned}$$

Jaki widać, liczba zespolona z ma n równoprawnych pierwiastków stopnia n. Niejednoznaczność tę można zaobserwować już przy pierwiastkowaniu dodatnich liczb rzeczywistych, np. $\sqrt{4}$ może być równy 2 (bo $2^2 = 4$) lub -2 (bo $(-2)^2 = 4$). Wyznaczając pierwiatki kwadratowe z liczb rzeczywistych zawsze odrzucaliśmy jedną z możliwości (ujemną), żeby pierwiastkowanie dawało jednoznaczny wynik. W przypadku pierwiastkowania liczb zespolonych nie da się w tego w sensowny sposób zrobić – każda liczba zespolona ma dwa równoprawne pierwiastki kwadratowe.

Przykład 7

Obliczyć $\sqrt{i}$.
Rozwiązanie. Ponieważ $i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, więc $\sqrt{i}$ ma następujące dwie wartości:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 1 \cdot (\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
w_1 &= 1 \cdot (\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

dokładnie jak w Przykładzie 4.

Przykład 8

Obliczyć $\sqrt[3]{8i}$.
Rozwiązanie. Ponieważ $8i = 8 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$, więc $\sqrt[3]{8i}$ ma następujące trzy wartości:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2 \cdot (\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = 2 \cdot (\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i) = \sqrt{3} + i \\
w_1 &= 2 \cdot (\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = 2 \cdot (-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i \\
w_2 &= 2 \cdot (\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2}) = 2 \cdot (-i) = -2i
\end{aligned}$$

Przykład 9

Obiczyć $\sqrt[4]{-1+i}$.
Rozwiązanie. Ponieważ $-1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$, więc $\sqrt[4]{-1+i}$ ma cztery wartości:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[8]{2}\cdot(\cos\tfrac{3\pi}{16}+i\sin\tfrac{3\pi}{16})\\
w_1 &= \sqrt[8]{2}\cdot(\cos\tfrac{11\pi}{16}+i\sin\tfrac{11\pi}{16})\\
w_2 &= \sqrt[8]{2}\cdot(\cos\tfrac{19\pi}{16}+i\sin\tfrac{19\pi}{16})\\
w_3 &= \sqrt[8]{2}\cdot(\cos\tfrac{27\pi}{16}+i\sin\tfrac{27\pi}{16})
\end{aligned}$$

Zasada mówiąca, że istnieje n różnych pierwiastków n-tego stopnia dotyczy nie tylko pierwiastkowania liczb nierzeczywistych, ale również pierwiastkowania liczb rzeczywistych – każda niezerowa liczba rzeczywista ma n różnych zespolonych pierwiastków n-tego stopnia.

Przykład 10

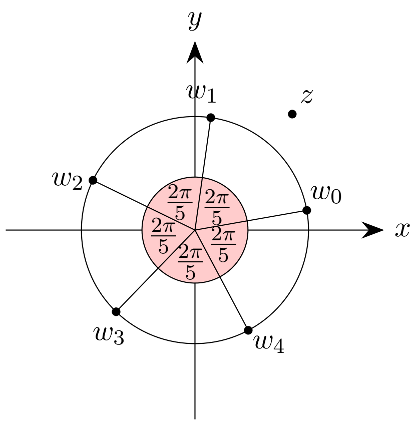
Wyznaczyć wszystkie pierwiastki szóstego stopnia z 1.
Rozwiązanie. Ponieważ $1=\cos 0+\sin 0$, więc $\sqrt[6]{1}$ ma następujące sześć wartości:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos 0+i\sin 0 = 1\\
w_1 &= \cos\tfrac{\pi}{3}+i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_2 &= \cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_3 &= \cos\pi+i\sin\pi = -1\\
w_4 &= \cos\tfrac{4\pi}{3}+i\sin\tfrac{4\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\\
w_5 &= \cos\tfrac{5\pi}{3}+i\sin\tfrac{5\pi}{3} = \tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Fakt 4.11: Pierwiastkowanie liczby zespolonej (geometrycznie)

Dla dowolnej niezerowej liczby zespolonej z pierwiastki z liczby z:

1) stopnia 2 (pierwiastki kwadratowe) to dwie liczby przeciwne,
2) stopnia n (gdzie $n \geq 3$) to wierzchołki pewnego n-kąta foremnego o środku w 0.



Dowód. Zauważmy, że wszystkie pierwiastki z liczby $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ mają jednakowy moduł (równy $\sqrt[n]{r}$), zaś argumenty kolejnych pierwiastków różnią się o $\frac{2\pi}{n}$. W przypadku $n=2$

otrzymujemy więc dwie liczby przeciwne (różnica argumentów wynosi π), zaś w przypadku $n \geq 3$ otrzymujemy punkty leżące w równych odstępach na okręgu o środku 0 i promieniu $\sqrt[n]{r}$ (na rysunku pokazano przypadek $n = 5$). $\square$

Alternatywnym (i często wygodniejszym od postaci trygonometrycznej) sposobem zapisu liczb zespolonych jest *postać wykładnicza*.

Definicja 4.12: Postać wykładnicza

Funkcję wykładniczą e^z dla argumentów zespolonych $z = x + iy$ (gdzie x i y to liczby rzeczywiste) definiujemy następująco:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{4.12}$$

W szczególności, dla dowolnej liczby rzeczywistej:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \tag{4.13}$$

Wstawiając we wzorze (4.13) $y = \pi$ otrzymujemy słynny *wzór Eulera*:

$$e^{\pi i} = -1$$

Wzory (4.3), (4.5), (4.7) i (4.9), w postaci wykładniczej przyjmują postać dobrze znanych (dla argumentów rzeczywistych) własności potęgowania:

Fakt 4.13: Działania na liczbach zespolonych (postać wykładnicza)

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2 oraz dowolnej liczby całkowitej n zachodzą wzory:

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
3) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$
4) $(e^z)^n = e^{nz}$

Dowód. Podstawiając we wzorze (4.3) $\theta_1 = b_1$, $\theta_2 = b_2$ oraz $r_1 = e^{a_1}$, $r_2 = e^{a_2}$ (tzn. $a_1 = \ln r_1$ i $a_2 = \ln r_2$) wzór na mnożenie liczb zespolonych przyjmuje postać:

$$e^{a_1}(\cos b_1 + i \sin b_1) \cdot e^{a_2}(\cos b_2 + i \sin b_2) = e^{a_1}e^{a_2}(\cos(b_1 + b_2) + i \sin(b_1 + b_2))$$

czyli

$$e^{a_1+ib_1} \cdot e^{a_2+ib_2} = e^{a_1+a_2}e^{i(b_1+b_2)} = e^{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)}$$

co jest wzorem (1) (dla $z_1 = a_1 + ib_1$ oraz $z_2 = a_2 + ib_2$). W analogiczny sposób sprawdzamy, że wzory (2), (3) i (4) to inna forma wzorów (4.5), (4.7) i (4.9). $\square$

Przykład 11

Zapisz w postaci wykładniczej następujące liczby zespolone: i, $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
Rozwiązanie.

$$i = 1 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = e^0 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = e^{\ln 2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{4}}$$

Zasadniczym powodem wprowadzenia liczb zespolonych była potrzeba znalezienia rozwiązywania równań wielomianowych, które w zbiorze liczb rzeczywistych nie miały pierwiastków. W szczególności, diagonalizacja macierzy 2×2 wymaga rozwiązania równania kwadratowego, które nie zawze ma pierwiastki rzeczywiste, ale zawsze ma pierwiastki zespolone.

Fakt 4.14: Równanie kwadratowe

Równanie $az^2 + bz + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$ $(a \neq 0)$ ma dwa pierwiastki:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac \tag{4.14}$$

przy czym w przypadku, gdy $\Delta = 0$ jest to jeden dwukrotny pierwiastek[1].

Zauważmy, że w związku z tym, że $\sqrt{\Delta}$ jest niejednoznaczny (ma dwie wartości), powstaje problem, którą z tych wartości przyjąć w powyższych rachunkach oraz we wzorze (4.14). Ponieważ jednak zgodnie z Faktem 4.11 dwie wartości $\sqrt{\Delta}$ to liczby przeciwne, więc wybór ten nie ma wpływu na otrzymany wynik (we wzorze (4.14) występuje $\pm\sqrt{\Delta}$).

Dowód. Wielomian $az^2 + bz + c$ można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

Stąd

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

W przypadku $\Delta = 0$ mamy $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$ (podwójny pierwiastek). □

Przykład 12

Rozwiązać równanie kwadratowe (w liczbach zespolonych):

$$iz^2 + (2i - 2)z - 1 = 0$$

Rozwiązanie. Ponieważ:

$$\Delta = (2i - 2)^2 + 4i = -4i = 4(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin\tfrac{3\pi}{2})$$

więc $\sqrt{\Delta}$ to jedna z liczb:

$$\begin{aligned}
2(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}) &= 2(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\
2(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}) &= 2(\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}
\end{aligned}$$

[1] Pełne wyjaśnienie pojęcia *krotności* pierwiastka podane jest w Definicji 7.21.

Zgodnie z 4.11 są to dwie liczby przeciwne. Stąd:

$$z_1 = \frac{-(2i-2)-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2i} = (-1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}) + i(-1+\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$
$$z_2 = \frac{-(2i-2)+\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2i} = (-1-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) + i(-1-\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

Najważniejsze twierdzenie o liczbach zespolonych (i główny powód ich wprowadzenia), to zaprezentowane poniżej Zasadnicze twierdzenie algebry. Dowód tego twierdzenia jest skomplikowany i wykracza poza zakres niniejszego skryptu.

Twierdzenie 4.15: Zasadnicze twierdzenie algebry

Wielomian stopnia n o współczynnikach zespolonych ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami). Innymi słowy: wielomian zespolony W można rozłożyć na iloczyn czynników liniowych, tzn.

$$W(z) = a(z-z_1)(z-z_2)\cdot\dots\cdot(z-z_n)$$

gdzie $z_1,\dots,z_n$ to (niekoniecznie różne) pierwiastki wielomianu W, zaś a to pewna (niezerowa) liczba zespolona.

Liczby zespolone pozwalają wyznaczać wartości i wektory własne w przypadkach, gdy dotychczas było to niemożliwe (z braku pierwiastków wielomianu charakterystycznego). W szczególności, pomagają wyznaczać potęgę macierzy, której wielomian charakterystyczny ma tylko nierzeczywiste pierwiastki.

Przykład 13

Obliczyć $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$.

Rozwiązanie. Wyliczamy wielomian charakterystyczny macierzy:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2$$

Równanie $\lambda^2-2\lambda+2=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, ale ma pierwiastki zespolone:

$$\Delta = 4-8=-4, \quad \text{więc} \quad \lambda = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$$

Wyliczamy wektory własne dla $\lambda_1 = 1+i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y=(1+i)x \\ x+y=(1+i)y \end{cases} \qquad \text{skąd} \qquad \begin{cases} y=-ix \\ -ix=y \end{cases}$$

czyli wektory własne są postaci $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$. Podobnie wyliczamy wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$ dla wartości własnej $\lambda_2 = 1-i$. Zatem diagonalizacja macierzy wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1}$$

Stąd:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}^{50}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1+i)^{50} & 0\\ 0 & (1-i)^{50}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix}$$

Wykorzystując postać trygonometryczną obliczamy potęgi $(1+i)^{50}$ i $(1-i)^{50}$:

$$(1+i)^{50} = \left(\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4})\right)^{50} = (\sqrt{2})^{50}(\cos\tfrac{50\pi}{4} + i\sin\tfrac{50\pi}{4}) = 2^{25}i$$
$$(1-i)^{50} = \left(\sqrt{2}(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}))\right)^{50} = (\sqrt{2})^{50}(\cos(-\tfrac{50\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{50\pi}{4})) = -2^{25}i$$

Zatem:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{25}i & 0\\ 0 & -2^{25}i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2^{25}\\ 2^{25} & 0\end{pmatrix}$$

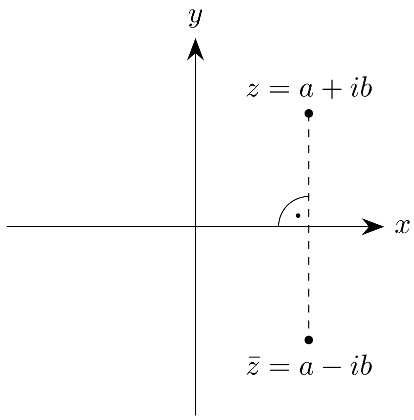
W powyższym przykładzie można zaobserwować pewien związek między nierzeczywistymi wartościami własnymi, który można opisać przy pomocy pojęcia *sprzężenia* liczby zespolonej:

Definicja 4.16: Sprzężenie (algebraicznie)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + ib$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = a - ib$.

Fakt 4.17: Sprzężenie (geometrycznie)

Sprzężenie $\bar{z}$ liczby zespolonej z, to obraz z przez odbicie względem osi rzeczywistej.



Fakt 4.18: Macierz 2×2 o zespolonych wartościach własnych

Niech liczba zespolona $\lambda = \alpha + \beta i$ będzie wartością własną macierzy $A \in M_{2\times 2}$ o wyrazach **rzeczywistych**, zaś wektor $v = \begin{pmatrix}a+bi\\ c+di\end{pmatrix}$ będzie wektorem własnym dla λ. Wówczas liczba zespolona $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ też jest wartością własną macierzy A, a wektor $\bar{v} = \begin{pmatrix}a-bi\\ c-di\end{pmatrix}$ jest wektorem własnym dla $\bar{\lambda}$.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, gdzie $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$A v = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (pa + qc) + (pb + qd)i \\ (ra + sc) + (rb + sd)i \end{pmatrix}$$

$$A \bar{v} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bi \\ c - di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (pa + qc) - (pb + qd)i \\ (ra + sc) - (rb + sd)i \end{pmatrix}$$

czyli $A\bar{v} = \overline{Av}$. Ponadto:

$$\lambda v = (\alpha + \beta i) \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a - \beta b) + (\alpha b + \beta a)i \\ (\alpha c - \beta d) + (\alpha d + \beta c)i \end{pmatrix}$$

$$\bar{\lambda} \bar{v} = (\alpha - \beta i) \begin{pmatrix} a - bi \\ c - di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a - \beta b) - (\alpha b + \beta a)i \\ (\alpha c - \beta d) - (\alpha d + \beta c)i \end{pmatrix}$$

czyli $\bar{\lambda}\bar{v} = \overline{\lambda v}$. Stąd, skoro:

$$Av = \lambda v$$

to

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

□

Przykład 14

Zdiagonalizuj macierz $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy to:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 5 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

Równanie $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, ale ma pierwiastki zespolone:

$$\Delta = -36, \quad \text{więc} \quad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3i$$

Wyliczamy wektory własne dla $\lambda_1 = 2 + 3i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 + 3i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 5y = (2 + 3i)x \\ -2x + 3y = (2 + 3i)y \end{cases} \qquad \text{skąd} \qquad \begin{cases} 5y = (1 + 3i)x \\ (1 - 3i)y = 2x \end{cases}$$

Równania te są równoważne (drugie powstaje z pierwszego przez przemnożenie obu stron przez liczbę $\frac{1-3i}{5}$), więc przykładowy wektor własny dla $\lambda_1 = 2 + 3i$ to $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$. Zgodnie z Faktem 4.18 przykładowy wektor własny dla $\lambda_2 = 2 - 3i = \bar{\lambda}_1$ to $\begin{pmatrix} \bar{5} \\ \overline{1 + 3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 3i \end{pmatrix}$. Stąd diagonalizacja macierzy przyjmuje postać:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 + 3i & 1 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + 3i & 0 \\ 0 & 2 - 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 + 3i & 1 - 3i \end{pmatrix}^{-1}$$

Wniosek 4.19: Wektory własne przekształcenia $\mathbb{R}^2$

Jeśli A jest macierzą 2×2 o wyrazach rzeczywistych, to zachodzi dokładnie jedna z poniższych możliwości:

1) A ma 2 rzeczywiste wartości własne λ_1 i λ_2 i dla każdej z nich prostą wektorów własnych,
2) A ma 1 (rzeczywistą) wartość własną λ i prostą wektorów własnych,
3) A ma 1 (rzeczywistą) wartość własną λ i płaszczyznę wektorów własnych,
4) A ma 2 nierzeczywiste wartości własne λ i $\bar{\lambda}$.

W przypadkach (1), (3) i (4) macierz A jest diagonalizowalna (w sytuacji (4) przy użyciu liczb zespolonych). W przypadku (2) macierz A nie jest diagonalizowalna.

Dowód. Przypadki (1)–(4) odpowiadają (w tej kolejności) sytuacjom z Wniosku 3.7. Jedyna różnica między Wnioskiem 3.7 a Wnioskiem 4.19 dotyczy przypadku (4), który tym razem przedstawiony jest z wykorzystaniem liczb zespolonych. Przypadek ten dotyczy sytuacji, gdy wielomian charakterystyczny χ_A nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ jest to wielomian kwadratowy o współczynnikach rzeczywistych, więc w sytuacji, gdy nie ma on pierwiastków rzeczywistych, ma dwa pierwiastki nierzeczywiste, które, zgodnie z Faktem 4.18, są liczbami sprzężonymi. W tej sytuacji macierz A diagonalizuje się, gdyż ma dwa niewspółliniowe wektory własne. □

Część II

Przestrzeń $\mathbb{R}^3$

Rozdział 5

Wektory w przestrzeni

Definicja 5.1: Wektor (geometrycznie)

Parę uporządkowaną punktów przestrzeni trójwymiarowej (A, B) nazywamy *wektorem w* $\mathbb{R}^3$ *o początku* A *i końcu* B i oznaczamy $\overrightarrow{AB}$. *Długością* wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB, a jego *kierunkiem* – prostą AB (przy czym przyjmujemy, że proste równoległe wyznaczają ten sam kierunek). Wektor o ustalonej długości i kierunku może mieć dwa różne *zwroty*. Dwa wektory są równe, jeśli mają jednakowe długości, kierunki i zwroty[1].

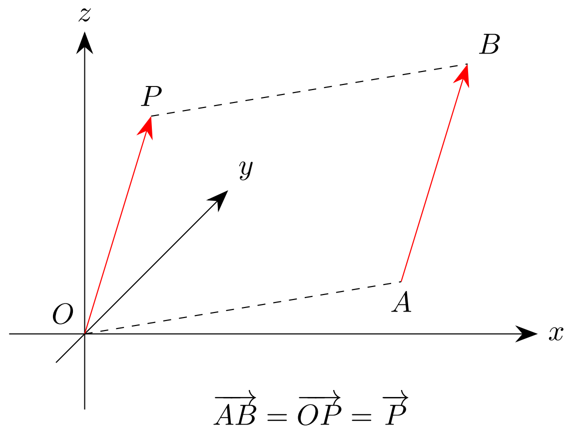
Szczególnym przypadkiem jest wektor zerowy, tzn. wektor, którego koniec i początek są jednakowe. Wektor taki nie ma określonego kierunku, ani zwrotu, a jego długość to 0. Rozciągając powyższą definicję równości wektorów na ten przypadek przyjmujemy, że jest tylko jeden wektor zerowy (tzn. tylko jeden wektor o długości 0).

Fakt 5.2: Równość wektorów (geometrycznie)

Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z nich powstaje przez równoległe przesunięcie drugiego. W przypadku, gdy punkty A, B, C, D nie leżą na jednej prostej jest to równoważne temu, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.

W szczególności każdy wektor można przesunąć równolegle tak, by jego początkiem był punkt $O = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Taki wektor $\overrightarrow{OP}$ będziemy w skrócie oznaczać $\overrightarrow{P}$ lub P (podobnie jak na płaszczyźnie, początek układu współrzędnych będziemy przyjmować za „domyślny” początek wektora oraz utożsamiać punkty $\mathbb{R}^3$ z wektorami w $\mathbb{R}^3$ o początku O).

[1] Powyższą definicję można precyzyjniej sformułować przy użyciu pojęć: *relacja równoważności* i *klasa abstrakcji* (poznawanych w ramach Wstępu do matematyki). *Kierunek* prostej to klasa abstrakcji relacji równoległości prostych (która to relacja jest relacją równoważności). *Wektor* to klasa abstrakcji relacji równoważności par punktów opisanej w Definicji 5.1.



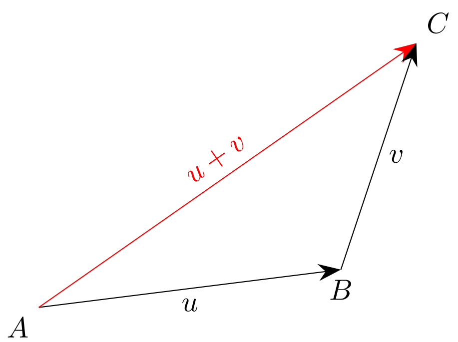
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P}$$

Na zbiorze wektorów w $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy, analogicznie jak na płaszczyźnie, działania dodawania wektorów i mnożenia wektorów przez skalary.

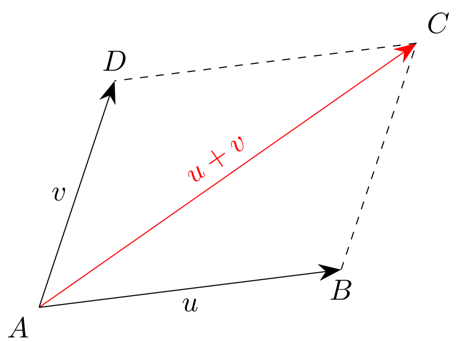
Definicja 5.3: Dodawanie wektorów (geometrycznie)

Dla dowolnych dwóch wektorów w $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy *operację dodawania* w następujący sposób:

1) sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ (koniec pierwszego jest początkiem drugiego) nazywamy wektor $\overrightarrow{AC}$ (*reguła przykładania*);
2) sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ (wektory o wspólnym początku) nazywamy przekątną $\overrightarrow{AC}$ równoległoboku $ABCD$ (*reguła równoległoboku*);
3) sumę wektorów w pozostałych przypadkach wyznaczamy przesuwając równolegle jeden z wektorów, a następnie stosując regułę 1 lub 2.



reguła przykładania



reguła równoległoboku

Komentarz do Definicji 1.3 mówiący, że wynik dodawania dwóch wektorów nie zależy od zastosowanej reguły dodawania pozostaje prawdziwy dla wektorów w $\mathbb{R}^3$ (jego uzasadnienie pozostaje bez zmian).

Definicja 5.4: Mnożenie wektora przez skalary (geometrycznie)

Niech t będzie liczbą rzeczywistą, zaś u wektorem w $\mathbb{R}^3$. Wówczas $t \cdot u$ jest wektorem o długości $|t| \cdot |u|$, o kierunku wyznaczonym przez wektor u i o zwrocie zgodnym z u, gdy $t > 0$, zaś przeciwnym niż u, gdy $t < 0$. Ponadto $0 \cdot u = 0$. Wektor $(-1) \cdot u = u$ nazywamy *wektorem przeciwnym* do u i oznaczamy $-u$.

Definicja 5.5: Wektor (algebraicznie)

Jeśli $A = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $B = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ są punktami $\mathbb{R}^3$, to współrzędnymi wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy (uporządkowaną) trójkę liczb:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ interpretujemy jako przesunięcia w kierunkach osi x, y, z potrzebne dla przemieszczenia z punktu A do punktu B. Wartość bezwzględna współrzędnej podaje długość przesunięcia, natomiast znak współrzędnej rozróżnia pomiędzy przesunięciem w kierunku dodatnim i ujemnym (kierunek dodatni wyznaczają strzałki na osiach współrzędnych). Wektor zerowy ma współrzędne $0 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Ponieważ wektor nie ma jednoznacznie ustalonego początku ani końca (zgodnie z Faktem 5.2 dwa wektory są równe, jeśli jeden z nich jest przesunięciem równoległym drugiego), więc aby powyższa definicja współrzędnych wektora była prawidłowa, równe wektory muszą mieć jednakowe współrzędne. Stąd potrzeba udowodnienia następującego faktu:

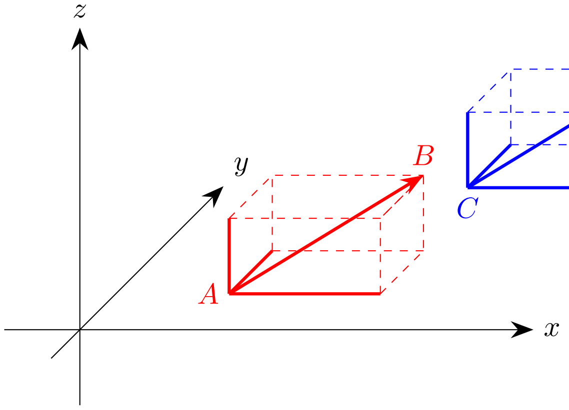
Fakt 5.6: Równość wektorów (algebraicznie)

Dwa wektory w $\mathbb{R}^3$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe odpowiednie współrzędne.

Dowód. Zgodnie z Faktem 5.2 wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy wektor $\overrightarrow{CD}$ powstaje przez przesunięcie równoległe wektora $\overrightarrow{AB}$. To zaś jest równoważne temu, że prostopadłościan o przekątnej $\overrightarrow{CD}$ i krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych (zaznaczony na niebiesko) powstaje przez przesunięcie równoległe prostopadłościanu o przekątnej $\overrightarrow{AB}$ i krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych (zaznaczony na czerwono), tzn.

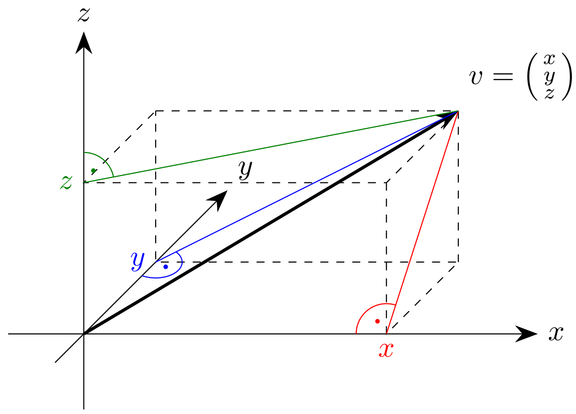
$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \\ z_B - z_A = z_D - z_C \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix}$$

co oznacza, że wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ mają równe współrzędne.

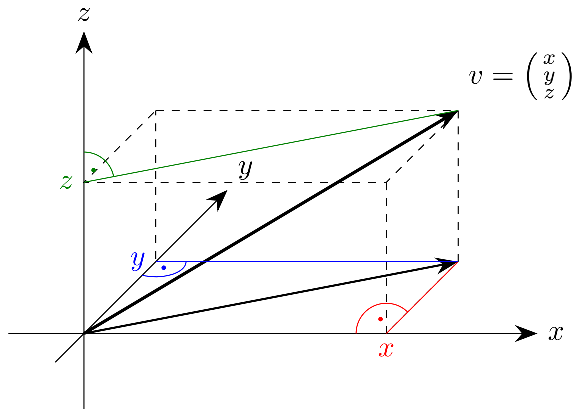


□

Współrzędne wektora v (o domyślnym początku O) są wyznaczone przez rzuty (prostokątne) punktu v na osie układu współrzędnych:



Współrzędne v można też interpretować następująco: pierwsze dwie współrzędne to współrzędne rzutu (prostokątnego) punktu v na płaszczyznę Oxy, a trzecia współrzędna jest wyznaczona przez rzut punktu v na oś Oz:

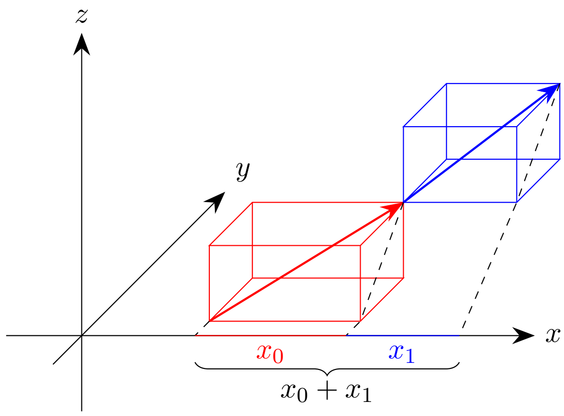


Fakt 5.7: Dodawanie wektorów (algebraicznie)

Dodawanie wektorów w $\mathbb{R}^3$ wyraża się we współrzędnych następująco:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \\ y_0 + y_1 \\ z_0 + z_1 \end{pmatrix}$$

Dowód. Na rysunku widać uzasadnienie dla pierwszej współrzędnej w sytuacji gdy $x_0, x_1 > 0$. Rozpatrzenie pozostałych przypadków pozostawiamy czytelnikowi.



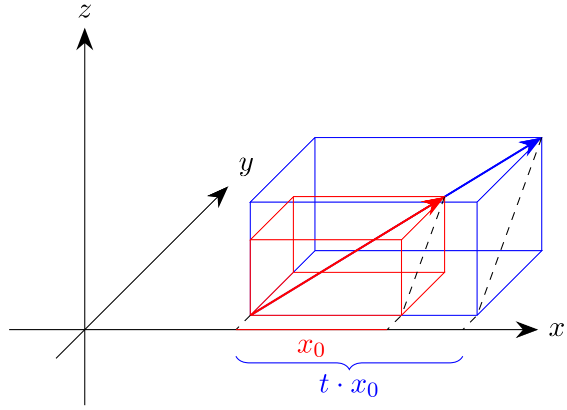
□

Fakt 5.8: Mnożenie wektora przez skalar (algebraicznie)

Mnożenie wektora w $\mathbb{R}^3$ przez skalar wyraża się we współrzędnych następująco:

$$t \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot x_0 \\ t \cdot y_0 \\ t \cdot z_0 \end{pmatrix}$$

Dowód. Na rysunku widać uzasadnienie dla pierwszej współrzędnej w sytuacji gdy $x_0, t > 0$. Rozpatrzenie pozostałych przypadków pozostawiamy czytelnikowi.



□

Fakt 5.9: Różnica dwóch punktów

Dla dowolnego wektora $\overrightarrow{AB}$ zachodzi: $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Dowód. Wiemy, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (reguła przykładania) oraz $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}$. Ponieważ O jest domyślnym początkiem każdego wektora, więc:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -A + B = B - A$$

□

Prawa działań na wektorach w $\mathbb{R}^3$ są takie same jak prawa działań na wektorach na płaszczyźnie. Dowody poniższych własności są podobne do dowodu Faktu 1.12.

Fakt 5.10: Własności działań na wektorach

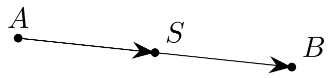
Dla dowolnych wektorów u, v, w oraz dowolnych skalarów s, t zachodzą następujące własności:

1) $u + v = v + u$ (+ jest przemienne)
2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (+ jest łączne)
3) $0 + u = u + 0 = u$ (0 jest elementem neutralnym +)
4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ jest elementem przeciwnym do u)
5) $(s + t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
6) $t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v$ ($\cdot$ jest rozdzielne względem +)
7) $s \cdot (t \cdot v) = (s \cdot t) \cdot v$
8) $1 \cdot u = u$

Przykład 1

Wyznaczyć współrzędne środka odcinka AB, jeśli $A = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, czyli $S - A = \frac{1}{2}(B - A)$



Stąd dostajemy:

$$S = A + \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} \frac{x_0+x_1}{2} \\ \frac{y_0+y_1}{2} \\ \frac{z_0+z_1}{2} \end{pmatrix}$$

Fakt 5.11: Długość wektora

Długość wektora $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ wynosi

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Odległość punktów $A = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ i $B = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ wynosi:

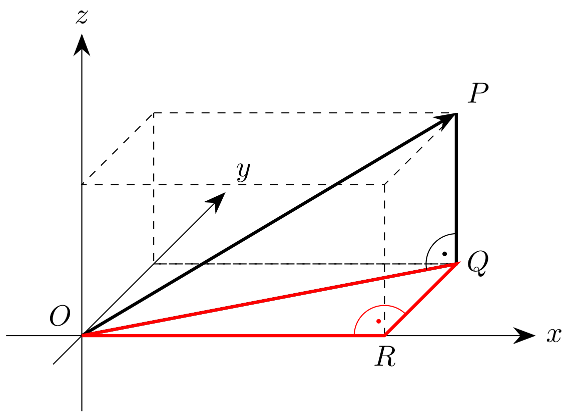
$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Dowód. Oznaczmy $P = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Na mocy (dwukrotnie zatosowanego) Twierdzenia Pitagorasa:

$$|OP|^2 = |OQ|^2 + |PQ|^2 = (|OR|^2 + |RQ|^2) + |PQ|^2$$

stąd:

$$|P| = \sqrt{|OR|^2 + |RQ|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



W takim razie odległość punktów A i B wynosi:

$$|\overrightarrow{AB}| = |B - A| = \left|\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

□

Wniosek 5.12: Równanie sfery

Równanie sfery o środku $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ i promieniu r ma postać:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Dowód. Sfera o środku $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ i promieniu r to zbiór punktów $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ odległych o r od punktu $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, czyli spełniających warunek:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

Ponieważ obie strony równania są dodatnie, więc podnosząc równanie stronami do kwadratu otrzymujemy równoważną postać:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

□

Fakt 5.13: Nierówność trójkąta (dla wektorów)

Dla dowolnych wektorów u, v w $\mathbb{R}^3$ spełniony jest następujący warunek:

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe i mają zgodne zwroty.

Dowód. Dowód Faktu 1.20 można w niezmienionej postaci zastosować do wektorów w $\mathbb{R}^3$. □

Pojęcie współliniowości w odniesieniu do wektorów na płaszczyźnie ma dwa uogólnienia dla wektorów w $\mathbb{R}^3$: *współliniowość* oraz *współpłaszczyzowość*. Każdą z tych własności będziemy też nazywać *liniową zależnością*, a własność przeciwną – *liniową niezależnością*.

Definicja 5.14: Liniowa (nie)zależność (geometrycznie)

1) Wektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ nazywamy *współliniowymi* lub *liniowo zależnymi* jeśli leżą na jednej prostej przechodzącej przez 0.
2) Wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ nazywamy *współpłaszczyznowymi* lub *liniowo zależnymi* , jeśli leżą na jednej płaszczyźnie przechodzącej przez 0.
3) Parę niewspółliniowych wektorów u, v lub trójkę niewspółpłaszczyznowych wektorów u, v, w nazywamy *wektorami liniowo niezależnymi*.

Pojęcie liniowej (nie)zależności wygodnie jest wyrażać przy pomocy pojęcia kombinacji liniowej wektorów. Wektory liniowo zależne, to wektory, które „liniowo zależą od siebie”, tzn. (przynajmniej) jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych. Wyjaśnienie to rozwija kolejny fakt.

Definicja 5.15: Kombinacja liniowa

Kombinacja liniowa:

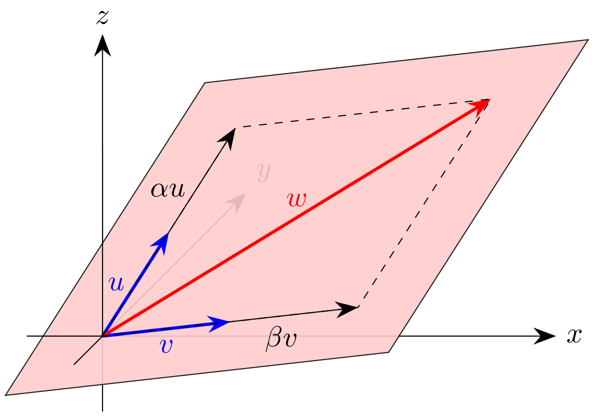
1) wektora u to wektor postaci αu,
2) wektorów u i v to wektor postaci $\alpha u + \beta v$,
3) wektorów u, v i w to wektor postaci $\alpha u + \beta v + \gamma w$,

gdzie α, β, γ są dowolnymi skalarami (nazywanymi *współczynnikami* kombinacji liniowej).

Fakt 5.16: Liniowa niezależność (algebraicznie)

1) Wektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ są współliniowe (liniowo zależne) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba rzeczywista t, że $u = tv$ lub $v = tu$.
2) Wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ są współpłaszczyznowe (liniowo zależne) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową dwóch pozostałych.

Dowód. (1) Jeśli oba wektory u i v są niezerowe, to $u = tv$ **oraz** $v = \frac{1}{t}u$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $u = 0$, to $u = 0 \cdot v$ (i analogicznie $v = 0 \cdot u$ w sytuacji, gdy $v = 0$).
(2) Załóżmy, że wektory u i v nie są współliniowe. Wektor w leży na płaszczyźnie rozpiętej przez u i v wtedy i tylko wtedy, gdy $w = \alpha u + \beta v$ dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, co pokazuje poniższy rysunek:



Jeśli natomiast u i v są współliniowe, to $u = tv + 0w$ lub $v = tu + 0w$, a równocześnie wektory u, v, w leżą na jednej płaszczyźnie. $\square$

Przykład 2

Ustal, które z poniższych układów wektórów są liniowo zależne, a które – liniowo niezależne:

(a) $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. (a) Sprawdzamy, czy u_1 jest kombinacją liniową wektorów u_2 i u_3, a więc czy układ równań:

$$\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases}-1 = 2\alpha+\beta\\ -3 = \alpha+\beta\\ 3 = 4\alpha+\beta\end{cases}$$

ma rozwiązanie. Nietrudno sprawdzić, że rozwiązaniem jest:

$$\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = -5\end{cases}$$

czyli trójka wektorów u_1, u_2, u_3 stanowi układ liniowo zależny.
(b) Sprawdzamy, czy v_1 jest kombinacją liniową wektorów v_2 i v_3, a więc czy układ równań:

$$\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases}3 = \alpha+3\beta\\ 1 = 2\alpha+2\beta\\ 5 = -\alpha+\beta\end{cases}$$

ma rozwiązanie. Nietrudno sprawdzić, że jest to układ sprzeczny. Podobnie sprawdzamy[2], że v_2 nie jest kombinacją liniową v_1 i v_3, oraz że v_3 nie jest kombinacją liniową v_1 i v_2. Wobec tego trójka wektorów v_1, v_2, v_3 stanowi układ liniowo niezależny.
(c) Wektory w_1 i w_2 nie są współliniowe, czyli są liniowo niezależne.

Podobnie jak na płaszczyźnie, współrzędne wektora to współczynniki jego przedstawienia w postaci kombinacji liniowej wersorów.

Definicja 5.17: Wersory

Wersorami w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy wektory:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Fakt 5.18: Kombinacja liniowa wersorów

Każdy wektor $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako kombinację liniową wersorów, przy czym współczynnikami tej kombinacji są współrzędne wektora:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = x\cdot e_1 + y\cdot e_2 + z\cdot e_3$$

[2] W kolejnych rozdziałach poznamy wygodniejszy sposób sprawdzania, czy trzy wektory stanowią układ liniowo niezależny.

Definicja 5.19: Iloczyn skalarny (geometrycznie)

Iloczynem skalarnym wektorów u i v w $\mathbb{R}^3$ nazywamy liczbę:

$$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) \tag{5.1}$$

gdzie $\angle(u, v)$ oznacza miarę mniejszego z kątów utworzonych przez wektory u i v.
Jeśli jeden z wektorów u i v jest zerowy, przyjmujemy $u \circ v = 0$.

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy (znany z poprzednich rozdziałów) wzór na kąt między dwoma wektorami:

Fakt 5.20: Kąt między wektorami

Jeśli θ jest kątem między niezerowymi wektorami $u, v \in \mathbb{R}^3$, to:

$$\cos \theta = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

W szczególności:

1) $u \circ v > 0$, gdy θ jest ostry (lub zerowy),
2) $u \circ v = 0$, gdy θ jest prosty,
3) $u \circ v < 0$, gdy θ jest rozwarty (lub półpełny).

Ponieważ $|\cos \theta| \leq 1$ (przy czym $|\cos \theta| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy θ jest kątem zerowym lub półpełnym), więc jako kolejny wniosek z Definicji 5.19 otrzymujemy (również znaną z poprzednich rozdziałów) nierówność Schwarza:

Fakt 5.21: Nierówność Schwarza

Dla dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$ zachodzi nierówność:

$$|u \circ v| \leq |u| \cdot |v|$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wektory u i v są współliniowe.

Podobnie jak dla iloczynu skalarnego na płaszczyźnie, również iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^3$ ma charakteryzację algebraiczną (analogiczną do Faktu 1.39). Tym razem dowód tej charakteryzacji jest trudniejszy i wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Fakt 5.22: Iloczyn skalarny (algebraicznie)

Iloczynem skalarnym wektorów $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ jest liczba:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{5.2}$$

Iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^3$ ma takie same własności jak iloczyn skalarny wektorów na płaszczyźnie. Również poniższy dowód jest powtórzeniem dowodu Faktu 1.42.

Fakt 5.23: Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ i dowolnego skalara t zachodzi:

1) $u \circ v = v \circ u$ ($\circ$ jest przemienny)
2) $u \circ (v + w) = u \circ v + u \circ w$ ($\circ$ jest rozdzielny względem $+$)
   $(v + w) \circ u = v \circ u + w \circ u$
3) $(tu) \circ w = u \circ (tw) = t(u \circ w)$
4) $u \circ u = |u|^2$
5) $u \circ v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \perp v$
   (przyjmujemy przy tym, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora)

Dowód. Własność (1) jest bezpośrednią konsekwencją wzoru (5.1), podobnie własność (4) (kąt o pokrywających się ramionach ma miarę 0):

$$u \circ u = |u| \cdot |u| \cdot \cos 0 = |u|^2$$

Podobnie zauważamy, że $|u| \cdot |v| \cdot \cos(u, v) = 0$, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\cos(u, v) = 0 \text{ (tzn. } u \perp v) \text{ lub } u = 0 \text{ lub } v = 0$$

Ponieważ przyjmujemy, że wektor 0 jest prostopadły do każdego wektora, więc dwie ostatnie możliwości ($u = 0$ lub $v = 0$) zawierają się w pierwszej ($u \perp v$), co dowodzi własności (5).
Włanośći (2) i (3) wynikają z algebraicznej charakteryzacji iloczynu skalarnego (5.2). Ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny (własność (1)), wystarczy sprawdzić tylko jedną z równości z punktu (2). Przyjmując $u = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)$ dostajemy:

$$\begin{aligned} u \circ (v + w) &= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + y_1 \cdot (y_2 + y_3) + z_1 \cdot (z_2 + z_3) \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) = u \circ v + u \circ w \end{aligned}$$

Dowód własności (3) jest podobny i pozostawiamy go czytelnikowi. □

W kolejnych faktach przedstawiamy algebraiczny opis płaszczyzn i prostych w $\mathbb{R}^3$. Podobnie jak na płaszczyżnie, możliwe są dwa sposoby opisu: parametryczny oraz przy pomocy równania (lub układu równań).

Fakt 5.24: Równanie płaszczyzny (ogólne)

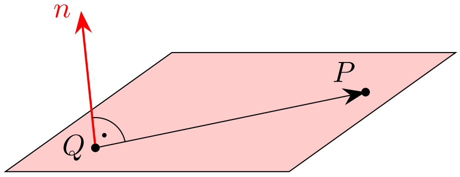
Jeśli przynajmniej jedna z liczb A, B, C jest niezerowa, to zbiór punktów spełniających równanie:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{5.3}$$

jest płaszczyzną, a wektor $n = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny (nazywamy go *wektorem normalnym* tej płaszczyzny).

Dowód. Niech $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ będzie dowolnym punktem spełniającym równanie (5.3), tzn.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad \text{czyli} \qquad D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$



Wówczas dla dowolnego punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PX} \circ n &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \\ &= Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = Ax + By + Cz + D \end{aligned}$$

czyli równanie (5.3) opisuje zbiór takich punktów $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, że wektor $\overrightarrow{PX}$ jest prostopadły do wektora n jest opisywany równaniem. Jest to oczywiście płaszczyzna przechodząca przez punkt P i prostopadła do wektora n. □

Fakt 5.25: Równanie płaszczyzny (parametryczne)

Dana jest płaszczyzna π w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez punkt P oraz dwa niewspółliniowe wektory u i v równoległe do π. Wówczas każdy punkt X płaszczyzny π jest postaci:

$$X = P + su + tv \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

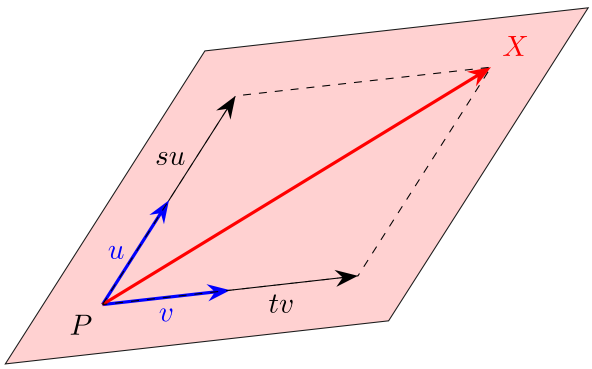
dla pewnych skalarów s i t. Wzór (5.4) to *równanie parametryczne płaszczyzny* π.

Dowód. Niech X będzie dowolnym punktem płaszczyzny przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektorów u i v. Zgodnie z Faktem 5.16 wektor $\overrightarrow{PX}$ jest kombinacją liniową wektorów u i v, czyli dla pewnych skalarów s i t zachodzi:

$$X - P = \overrightarrow{PX} = su + tv$$

skąd

$$X = P + su + tv$$



Przyjmując $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $P = \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right)$, $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ otrzymjemy drugą postać wzoru. □

Przykład 3

Dana jest płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz równanie ogólne tej płaszczyzny.

Rozwiązanie. Zapisujemy równanie parametryczne w postaci układu 3 równań liniowych z 5 niewiadomymi (x, y, z, s, t):

$$\begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 2 + s + t \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Podstawiając (wyliczone z trzeciego równania) $s = z - 1$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 1 + (z-1) + 2t \\ y = 2 + (z-1) + t \end{cases}$$

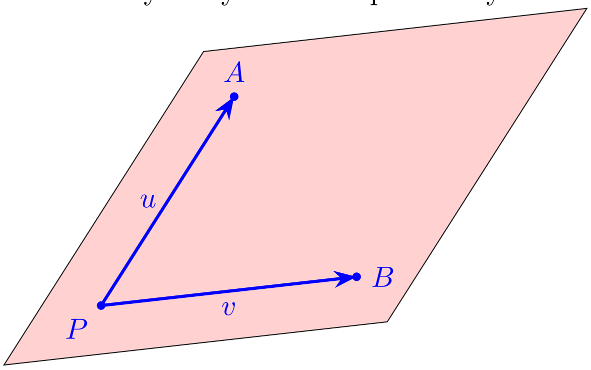
Następnie podstawiając (wyliczone z drugiego równania) $t = y - z - 1$ otrzymujemy równanie ogólne płaszczyzny:

$$x - 2y + z + 2 = 0$$

Przykład 4

Dana jest płaszczyzna o równaniu ogólnym $2x + 3y - 4z - 1 = 0$. Wyznacz równanie parametryczne tej płaszczyzny.

Rozwiązanie. Potrzebujemy trzy (niewspółliniowe) punkty P, A, B tej płaszczyzny. Wówczas przyjmując $u = \overrightarrow{PA}$ i $v = \overrightarrow{PB}$ otrzymamy równanie parametryczne.



Możemy przyjąć np. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wówczas $u = \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ i $v = \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (zauważmy, że otrzymane wektory są niewspółliniowe), skąd otrzymujemy parametryczne równanie płaszczyzny:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Przykład 5

Opisz płaszczyznę przechodzącą przez punkty $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ przy pomocy:

(a) równania parametrycznego,

(b) równania ogólnego.

Rozwiązanie. (a) Szukana płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{PQ} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\overrightarrow{PR} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, więc ma równanie parametryczne:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) Szukamy płaszczyzny o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ przechodzącej przez punkty P, Q, R, musimy zatem rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} A + 2B + D = 0 \\ A + B - C + D = 0 \\ 3A + B + 4C + D = 0 \end{cases}$$

Stąd (metodą podstawiania) otrzymujemy:

$$\begin{cases} A = -\frac{5}{9}D \\ B = -\frac{2}{9}D \\ C = \frac{2}{9}D \end{cases}$$

Równanie płaszczyzny jest niejednoznaczne (można je mnożyć stronami przez dowolną liczbę), więc możemy przyjąć np. $D = -9$, otrzymując równanie $5x + 2y - 2z - 9 = 0$.

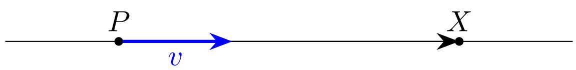
Fakt 5.26: Równanie prostej (parametryczne)

Dana jest prosta ℓ w $\mathbb{R}^3$ przechodząca przez punkt P i równoległa do wektora v. Wówczas każdy punkt X prostej ℓ jest postaci:

$$X = P + tv \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

dla pewnego skalara t. Wzór (5.5) to *równanie parametryczne* prostej ℓ, a wektor v to *wektor kierunkowy* prostej ℓ.

Dowód. Niech X będzie dowolnym punktem prostej przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora v.



Wówczas wektory $\overrightarrow{PX}$ i v są współliniowe, czyli dla pewnego skalara t zachodzi:

$$X - P = \overrightarrow{PX} = tv$$

skąd

$$X = P + tv$$

Przyjmując $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $P = \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ otrzymujemy drugą postać wzoru (5.5). □

Wzór (5.5) możemy potraktować jako układ 3 równań z 4 niewiadomymi (x, y, z, t). Eliminując (przy pomocy metody podstawiania) niewiadomą t otrzymamy dwa równania z trzema niewiadomymi, czyli postać krawędziową prostej w $\mathbb{R}^3$:

Fakt 5.27: Postać krawędziowa prostej

Prostą w $\mathbb{R}^3$ można przedstawić w postaci zbioru punktów spełniających układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Jeśli prosta przechodzi przez punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ i ma wektor kierunkowy $v = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ taki, że $a, b, c \neq 0$, to powyższy układ równań można zapisać w postaci:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{5.7}$$

Przedstawienia (5.6) i (5.7) nazywamy *postaciami krawędziowymi* prostej.

Dowód. Prostą w $\mathbb{R}^3$ można przedstawić jako część wspólną dwóch przecinających się płaszczyzn, co daje przedstawienie w postaci (5.6). Szczególną postać (5.7) postaci krawędziowej można otrzymać przekształcając równanie parametryczne prostej:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

do postaci:

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

skąd otrzymujemy (5.7). $\square$

Przykład 6

Znajdź przedstawienie parametryczne oraz krawędziowe wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $2x + 3y - z - 1 = 0$ i $x + 3y - 2z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Przedstawienie krawędziowe w postaci (5.7) to następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując metodą podstawiania (podstawiając $z = 2x + 3y - 1$) otrzymujemy:

$$-3x - 3y + 6 = 0 \qquad \text{czyli} \qquad y = -x + 2$$

a zatem rozwiązanie jest postaci:

$$\begin{cases} x = x \\ y = -x + 2 \\ z = -x + 5 \end{cases}$$

co (przyjmując za parametru $t = x$) daje równanie parametryczne wspólnej prostej:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oraz postać krawędziową (5.7):

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 5}{-1}$$

Przykład 7

Napisz równanie parametryczne oraz postać krawędziową prostej przechodzącej przez punkt $P = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\5\end{smallmatrix}\right)$ i równoległej do wektora $v = \left(\begin{smallmatrix}8\\5\\-3\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Równanie parametryczne prostej to:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\5\\-3\end{pmatrix}$$

a postać krawędziowa to:

$$\frac{x-2}{8} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-3}$$

Przykład 8

Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\\3\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$ i płaszczyzny o równaniu ogólnym $2x + 3y - z - 2 = 0$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 4 równań z 4 niewiadomymi:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \\ 2x + 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

otzymując jedyne rozwiązanie:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\6\end{smallmatrix}\right)$.

Przykład 9

Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-5\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\4\end{smallmatrix}\right)$ i płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\2\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 6 równań z 6 niewiadomymi. Zwracamy uwagę, że w tym celu musimy zmienić nazwę parametru z równania parametrycznego prostej dla uniknięcia kolizji oznaczeń:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = -5 + t' \\ z = 1 + 4t' \\ x = 1 + s \\ y = -s + 3t \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \\ z = 9 \\ t' = 2 \\ s = 4 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Przykład 10

Wyznacz punkt przecięcia prostej o postaci krawędziowej $\frac{x-2}{2} = y - 1 = z + 2$ i płaszczyzny o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Rozwiązujemy układ 5 równań z 5 niewiadomymi:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-2) = y - 1 \\ y - 1 = z + 2 \\ x = 1 + 3s + 2t \\ y = 2 - 4s + 3t \\ z = -1 + 4s - t \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \\ z = 1 \\ s = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

czyli punkt przecięcia to $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Przykład 11

Ustal czy proste o równaniach parametrycznych $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ przecinają się.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, czy poniższy układ 6 równań z 5 niewiadomymi ma rozwiązanie. Zwróćmy uwagę, że dla uniknięcia kolizji oznaczeń musimy zmienić nazwę parametru w jednym z równań prostych:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \\ x = 3 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązując (metodą podstawiania) powyższy układ równań dochodzimy do sprzeczności, a zatem podane proste nie przecinają się.

Przykład 12

Ustal czy proste o przedstawieniach krawędziowych $x-4=y+3=\frac{z}{4}$ i $\frac{x+7}{6}=y+4=\frac{z+2}{3}$ przecinają się.

Rozwiązanie. Musimy ustalić, czy poniższy układ 4 równań z 3 niewiadomymi ma rozwiązanie:

$$\begin{cases} x-4=y+3 \\ y+3=\frac{1}{4}z \\ \frac{1}{6}(x+7)=y+4 \\ y+4=\dfrac{z+2}{3} \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \\ z=4 \end{cases}$$

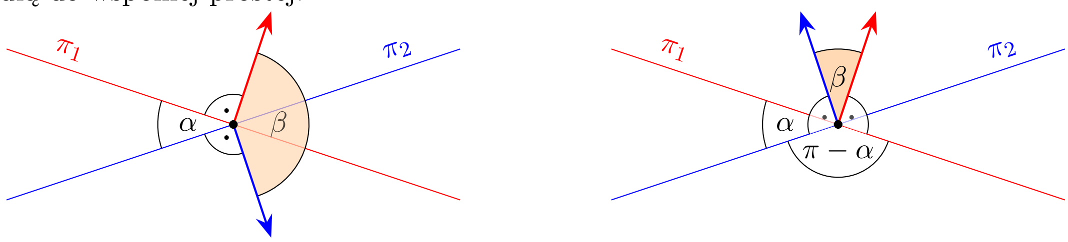
czyli proste przecinają się w punkcie $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Fakt 5.28: Kąt między płaszczyznami

Jeśli płaszczyzny π_1 i π_2 przecinają się, to tworzą dwie pary równych kątów dwuściennych o miarach α i $\pi-\alpha$. Wówczas kąt między wektorami normalnymi tych płaszczyzn wynosi α lub $\pi-\alpha$. W szczególności:

1) płaszczyzny są równoległe $\iff$ ich wektory normalne są równoległe,
2) płaszczyzny są prostopadłe $\iff$ ich wektory normalne są prostopadłe.

Dowód. Poniższy rysunek przedstawia przekrój przecinających się płaszczyzn płaszczyzną prostopadłą do wspólnej prostej.



Jak widać, jeśli mniejszy z kątów między płaszczyznami ma miarę α, to kąt β między ich wektorami normalnymi, w zależności od wzajemnego położenia tych wektorów, ma miarę

$$\beta = 2\pi - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha \quad \text{lub} \quad \beta = 2\pi - \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} - (\pi-\alpha) = \alpha$$

W szczególności:

1) wektory normalne są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta=0$ lub $\beta=\pi$, a zatem $\alpha=0$ lub $\alpha=\pi$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzny są równoległe;
2) wektory normalne są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta=\frac{\pi}{2}$, czyli $\alpha=\frac{\pi}{2}$, tzn. płaszczyzny są prostopadłe.

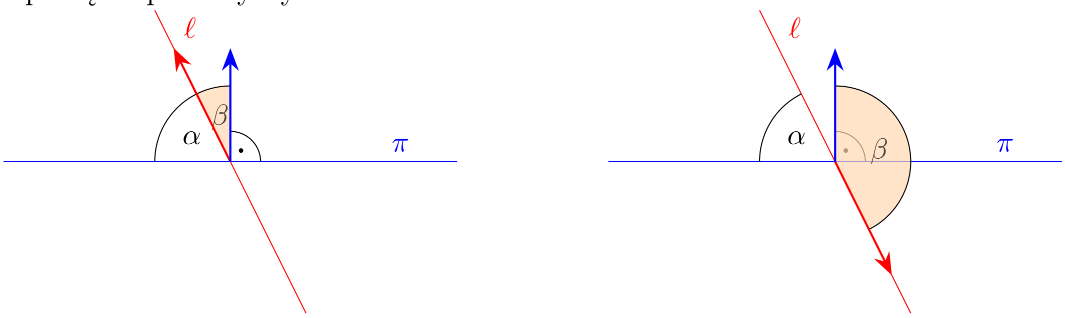
□

Fakt 5.29: Kąt między prostą a płaszczyzną

Jeśli prosta ℓ przecina płaszczyznę π pod kątem ostrym α, to miara kąta między wektorem normalnym płaszczyzny π a wektorem kierunkowym prostej ℓ wynosi $\frac{\pi}{2} - \alpha$ lub $\frac{\pi}{2} + \alpha$. W szczególności:

1) prosta ℓ jest równoległa do płaszczyzny π $\iff$ wektory kierunkowy prostej ℓ jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny π,
2) prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny π $\iff$ wektory kierunkowy prostej ℓ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny π,

Dowód. Poniższy rysunek przedstawia przekrój płaszczyzny π płaszczyzną zawierającą prostą ℓ i prostopadłą do płaszczyzny π.



Jak widać, jeśli mniejszy z kątów między prostą ℓ a płaszczyzną π ma miarę α, to kąt β między wektorem kierunkowym prostej ℓ a wektorem normalnym płaszczyzny π, w zależności od wzajemnego położenia tych wektorów, ma miarę

$$\beta = \tfrac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{lub} \quad \beta = \pi - (\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \tfrac{\pi}{2} + \alpha$$

W szczególności:

1) prosta ℓ jest równoległa do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi$, a zatem $\beta = \frac{\pi}{2}$ lub $\beta = \frac{3\pi}{2}$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy wektor kierunkowy prostej ℓ jest prostopadły do wektora normalnego płaszczyzny π;
2) prosta ℓ jest prostopadła do płaszczyzny π wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a zatem $\beta = 0$ lub $\beta = \pi$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy wektor kierunkowy prostej ℓ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny π.

□

Przykład 13

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i równoległej do płaszczyzny o równaniu $3x - 5y + 2z + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Płaszczyzny równoległe mają równoległe wektory normalne, szukana płaszczyzna ma więc równanie:

$$3x - 5y + 2z + D = 0$$

Podstawiając punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wyliczamy $D = -1$.

Przykład 14

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i prostopadłej do prostej o rów-

naniu parametrycznym $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Rozwiązanie. Płaszczyzna jest prostopadła do prostej, jeśli wektor kierunkowy prostej jest wektorem normalnym płaszczyzny. Stąd szukana płaszczyzna ma równanie

$$x + 6y + 2z + D = 0$$

Podstawiając punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ wyliczamy $D = -13$.

Przykład 15
Wyznacz miarę (dwuściennego) kąta ostrego między płaszczyznami o równaniach:

$$2x + 3y + z + 1 = 0 \qquad \text{i} \qquad 3x + 4y - 5z + 2 = 0$$

Rozwiązanie. Płaszczyzny tworzą kąty o miarach α i $\pi - \alpha$ (jeden z nich jest ostry, a drugi rozwarty), gdzie α to miara kąta między ich wektorami normalnymi. Zatem:

$$\alpha = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}\right|} = \arccos \frac{13}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{50}} = \arccos \frac{13\sqrt{7}}{70}$$

Ponieważ $\cos\alpha > 0$, więc α jest szukanym kątem ostrym.

Przykład 16
Wyznacz miarę kąta między płaszczyzną o równaniu $3x + y - 2z + 4 = 0$ a prostą o równaniu parametrycznym $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Rozwiązanie. Kąt β między wektorem normalnym płaszczyzny a wektorem kierunkowym prostej to:

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{6}}{21}$$

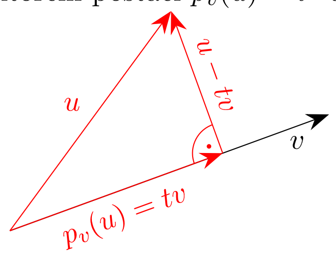
Ponieważ $\cos\beta > 0$, więc kąt β jest kątem ostrym, a zatem kąt między prostą a płaszczyzną to kąt $\frac{\pi}{2} - \beta$.

Fakt 5.30: Rzut wektora na wektor

Rzut (prostopadły) wektora u na wektor v jest wektorem

$$p_v(u) = \frac{u \circ v}{v \circ v} \cdot v = \frac{u \circ v}{|v|^2} \cdot v$$

Dowód. Rzut na wektor v jest wektorem postaci $p_v(u) = t \cdot v$, dla pewnego skalara t.



Ponieważ $u - tv \perp v$, więc:

$$0 = (u - tv) \circ v = (u \circ v) - t(v \circ v) \qquad \text{skąd} \qquad t = \frac{u \circ v}{v \circ v}$$

□

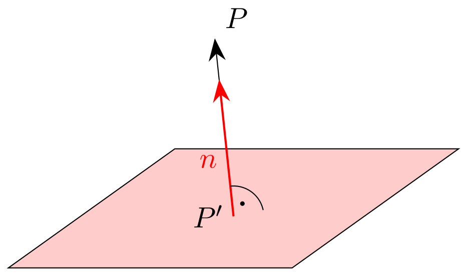
Fakt 5.31: Odległość punktu od płaszczyzny

Odległość punktu $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ od płaszczyzny π o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$ wynosi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{5.8}$$

Dowód. Niech punkt $P' = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$ będzie rzutem (prostokątnym) punktu P na płaszczyznę π. Odległość punktu P od płaszczyzny π jest równa długości wektora $\overrightarrow{P'P}$. Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest prostopadły do płaszczyzny π, czyli równoległy do wektora normalnego $n = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right)$. Wobec tego $\overrightarrow{P'P} = t \cdot n$ dla pewnego $t \in \mathbb{R}$, skąd:

$$P = P' + t \cdot \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x_0 = x_1 + tA \\ y_0 = y_1 + tB \\ z_0 = z_1 + tC \end{cases}$$



Punkt P' leży na płaszczyźnie π, czyli:

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$A(x_0 - tA) + B(y_0 - tB) + C(z_0 - tC) + D = 0$$

skąd

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

Wobec tego odległość punktu P od płaszczyzny π wynosi:

$$d = |tn| = |t| \cdot |n| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

□

Wzór (5.8) możemy również przedstawić w wygodniejszej postaci, posługując się pojęciem *znakowanej odległości od płaszczyzny*:

Fakt 5.32: Znakowana odległość punktu od płaszczyzny

Dany jest punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ oraz płaszczyzna π o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$. Wzór:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{5.9}$$

podaje odległość punktu P od płaszczyzny π ze znakiem $+$ lub $-$ w zależności od tego, po której stronie płaszczyzny π znajduje się punkt P. Wartość tę nazywamy *znakowaną odległością* punktu od płaszczyzny.

Dowód. Wzór (5.9) różni się od wzoru (5.8) jedynie brakiem wartości bezwzględnej w liczniku, czyli jedynie znakiem. Ponieważ płaszczyzna o równaniu $Ax+By+Cz+D=0$ dzieli przestrzeń $\mathbb{R}^3$ na dwie półprzestrzenie opisywane nierównościami:

$$Ax+By+Cz+D \geq 0 \qquad \text{oraz} \qquad Ax+By+Cz+D \leq 0$$

więc znak ilorazu (5.8) zależy wyłącznie od tego, po której stronie płaszczyzny znajduje się punkt P. □

Fakt 5.33: Nierówność półprzestrzeni

Płaszczyzna o równaniu $Ax+By+Cz+D=0$ dzieli przestrzeń $\mathbb{R}^3$ na dwie półprzestrzenie. Jedna z tych półprzestrzeni składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax+By+Cz+D \geq 0$$

a druga z półprzestrzeni składa się z punktów spełniających warunek:

$$Ax+By+Cz+D \leq 0$$

Płaszczyznę graniczną zaliczamy do obu półprzestrzeni.

Przykład 17

Czy punkty $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny o równaniu $2x+y-4z-1=0$?
Rozwiązanie. Współrzędne pierwszego punktu spełniają nierówność $2x+y-4z-1<0$, zaś współrzędne drugiego punktu spełniają nierówność $2x+y-4z-1>0$, czyli punkty te leżą po przeciwnych stronach podanej płaszczyzny.

Rozdział 6

Przekształcenia przestrzeni

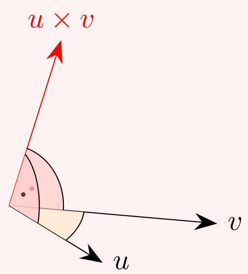
6.1 Macierze

Na zbiorze wektorów $\mathbb{R}^3$ można wprowadzić dodatkowe działanie (nie mające swojego odpowiednika dla wektorów na płaszczyźnie) zwane *iloczynem wektorowym*.

Definicja 6.1: Iloczyn wektorowy (geometrycznie)

Iloczynem wektorowym wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$ (oznaczanym $u \times v$) nazywamy **wektor** o:

- długości $|u| \cdot |v| \cdot \sin \angle(u, v)$,
- kierunku prostopadłym do obu wektorów u i v,
- zwrocie ustalonym zgodnie z „regułą prawej dłoni”, tzn. jeśli pierwszym palcem (kciukiem) wskażemy pierwszy czynnik (u), drugim palcem (wskazującym) – drugi czynnik (v), to trzeci palec (środkowy) wskaże zwrot iloczynu wektorowego $u \times v$.

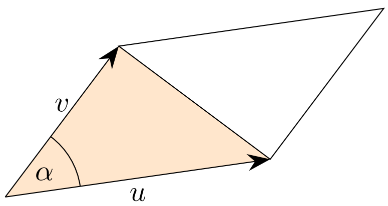


Jeśli jeden z wektorów u i v jest zerowy, przyjmujemy $u \times v = 0$.

Długość iloczynu wektorowego ma jeszcze inną wygodną interpretację geometryczną:

Fakt 6.2: Iloczyn wektorowy (geometrycznie)

Pole równoległoboku rozpiętego w $\mathbb{R}^3$ przez wektory u i v wynosi $|u \times v|$, a pole trójkąta rozpiętego przez wektory u i v wynosi $\frac{1}{2}|u \times v|$. Kierunek wektora $u \times v$ jest prostopadły do płaszczyzny tego równoległoboku (trójkąta).



Dowód. Pole trójkąta rozpiętego przez wektory u i v wynosi:

$$\frac{1}{2} \cdot |u| \cdot |v| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}|u \times v|$$

Pole równoległoboku jest 2 razy większe, więc wynosi $|u \times v|$. □

Podobnie jak w przypadku iloczynu skalarnego, istnieje wzór pozwalający wyznaczyć wektor $u \times v$ używając jedynie współrzędnych wektorów u i v:

Fakt 6.3: Iloczyn wektorowy (algebraicznie)

Iloczynem wektorowym wektorów $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ jest wektor[1]:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Dowód. Zaczniemy od sprawdzenia, że kierunek wektora po prawej stronie równości (6.1) jest zgodny z kierunkiem iloczynu wektorowego, czyli że wektor ten jest prostopadły do każdego z wektorów $u = \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{smallmatrix}\right)$ i $v = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)x_0 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)y_0 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} y_0 z_1 - y_1 z_0 \\ z_0 x_1 - z_1 x_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = (y_0 z_1 - y_1 z_0)x_1 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)y_1 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)z_1 = 0$$

Następnie sprawdzimy, czy długość wektora po prawej stronie równości (6.1) jest zgodna z długością iloczynu wektorowego. W tym celu zauważmy, że oznaczając $\theta = \angle(u, v)$ otrzymujemy:

$$|u \times v|^2 + (u \circ v)^2 = (|u||v|\sin\theta)^2 + (|u||v|\cos\theta)^2 = |u|^2|v|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |u|^2|v|^2$$

czyli

$$|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - (u \circ v)^2 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1)^2 =$$

$$(x_0 y_1)^2 + (x_0 z_1)^2 + (y_0 x_1)^2 + (y_0 z_1)^2 + (z_0 x_1)^2 + (z_0 y_1)^2 - 2x_0 x_1 y_0 y_1 - 2y_0 y_1 z_0 z_1 - 2z_0 z_1 x_0 x_1$$

$$= (y_0 z_1 - y_1 z_0)^2 + (z_0 x_1 - z_1 x_0)^2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)^2$$

Sprawdzenie zwrotu pomijamy, jako wykraczające poza ramy niniejszego skryptu. □

[1]Oznaczenie $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ to krótszy zapis $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Fakt 6.4: Własności iloczynu wektorowego

Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ oraz dowolnego skalara $t \in \mathbb{R}$ zachodzi:

1) $u \times v = -(v \times u)$ ($\times$ jest antysymetryczny)
2) $(u+v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$ ($\times$ jest rozdzielny względem $+$)
   $u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w)$
3) $(tu) \times v = u \times (tv) = t(u \times v)$
4) $u \times v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy u i v są współliniowe.

Dowód. Zgodnie z Definicją 6.1 zamiana kolejności wektorów w iloczynie wektorowym zmienia zwrot na przeciwny, ale nie zmienia jego długości ani kierunku, stąd dostajemy własność (1). Z Definicji 6.1 wynika również, że $u \times v = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin \angle(u, v) = 0$, czyli wektory u i v są współliniowe (obejmuje to również przypadek, gdy jeden z wektorów jest zerowy), skąd dostajemy własność (4).

Dla dowodu własności (2) posłużymy się charakteryzacją algebraiczną (6.1). Przyjmując $u = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right)$, $w = \left(\begin{smallmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)$ dostajemy:

$$u \times (v+w) = \begin{pmatrix} y_1(z_2+z_3) - (y_2+y_3)z_1 \\ z_1(x_2+x_3) - (z_2+z_3)x_1 \\ x_1(y_2+y_3) - (x_2+x_3)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1z_3 - y_3z_1 \\ z_1x_3 - z_3x_1 \\ x_1y_3 - x_3y_1 \end{pmatrix} = u \times v + u \times w$$

Dowód drugiej części własności (2) oraz dowód własności (3) przebiegają podobnie. □

Iloczyn wektorowy pozwala łatwo wyznaczać wektor prostopadły do dwóch danych wektorów w $\mathbb{R}^3$, co ułatwia wyznaczanie wektora normalnego płaszczyzny, jak w poniższych przykładach.

Przykład 1

Zamień równanie parametryczne $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ płaszczyzny na równanie ogólne.

Rozwiązanie. Szukana płaszczyzna jest równoległa do wektorów $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Stąd jej wektor normalny to wektor prostopadły do u i v, możemy więc przyjąć jako wektor normalny:

$$u \times v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \\ -(1 \cdot 5 - 2 \cdot 3) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stąd równanie płaszczyzny to $3x + y - 2z + D = 0$, a korzystając z faktu, że do płaszczyzny należy punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, wyliczamy $D = -5$.

Przykład 2

Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $Q = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $R = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Szukana płaszczyzna jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{PQ} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $\overrightarrow{PR} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, wektor normalny tej płaszczyzny, to:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Stąd równanie płaszczyzny to $-10x + 6y + 5z + D = 0$, a korzystając z faktu, że do płaszczyzny należy punkt $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, wyliczamy $D = -1$.

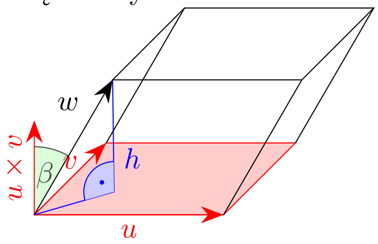
Fakt 6.5: Wyznacznik (geometrycznie i algebraicznie)

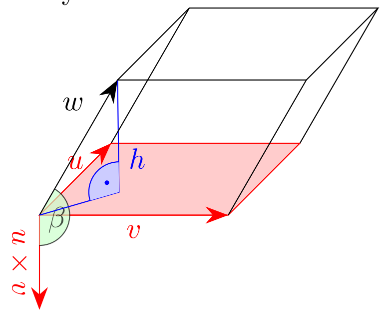
Objętość czworościanu rozpiętego przez wektory u, v, w wynosi $\frac{1}{6}|\det(u,v,w)|$, zaś objętość równoległościanu rozpiętego przez te wektory wynosi $|\det(u,v,w)|$, gdzie liczbę[2]:

$$\det(u,v,w) = (u \times v) \circ w \tag{6.2}$$

nazywamy *wyznacznikiem* trójki wektorów (u,v,w) lub *wyznacznikiem* macierzy 3×3, której kolejnymi kolumnami są wektory u, v, w.

Dowód. Zauważmy, że pole równoległoboku będącego podstawą równoległościanu rozpiętego przez wektory u, v, w to $P = |u \times v|$, a długość wysokości równoległościanu to $h = |w| \cdot \sin\alpha$, gdzie α to kąt nachylenia wektora w do płaszczyzny podstawy.





W sytuacji z pierwszego rysunku kąt między wektorem w a wektorem $u \times v$ (normalnym do płaszczyzny podstawy) wynosi $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, a zatem objętość równoległościanu wynosi:

$$V = P \cdot h = |u \times v| \cdot |w| \cdot \sin\alpha = |u \times v| \cdot |w| \cdot \cos\beta = (u \times v) \circ w$$

i jest to liczba dodatnia.
W sytuacji z drugiego rysunku kąt między wektorem w a wektorem $u \times v$ wynosi $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, a zatem objętość równoległościanu wynosi:

$$V = P \cdot h = |u \times v| \cdot |w| \cdot \sin\alpha = -|u \times v| \cdot |w| \cdot \cos\beta = -(u \times v) \circ w$$

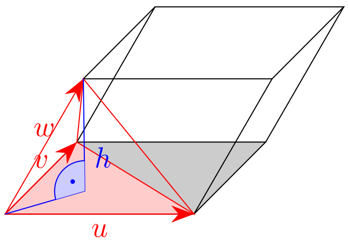
Wówczas liczba $(u \times v) \circ w$ jest ujemna. W obu przypadkach:

$$V = |(u \times v) \circ w| = |\det(u,v,w)|$$

Wysokość czworościanu rozpiętego przez wektory u, v, w jest taka sama jak wysokość równoległościanu rozpiętego przez te wektory, zaś pole podstawy czworościanu wynosi $\frac{1}{2}P$ (gdzie P oznacza pole podstawy równoległościanu), stąd objętość czworościanu wyraża się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{1}{6}|\det(u,v,w)|$$

czyli stanowi $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu rozpiętego przez te same wektory.



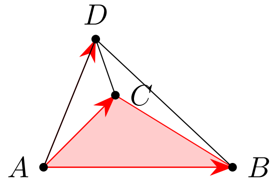
□

[2] Iloczyn $(u \times v) \circ w$ czasami nazywany jest *iloczynem mieszanym* wektorów u, v, w.

Przykład 3

Wyznacz objętość czworościanu $ABCD$, gdzie $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}4\\5\\1\end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix}5\\3\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Czworościan $ABCD$ jest rozpięty przez wektory $\overrightarrow{AB} = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\overrightarrow{AD} = \left(\begin{smallmatrix}4\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$.



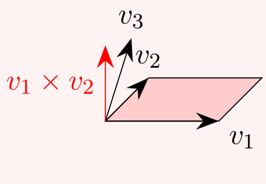
Stąd objętość tego czworościanu wynosi:

$$\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}2\\-5\\9\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\right| = 5$$

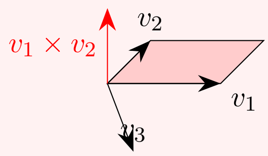
Dowód Faktu 6.5 pokazuje geometryczną interpretację nie tylko wartości bezwzględnej wyznacznika trójki wektorów w $\mathbb{R}^3$, ale również jego znaku. Jest to motywacją do wprowadzenia następującej definicji:

Definicja 6.6: Orientacja trójki wektorów (geometrycznie)

Trójkę wektorów (v_1, v_2, v_3) w $\mathbb{R}^3$ nazywamy *dodatnio zorientowaną*, jeśli v_3 leży w tej samej półprzestrzeni wyznaczonej przez wektory v_1 i v_2, co wektor $v_1 \times v_2$, a *ujemnie zorientowaną*, jeśli v_3 leży w przeciwnej półprzestrzeni.



(v_1, v_2, v_3) dodatnio zorientowana



(v_1, v_2, v_3) ujemnie zorientowana

Nieformalnie, trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest dodatnio zorientowana, jeśli wektory te można przedstawić przy pomocy trzech palców prawej ręki: kciuka (v_1), palca wskazującego (v_2) i palca środkowego (v_3). Przykładem dodatnio zorientowanej trójki wektorów jest trójka wersorów: (e_1, e_2, e_3).

Orientację trójki wektorów można ustalić przy pomocy wyznacznika, co sprawdziliśmy w dowodzie Faktu 6.5. Ustaliliśmy tam, że:

1) $\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w > 0$, gdy trójka (u, v, w) jest dodatnio zorientowana (pierwszy rysunek),

2) $\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w < 0$, gdy trójka (u, v, w) jest ujemnie zorientowana (drugi rysunek).

Warunek $\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory u, v i w wynosi 0, czyli wektory te leżą na jednej płaszczyźnie (równoległościan degeneruje się). Stąd otrzymujemy następujący fakt:

Fakt 6.7: Orientacja trójki wektorów (algebraicznie)

Dane są wektory $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Wówczas:

1) $\det(v_1, v_2, v_3) > 0 \iff$ trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest dodatnio zorientowana,
2) $\det(v_1, v_2, v_3) < 0 \iff$ trójka wektorów (v_1, v_2, v_3) jest ujemnie zorientowana,
3) $\det(v_1, v_2, v_3) = 0 \iff$ wektory v_1, v_2, v_3 są współpłaszczyznowe.

W szczególności macierz o dwóch jednakowych kolumnach (a nawet o dwóch współliniowych kolumnach) ma zerowy wyznacznik.

Fakty 6.5 oraz 6.7 można połączyć w jedno stwierdzenie, używając pojęcia *znakowanej objętości*:

Fakt 6.8: Znakowana objętość

Dla dowolnych wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ liczba:

$$\det(u, v, w) = (u \times v) \circ w$$

oznacza *znakowaną objętość równoległościanu* rozpiętego przez trójkę wektorów (u, v, w), tzn. objętość ze znakiem $+$, gdy trójka (u, v, w) jest dodatnio zorientowana, zaś ze znakiem $-$, gdy trójka (u, v, w) jest ujemnie zorientowana.

Fakt 6.9: Zamiana kolumn wyznacznika

Zamiana miejscami dwóch kolumn macierzy 3×3 zmienia wyznacznik tej macierzy na przeciwny. Innymi słowy: zamiana miejscami dwóch wektorów w trójce niewspółpłaszczyznowych wektorów (u, v, w) zmienia orientację tej trójki na przeciwną.

Dowód. Z Faktu 6.5 wynika, że jakakolwiek zamiana kolejności wektorów u, v, w zachowuje $|\det(u, v, w)|$, gdyż nie zmienia ona rozpinanego równoległościanu. Nietrudno natomiast sprawdzić, że każda z następujących par trójek wektorów:

$$\begin{array}{ccc} (u, v, w) & \text{oraz} & (v, u, w) \\ (u, v, w) & \text{oraz} & (w, v, u) \\ (u, v, w) & \text{oraz} & (u, w, v) \end{array}$$

składa się z dwóch trójek przeciwnie zorientowanych. $\square$

Fakt 6.10: Wyznacznik macierzy transponowanej

Dla dowolnej macierzy $A \in M_{3\times 3}$ zachodzi $\det A^\top = \det A$.

Dowód. Jeśli $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, to $A^\top = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ i zgodnie ze wzorem (6.2):

$$\det A = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \det A^\top$$

$\square$

Wniosek 6.11: Zamiana wierszy wyznacznika

Zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy 3×3 zmienia wyznacznik tej macierzy na przeciwny. Macierz 3×3 o dwóch współliniowych wierszach (w szczególności o dwóch równych wierszach) ma zerowy wyznacznik.

Dowód. Zgodnie z Faktem 6.10 transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika. Ponieważ transpozycja macierzy zamienia kolumny na wiersze (a wiersze na kolumny), więc prawdziwy jest odpowiednik Faktu 6.9 dla wierszy macierzy 3×3. □

Fakt 6.12: Rozwinięcie wyznacznika względem kolumny/wiersza

Dana jest macierz $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Oznaczmy przez A_i macierz rozmiaru 2×2 powstałą z macierzy M przez usunięcie wiersza i kolumny zawierającej wyraz a_i, gdzie $i = 1, 2, 3$. Analogicznie określamy macierze B_i oraz C_i. Wówczas:

$$\begin{aligned} \det M &= +a_1 \det A_1 - a_2 \det A_2 + a_3 \det A_3 \\ \det M &= -b_1 \det B_1 + b_2 \det B_2 - b_3 \det B_3 \\ \det M &= +c_1 \det C_1 - c_2 \det C_2 + c_3 \det C_3 \end{aligned}$$

(wzory te nazywamy *rozwinięciem względem pierwszej/drugiej/trzeciej kolumny*) oraz

$$\begin{aligned} \det M &= +a_1 \det A_1 - b_1 \det B_1 + c_1 \det C_1 \\ \det M &= -a_2 \det A_2 + b_2 \det B_2 - c_2 \det C_2 \\ \det M &= +a_3 \det A_3 - b_3 \det B_3 + c_3 \det C_3 \end{aligned}$$

(wzory te nazywamy *rozwinięciem względem pierwszego/drugiego/trzeciego wiersza*).

Zwróćmy uwagę, że znaki $+$ i $-$ pojawiające się w powyższych wzorach przy wyrazach a_i, b_i, c_i zależą od położenia wyrazu w macierzy M w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Dowód. Oznaczmy $a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$, $c = \left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$. Rozwinięcie względem trzeciej kolumny to bezpośrednie zastosowanie wzorów (6.2) i (6.1), jako że

$$\det(a, b, c) = (a \times b) \circ c = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3$$

Na mocy Faktu 6.9 otrzymujemy rozwinięcie względem drugiej kolumny:

$$\det(a, b, c) = -\det(a, c, b) = -(a \times c) \circ b = -\begin{pmatrix} B_1 \\ -B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = -b_1 B_1 + b_2 B_2 - b_3 B_3$$

oraz rozwinięcie względem pierwszej kolumny:

$$\det(a,b,c) = -\det(b,a,c) = \det(b,c,a) = (b \times c) \circ a = \begin{pmatrix} A_1 \\ -A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3$$

Wzory na rozwinięcie względem wybranego wiersza wynikają z Faktu 6.10. □

Przykład 4

Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że najoptymalniejszym (tzn. wymagającym najmniejszej ilości rachunków) sposobem wyliczania wyznacznika jest rozwinięcie względem wiersza lub kolumny zawierającej możliwie dużą liczbę zer. W związku z tym pierwszy wyznacznik wyliczamy rozwijając względem drugiej kolumny:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-5) = 10$$

drugi wyznacznik wyliczamy rozwijając względem trzeciego wiersza:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (-4) \cdot (-14) = 56$$

a trzeci – rozwijając względem drugiego wiersza:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -1 + 5 = 4$$

Czwarta macierz ma dwa współliniowe wiersze, zaś piąta macierz ma dwie współliniowe (nawet równe) kolumny, więc obie te macierze mają (zgodnie z Faktem 6.7) wyznacznik równy 0.

W odniesieniu do wyznacznika macierzy 3×3 prawdziwe są te same dwa wzory co dla wyznaczników macierzy 2×2. Dowód poniższego faktu przeprowadzimy w kolejnym rozdziale.

Fakt 6.13: Własności wyznacznika

Dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 3×3 zachodzą warunki:

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
2) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, o ile A jest odwracalna.

Wyznaczniki macierzy 3×3 pomogą nam w rozwiązywaniu układów 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi, podobnie jak wyznaczniki macierzy 2×2 pomagały w rozwiązywaniu układów 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi.

Fakt 6.14: Układ trzech równań liniowych

Zbiorem rozwiązań układu trzech równań liniowych (z niewiadomymi x, y, z):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases} \tag{6.3}$$

jest punkt, prosta, płaszczyzna, zbiór pusty lub cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

Dowód. Zgodnie z Faktem 5.24 powyższy układ zazwyczaj opisuje zbiór punktów wspólnych trzech płaszczyzn w $\mathbb{R}^3$, czyli:

1) pojedynczy punkt, prostą lub zbiór pusty, gdy każde dwie płaszczyzny przecinają się,
2) prostą, zbiór pusty lub płaszczyznę, gdy przynajmniej dwie z płaszczyzn się pokrywają,
3) zbiór pusty, gdy przynajmniej dwie z płaszczyzn są równoległe i rozłączne.

Wyjątkiem jest sytuacja, gdy $a_i = b_i = c_i = 0$ dla pewnego i. Wówczas zachodzi jedna z trzech możliwości:

4) układ (6.3) jest sprzeczny (jeśli dla pewnego i zachodzi $a_i = b_i = c_i = 0$, ale $p_i \neq 0$),
5) układ (6.3) jest spełniony przez każdą trójkę (x, y, z) (jeśli $a_i = b_i = c_i = p_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3$),
6) układ (6.3) opisuje płaszczyznę, prostą lub zbiór pusty (w pozostałych przypadkach).

□

Fakt 6.15: Wzory Cramera

Dany jest następujący układ równań z niewiadomymi x, y, z:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases} \tag{6.4}$$

Wyznacznik $D = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu (6.4).
Jeśli $D \neq 0$, to układ (6.4) ma dokładnie jedno rozwiązanie, zadane wzorem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases} \tag{6.5}$$

gdzie

$$D_x = \det \begin{pmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad D_y = \det \begin{pmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad D_z = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{pmatrix}$$

Układ (6.4) można zapisywać również w wersji macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

gdzie macierz 3×3 po lewej stronie to *macierz główna układu.*

Dowód. Jeśli pomnożymy każde równanie układu (6.4) stronami przez odpowiednio dobrany wyznacznik macierzy 2×2, drugie równanie dodatkowo pomnożymy przez -1:

$$\begin{cases} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = p_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x - b_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = -p_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x + b_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z = p_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

a następnie dodamy otrzymane trzy równania i zastosujemy wzór na rozwinięcie wyznacznika macierzy 3×3 względem pierwszej kolumny, to otrzymamy:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6.6}$$

Drugi i trzeci z powyższych wyznaczników jest równy zero (jako wyznacznik macierzy o dwóch jednakowych kolumnach), więc równanie (6.6) przyjmuje postać:

$$D \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = D_x$$

skąd w sytuacji gdy $D \neq 0$ otrzymujemy:

$$x = \frac{D_x}{D}$$

W analogiczny sposób dowodzimy pozostałych dwóch równań układu (6.5). □

Wzorów Cramera możemy (podobnie jak w przypadku 2-wymiarowym) użyć do wyprowadzenia wzoru na macierz odwrotną do macierzy rozmiaru 3×3.

Fakt 6.16: Macierz identycznościowa

Macierz[3] $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwana *macierzą identycznościową (rozmiaru* 3×3*)* jest elementem neutralnym mnożenia macierzy, tzn.

1) $A \cdot I = A$, dla dowolnej macierzy A, dla której mnożenie jest wykonalne,
2) $I \cdot B = B$, dla dowolnej macierzy B, dla której mnożenie jest wykonalne.

Definicja 6.17: Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną do macierzy $A \in M_{3\times3}$ nazywamy taką macierz $A^{-1} \in M_{3\times3}$, że

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Macierz, dla której istnieje macierz odwrotna nazywamy *macierzą odwracalną*.

[3]Będziemy stosować to samo oznaczenie I na macierze identycznościowe różnych rozmiarów.

Zwróćmy uwagę, że ze względu na nieprzemienność mnożenia macierzy definicja musi wymagać by iloczyn macierzy A i A^{-1} był macierzą identycznościową niezależnie od kolejności czynników. Niech $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Szukamy macierzy odwrotnej do P, tzn. macierzy $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$, dla której zachodzą równości:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

Pierwsze z równań (6.7) można zapisać w postaci trzech równań wektorowych:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6.8}$$

które można zapisać jako trzy układy 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1y_1 + b_1y_2 + c_1y_3 = 0 \\ a_2y_1 + b_2y_2 + c_2y_3 = 1 \\ a_3y_1 + b_3y_2 + c_3y_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 = 0 \\ a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 = 0 \\ a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 = 1 \end{cases}$$

Jeśli $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det P \neq 0$, to zgodnie ze wzorami Cramera każdy z powyższych układów ma jednoznaczne rozwiązanie:

$$x_1 = \frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot A_1$$

$$x_2 = \frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\det P} \cdot B_1$$

$$x_3 = \frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = +\frac{1}{\det P} \cdot C_1$$

gdzie przez A_i, B_i, C_i oznaczamy wyznacznik macierzy 2×2 powstałej przez wykreślenie z macierzy P wiersza i kolumny zawierających, odpowiednio, wyraz a_i, b_i lub c_i. Analogicznie wyliczamy:

$$y_1 = \frac{1}{\det P} \cdot A_2 \qquad y_2 = \frac{1}{\det P} \cdot B_2 \qquad y_3 = \frac{1}{\det P} \cdot C_2$$
$$z_1 = \frac{1}{\det P} \cdot A_3 \qquad z_2 = \frac{1}{\det P} \cdot B_3 \qquad z_3 = \frac{1}{\det P} \cdot C_3$$

wobec czego szukaną macierzą odwrotną powinna być macierz:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} +A_1 & -B_1 & +C_1 \\ -A_2 & +B_2 & -C_2 \\ +A_3 & -B_3 & +C_3 \end{pmatrix}^\top$$

Ponieważ mnożenie macierzy nie jest przemienne, więc powinniśmy jeszcze sprawdzić, że znaleziona macierz spełnia również drugie z równań (6.7). Sprawdzenie tego pominiemy.

Fakt 6.18: Macierz odwrotna

Macierz $P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det P \neq 0$, a macierzą do niej odwrotną jest macierz:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} +A_1 & -B_1 & +C_1 \\ -A_2 & +B_2 & -C_2 \\ +A_3 & -B_3 & +C_3 \end{pmatrix}^\top$$

gdzie A_i, B_i, C_i oznaczają wyznacznik macierzy 2×2 powstałej przez wykreślenie z macierzy P wiersza i kolumny zawierającego, odpowiednio, wyraz a_i, b_i lub c_i.

Dowód. Przed sformułowaniem faktu wyprowadziliśmy powyższy wzór na macierz odwrotną. Pozostaje uzasadnić, że w przypadku, gdy $\det P = 0$, macierz P nie jest odwracalna. Ale jeśli macierz P jest odwracalna, to zachodzi $P \cdot P^{-1} = I$, co na mocy Faktu 6.13:

$$\det P \cdot \det(P^{-1}) = 1$$

więc w przypadku $\det P = 0$, to otrzymujemy sprzeczność. □

Fakt 6.19: Własności macierzy odwrotnych

Dla dowolnych odwracalnych macierzy A i B rozmiaru 3×3 zachodzą warunki:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Dowód. (1) Z uwagi na symetrię, warunek $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ oznacza zarówno, że A^{-1} jest macierzą odwrotną do A, jak i że A jest macierzą odwrotną do A^{-1}.
(2) Zauważmy, że na mocy prawa łączności mnożenia macierzy:

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$
$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

czyli macierze $B^{-1}A^{-1}$ i AB są wzajemnie odwrotne. □

Fakt 6.20: Rozkład wektora

Jeśli w $\mathbb{R}^3$ dane są trzy liniowo niezależne wektory u, v, w, to każdy wektor p można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów u, v, w, tzn. istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dla których:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w \tag{6.9}$$

Dowód. Jeśli współrzędne wektorów oznaczymy:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

to równanie (6.9) można zapisać w postaci układu równań z niewiadomymi α, β i γ:

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = p_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = p_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = p_3 \end{cases}$$

Wyznacznik główny tego układu to:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \det(u, v, w)$$

który na mocy Faktu 6.7 jest niezerowy (bo wektory u, v, w są niewspółpłaszczyznowe). Wobec tego, zgodnie z Faktem 6.15, układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie. $\square$

6.2 Przekształcenia afiniczne i liniowe

Definicja 6.21: Przekształcenie liniowe i afiniczne

Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nazywamy *przekształceniem afinicznym* jeśli jest zadane wzorem:

$$F(X) = A \cdot X + v$$

oraz *przekształceniem liniowym* jeśli jest zadane wzorem:

$$G(X) = A \cdot X$$

gdzie A jest macierzą rozmiaru 3×3, a v jest wektorem z $\mathbb{R}^3$. Macierz A nazywamy *macierzą przekształcenia liniowego* G.

Oczywisty związek między przekształceniami afinicznymi a liniowymi jest następujący:

Fakt 6.22: Przekształcenie afiniczne a przekształcenie liniowe

Przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy $F(0) = 0$.

Dowód. Dla przekształcenia afinicznego zadanego wzorem $F(X) = A \cdot X + v$ zachodzi:

$$F(0) = A \cdot 0 + v = v$$

Przekształcenie F jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $v = 0$, co jest równoważne temu, że $F(0) = 0$. □

Rozdział zaczniemy od zapoznania się z przykładami przekształceń afinicznych $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, stanowiących trójwymiarowe uogólnienia przekształceń płaszczyzny z Rozdziału 2.2.

Definicja 6.23: Translacja

Translacja (przesunięcie) o wektor v to przekształcenie $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} = v$.

Przykład 1

Napisz wzór translacji T_v o wektor $v = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie.

$$T_v\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2\\y+1\\z+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Definicja 6.24: Rzut prostokątny

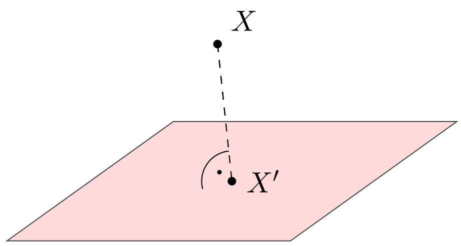
Rzut (prostokątny) na płaszczyznę π to przekształcenie $P_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na płaszczyźnie π, że $\overrightarrow{XX'} \perp \pi$.

Przykład 2

Napisz wzór rzutu P_π na płaszczyznę π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wobec tego $\overrightarrow{XX'} = t \cdot n$ dla pewnego t rzeczywistego, skąd:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = X + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix}$$



Punkt X' należy do płaszczyzny π, skąd:

$$2(x + 2t) + 3(y + 3t) - (z - t) + 4 = 0$$

czyli

$$t = -\tfrac{1}{14}(2x + 3y - z + 4)$$

Stąd

$$X' = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{1}{7}z - \frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7}x + \frac{5}{14}y + \frac{3}{14}z - \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7}x + \frac{3}{14}y + \frac{13}{14}z + \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{14} & \frac{13}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

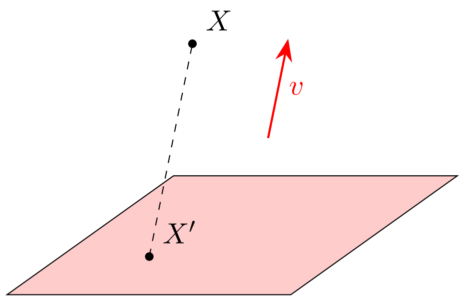
Definicja 6.25: Rzut ukośny

Rzut ukośny na płaszczyznę π w kierunku wektora v to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na płaszczyźnie π, że $\overrightarrow{XX'} \parallel v$.

Przykład 3

Napisz wzór rzutu ukośnego w kierunku wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na płaszczyznę π o równaniu $2x + y + z + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ przez $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.



Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora v, więc $\overrightarrow{XX'} = t \cdot v$ dla pewnego t rzeczywistego, skąd:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = X + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y+t \\ z+t \end{pmatrix}$$

Punkt X' należy do płaszczyzny π, skąd:

$$2(x+t) + (y+t) + (z+t) + 1 = 0$$

czyli

$$t = -\tfrac{1}{4}(2x + y + z + 1)$$

Stąd

$$X' = \begin{pmatrix} x+t \\ y+t \\ z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

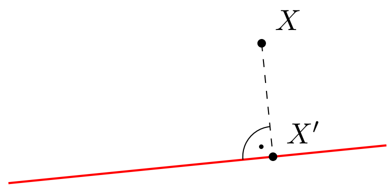
Definicja 6.26: Rzut na prostą

Rzut (prostokątny) na prostą ℓ to przekształcenie $P_\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X' leżący na prostej ℓ, że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$.

Przykład 4

Napisz wzór rzutu P_ℓ na prostą ℓ o równaniu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Obrazem punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ jest taki punkt X' na prostej ℓ, że $XX' \perp \ell$.



Ponieważ punkt X' leży na prostej ℓ, więc

$$X' = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Prostopadłość wektora $\overrightarrow{XX'}$ do ℓ oznacza:

$$\overrightarrow{XX'} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} 3t+1-x \\ 2t-y \\ t+1-z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

czyli

$$3(3t+1-x) + 2(2t-y) + (t+1-z) = 0$$
$$t = \tfrac{1}{14}(3x + 2y + z - 4)$$

Podstawiając do wzoru na X' otrzymujemy:

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{9}{14}x + \frac{3}{7}y + \frac{3}{14}z + \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{1}{7}z - \frac{4}{7} \\ \frac{3}{14}x + \frac{1}{7}y + \frac{1}{14}z + \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Definicja 6.27: Odbicie (symetria)

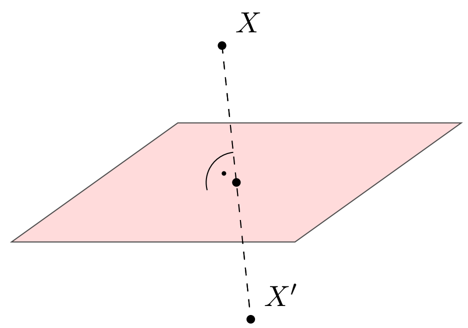
Odbicie (symetria) względem płaszczyzny π to przekształcenie $S_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \pi$ oraz X i X' znajdują się w równych odległościach od płaszczyzny π i po przeciwnych jej stronach.

Przykład 5

Napisz wzór odbicia S_π względem płaszczyzny π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ przez $X' = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny $n = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wobec tego $\overrightarrow{XX'} = t \cdot n$ dla pewnego t rzeczywistego, skąd:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = X + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix}$$



Znakowane odległości punktów X i X' od płaszczyzny π są liczbami przeciwnymi, czyli:

$$\operatorname{dist}(X', \pi) = -\operatorname{dist}(X, \pi)$$

$$\frac{2(x + 2t) + 3(y + 3t) - (z - t) + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = -\frac{2x + 3y - z + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}}$$

czyli

$$2(x + 2t) + 3(y + 3t) - (z - t) + 4 = -(2x + 3y - z + 4)$$

skąd

$$t = -\tfrac{1}{7}(2x + 3y - z + 4)$$

czyli

$$X' = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - \frac{8}{7} \\ -\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z - \frac{12}{7} \\ \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z + \frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{8}{7} \\ -\frac{12}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Definicja 6.28: Powinowactwo prostokątne

Powinowactwo prostokątne o skali $k \neq 0$ *względem płaszczyzny* π to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz

$$\operatorname{dist}(X', \pi) = k \cdot \operatorname{dist}(X, \pi)$$

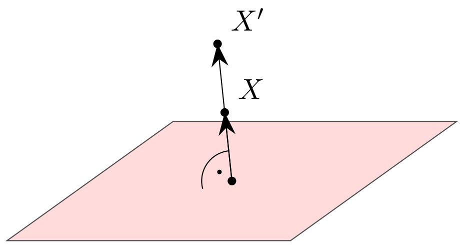
gdzie $\operatorname{dist}(\cdot, \pi)$ oznacza **znakowaną** odległość punktu od płaszczyzny π.

Przykład 6

Napisz wzór powinowactwa prostokątnego F o skali $k = 2$ względem płaszczyzny π o równaniu $2x + 3y - z + 4 = 0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ przez $X' = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$. Wektor $\overrightarrow{XX'}$ jest równoległy do wektora normalnego płaszczyzny $n = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wobec tego $\overrightarrow{XX'} = t \cdot n$ dla pewnego t rzeczywistego, skąd:

$$X' = X + \overrightarrow{XX'} = X + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix}$$



Znakowane odległości punktów X i X' od płaszczyzny π spełniają warunek:

$$\operatorname{dist}(X', \pi) = 2 \cdot \operatorname{dist}(X, \pi)$$

$$\frac{2(x + 2t) + 3(y + 3t) - (z - t) + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = 2 \cdot \frac{2x + 3y - z + 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}}$$

czyli

$$2(x + 2t) + 3(y + 3t) - (z - t) + 4 = 2 \cdot (2x + 3y - z + 4)$$

skąd

$$t = \tfrac{1}{14}(2x + 3y - z + 4)$$

czyli

$$X' = \begin{pmatrix} x + 2t \\ y + 3t \\ z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{1}{7}z + \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7}x + \frac{23}{14}y - \frac{3}{14}z + \frac{6}{7} \\ -\frac{1}{7}x - \frac{3}{14}y + \frac{15}{14}z - \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{23}{14} & -\frac{3}{14} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{15}{14} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Definicja 6.29: Odbicie względem prostej

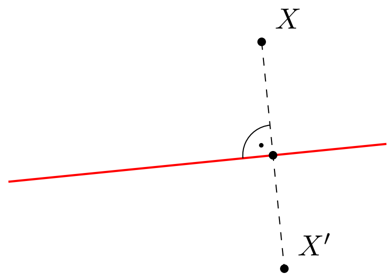
Odbicie (symetria) względem prostej ℓ to przekształcenie $S_\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$, a środek odcinka XX' leży na prostej ℓ.

Przykład 7

Napisz wzór odbicia S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ przez $X' = \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{smallmatrix}\right)$. Wówczas środek odcinka XX' to punkt:

$$\tfrac{1}{2}(X + X') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x + x') \\ \frac{1}{2}(y + y') \\ \frac{1}{2}(z + z') \end{pmatrix}$$



Wiemy, że $\overrightarrow{XX'} \perp \ell$ oraz środek odcinka XX' leży na prostej ℓ, co możemy zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+x') \\ \frac{1}{2}(y+y') \\ \frac{1}{2}(z+z') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t+1 \\ 2t \\ t+1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} 3(x'-x)+2(y'-y)+(z'-z)=0 \\ \frac{1}{2}(x+x')=3t+1 \\ \frac{1}{2}(y+y')=2t \\ \frac{1}{2}(z+z')=t+1 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy:

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}x+\frac{6}{7}y+\frac{3}{7}z+\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z-\frac{8}{7} \\ \frac{3}{7}x+\frac{2}{7}y-\frac{6}{7}z+\frac{10}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix}$$

Definicja 6.30: Symetria środkowa

Symetria środkowa o środku S to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że punkt S jest środkiem odcinka XX'

Przykład 8

Napisz wzór symetrii środkowej o środku $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ przez X'. Punkt S jest środkiem odcinka XX', więc:

$$S = \tfrac{1}{2}(X+X')$$

czyli

$$X' = 2S - X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x \\ 4-y \\ 8-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Definicja 6.31: Jednokładność

Jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$ to przekształcenie $D_k^S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że:

$$\overrightarrow{SX'} = k \cdot \overrightarrow{SX}$$

Przykład 9

Napisz wzór jednokładności D_k^S o skali $k = 4$ i środku $S = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ przez X'. Wówczas:

$$\overrightarrow{SX'} = 4 \cdot \overrightarrow{SX} \qquad \text{czyli} \qquad X' - S = 4(X - S)$$

skąd

$$X' = 4X - 3S = 4 \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x-6\\4y-3\\4z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

Definicja 6.32: Powinowactwo ścinające

Powinowactwo ścinające o płaszczyźnie π i wektorze v (gdzie v jest wektorem równoległym do płaszczyzny π) to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że:

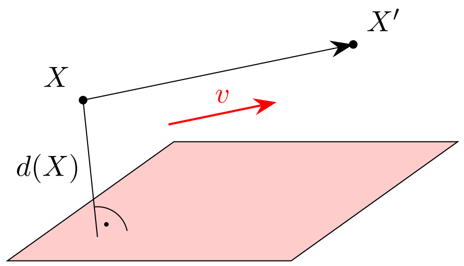
$$\overrightarrow{XX'} = \operatorname{dist}(X, \pi) \cdot v$$

gdzie $\operatorname{dist}(\cdot, \pi)$ to **znakowana** odległość od płaszczyzny π.

Przykład 10

Napisz wzór powinowactwa ścinającego o płaszczyźnie o równaniu $2x - y + 2z - 1 = 0$ i wektorze $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\4\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Oznaczmy obraz punktu $X = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ przez X'.



Wówczas:

$$\overrightarrow{XX'} = \operatorname{dist}(X, \pi) \cdot v \quad \text{gdzie} \quad \operatorname{dist}(X, \pi) = \frac{2x - y + 2z - 1}{3}$$

to znakowana odległość punktu X od płaszczyzny π. Zatem:

$$X' = X + \operatorname{dist}(X, \pi) \cdot v = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\\ \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{8}{3}z - \frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}z - \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Definicja 6.33: Identyczność

Identyczność to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na siebie, tzn. $X' = X$.

Definicja 6.34: Przekształcenie stałe

Przekształcenie stałe to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt przeprowadza na ten sam ustalony punkt S, tzn. $X' = S$. Jeśli $S = 0$, to przekształcenie to nazywamy *przekształceniem zerowym*.

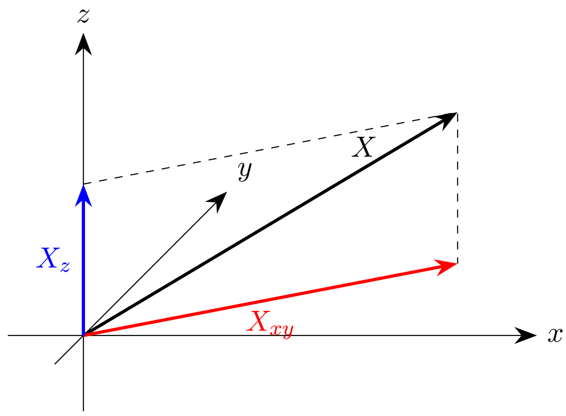
Definicja 6.35: Obrót

Obrót o kąt θ wokół prostej ℓ to przekształcenie $R^\ell_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które każdy punkt X przeprowadza na taki punkt X', że $|\overline{X}X'| = |\overline{X}X|$ oraz kąt $\angle X\overline{X}X'$ ma miarę θ, gdzie $\overline{X}$ jest rzutem (prostokątnym) punktu X na prostą ℓ[4].

Przykład 11

Napisz wzór obrotu o kąt θ wokół osi Oz.

Rozwiązanie. Niech $X = X_z + X_{xy}$, gdzie $X_z = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\z\end{smallmatrix}\right)$ jest rzutem wektora X na oś Oz, zaś $X_{xy} = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\0\end{smallmatrix}\right)$ jest rzutem wektora X na płaszczyznę Oxy.



Analogicznie rozłóżmy obraz X' wektora X przez obrót o kąt θ wokół osi Oz, jako:

$$X' = X'_z + X'_{xy}, \text{ gdzie } X'_z = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\z'\end{smallmatrix}\right) \text{ oraz } X'_{xy} = \left(\begin{smallmatrix}x'\\y'\\0\end{smallmatrix}\right)$$

Zauważmy, że $z' = z$ natomiast:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

co jest wzorem na obrót wektora na płaszczyźnie wokół punktu $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ o kąt θ. Stąd:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

[4]Istnieją dwa obroty wokół ℓ o kąt θ różniące się wybranym kierunkiem obrotu.

Podobnie jak wśród przekształceń afinicznych płaszczyzny, wśród przekształceń afinicznych $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ można wyróżnić szczególną klasę przekształceń zwanych *izometriami*:

Definicja 6.36: Izometria

Izometria $\mathbb{R}^3$ to przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które zachowuje odległości, tzn. dla dowolnych $A, B \in \mathbb{R}^3$ zachodzi

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{F(A)F(B)}|$$

Izometria liniowa $\mathbb{R}^3$ to izometria $\mathbb{R}^3$, która jest równocześnie przekształceniem liniowym. Macierz izometrii liniowej nazywamy *macierzą izometrii.*

Fakt, że izometrie to szczególne przykłady przekształceń afinicznych nie jest prostym wnioskiem z definicji, ale twierdzeniem, którego dowód wykracza poza ramy niniejszego skryptu:

Twierdzenie 6.37: Izometria to przekształcenie afiniczne

Każda izometria $\mathbb{R}^3$ jest przekształceniem afinicznym.

Fakt 6.38: Własności izometrii

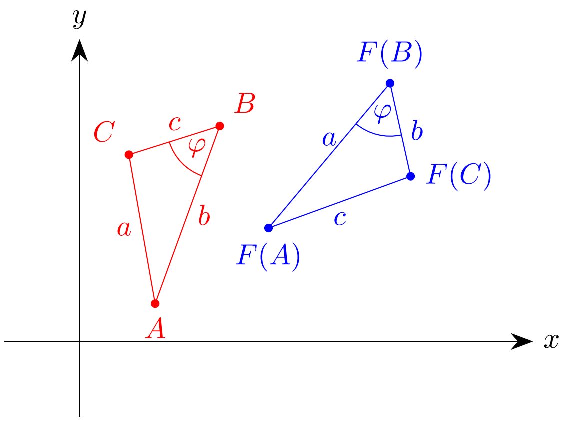
Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie izometrią. Wówczas:

1) F zachowuje kąty, tzn. dla dowolnych punktów A, B, C zachodzi:

$$\angle ABC = \angle F(A)F(B)F(C)$$

2) każda figura przystaje do swojego obrazu przez izometrię F,
3) F zachowuje pola figur płaskich,
4) F zachowuje objętości figur.

Dowód. Izometria zachowuje odległości punktów, czyli w szczególności zachowuje długości boków dowolnego trójkąta. Ponieważ dwa trójkąty o odpowiednich bokach jednakowej długości są przystające (cecha przystawania bbb), więc ich odpowiednie kąty są tej samej miary, co dowodzi własności (1).



Skoro izometria zachowuje długości boków (Definicja 6.36) oraz miary kątów (własność (1)), to każdy wielokąt (płaski) przeprowadza na wielokąt do niego przystający. Stąd wynika, że izometria każdy wielościan przeprowadza na wielościan do niego przystający. W ten sposób udowodniliśmy własności (2), (3) i (4) w szczególnym przypadku wielokątów i wielościanów. Dowód w ogólnym przypadku wykracza poza ramy niniejszego skryptu. □

Przedstawione w Rozdziale 2.1 definicje dodawania macierzy (Definicja 2.2), mnożenia macierzy przez skalar (Definicja 2.3) oraz mnożenia macierzy (Definicja 2.5) obejmują macierze wszelkich rozmiarów, w szczególności macierze 3×3 rozważane w niniejszym rozdziale. Również własności tych działań (Fakt 2.4 i Fakt 2.6) pozostają prawdziwe. W związku z tym można udowodnić następujące własności przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$, analogiczne do poznanych własności przekształceń płaszczyzny.

Fakt 6.39: Addytywność i jednorodność

Jeśli $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych wektorów u i v zachodzi *warunek addytywności*:

$$F(u+v) = F(u) + F(v) \tag{6.10}$$

oraz dla dowolnego wektora u i dowolnego skalara t zachodzi *warunek jednorodności*:

$$F(t \cdot u) = t \cdot F(u) \tag{6.11}$$

Zwróćmy uwagę, że warunek $F(0) = 0$ opisany w Fakcie 6.22 to szczególny przypadek warunku jednorodności (dla $t = 0$).

Dowód. Niech $A \in M_{3\times 3}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F, tzn. $F(X) = AX$. Warunek addytywności wynika z rozdzielności mnożenia macierzy względem dodawania (Fakt 2.4), gdzie wektor traktujemy jako szczególny przypadek macierzy:

$$F(u+v) = A \cdot (u+v) = A \cdot u + A \cdot v = F(u) + F(v)$$

Warunek jednorodności wynika z Faktu 2.6:

$$F(t \cdot u) = A \cdot (tu) = t \cdot (Au) = t \cdot F(u)$$

□

Warunki addytywności i jednorodności można połączyć w jeden *warunek liniowości*:

Wniosek 6.40: Liniowość

Jeśli $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym, to dla dowolnych wektorów u i v oraz dowolnych skalarów s i t zachodzi *warunek liniowości*:

$$F(su + tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v) \tag{6.12}$$

W szczególności zachodzi warunek:

$$F(u - v) = F(u) - F(v)$$

Dowód. Z addytywności i jednorodności przekształcenia liniowego (Fakt 6.39) otrzymujemy:

$$F(su + tv) = F(su) + F(tv) = s \cdot F(u) + t \cdot F(v)$$

W szczególności, przyjmując $s = 1$ i $t = -1$ otrzymujemy:

$$F(u - v) = F(1 \cdot u + (-1) \cdot v) = 1 \cdot F(u) + (-1) \cdot F(v) = F(u) - F(v)$$

□

Zwróćmy uwagę, że warunki addytywności i jednorodności można traktować jako szczególne przypadki warunku liniowości. Warunek addytywności otrzymujemy wstawiając $s = t = 1$ we wzorze (6.12), natomiast warunek jednorodności – wstawiając $s = 0$.

Przykład 12

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. O wektorach $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że: $F(u+v+w) = \begin{pmatrix} 4\\4\\0 \end{pmatrix}$, $F(2u+v-w) = \begin{pmatrix} 3\\-1\\-2 \end{pmatrix}$, $F(u-v+2w) = \begin{pmatrix} 1\\7\\3 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$, $F(w)$.

Rozwiązanie. Z warunku liniowości otrzymujemy układ trzech równań wektorowych z trzema niewiadomymi $F(u)$, $F(v)$, $F(w)$:

$$\begin{cases} F(u) + F(v) + F(w) = \begin{pmatrix} 4\\4\\0 \end{pmatrix} \\ 2F(u) + F(v) - F(w) = \begin{pmatrix} 3\\-1\\-2 \end{pmatrix} \\ F(u) - F(v) + 2F(w) = \begin{pmatrix} 1\\7\\3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ (np. metodą podstawiania) otrzymujemy następujące rozwiązanie: $F(u) = \begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} 2\\0\\-1 \end{pmatrix}$, $F(w) = \begin{pmatrix} 1\\3\\1 \end{pmatrix}$.

Fakt 6.41: Obrazy wersorów

Jeśli $m(F) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, to:

$$\begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3 \end{pmatrix} = F(e_1) \qquad \begin{pmatrix} b_1\\b_2\\b_3 \end{pmatrix} = F(e_2) \qquad \begin{pmatrix} c_1\\c_2\\c_3 \end{pmatrix} = F(e_3)$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to obrazy wersorów).

Dowód.

$$F(e_1) = F\left(\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\\a_2\\a_3 \end{pmatrix}$$

Podobnie obliczamy $F(e_2)$ i $F(e_3)$. □

Przykład 13

Wyznacz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) odbicie względem płaszczyzny o równaniu $x = y$,

(b) odbicie względem prostej $\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix}$,

(c) obrót o kąt θ wokół osi Oz.

Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 6.41 wystarczy wyznaczyć obrazy trzech wersorów. Wobec tego macierzami tymi są:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Fakt 6.42: Obraz prostej

Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym, zaś v takim wektorem, że $F(v) \neq 0$. Wówczas:

1) obrazem prostej ℓ o wektorze kierunkowym v jest prosta ℓ' o wektorze kierunkowym $F(v)$,
2) punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ są przeprowadzane na punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ'.

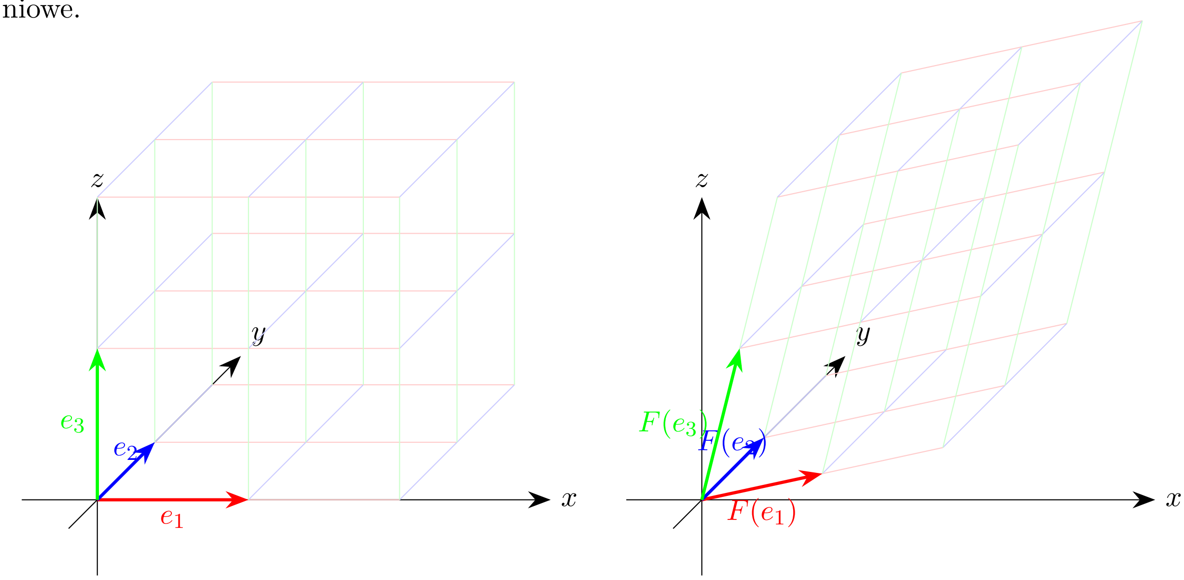
W szczególności obrazem rozmieszczonych w równych odstępach równoległych prostych są rozmieszczone w równych odstępach równoległe proste (o ile tylko obraz wektora kierunkowego jest niezerowy).

Dowód. Niech $X = t \cdot v + P$ będzie równaniem parametrycznym prostej ℓ (gdzie v jest wektorem kierunkowym, a P dowolnym punktem prostej). Wówczas, na mocy warunku liniowości otrzymujemy:

$$F(X) = F(t \cdot v + P) = t \cdot F(v) + F(P)$$

co jest przedstawieniem parametrycznym prostej ℓ' o wektorze kierunkowym $F(v)$ i przechodzącej przez punkt $F(P)$. Co więcej, ponieważ obrazem punktu $t \cdot v + P$ jest punkt $t \cdot F(v) + F(P)$, więc punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ są przeprowadzane na punkty rozmieszczone w równych odstępach na prostej ℓ', podobnie jak w dowodzie Faktu 2.47. $\square$

Z Faktu 6.42 wynika, że obrazem siatki (sześciennej) układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ przez przekształcenie liniowe jest siatka równoległościanów wyznaczona przez obrazy wersorów. W szczególności tłumaczy to, dlaczego obrazy wersorów jednoznacznie wyznaczają przekształcenie liniowe.



Zauważmy również, że każdy z równoległościanów na drugim rysunku ma objętość:

$$|\det(F(e_1), F(e_2), F(e_3))| = |\det m(F)|$$

zaś każdy sześcian na pierwszym rysunku ma objętość 1. Wykorzystując tę obserwację, podobnie jak w dowodzie Faktu 2.49, pokazujemy, że przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skaluje $|\det m(F)|$ razy objętość każdej figury składającej się z dowolnie małych sześcianów. Stosując przejście graniczne[5] otrzymujemy następujący fakt:

[5] Szczegóły tego typu rozumowania pojawią się w ramach Analizy matematycznej 2.

Fakt 6.43: Wyznacznik macierzy przekształcenia (geometrycznie)

Jeśli $F(X) = AX$ jest przekształceniem liniowym $\mathbb{R}^3$, to dla dowolnej figury f zachodzi:

$$V_{F(f)} = |\det A| \cdot V_f$$

gdzie V_f oznacza objętość figury f (tzn. objętości figur skalowane są $|\det A|$ razy).

Interpretacja geometryczna wyznacznika macierzy przekształcenia dotyczy nie tylko wartości bezwzględnej wyznacznika, ale również jego znaku. Stąd następująca definicja:

Definicja 6.44: Zachowywanie orientacji (geometrycznie)

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

1) *zachowuje orientację*, jeśli dla dowolnych niewspółpłaszczyznowych wektorów u, v, w trójki (u, v, w) i $(F(u), F(v), F(w))$ mają jednakowe orientacje,
2) *zmienia orientację*, jeśli dla dowolnych niewspółpłaszczyznowych wektorów u, v, w trójki (u, v, w) i $(F(u), F(v), F(w))$ mają przeciwne orientacje.

Nieformalny sposób rozróżniania przekształceń $\mathbb{R}^3$ zachowujących orientację od tych, które ją zmieniają jest następujący: przekształcenie płaszczyzny zachowuje orientację, jeśli obraz np. prawego buta jest prawym butem (być może przeskalowanym lub nieco zdeformowanym), natomiast zmienia orientację, jeśli obraz prawego buta jest lewym butem (być może przeskalowanym lub nieco zdeformowanym).

Fakt 6.45: Zachowywanie orientacji (algebraicznie)

Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $F(X) = AX$:

1) *zachowuje orientację*, wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A > 0$,
2) *zmienia orientację*, wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A < 0$.

Dowód. Niech u, v, w będą dowolnymi niewspółpłaszczyznowymi wektorami $\mathbb{R}^3$. Zauważmy, że wektory Au, Av, Aw to kolumny macierzy $A \cdot (u, v, w)$ (gdzie druga macierz, to macierz o kolumnach u, v, w). Przekształcenie F zachowuje orientację, gdy znak liczby:

$$\det(A \cdot (u, v, w)) = \det A \cdot \det(u, v, w)$$

jest zgodny ze znakiem liczby $\det(u, v, w)$, a zmienia orientację, gdy znaki te są przeciwne. Stąd widać, że przekształcenie F zachowuje orientację, gdy $\det A > 0$, a zmienia orientację, gdy $\det A < 0$. □

Fakt 6.46: Przeciwobraz i punkty stałe

Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym. Wówczas każdy z poniższych zbiorów jest punktem lub prostą lub płaszczyzną lub $\mathbb{R}^3$ lub zbiorem pustym:

1) zbiór punktów stałych F,
2) przeciwobraz $F^{-1}[v]$ dowolnie wybranego punktu v.

Dowód. Niech F będzie dane wzorem:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Wówczas zbiór punktów stałych to zbiór rozwiązań układu równań (z niewiadomymi x, y, z):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} (a_1-1)x + b_1 y + c_1 z = -p_1 \\ a_2 x + (b_2-1)y + c_2 z = -p_2 \\ a_3 x + b_3 y + (c_3-1)z = -p_3 \end{cases}$$

Zgodnie z Faktem 6.14 zbiorem rozwiązań takiego układu jest punkt, prosta, płaszczyzna, $\mathbb{R}^3$ lub zbiór pusty. Podobnie przedstawiamy przeciwobraz punktu v jako zbiór rozwiązań układu 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi, dochodząc do takiej samej konkluzji. □

Fakt 6.47: Złożenie przekształceń afinicznych

1) Jeśli F i G są przekształceniami afinicznymi $\mathbb{R}^3$, to złożenie $F \circ G$ też jest przekształceniem afinicznym.
2) Jeśli F i G są przekształceniami liniowymi $\mathbb{R}^3$, to złożenie $F \circ G$ też jest przekształceniem liniowym oraz
$$m(F \circ G) = m(F) \cdot m(G)$$

Dowód. (1) Niech $F(X) = AX + v$ oraz $G(X) = BX + w$, gdzie A i B to macierze 3×3, a v i w to wektory w $\mathbb{R}^3$. Na mocy prawa łączności mnożenia macierzy oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania (Fakt 2.6) otrzymujemy:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX + w) = A \cdot (BX + w) + v = (AB)X + (Aw + v)$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem afinicznym.
(2) Niech $F(X) = AX$ oraz $G(X) = BX$, dla pewnych macierzy A i B rozmiaru 3×3. Wówczas dla dowolnego X:

$$(F \circ G)(X) = F(G(X)) = F(BX) = A \cdot (BX) = (AB)X$$

czyli $F \circ G$ jest przekształceniem liniowym o macierzy $A \cdot B = m(F) \cdot m(G)$. □

Fakt 6.48: Odwrotność przekształcenia afinicznego

Niech $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwracalnym przekształceniem $\mathbb{R}^3$. Wówczas:

1) Jeśli F jest przekształceniem afinicznym, to przekształcenie F^{-1} też jest afiniczne.
2) Jeśli F jest przekształceniem liniowym, to przekształcenie F^{-1} też jest liniowe oraz

$$m(F^{-1}) = m(F)^{-1} \tag{6.13}$$

Ponadto przekształcenie liniowe F jest odwracalne wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz $m(F)$ jest odwracalna.

Dowód. (1) Warunek $X' = AX + v$ jest równoważny warunkowi:

$$X = A^{-1}(X' - v) \qquad \text{czyli} \qquad X = A^{-1}X' - (A^{-1}v)$$

czyli jeśli $F(X) = AX + v$ to $F^{-1}(X) = A^{-1}X - (A^{-1}v)$, co oznacza, że jeśli macierz A jest odwracalna, to przekształcenie F^{-1} jest afiniczne. W przypadku, gdy macierz A jest nieodwracalna, istnieje taki wektor $X \neq 0$, dla którego $AX = 0$, czyli przekształcenie F nie jest różnowartościowe, a więc nie jest odwracalne.
(2) Warunek $X' = AX$ jest równoważny warunkowi $X = A^{-1}X'$ czyli jeśli $F(X) = AX$ to $F^{-1}(X) = A^{-1}X$, co oznacza, że jeśli macierz A jest odwracalna, to przekształcenie F^{-1} jest liniowe oraz spełniony jest warunek (6.13). W przypadku, gdy macierz A jest nieodwracalna, przekształcenie F jest nieodwracalne. □

Fakt 6.43 pozwala nam teraz przeprowadzić dowód Faktu 6.13, który ponownie przytaczamy poniżej:

Fakt 6.49: Własności wyznacznika

Dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 3×3 zachodzą warunki:

1) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
2) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, o ile A jest odwracalna.

Dowód. Rozważmy przekształcenia liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorami $F(X) = AX$ i $G(X) = BX$. Wówczas, zgodnie z Faktem 6.47 $(F \circ G)(X) = (AB)X$. Zgodnie z Faktem 6.43 przekształcenia F, G i $F \circ G$ skalują objętości, odpowiednio, $|\det A|$ razy, $|\det B|$ razy i $|\det(AB)|$ razy. Stąd:

$$|\det(AB)| = |\det A| \cdot |\det B|$$

czyli wzór (1) jest prawdziwy z dokładnością do znaku. Zgodność znaków lewej i prawej strony wynika stąd, że złożenie dwóch przekształceń zachowujących orientację lub dwóch przekształceń zmieniających orientację jest przekształceniem zachowującym orientację, natomiast złożenie przekształcenia zachowującego orientację i przekształcenia zmieniającego orientację jest przekształceniem zmieniającym orientację.
Wzór (2) jest wnioskiem ze wzoru (1), gdyż:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$$

skąd otrzymujemy $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. □

Fakt 6.50: Macierz izometrii

Niech A będzie macierzą 3×3. Wówczas następujące warunki są równoważne:

1) A jest macierzą izometrii,
2) kolumny A są parami prostopadłymi wektorami długości 1,
3) A jest odwracalna oraz $A^{-1} = A^{\top}$.

Dowód. Ponieważ izometria zachowuje długości wektorów i kąty między nimi, więc kolumny macierzy izometrii (jako obrazy wersorów) muszą być prostopadłymi wektorami długości 1.

Sprawdzenie, że każda macierz o tej własności jest macierzą izometrii pominiemy. Zauważymy natomiast, że warunek $A^{-1} = A^\top$ można zapisać w postaci:

$$A^\top A = I \qquad \text{czyli} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

co można zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 \end{cases}$$

co jest równoważne stwierdzeniu, że wektory $\left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right)$ są prostopadłymi wektorami jednostkowymi (czyli równoważne warunkowi (2)). $\square$

Rozdział 7

Diagonalizacja macierzy 3×3

7.1 Wektory i wartości własne. Nowy układ współrzędnych

Definicja 7.1: Wektor własny i wartość własna

Wektor własny przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to wektor X spełniający warunek:

$$F(X) = \lambda \cdot X$$

natomiast *wektor własny* macierzy A rozmiaru 3×3, to wektor X spełniający warunek

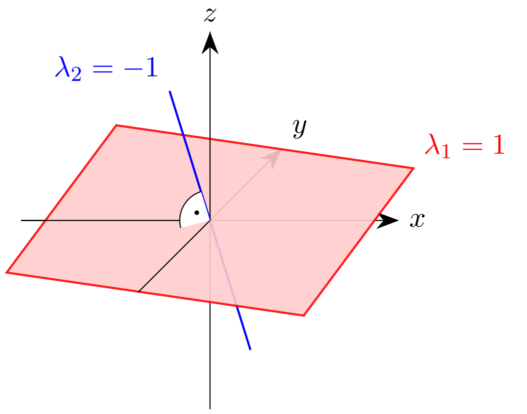
$$AX = \lambda X$$

dla pewnej liczby rzeczywistej λ. W obu przypadkach, jeśli $X \neq 0$, to liczbę λ nazywamy *wartością własną* przekształcenia F lub macierzy A, zaś X *wektorem własnym dla wartości własnej* λ. Wektor $X = 0$ jest wektorem własnym dla każdej wartości własnej λ.

Przykład 1

Wyznacz wartości i wektory własne odbicia S_π względem płaszczyzny π.

Rozwiązanie. Dla dowolnego wektora v_1 na płaszczyźnie π zachodzi $F(v_1) = v_1$, czyli $\lambda_1 = 1$ jest wartością własną przekształcenia, a płaszczyzna π to zbiór wektorów własnych dla λ_1.

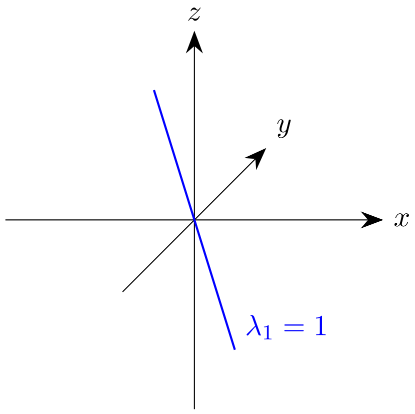


Dla dowolnego wektora v_2 prostopadłego do płaszczyzny π zachodzi $F(v_2) = -v_2$, czyli $\lambda_2 = -1$ jest wartością własną przekształcenia, a prosta prostopadła do π przechodząca przez 0 jest zbiorem wektorów własnych dla λ_2. Jeśli wektor v_3 nie jest równoległy ani prostopadły do π, to wektory v_3 i $F(v_3)$ mają różne kierunki, przekształcenie nie ma zatem więcej wektorów ani wartości własnych.

Przykład 2

Wyznacz wartości i wektory własne obrotu wokół prostej ℓ (przechodzącej przez 0) o kąt θ (gdzie $\theta \neq 0$ i $\theta \neq \pi$).

Rozwiązanie. Każdy punkt prostej ℓ (czyli wektor równoległy do prostej ℓ) jest punktem stałym obrotu, stąd prosta ℓ to zbiór wektorów własnych dla wartości własnej $\lambda = +1$. Obrót wokół ℓ zmienia natomiast kierunek każdego wektora nierównoległego do ℓ, więc przekształcenie nie ma więcej wektorów własnych, ani wartości własnych.



Przykład 3

Wyznacz wartości i wektory własne jednokładności D_k o środku O i skali k.

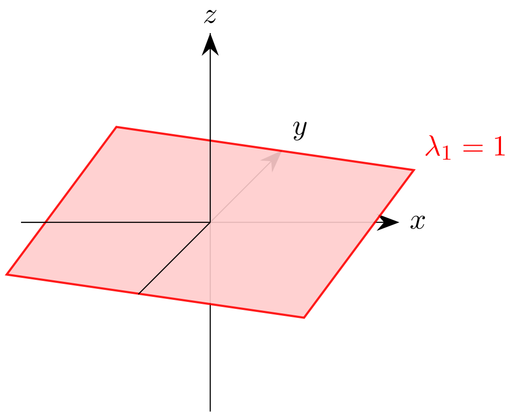
Rozwiązanie. Podobnie jak dla jednokładności na płaszczyźnie, każdy wektor jest wektorem własnym dla wartości własnej k, gdyż dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$D_k(v) = k \cdot v$$

Przykład 4

Wyznacz wartości i wektory własne powinowactwa ścinającego o płaszczyźnie π i wektorze v.

Rozwiązanie. Nietrudno zauważyć, że poza punktami stałymi (czyli wektorami własnymi dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$) każdy wektor zmienia kierunek. Wobec tego jedynymi wektorami własnymi są punkty płaszczyzny π (dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$).



Jeśli mamy podaną macierz przekształcenia liniowego, to wyznaczanie wartości i wektorów własnych można sprowadzić do rozwiązywania równań, jak to pokazuje poniższy fakt.

Fakt 7.2: Wielomian charakterystyczny

1) Wartości własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to pierwiastki *wielomianu charakterystycznego* $\chi_F(\lambda) = \det(m(F) - \lambda I))$ przekształcenia F, czyli rozwiązania równania:
$$\det(m(F) - \lambda I)) = 0$$

2) Wartości własne macierzy $A \in M_{3\times 3}$ to pierwiastki *wielomianu charakterystycznego* $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ macierzy A, czyli rozwiązania równania:
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Dowód. Niech A będzie macierzą przekształcenia F, tzn. $F(X) = AX$. Warunek:
$$F(X) = \lambda X \qquad \text{(w wersji macierzowej } A \cdot X = \lambda X)$$
można zapisać w postaci:
$$(A - \lambda I) \cdot X = 0 \tag{7.1}$$
gdzie $A = m(F)$. Zatem λ jest wartością własną przekształcenia liniowego F (macierzy A) wtedy i tylko wtedy, gdy równanie macierzowe (7.1) ma niezerowe rozwiązanie. Ponieważ wektor $X = 0$ jest rozwiązaniem (7.1) niezależnie od wartości λ, więc szukamy takich λ, dla których (7.1) ma przynajmniej dwa rozwiązania ($X = 0$ i rozwiązanie niezerowe). Równanie (7.1) to niesprzeczny układ 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi o macierzy głównej $(A-\lambda I)$, więc zgodnie z Faktem 6.15 ma więcej niż jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
Wobec tego wartościami własnymi są pierwiastki λ równania $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Przykład 5

Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o wzorze:
$$F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Rozwiązanie. Tym razem, w odróżnieniu od poprzednich przykładów, wygodniej będzie zacząć od wyznaczenia wartości własnych. Zgodnie z Faktem 7.2 wartości własne przekształcenia F, to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:
$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 - (1-\lambda) + (2-\lambda)$$
$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$
czyli liczby $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Wyznaczmy teraz wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$. Zgodnie z definicją, są to rozwiązania równania:
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 3x + y - z = x \\ x + 2y - z = y \\ x + z = z \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu to:

$$\begin{cases} z = y \\ x = 0 \end{cases}$$

czyli wektorami własnymi dla wartości własnej 1 są wektory postaci $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Analogicznie wyznaczamy wektory własne dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ otrzymując $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ x \end{smallmatrix}\right)$ oraz dla wartości własnej $\lambda_3 = 3$ otrzymując $\left(\begin{smallmatrix} 2z \\ z \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Tak więc badane przekształcenie ma 3 wartości własne, a dla każdej z nich prostą wektorów własnych.

Przykład 6

Znajdź wszystkie wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o wzorze:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Rozwiązanie. Wartości własne przekształcenia F, to pierwiastki wielomianu charakterystycznego:

$$\chi_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)^2(2-\lambda)$$

czyli liczby $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$. Rozwiązując odpowiednie układy równań ustalamy, że wektory własne dla wartości własnej $\lambda_1 = 4$ są postaci $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, zaś wektory własne dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ są postaci $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$. Rozważane przekształcenie ma więc 2 wartości własne, a dla każdej z nich prostą wektorów własnych.

Fakt 7.3: Jednoznaczność wartości własnej

Niezerowy wektor własny macierzy $A \in M_{3\times 3}$ (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) przynależy tylko do jednej wartości własnej.

Dowód. Załóżmy (nie wprost), że v jest niezerowym wektorem własnym macierzy A dla dwóch różnych wartości własnych λ_1 i λ_2. Oznacza to, że:

$$\begin{cases} Av = \lambda_1 v \\ Av = \lambda_2 v \end{cases}$$

Stąd

$$\lambda_1 v = \lambda_2 v \quad \text{czyli} \quad (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$

skąd otrzymujemy sprzeczność, gdyż $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ oraz $v \neq 0$. □

Fakt 7.4: Przestrzeń własna

Jeśli λ jest wartością własną macierzy $A \in M_{3\times 3}$ o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), to zbiór wektorów własnych dla λ (nazywany *przestrzenią własną dla* λ) jest albo prostą (przechodzącą przez 0), albo płaszczyzną (przechodzącą przez 0), albo całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

Dowód. Oznaczmy $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$. Zbiór wektorów $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ własnych dla wartości własnej λ to zbiór rozwiązań następującego układu równań (z niewiadomymi x, y i z):

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda x \\ a_2x + b_2y + c_2z = \lambda y \\ a_3x + b_3y + c_3z = \lambda z \end{cases}$$

Po przekształceniu otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + (b_2 - \lambda)y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + (c_3 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

Zbiór rozwiązań takiego układu to (zgodnie z Faktem 6.14) zbiór pusty, punkt, prosta, płaszczyzna lub cała przestrzeń. Ponieważ $x = y = z = 0$ spełnia ten układ równań, a skoro λ jest wartością własną, to układ ma oprócz tego przynajmniej jedno niezerowe rozwiązanie, więc lista możliwych zbiorów rozwiązań to: prosta zawierająca punkt 0, płaszczyzna zawierająca punkt 0 oraz cała przestrzeń. □

Fakt 7.5: Wielomiany stopnia nieparzystego

Każdy wielomian zmiennej rzeczywistej stopnia nieparzystego (w szczególności wielomian trzeciego stopnia) ma przynajmniej jeden pierwiatek rzeczywisty.

Dowód. Zgodnie z Faktem 7.29 nierzeczywiste pierwiastki wielomianu o współczynnikach rzeczywistych można połączyć w pary $(z, \bar{z})$ (uwzględniając krotności). Ponieważ wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami), więc przy n nieparzystym przynajmniej jeden pierwiastek musi być rzeczywisty. □

Wniosek 7.6: Liczba wartości własnych

Macierz $A \in M_{3\times 3}$ o wyrazach rzeczywistych (przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) ma co najmniej 1, a co najwyżej 3 rzeczywiste wartości własne.

Dowód. Wielomian charakterystyczny macierzy $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ to:

$$\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} a_1 - x & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - x & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - x \end{pmatrix}$$

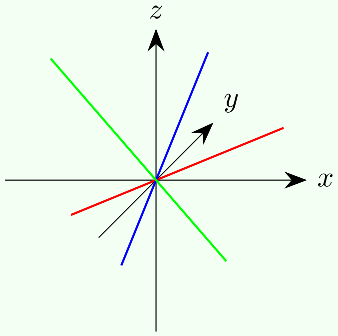
Wobec tego wartości własne macierzy A to pierwiastki wielomianu trzeciego stopnia:

$$\chi_A(x) = (a_1 - x)(b_2 - x)(c_3 - x) + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_1 - x)c_2b_3 - b_1a_2(c_3 - x) - c_1(b_2 - x)a_3$$

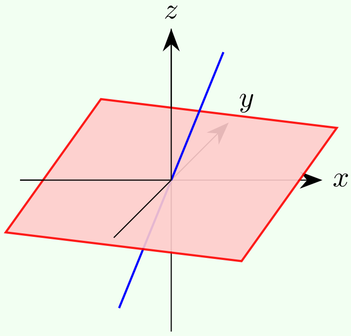
Ponieważ wielomian trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej trzy pierwiastki rzeczywiste, a równocześnie zgodnie z Faktem 7.5 ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, więc macierz A ma co najmniej jedną, ale co najwyżej trzy wartości własne. □

Wniosek 7.7: Wektory własne przekształcenia $\mathbb{R}^3$

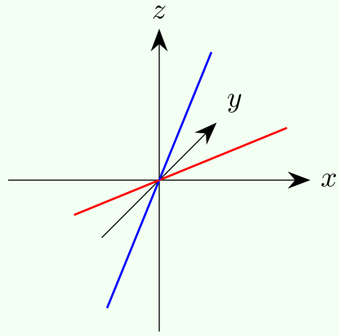
Zbiór wektorów własnych macierzy 3×3 o wyrazach rzeczywistych (przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) jest jednym z poniższych zbiorów:



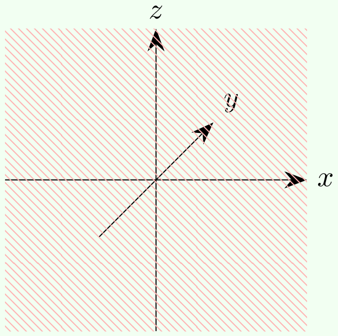
3 wartości własne



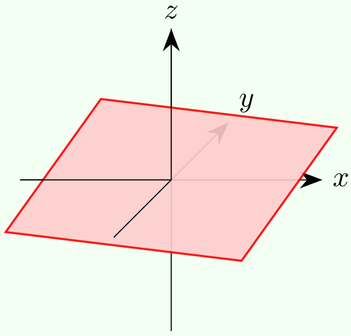
2 wartości własne



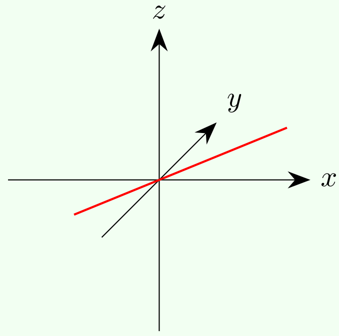
2 wartości własne



1 wartość własna



1 wartość własna



1 wartość własna

Dodatkowo, proste (przestrzenie własne) na pierwszym rysunku nie leżą na jednej płaszczyźnie.

Dowód. Zgodnie z Wnioskiem 7.6 macierz 3×3 o wyrazach rzeczywistych ma 1, 2 lub 3 rzeczywiste wartości własne. Zbiór wektorów własnych dla każdej z tych wartości własnych to (zgodnie z Faktem 7.4) prosta przechodząca przez 0, płaszczyzna przechodząca przez 0 lub cała przestrzeń, przy czym zbiory wektorów własnych dla różnych wartości własnych nie mogą mieć punktów wspólnych inny niż punkt 0 (Fakt 7.3). Wobec tego:

1) jeśli macierz ma tylko 1 wartość własną λ_1, to zbiór jej wektorów własnych dla λ_1 jest prostą przechodzącą przez 0, płaszczyzną przechodząca przez 0 lub całą przestrzenią;
2) jeśli macierz ma 2 wartości własne λ_1 i λ_2, to zbiory wektorów własnych to dwie różne proste przechodzące przez 0 lub płaszczyzna przechodząca przez 0 i nie leżąca na niej prosta przechodząca przez 0 (w każdym innym przypadku część wspólna przestrzeni własnych dla λ_1 i dla λ_2 zawierałaby niezerowy wektor);

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy macierz ma 3 wartości własne λ_1, λ_2 i λ_3. Niech v_1, v_2, v_3 będą niezerowymi wektorami własnymi, odpowiednio, dla λ_1, λ_2, λ_3. Pokażemy, że wektory v_1, v_2, v_3 nie mogą być współpłaszczyznowe. Załóżmy (nie wprost), że jeden z tych wektorów (np. wektor v_3) leży na płaszczyźnie rozpiętej przez wektory v_1 i v_2. Wówczas:

$$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 \tag{7.2}$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, przy czym $\alpha \neq 0$ lub $\beta \neq 0$, bo v_3 jest niezerowy. Z liniowości F dostajemy:

$$F(v_3) = \alpha F(v_1) + \beta F(v_2)$$

a uwzględniwszy fakt, że v_1, v_2 i v_3 są wektorami własnymi dla wartości własnych λ_1, λ_2 i λ_3:

$$\lambda_3 v_3 = \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 \tag{7.3}$$

Podstawiając (7.2) do (7.3) otrzymujemy:

$$\lambda_3(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2$$

czyli

$$\alpha(\lambda_3 - \lambda_1)\cdot v_1 = \beta(\lambda_2 - \lambda_3)\cdot v_2$$

co oznacza, że v_1 i v_2 są współliniowe, wbrew Faktowi 7.3. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że wektory v_1, v_2, v_3 nie leżą na jednej płaszczyźnie. Wobec tego każda z trzech przestrzeni własnych musi być prostą, a ponadto proste te nie leżą na jednej płaszczyźnie.
Stąd możliwe są tylko sytuacje przestawione na rysunkach. Przykłady z początku rozdziału pokazują, że każda z tych sytuacji faktycznie może mieć miejsce. □

Podobnie jak dla macierzy 2×2, potęgowanie macierzy 3×3 wykonuje się najprościej, jeśli macierz zapiszemy w postaci diagonalnej. Własności macierzy diagonalnych rozmiaru 3×3 są podobne do własności macierzy diagonalnych 2×2, a ich dowód pozostawiamy czytelnikowi:

Fakt 7.8: Potęgowanie macierzy diagonalnej

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f oraz dowolnej liczby całkowitej n zachodzą warunki:

1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{pmatrix}$,

2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

W szczególności, $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

Kluczowe twierdzenie dotyczące macierzy 3×3 to twierdzenie o diagonalizacji macierzy:

Twierdzenie 7.9: Diagonalizacja macierzy

Jeśli macierz A rozmiaru 3×3 ma trzy parami różne[1] wartości własne λ, μ i ν, to dla dowolnych niezerowych wektorów własnych $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $w = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$, odpowiednio dla λ, μ, ν zachodzi wzór:

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{gdzie} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \text{ oraz } P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Ponadto, jeśli macierz A jest postaci (7.4), to λ, μ i ν są jej wartościami własnymi, zaś u, v i w jej niewspółpłaszczyznowymi wektorami własnymi dla, odpowiednio, λ, μ i ν.

[1] Twierdzenie jest prawdziwe również, gdy dwie lub trzy z wartości własnych λ, μ, ν są równe (tzn. wielomian charakterystyczny ma podwójny lub potrójny pierwiastek), pod warunkiem, że dla tych wartości własnych można wybrać trzy liniowo niezależne (tzn. niewspółpłaszczyznowe) wektory własne (czyli zachodzi sytuacja z drugiego lub czwartego rysunku z Wniosku 7.7).

Dowód. Niech $u = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right)$, $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ i $w = \left(\begin{smallmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{smallmatrix}\right)$ będą niezerowymi wektorami własnymi odpowiednio dla wartości własnych λ, μ i ν macierzy A, zaś $P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$. Macierz AP jest macierzą 3×3, więc wymnażając ją przez kolejne wersory:

$$AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}$$

$$AP \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu v_1 \\ \mu v_2 \\ \mu v_3 \end{pmatrix}$$

$$AP \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu v_1 \\ \nu v_2 \\ \nu v_3 \end{pmatrix}$$

otrzymujemy, kolejno, pierwszą, drugą i trzecią kolumną macierzy AP. Wobec tego:

$$AP = \begin{pmatrix} \lambda u_1 & \mu v_1 & \nu w_1 \\ \lambda u_2 & \mu v_2 & \nu w_2 \\ \lambda u_3 & \mu v_3 & \nu w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = PD$$

Skoro $AP = PD$, a macierz P jest odwracalna (bo wektory u, v, w, zgodnie z Wnioskiem 7.7 są niewspółpłaszczyznowe), to $A = PDP^{-1}$.
Dla dowodu drugiej części załóżmy, że $A = PDP^{-1}$, czyli $AP = PD$. Wówczas:

$$AP \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = PD \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad A \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

skąd otrzymujemy:

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

czyli u jest wektorem własnym macierzy A dla wartości własnej λ. Podobne sprawdzenie wykonujemy dla wektorów v i w. □

Fakt 7.10: Potęgowanie macierzy

Niech A będzie macierzą 3×3, zaś D i P takimi macierzami 3×3, że P jest odwracalna oraz $A = PDP^{-1}$. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi wzór:

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Dowód. Przeprowadźmy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że dla pewnej wartości $n = k$ zachodzi $A^k = PD^kP^{-1}$. Wówczas dla $n = k + 1$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \cdot A = PD^kP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^k(P^{-1} \cdot P)DP^{-1} \\ &= P(D^kID)P^{-1} = P(D^kD)P^{-1} = P(D^{k+1})P^{-1} \end{aligned}$$

□

Przykład 7

Obliczyć A^{40}, gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny macierzy A: $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 14\lambda + 8$ oraz jej wartości własne: $\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1$. Każdej wartości własnej odpowiada cała prosta wektorów własnych macierzy A. Wybieramy przykładowe (niezerowe) wektory własne:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i diagonalizujemy macierz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{40} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{40} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{40} & 2^{79} - 2^{39} & 2^{79} - 2^{39} \\ 0 & \frac{1}{3}(2^{81} + 1) & \frac{1}{3}(2^{81} - 2) \\ 0 & \frac{1}{3}(2^{80} - 1) & \frac{1}{3}(2^{80} + 2) \end{pmatrix}$$

Przykład 8

Wyznaczyć macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) odbicie S_π względem płaszczyzny π o równaniu $x + 2y + 3z = 0$,

(b) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ o postaci krawędziowej: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

Rozwiązanie. (a) Wartości własne odbicia S_π to $\lambda_1 = 1$ (przestrzeń własna dla λ_1 to płaszczyzna o równaniu $x+2y+3z = 0$) i $\lambda_2 = -1$ (przestrzeń własna dla λ_2 to prosta o równaniu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$). Wobec tego możemy wybrać trzy liniowo niezależne (niewspółpłaszczyznowe) wektory własne, np. $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ i $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ dla wartości własnej $\lambda_2 = -1$. Diagonalizacja szukanej macierzy wygląda więc następująco:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) Wartości własne odbicia S_ℓ to $\lambda_1 = 1$ (przestrzeń własna dla λ_1 to prosta o równaniu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$) i $\lambda_2 = -1$ (przestrzeń własna dla λ_2 to płaszczyzna o równaniu $x+2y+3z = 0$). Wobec tego możemy wybrać trzy liniowo niezależne (niewspółpłaszczyznowe) wektory własne, np. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ dla wartości własnej $\lambda_2 = -1$. Diagonalizacja szukanej macierzy wygląda więc następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Definicja 7.11: Układ współrzędnych

Układem współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ nazwiemy trzy proste (nazywane osiami x, y, z) nie leżące na jednej płaszczyźnie i przecinające się w jednym punkcie (nazywanym początkiem układu współrzędnych i oznaczanym O) oraz niezerowe wektory e'_1, e'_2, e'_3 równoległe, odpowiednio, do osi x, y, z, nazywane *wersorami* i wyznaczające jednostkę na każdej z osi. *Współrzędnymi wektora (punktu)* v w nazywamy takie liczby x', y' i z', że:

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3$$

W przypadku równoczesnego posługiwania się współrzędnymi w dwóch różnych układach współrzędnych, będziemy stosować oznaczenia $[v]_{stary}$ i $[v]_{nowy}$, znane z Rozdziału 3.2. Podobnie jak w Rozdziale 3.2 będziemy rozważać jedynie sytuację, gdy początek układu współrzędnych O jest taki sam zarówno w nowym, jak i w starym układzie współrzędnym, tzn.

$$[O]_{stary} = [O]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$$

Pozwala to pozostać przy dotychczasowej konwencji utożsamiania punktów i wektorów (tzn. $\overrightarrow{OA} = A$), gdyż początek układu współrzędnych (będący domyślnym początkiem wektora) nie zależy od wyboru układu.

Przykład 9

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$ (tzn. $[v]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$),

(b) stare współrzędne wektora w, takiego że $[w]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. (a) Szukamy nowych współrzędnych, tzn. takich x', y' i z', że

$$v = x'e'_1 + y'e'_2 + z'e'_3$$

Oznacza to rozwiązywanie układu równań:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = x'\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + y'\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + z'\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} 1 = 2x' + y' + 3z' \\ 2 = x' + y' + z' \\ 0 = y' + 2z' \end{cases}$$

skąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ z' = -1 \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{nowy} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(b) Skoro nowe współrzędne wektora w to 4, 2 i 1, to:

$$w = 4e'_1 + 2e'_2 + e'_3 = 4\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\7\\4\end{pmatrix}$$

czyli

$$[w]_{stary} = \begin{pmatrix}13\\7\\4\end{pmatrix}$$

Fakt 7.12: Zamiana współrzędnych (wektor)

Jeśli e_1', e_2' i e_3' są wersorami nowego układu współrzędnych, to dla dowolnego wektora v zachodzi:

$$[v]_{stary} = P \cdot [v]_{nowy} \tag{7.5}$$

gdzie P jest macierzą, której kolumnami są stare współrzędne nowych wersorów, tzn.

$$P = ([e_1']_{stary}, [e_2']_{stary}, [e_3']_{stary})$$

Macierz P nazywamy *macierzą zamiany współrzędnych.*

Dowód. Wektor v można zapisać w postaci kombinacji liniowej starych wersorów:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3, \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{stary} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

oraz w postaci kombinacji liniowej nowych wersorów:

$$v = x'e_1' + y'e_2' + z'e_3', \qquad \text{czyli} \qquad [v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Jeśli oznaczymy stare współrzędne nowych wersorów jak następuje:

$$[e_1']_{stary} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad e_1' = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$[e_2']_{stary} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad e_2' = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$[e_3']_{stary} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad e_3' = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

to

$$\begin{aligned} v &= x'e_1' + y'e_2' + z'e_3' \\ &= x'(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + y'(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + z'(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \\ &= (x'a_1 + y'b_1 + z'c_1)e_1 + (x'a_2 + y'b_2 + z'c_2)e_2 + (x'a_3 + y'b_3 + z'c_3)e_3 \end{aligned}$$

Zatem stare współrzędne wektora v to:

$$[v]_{stary} = \begin{pmatrix} x'a_1 + y'b_1 + z'c_1 \\ x'a_2 + y'b_2 + z'c_2 \\ x'a_3 + y'b_3 + z'c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \cdot [v]_{nowy}$$

□

Rozważmy jeszcze raz Przykład 1, tym razem opierając jego rozwiązanie na wzorze (7.5)

Przykład 10

Dany jest nowy układ współrzędnych, którego wersorami są wektory $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz:

(a) nowe współrzędne wektora $v = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$ (tzn. $[v]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$),

(b) stare współrzędne wektora w, takiego że $[w]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}4\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Rozwiązanie. Wersory nowego układu współrzędnych to $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$, co oznacza:

$$[e'_1]_{stary} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad [e'_2]_{stary} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad [e'_3]_{stary} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

Wobec tego macierz P z Faktu 7.12 ma postać:

$$P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Stąd, zgodnie z Faktem 7.12, otrzymujemy:

(a) $[v]_{stary} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot [v]_{nowy}$, skąd

$$[v]_{nowy} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1} \cdot [v]_{stary} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\-2 & 4 & 1\\1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(b) $[w]_{stary} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot [w]_{nowy} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\7\\4\end{pmatrix}$

Przykład 11

Wersorami nowego układu współrzędnych są wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz:

(a) w nowych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w starych współrzędnych ma równanie $x + y + 2z + 3 = 0$,

(b) w starych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w nowych współrzędnych ma równanie $2x' - y' + z' = 0$.

Rozwiązanie. (a) Zgodnie ze wzorem (7.5) mamy:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 0\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \qquad \text{czyli} \qquad \begin{cases} x = x' + y' + z' \\ y = x' - 2y' \\ z = x' + y' - z' \end{cases}$$

Stąd:

$$x + y + 2z + 3 = (x' + y' + z') + (x' - 2y') + 2(x' + y' - z') + 3 = 4x' + y' - z' + 3$$

czyli równanie płaszczyzny to $4x' + y' - z' + 3 = 0$.

(b) Wyznaczając z układu równań z punktu (a) współrzędne x', y', z' otrzymujemy:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \\ y' = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z \end{cases}$$

Wobec tego:

$$2x' - y' + z' = 2(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{3}z) - (\tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{6}z) + (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}z) = x + y$$

czyli równanie płaszczyzny to $x + y = 0$.

Jeśli zmieniamy układ współrzędnych, to zmianie ulegną również macierze przekształceń liniowych. Dla rozróżnienia macierzy przekształcenia liniowego F w starym i nowym układzie współrzędnych, będziemy je oznaczać, odpowiednio, $m_{stary}(F)$ i $m_{nowy}(F)$.

Definicja 7.13: Macierz przekształcenia (stare i nowe współrzędne)

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Macierzą F w starym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{stary}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{stary} = m_{stary}(F) \cdot [X]_{stary} \tag{7.6}$$

Macierzą F w nowym układzie współrzędnych nazywamy macierz $m_{nowy}(F)$ spełniającą dla dowolnego wektora X warunek:

$$[F(X)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [X]_{nowy} \tag{7.7}$$

Fakt 7.14: Obrazy wersorów (nowych)

Jeśli $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ jest macierzą przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w (nowym) układzie współrzędnych o wersorach e'_1, e'_2 i e'_3, to:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = [F(e'_1)]_{nowy} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = [F(e'_2)]_{nowy} \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = [F(e'_3)]_{nowy}$$

(tzn. kolumny macierzy przekształcenia to nowe współrzędne obrazów nowych wersorów).

Dowód.

$$[F(e'_1)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [e'_1]_{nowy} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$[F(e'_2)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [e'_2]_{nowy} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$[F(e'_3)]_{nowy} = m_{nowy}(F) \cdot [e'_3]_{nowy} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

□

Powyższa obserwacja pozwala uogólnić Fakt 6.41, mówiący, że przekształcenie liniowe jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy wszystkich trzech wersorów, zastępując trzy wersory dowolnymi trzema liniowo niezależnymi wektorami:

Wniosek 7.15: Obrazy trzech liniowo niezależnych wektorów

Przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^3$ jest jednoznacznie wyznaczone przez obrazy dowolnych trzech **liniowo niezależnych** wektorów, tzn. jeśli dane są liniowo niezależne wektory u, v, w oraz dowolne wektory u', v', w', to istnieje **dokładnie jedno** przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że

$$F(u) = u' \qquad F(v) = v' \qquad F(w) = w'$$

Dowód. Rozważając nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = u$, $e_2' = v$, $e_3' = w$ otrzymujemy macierz przekształcenia:

$$m_{nowy}(F) = (u', v', w')$$

co oznacza, że przekształcenie jest jednoznacznie wyznaczone. □

Operowanie macierzami przekształceń w nowych i starych współrzędnych bardzo upraszcza następujący fakt:

Fakt 7.16: Zamiana współrzędnych (macierz przekształcenia)

Niech e_1', e_2' i e_3' będą wersorami nowego układu współrzędnych, zaś P macierzą zamiany współrzędnych (tzn. $P = ([e_1']_{stary}, [e_2']_{stary}, [e_3']_{stary})$). Wówczas dla dowolnego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zachodzi wzór:

$$m_{stary}(F) = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1} \tag{7.8}$$

Dowód. Oznaczmy $A = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1}$. Chcemy pokazać, że jest to macierz F w starym układzie współrzędnych, tzn. dla dowolnego $v \in \mathbb{R}^3$ zachodzi:

$$[F(v)]_{stary} = A \cdot [v]_{stary}$$

Macierz P jest macierzą zamiany współrzędnych, więc dla dowolnego $X \in \mathbb{R}^3$ zachodzi:

$$[X]_{stary} = P \cdot [X]_{nowy}, \quad \text{oraz} \quad P^{-1}[X]_{stary} = [X]_{nowy}$$

Stąd:

$$A \cdot [v]_{stary} = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1}[v]_{stary} = P \cdot m_{nowy} \cdot (F)[v]_{nowy} = P \cdot [F(v)]_{nowy} = [F(v)]_{stary}$$

□

Przykład 12

Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $e_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w nowym układzie współrzędnych to $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starym układzie współrzędnych.

(b) Macierz przekształcenia liniowego $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w starym układzie współrzędnych to

$m_{stary}(G) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz G w nowym układzie współrzędnych.

Rozwiązanie. Macierz zamiany współrzędnych to $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Zgodnie z (7.8):

$$m_{stary}(F) = P \cdot m_{nowy}(F) \cdot P^{-1}$$

czyli

$$m_{stary}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ 6 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

oraz

$$m_{stary}(G) = P \cdot m_{nowy}(G) \cdot P^{-1}$$

skąd otrzymujemy:

$$m_{nowy}(G) = P^{-1} \cdot m_{stary}(G) \cdot P$$

czyli

$$m_{nowy}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Przykład 13

Napisz macierz obrotu R o kąt $60°$ wokół prostej o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Rozwiązanie. W poprzednich rozdziałach wyprowadziliśmy wzór na obrót wokół osi Oz. Aby skorzystać z tego wzoru, wprowadzimy taki nowy układ współrzędych, by rozważany obrót był obrotem wokół osi Oz'. Nowy układ współrzędnych musi być prostokątny (wersory muszą być parami prostopadłe) i nowe wersory muszą być tej samej długości. Przyjmujemy:

$$e_3' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad e_1' = e_2' \times e_3' = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wobec tego, zgodnie z Faktem 7.16, otrzymujemy:

$$m_{stary}(R) = P \cdot m_{nowy}(R) \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° & 0 \\ \sin 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

7.2 Twierdzenie spektralne. Wielomiany

Wielomiany rzeczywiste

Rozdział rozpoczniemy od rozważenia własności wielomianów rzeczywistych (tzn. wielomianów o współczynnikach będących liczbami rzeczywistymi), aczkolwiek wszelkie omawiane w tym miejscu własności w naturalny sposób uogólniają się również na wielomiany zespolone.

Dane są wielomiany $W(x) = x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1$ przez wielomian $P(x) = x^2 + x - 1$. Wykonując dzielenie wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & x^3 & -\,2x^2 & +\,2x & -\,5 & \\
\hline
x^5 & -\,x^4 & -\,x^3 & -\,x^2 & +\,2x & +\,1 & : \; x^2 + x - 1 \\
-\,x^5 & -\,x^4 & +\,x^3 & & & & \\
\cline{1-3}
 & -\,2x^4 & & -\,x^2 & +\,2x & +\,1 & \\
 & 2x^4 & +\,2x^3 & -\,2x^2 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 2x^3 & -\,3x^2 & +\,2x & +\,1 & \\
 & & -\,2x^3 & -\,2x^2 & +\,2x & & \\
\cline{3-5}
 & & & -\,5x^2 & +\,4x & +\,1 & \\
 & & & 5x^2 & +\,5x & -\,5 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 9x & -\,4 &
\end{array}
$$

otrzymujemy w wyniku iloraz $A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$ i resztę $R(x) = 9x - 4$, co możemy zapisać jako:

$$W(x) = A(x) \cdot P(x) + R(x)$$

czyli

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^3 - 2x^2 + 2x - 5)(x^2 + x - 1) + (9x - 4)$$

Definicja 7.17: Podzielność wielomianów

Wielomian $W(x)$ nazywamy *podzielnym* przez wielomian $P(x)$ (co oznaczamy $P(x)|W(x)$), jeśli istnieje taki wielomian $A(x)$, że

$$W(x) = A(x) \cdot P(x)$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Przykład 1

Sprawdź, czy wielomian $W(x) = x^6 + 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 1$

Rozwiązanie. Wykonując dzielenie wielomianów otrzymujemy:

$$x^6 + 1 = (x^4 - x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

czyli wielomian W jest podzielny przez wielomian P.

Fakt 7.18: Dzielenie wielomianów z resztą

Dla dowolnych wielomianów $W(x)$ i $P(x)$ istnieją takie wielomiany $A(x)$ oraz $R(x)$, że:

$$W(x) = A(x) \cdot P(x) + R(x)$$

oraz stopień wielomianu R jest mniejszy niż stopień wielomianu P. Wielomian A nazywamy *ilorazem*, a wielomian R *resztą* z dzielenia wielomianu W przez wielomian P. W szczególności, wielomian W jest podzielny przez wielomian P wtedy i tylko wtedy, gdy reszta R jest wielomianem zerowym.

Dowód. Wykonywanie algorytmu dzielenia wielomianów kończy się w momencie, gdy pozostały do dzielenia wielomian ma stopień mniejszy niż wielomian P, stąd stopień reszty R jest mniejszy niż stopień dzielnika P. □

Przykład 2

Sprawdź, czy wielomian $W(x) = x^5 + 1$ jest podzielny przez wielomian $P(x) = x^2 + 1$
Rozwiązanie. Wykonując dzielenie wielomianów otrzymujemy iloraz $A(x) = x^3 - x$ i resztę $R(x) = x + 1$, tzn.

$$x^5 + 1 = (x^3 - x) \cdot (x^2 + 1) + (x + 1)$$

czyli wielomian W nie jest podzielny przez wielomian P.

Szczególnie ważne jest badanie podzielności wielomianów przez wielomiany pierwszego stopnia, gdyż ma ono bezpośredni związek z wyznaczaniem pierwiastków wielomianu, zgodnie z Twierdzeniem Bezouta:

Twierdzenie 7.19: Twierdzenie Bezouta

Dany jest wielomian $W(x)$ oraz liczba a. Wówczas: $W(a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $A(x)$, że $W(x) = (x - a) \cdot A(x)$ (tzn. wielomian $(x - a)$ jest dzielnikiem wielomianu $A(x)$).

Dowód. Dzieląc wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x) = x - a$ otrzymujemy iloraz $A(x)$ i resztę $R(x)$, czyli:

$$W(x) = A(x) \cdot (x - a) + R(x)$$

Zgodnie z Faktem 7.18 stopień wielomianu $R(x)$ (reszty) jest mniejszy od stopnia wielomianu $x - a$ (który wynosi 1), więc wielomian $R(x) = r$ jest wielomianem stałym. Wobec tego dla dowolnej wartości x zachodzi równość:

$$W(x) = A(x) \cdot (x - a) + r$$

gdzie a i r to pewne ustalone liczby. Podstawiając $x = a$ otrzymujemy:

$$W(a) = r$$

czyli wartość wielomianu W w punkcie a jest równa reszcie z dzielenia $W(x)$ przez $(x - a)$. Stąd $W(a) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x)$ dzieli się bez reszty (tzn. jest podzielny) przez wielomian $(x - a)$. □

Wniosek 7.20: Rozkład wielomianu na czynniki

Jeśli $a_1, \ldots, a_n$ są (parami różnymi) pierwiastkami wielomianu W, to:

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \cdot A(x)$$

dla pewnego wielomianu A.

Dowód. Prowadzimy indukcję względem n. Dla $n = 1$ jest to bezpośredni wniosek z Twierdzenia Bezouta. Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $n = k$ i rozważmy wielomian W mający pierwiastki $a_1, \ldots, a_{k+1}$. Z założenia indukcyjnego:

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k) \cdot A(x)$$

dla pewnego wielomianu A. Podstawiając $x = a_{k+1}$ i korzystając z faktu, że jest to pierwiastek wielomianu W otrzymujemy:

$$0 = W(a_{k+1}) = (a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2) \cdot \ldots \cdot (a_{k+1} - a_k) \cdot A(a_{k+1})$$

Ponieważ $a_1, \ldots, a_{k+1}$ są parami różne, więc $A(a_{k+1}) = 0$, czyli zgodnie z Twierdzeniem Bezouta:

$$A(x) = (x - a_{k+1}) \cdot B(x)$$

dla pewnego wielomianu B. Stąd:

$$W(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)(x - a_{k+1}) \cdot B(x)$$

□

Powyższy wniosek stanowi motywację dla następującej definicji pierwiastka wielokrotnego:

Definicja 7.21: Krotność pierwiastka

Niech a będzie pierwiastkiem wielomianu W. *Krotnością* pierwiastka a nazywamy maksymalną liczbę całkowitą k, dla której istnieje wielomian A taki, że:

$$W(x) = (x - a)^k \cdot A(x) \tag{7.9}$$

Zgodnie z Twierdzeniem Bezouta wynikają dwa wnioski:

1. każdy pierwiastek wielomianu jest przynajmniej jednokrotny,
2. jeśli wielomian W ma k-krotny pierwiastek a, to wielomian A we wzorze (7.9) nie ma już pierwiastka a.

Wniosek 7.22: Liczba pierwiastków wielomianu (rzeczywistych)

Wielomian stopnia n o współczynnikach rzeczywistych ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami).

Dowód. Jeśli liczby $a_1, \ldots, a_k$ są pierwiastkami wielomianu W, a ich krotności wynoszą, odpowiednio, $s_1, \ldots, s_k$, to:

$$W(x) = (x - a_1)^{s_1}(x - a_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{s_k} \cdot A(x)$$

Porównując stopnie[2] wielomianów po lewej i po prawej stronie równości otrzymujemy:

$$n = \deg W = s_1 + \cdots + s_k + \deg A \geq s_1 + \cdots + s_k$$

□

Wyznaczanie pierwiastków konkretnego wielomianu rozpoczniemy od najprostszego nietrywialnego przypadku, czyli wielomianu stopnia 2.

Fakt 7.23: Równanie kwadratowe

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ ma dwa pierwiastki:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = b^2 - 4ac \tag{7.10}$$

gdy $\Delta > 0$. W przypadku, gdy $\Delta = 0$, wzór (7.10) opisuje jeden dwukrotny pierwiastek[3]. Jeśli $\Delta < 0$, równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Dowód. Wielomian $ax^2 + bx + c$ można przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

Stąd

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

W przypadku $\Delta = 0$ mamy $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (podwójny pierwiastek). □

Wyznaczanie pierwiastków wielomianów stopnia 3 i wyższych jest znacznie bardziej skomplikowane i wykracza poza ramy niniejszego skryptu. Przedstawimy jedynie metodę, która pozwala „zgadnąć" pierwiastki wielomianu, jeśli są one liczbami wymiernymi. Stosuje się ona wyłącznie do wielomianów o współczynnikach **całkowitych**.

Fakt 7.24: Pierwiastki wymierne wielomianu

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach **całkowitych**. Wówczas każdy pierwiastek wymierny wielomianu W jest postaci $x = \frac{p}{q}$, gdzie p i q to liczby całkowite względnie pierwsze spełniające warunek:

$$q | a_n \qquad \text{oraz} \qquad p | a_0$$

Ponieważ równanie wielomianowe o współczynnikach wymiernych można przekształcić do równania wielomianowego o współczynnikach całkowitych, np.

$$\tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}x^2 + x - \tfrac{1}{5} = 0$$

[2]Stopień wielomianu W oznaczamy $\deg W$ (z ang. *degree*).

[3]Pełne wyjaśnienie pojęcia *krotności* pierwiastka podane jest w Definicji 7.21.

można przekształcić do postaci:

$$45x^3 + 10x^2 + 30x - 6 = 0$$

więc Fakt 7.24 pozwala znajdować również wymierne pierwiastki wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Dowód. Każdy pierwiastek wymierny x (podobnie jak każdą liczbę wymierną) można zapisać w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q to liczby całkowite względnie pierwsze. Skoro $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu W, to $W\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, czyli:

$$0 = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0$$

co (mnożąc stronami przez q^n) można przekształcić do postaci:

$$0 = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n$$

Liczba p jest dzielnikiem lewej strony równości oraz wszystkich składników prawej strony innych niż a_0q^n. Stąd również składnik a_0q^n jest podzielny przez p, co wobec względnej pierwszości p i q daje $p|a_0$. Podobnie liczba q jest dzielnikiem lewej strony równości oraz wszystkich składników prawej strony innych niż a_np^n. Stąd $q|a_np^n$, co wobec względnej pierwszości p i q daje $q|a_n$. □

Przykład 3

Uzasadnij, że wielomian $W(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 3$ nie ma żadnych pierwiastków wymiernych.
Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 7.24 jedynymi „kandydatami” na pierwiastki wymierne wielomianu W są ułamki $\frac{p}{q}$, gdzie $q|1$ (czyli $q = \pm 1$) oraz $p|(-3)$ (czyli $p = \pm 1$ lub $p = \pm 3$). Stąd jedyni „kandydaci” na pierwiastki wymierne to 3, 1, -1, -3. Nietrudno sprawdzić, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu W. Wobec tego wszystkie pierwiastki wielomianu W są liczbami niewymiernymi.

Przykład 4

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8x + 2$
Rozwiązanie. Zgodnie z Faktem 7.24 pierwiastki wymierne wielomianu (jeśli istnieją) są postaci $\frac{p}{q}$, gdzie $q|3$ (czyli $q = \pm 3$ lub $q = \pm 1$) oraz $p|2$ (czyli $p = \pm 2$ lub $p = \pm 1$). Należy więc rozważyć następujące liczby: ± 2, ± 1, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$. Nietrudno sprawdzić, że jedynie liczba $\frac{1}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu W. Wobec tego, zgodnie z Twierdzeniem Bezouta, wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x - \frac{1}{3})$. Wykonując dzielenie otrzymujemy:

$$W(x) = (x - \tfrac{1}{3})(3x^2 + 6x - 6)$$

Pierwiastki wielomianu $3x^2 + 6x - 6$ potrafimy znaleźć ze wzoru (7.10):

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 108$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{108}}{6} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Wobec tego pierwiastki wielomianu W to liczby: $\frac{1}{3}$, $-1 + \sqrt{3}$, $-1 - \sqrt{3}$.

Czasami nie potrzebujemy pełnej informacji o wartościach pierwiastków wielomianu, a jedynie pewne ich własności, np. znaki pierwiastków. Uzyskanie takiej częściowej informacji może być prostsze przy użyciu tzn. wzorów Viete'a:

Fakt 7.25: Wzory Viete'a (wielomian drugiego stopnia)

Jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu kwadratowego $W(x) = ax^2+bx+c$, to spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dowód. Skoro x_1 i x_2 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, którego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi a, to rozkładając wielomian na czynniki otrzymujemy:

$$W(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Wymnażając dostajemy:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + (ax_1x_2)$$

Ponieważ dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowe odpowiednie współczynniki, więc:

$$\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases}$$

skąd:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

□

Przykład 5

Wyznacz znaki pierwiastków wielomianu $W(x) = 2x^2 + 9x + 7$.
Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorami Viete'a, pierwiastki x_1 i x_2 wielomianu W spełniają warunki:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{9}{2} \\ x_1x_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że x_1 i x_2 są tego samego znaku (oba dodatnie albo oba ujemne), a łącząc to z pierwszym równaniem wnioskujemy, że $x_1, x_2 > 0$.

Wzory Viete'a można uogólnić na wielomiany wyższych stopni:

Fakt 7.26: Wzory Viete'a (wielomian trzeciego stopnia)

Jeśli x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia $W(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, to spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Dowód. Skoro x_1, x_2 i x_3 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, którego współczynnik przy najwyższej potędze wynosi a, to rozkładając wielomian na czynniki otrzymujemy:

$$W(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Wymnażając dostajemy:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - a(x_1x_2x_3)$$

Ponieważ dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają jednakowe odpowiednie współczynniki, więc:

$$\begin{cases} b = -a(x_1 + x_2 + x_3) \\ c = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ d = -a(x_1x_2x_3) \end{cases}$$

skąd:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

□

Wielomiany zespolone

Wszystkie fakty podane w części rozdziału zatytułowanej *Wielomiany rzeczywiste* pozostają prawdziwe również w odniesieniu do wielomianów zespolonych. Warto jedynie odnotować następujące uwagi:

1. Fakt 7.24 dotyczy wielomianów o współczynnikach całkowitych, więc w żaden sposób nie zmienia swojej postaci przy rozważaniu wielomianów zespolonych.

2. Dla liczb zespolonych $\sqrt{\Delta}$ jest niejednoznaczny (ma dwie wartości) co powoduje pewien problem z użyciem wzoru (7.10). Ponieważ jednak zgodnie z Faktem 4.11 dwie wartości $\sqrt{\Delta}$ to liczby przeciwne, a we wzorze (4.14) występuje $\pm\sqrt{\Delta}$, więc wybór wartości pierwiastka nie ma wpływu na ostateczny wynik.

3. Wniosek 7.22 pozostaje prawdziwy, jeśli słowa *rzeczywistych* zamienimy na *zespolonych.* Prawdziwy jest jednak znacznie mocniejszy wynik, zwany Zasadniczym Twierdzeniem Algebry (Twierdzenie 4.15, powtórzone poniżej jako Twierdzenie 7.27).

Twierdzenie 7.27: Zasadnicze twierdzenie algebry

Wielomian stopnia n o współczynnikach zespolonych ma **dokładnie** n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami). Innymi słowy: wielomian zespolony W można rozłożyć na iloczyn czynników liniowych, tzn.

$$W(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

gdzie $z_1, \dots, z_n$ to (niekoniecznie różne) pierwiastki wielomianu W, zaś a to pewna (niezerowa) liczba zespolona.

Dowód Zasadniczego Twierdzenia Algebry wykracza poza ramy niniejszego skryptu.

Spośród wszystkich wielomianów zespolonych, najczęściej spotykać się będziemy z wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Traktowanie takich wielomianów jako *wielomianów zespolonych* oznacza, że jako pierwiastki dopuszczamy dowolne liczby zespolone (a nie tylko rzeczywiste). Przy badaniu takich wielomianów bardzo ważna jest operacja sprzężenia liczby zespolonej (Definicja 4.16).

Fakt 7.28: Własności sprzężenia

Dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzą następujące własności:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ oraz $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ oraz $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$
3) $\overline{(z_1)^n} = (\bar{z}_1)^n$, dla dowolnej liczby naturalnej n.

Dowody tych prostych własności pozostawiamy czytelnikowi.

Fakt 7.29: Nierzeczywiste pierwiastki rzeczywistego wielomianu

Jeśli liczba zespolona $z_0 = a + bi$ jest pierwiastkiem wielomianu W o współczynnikach **rzeczywistych**, to liczba zespolona $\bar{z}_0 = a - bi$ też jest pierwiastkiem W. Ponadto krotności pierwiastków z_0 i $\bar{z}_0$ są jednakowe.

Dowód. Niech $W(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, gdzie $a_0, \ldots, a_n$ to liczby rzeczywiste. Zgodnie z założeniem:

$$0 = a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0$$

Sprzęgając obie strony równania i korzystając z Faktu 7.28 otrzymujemy:

$$0 = \overline{a_n z_0^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \bar{a}_n \cdot (\bar{z}_0)^n + \cdots + \bar{a}_1 \cdot \bar{z}_0 + \bar{a}_0$$

Ponieważ liczby $a_1, \ldots, a_n$ są rzeczywiste, więc $\bar{a}_i = a_i$, dla $i = 1, \ldots, n$, skąd:

$$0 = a_n (\bar{z}_0)^n + \cdots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = W(\bar{z}_0)$$

czyli $\bar{z}_0$ też jest pierwiastkiem wielomianu W. Dla uzasadnienia równych krotności pierwiastków z_0 i $\bar{z}_0$ zauważmy, że:

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - a - bi)(z - a + bi) = (z - a)^2 - (bi)^2 = z^2 = 2az + (a^2 + b^2)$$

jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wobec tego:

$$W(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0) \cdot A(z)$$

gdzie wielomian A jest również wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Stąd, przy pomocy indukcji matematycznej, pokazujemy, że w rozkładzie na czynniki liniowe wielomianu $W(z)$ jest jednakowa liczba czynników $z - z_0$ i czynników $z - \bar{z}_0$. $\square$

Przykład 6

Rozłożyć wielomian $W(z) = z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 10z + 25$ na iloczyn wielomianów zespolonych pierwszego stopnia, wiedząc, że liczba $1 + 2i$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Rozwiązanie. Ponieważ W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, więc zgodnie z Faktem 7.29 skoro $1+2i$ jest jego pierwiastkiem, to $\overline{1 + 2i} = 1 - 2i$ też jest jego pierwiastkiem. Wobec tego W dzieli się przez wielomian $(z - (1+2i))(z - (1-2i)) = z^2 - 2z + 5$. Wykonując dzielenie otrzymujemy:

$$W(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 4z + 5)$$

Żaden z czynników kwadratowych nie ma pierwiastków rzeczywistych, natomiast nad liczbami zespolonymi otrzymujemy rozkład:

$$W(z) = (z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z - (-2 + i))(z - (-2 - i))$$

Wniosek 7.30: Zasadnicze twierdzenie algebry nad $\mathbb{R}$

Dowolny wielomian rzeczywisty można rozłożyć na iloczyn takich (rzeczywistych) wielomianów, z których każdy jest wielomianem liniowym lub wielomianem kwadratowym.

Dowód. Prowadzimy dowód indukcyjny ze względu na stopień wielomianu. Wielomian stopnia 1 w oczywisty sposób spełnia tezę. Załóżmy, że wszystkie wielomiany stopnia k lub mniejszego rozkładają się na iloczyn wielomianów stopnia 1 i 2. Niech W będzie wielomianem stopnia $k+1$ (o współczynnikach rzeczywistych). Zgodnie z Zasadniczym Twierdzeniem Algebry ma on pierwiastek zespolony $z = a + bi$.
Jeśli $b = 0$ (tzn. pierwiastek z jest liczbą rzeczywistą), to zgodnie z Twierdzenie Bezouta wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x - a)$, czyli:

$$W(x) = (x - a) \cdot A(x)$$

gdzie A jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia k, a zatem zgodnie z założeniem indukcyjnym jest iloczynem wielomianów stopnia 1 i 2 o współczynnikach rzeczywistych. Stąd tę samą własność ma wielomian W.
Jeśli $b \neq 0$ (tzn. pierwiastek $z = a + ib$ nie jest liczbą rzeczywistą), to zgodnie z Faktem 7.29 liczba $\bar{z} = a - ib$ też jest pierwiastkiem wielomianu W. Stąd, zgodnie z Twierdzeniem Bezouta:

$$W(x) = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) \cdot A(x)$$

gdzie A jest wielomianem o współczynnikach zespolonych (gdyż powstaje z dzielenia $W(x)$ przez wielomian o współczynnikach zespolonych). Ponieważ jednak po wymnożeniu czynników liniowych powyższa równość przyjmuje postać:

$$W(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \cdot A(x)$$

więc okazuje się, że wielomian A jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych (gdyż powstaje z dzielenia $W(x)$ przez wielomian o współczynnikach rzeczywistych). Zgodnie z założeniem indukcyjnym A jest iloczynem wielomianów stopnia 1 i 2 o współczynnikach rzeczywistych, a zatem tę samą własność ma wielomian W. □

Fakt 7.31: Nierzeczywiste wartości własne rzeczywistej macierzy

Niech liczba nierzeczywista λ będzie wartością własną macierzy $A \in M_{3\times 3}$ o wyrazach **rzeczywistych**, zaś wektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wektorem własnym dla λ. Wówczas liczba zespolona $\bar{\lambda}$ też jest wartością własną macierzy A, a wektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$ – przynależącym do niej wektorem własnym.

Dowód. Zgodnie z założeniem:

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Sprzęgając obie strony równania (i korzystając z własności sprzężenia opisanych w Fakcie 7.28) otrzymujemy:

$$\bar{A} \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

gdzie sprzężenie macierzy oznacza sprzężenie wszystkich jej wyrazów. Ponieważ macierz A ma wyrazy rzeczywiste, więc $\bar{A} = A$, czyli

$$A \cdot \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}$$

a zatem $\bar{v}$ jest (zespolonym) wektorem własnym macierzy A dla (zespolonej) wartości własnej $\bar{\lambda}$. □

Twierdzenie spektralne

Z Twierdzenia 7.9 wiemy, że nie każda macierz 3×3 się diagonalizuje (bo nie każda macierz 3×3 ma trzy niewspółliniowe wektory własne). Twierdzenie spektralne wyodrębnia zbiór macierzy (symetrycznych), które zawsze się diagonalizują (aczkolwiek nie każda diagonalizująca się macierz musi być symetryczna). Ideą dowodu jest przedstawienie iloczynu skalarnego w postaci mnożenia macierzy, więc zaczniemy od uogólnienia Faktu 2.20 na wektory w $\mathbb{R}^3$:

Fakt 7.32: Iloczyn skalarny (transpozycja)

Dla dowolnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^3$ zachodzi wzór:

$$u \circ v = u^\top \cdot v$$

gdzie po lewej stronie u i v traktujemy jako wektory ($\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów), a po prawej stronie u i v traktujemy jako macierze ($\cdot$ oznacza mnożenie macierzy).

Dowód. Oznaczmy $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ oraz $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Wówczas:

$$u \circ v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u^\top \cdot v$$

□

Twierdzenie 7.33: Twierdzenie spektralne dla $\mathbb{R}^3$

Symetryczna macierz A rozmiaru 3×3 zawsze się diagonalizuje, tzn.

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{gdzie } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \text{ oraz } P = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

i to tak, że wektory własne $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ są parami prostopadłe.
Innymi słowy, zachodzi jedna z trzech możliwości:

1) A ma trzy różne wartości własne, a ich przestrzenie własne to prostopadłe proste,
2) A ma jedną podwójną i jedną pojedynczą wartość własną, a ich przestrzenie własne to, odpowiednio, płaszczyzna i prostopadła do niej prosta,
3) A ma potrójną wartość własną λ, a jej przestrzeń własna to $\mathbb{R}^3$ (wówczas $A = \lambda I$).

Dowód. Pokażemy tezę w przypadku, gdy wielomian charakterystyczny χ_A nie ma pierwiastków wielokrotnych. Przypadek pierwiastków wielokrotnych wykracza poza ramy niniejszego skryptu. Wielomian χ_A ma (zgodnie z Zasadniczym twierdzeniem algebry) trzy pierwiastki zespolone. Jeśli wśród nich jest pierwiastek nierzeczywisty λ, to (zgodnie z Faktem 7.29) jest również jego sprzężenie $\bar{\lambda}$. Co więcej, niezerowe wektory własne dla λ i $\bar{\lambda}$ są sprzężone, czyli możemy przyjąć:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \end{pmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ a_2 - ib_2 \\ a_3 - ib_3 \end{pmatrix}$$

Wówczas, z uwagi na to, że $Av = \lambda v$ i $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ (wektory własne) oraz $A^\top = A$ (macierz symetryczna), dostajemy:

$$\begin{aligned} \lambda(v \circ \bar{v}) &= (\lambda v) \circ \bar{v} = (Av) \circ \bar{v} = (Av)^\top \cdot \bar{v} = v^\top A^\top \bar{v} = v^\top A\bar{v} \\ \bar{\lambda}(v \circ \bar{v}) &= v \circ (\bar{\lambda}\bar{v}) = v \circ (A\bar{v}) = v^\top A\bar{v} \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\lambda(v \circ \bar{v}) = \bar{\lambda}(v \circ \bar{v})$$

Ponieważ

$$v \circ \bar{v} = (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) > 0$$

(bo v to niezerowy wektor), więc $\lambda = \bar{\lambda}$, czyli λ jest liczbą rzeczywistą, wbrew założeniu. Wobec tego A ma wyłącznie rzeczywiste wartości własne.
Niech teraz u i v będą wektorami własnymi macierzy A dla różnych wartości własnych λ i μ. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \lambda(u \circ v) &= (\lambda u) \circ v = (\lambda u)^\top v = (Au)^\top v = u^\top A^\top v = u^\top Av \\ \mu(u \circ v) &= u \circ (\mu v) = u^\top \cdot \mu v = u^\top Av \end{aligned}$$

Zatem $\lambda(u \circ v) = \mu(u \circ v)$, co wobec $\lambda \neq \mu$ daje $u \circ v = 0$, czyli u i v są prostopadłe.
To, że (1), (2), (3) wyczerpuje listę możliwych układów, wynika z Wniosku 7.7 $\square$

Część III

Zadania

Zadania

1.1 POJĘCIE WEKTORA. UKŁADY RÓWNAŃ

Wektor na płaszczyźnie (geometrycznie). Współrzędne wektora (zapis kolumnowy). Dodawanie wektorów i mnożenie przez skalar. Wektor przeciwny i odejmowanie wektorów. Własności działań na wektorach. Współliniowość. Kombinacja liniowa dwóch wektorów. Wersory. Wektory w geometrii. Długość wektora. Nierówność trójkąta. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania. Równania równoważne.

Zadania rozgrzewkowe

1. Przez punkt P na płaszczyźnie poprowadzono proste prostopadłe do osi układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów przecięcia tych prostych z osiami oraz odległości punktu P od każdej z osi, jeśli:

(a) $P = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$ (b) $P = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$ (c) $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

2. Wyznacz współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, jeśli $A = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

3. Wiedząc, że $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ oraz $A = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ wyznacz współrzędne punktów B i C.

4. Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Wyznacz współrzędne wektorów $-\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}+3\vec{v}$, $4\vec{u}-3\vec{v}$.

5. Znajdź taki wektor $\vec{v}$, że $\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

6. Wśród wektorów: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ wskaż wszystkie pary wektorów współliniowych.

7. Wyznacz długości wektorów $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

8. Rozwiąż wymienione poniżej układy 3 równań z 3 niewiadomymi metodą podstawiania.

(a) $\begin{cases} x - 4y + 5z = 1 \\ x - 3y + 6z = 3 \\ -x + 7y - z = 6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 5y + z = 1 \\ 3x + 8y + z = 2 \\ x + 5y - z = 4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ 2x + 8y + 4z = 5 \end{cases}$

Zadania domowe

9. Punkty $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ są wierzchołkami pewnego czworokąta. Oblicz długości boków i przekątnych tego czworokąta.

10. Wyznacz współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku $ABCD$, jeśli znane są współrzędne następujących trzech jego wierzchołków:

(a) $A = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$,

11. Niech $A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$. Znajdź współrzędne punktu P dzielącego odcinek AB:

(a) w stosunku $1:3$, (b) w stosunku $1:4$, (c) w stosunku $3:5$.

12. Dane są wektory $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ i $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Przedstaw każdy z wektorów $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

13. Znajdź takie wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, które spełniają układ równań: $\begin{cases} 3\vec{u} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \\ 2\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \end{cases}$

14. Środkami boków pewnego trójkąta są punkty $P = \binom{2}{3}$, $Q = \binom{5}{1}$, $R = \binom{3}{4}$. Znajdź współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

15. Podaj przykład niezerowego wektora $\vec{v}$, takiego że $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, jeśli $\vec{u} = \binom{2}{3}$.

16. Rozwiąż wymienione poniżej układy 4 równań z 4 niewiadomymi metodą podstawiania.

(a) $\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 4 \\ x + 3y + 3z + 5t = 7 \\ -2x - y + 5z + 2t = 3 \\ -2x - 2y + 4z + 3t = 3 \end{cases}$
(b) $\begin{cases} 3x + y + 2z + t = 6 \\ x + y + z - t = 2 \\ 7x + y + 3z + 4t = 12 \\ 2x - y - z + 2t = 1 \end{cases}$
(c) $\begin{cases} x + y + 2z + t = 3 \\ x + 2y + 3z + 2t = 4 \\ x + 2y + 5z + 3t = 9 \\ -x + y + 2z + 3t = 5 \end{cases}$

17. Pola powierzchni ścian pewnego prostopadłościanu są równe 24, 18 i 27. Znajdź wymiary tego prostopadłościanu.

18. Każdy wyraz pewnego pięciowyrazowego ciągu (poza wyrazami pierwszym i ostatnim) jest sumą wyrazu po nim następującego i wyrazu go poprzedzającego. Wiemy też, że suma wszystkich wyrazów ciągu wynosi 5 oraz że suma pierwszego, drugiego i ostatniego wyrazu wynosi 2. Znajdź ten ciąg.

19. Znajdź taki wielomian $W(x)$ stopnia drugiego, że $W(1) = 2$, $W(2) = 3$, $W(3) = 5$.

Zadania egzaminacyjne

20. Znajdź na osi Ox wszystkie punkty równooddalone od punktów $A = \binom{-1}{4}$ i $B = \binom{6}{3}$.

21. Dane są punkty $A = \binom{2}{-1}$, $B = \binom{1}{3}$, $C = \binom{0}{4}$. Znajdź taki punkt D na osi Ox, żeby:
(a) odcinki AB i CD były równoległe, (b) odcinki AC i BD były równoległe.

22. Punkt P dzieli bok AB trójkąta ABC w stosunku $2:1$, zaś punkt S dzieli odcinek CP w stosunku $1:3$. Wyznacz współrzędne punktu S, jeśli $A = \binom{1}{3}$, $B = \binom{7}{6}$, $C = \binom{3}{1}$.

23. W równoległoboku $ABCD$ oznaczmy $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Wyraź przy pomocy $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wektory $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$.

24. Uzasadnij, że dla dowolnych punktów płaszczyzny A, B, C, D, E spełniony jest warunek:
(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

25. O wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wiemy, że $|\vec{u}| = 2$ i $|\vec{v}| = 5$. Jaka może być długość wektora $\vec{u}+\vec{v}$? Podaj wszystkie możliwości.

26. Znajdź równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = \binom{-1}{3}$, $B = \binom{7}{-1}$, $C = \binom{-2}{-4}$.

27. Znajdź współrzędne wierzchołków pięciokąta, którego środki kolejnych boków są punktami $A = \binom{-1}{2}$, $B = \binom{0}{6}$, $C = \binom{5}{5}$, $D = \binom{6}{1}$, $E = \binom{2}{0}$.

Zadania z gwiazdką

28. Oznaczmy przez K, L, M, N środki kolejnych boków czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że środek odcinka KM pokrywa się ze środkiem odcinka LN.

29. Na płaszczyźnie dany jest prostokąt o bokach długości $2a$ i $2b$. Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P średnia (arytmetyczna) kwadratów odległości punktu P od wierzchołków prostokąta oraz kwadrat odległości P od środka prostokąta różnią się o pewną stałą, niezależną od wyboru punktu P.

30. Uzasadnij własności działań na wektorach z Faktu 1.12 nieudowodnione w skrypcie.

1.2 RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI NA PŁASZCZYŹNIE

Równanie parametryczne prostej (postać wektorowa i we współrzędnych). Równanie ogólne prostej. Proste równoległe. Wektor kierunkowy prostej. Geometryczna interpretacja układu równań liniowych. Nierówność płaszczyzny. Równanie okręgu i nierówność koła. Krzywe drugiego stopnia.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź, które z punktów $\binom{1}{1}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{-1}{2}$ leżą na prostej o równaniu:

(a) $\binom{x}{y} = t\binom{1}{1} + \binom{-2}{1}$, (b) $2x - 3y + 1 = 0$.

2. Napisz trzy różne:

(a) równania ogólne prostej o równaniu $3x - 2y + 7 = 0$,

(b) równania parametryczne prostej o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{3}{1} + \binom{1}{2}$.

3. Zamień równanie ogólne podanej prostej na równanie parametryczne:

(a) $2x - 5y + 3 = 0$, (b) $4x + 3y + 1 = 0$, (c) $-2x + y + 1 = 0$.

4. Zamień równanie parametryczne podanej prostej na równanie ogólne:

(a) $\binom{x}{y} = t\binom{-1}{2} + \binom{1}{1}$, (b) $\binom{x}{y} = t\binom{1}{2} + \binom{3}{1}$, (c) $\binom{x}{y} = t\binom{1}{1} + \binom{-1}{2}$.

5. Napisz równanie prostej:

(a) przechodzącej przez punkt $\binom{4}{5}$ i równoległej do wektora $\binom{-1}{2}$,

(b) przechodzącej przez punkt $\binom{1}{2}$ i równoległej do prostej o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{4}{1} + \binom{1}{1}$,

(c) przechodzącej przez punkt $\binom{3}{1}$ i równoległej do prostej o równaniu $2x + 3y - 4 = 0$.

6. Dane są punkty $P = \binom{-1}{4}$ i $Q = \binom{6}{-1}$. Napisz równanie prostej PQ:

(a) w postaci parametrycznej, (b) w postaci ogólnej.

7. Wśród punktów $\binom{1}{1}$, $\binom{0}{3}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{-1}{2}$ wskaż wszystkie pary punktów leżących po przeciwnych stronach prostej o równaniu $3x - 4y + 2 = 0$.

8. Napisz nierówności obu półpłaszczyzn, na które dzieli płaszczyznę prosta przechodząca przez punkty $A = \binom{1}{2}$ i $B = \binom{5}{3}$.

9. Napisz równanie okręgu o środku S i promieniu r, jeśli:

(a) $S = \binom{2}{3}$ i $r = 3$, (b) $S = \binom{-5}{1}$ i $r = 2$.

10. Rozpoznaj krzywą drugiego stopnia opisaną poniższym równaniem i naszkicuj jej wykres:

(a) $2x^2 + 4y^2 = 1$ (b) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2 = 1$ (c) $-x^2 + 4y^2 = 1$ (d) $x^2 - 2y = 0$

Zadania domowe

11. Znajdź punkt przecięcia prostych:

(a) $4x - y - 2 = 0$ i $x - 3y + 5 = 0$,

(b) $3x + y + 1 = 0$ i $\binom{x}{y} = t\binom{-2}{1} + \binom{1}{0}$,

(c) $\binom{x}{y} = t\binom{1}{2} + \binom{1}{1}$ i $\binom{x}{y} = t\binom{3}{1} + \binom{5}{4}$.

12. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A = \binom{1}{1}$, $B = \binom{5}{2}$, $C = \binom{-1}{3}$. Przez punkt C poprowadzono prostą równoległą do boku AB, a przez punkt B poprowadzono prostą równoległą do boku AC. Wyznacz punkt przecięcia tych prostych posługując się:

(a) równaniami prostych,

(b) rachunkiem wektorowym.

13. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = \binom{1}{2}$, $B = \binom{3}{1}$, $C = \binom{4}{5}$, $D = \binom{-1}{5}$. Wyznacz punkt przecięcia przekątnych tego czworokąta, posługując się równaniami prostych AC i BD:

(a) w postaci ogólnej,

(b) w postaci parametrycznej,

(c) jednym w postaci parametrycznej, a drugim w postaci ogólnej.

14. Napisz nierówność półpłaszczyzny ograniczonej prostą przechodzącą przez punkty $A = \binom{3}{2}$ oraz $B = \binom{7}{-1}$ i zawierającej punkt $P = \binom{5}{1}$.

15. Rozstrzygnij, które z punktów $\binom{2}{1}$, $\binom{-2}{3}$, $\binom{1}{1}$, $\binom{4}{-2}$ leżą „powyżej", a której „poniżej" prostej o równaniu $2x + 3y - 4 = 0$.

16. Znajdź punkty przecięcia:

(a) prostej o równaniu $x - 2y + 1 = 0$ z okręgiem o środku $\binom{1}{2}$ i promieniu 2,

(b) okręgu o środku $\binom{0}{0}$ i promieniu 1 z okręgiem o środku $\binom{2}{1}$ i promieniu 2,

(c) elipsy o równaniu $x^2 + 4y^2 = 1$ z prostą o równaniu $2x + y = 0$.

17. Rozpoznaj krzywą opisaną poniższym równaniem i naszkicuj tę krzywą w układzie współrzędnych:

(a) $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

(b) $2x^2 - 9y^2 + 4 = 0$

(c) $x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

(d) $9x^2 + 4y^2 = 4$

(e) $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 0$,

(f) $x^2 + x + y^2 + 2y = 4$.

18. W pewnych szczególnych sytuacjach równanie drugiego stopnia może opisywać zbiór niebędący ani elipsą, ani parabolą, ani hiperbolą. Rozstrzygnij czym jest zbiór punktów opisanych każdym z poniższych równań:

(a) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

(b) $x^2 + 2xy + y^2 = 1$

(c) $x^2 = 1$

(d) $x^2 - y^2 = 0$

(e) $x^2 + y^2 = 0$

(f) $2x^2 + 4y^2 = -1$

19. Opisz parametrycznie następujące krzywe:

(a) okrąg o środku w punkcie $\binom{0}{0}$ i promieniu 3,

(b) odcinek o końcach $\binom{1}{1}$ i $\binom{2}{3}$,

Zadania egzaminacyjne

20. Rozstrzygnij, czy wśród podanych poniżej punktów są trzy punkty leżące na jednej prostej oraz wskaż wszystkie takie trójki punktów: $\binom{2}{1}$, $\binom{0}{-5}$, $\binom{0}{0}$, $\binom{3}{4}$, $\binom{6}{3}$.

21. Wyznacz punkt przecięcia prostej o równaniu $3x + \alpha y - 1 = 0$ (gdzie α jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą) z prostą o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{-1}{4} + \binom{1}{1}$.

22. Na płaszczyźnie dane są punkty: $A = \binom{1}{1}$, $B = \binom{-5}{-2}$, $C = \binom{2}{1}$ oraz prosta ℓ o równaniu $2x - py + (1 + p) = 0$. Podaj wszystkie takie wartości parametru p, dla których dwa z podanych punktów leżą po jednej, a trzeci punkt – po drugiej stronie prostej ℓ, przy czym żaden z nich nie leży na protej ℓ.

23. Opisz parametrycznie następujące krzywe:

(a) okrąg o środku w punkcie $\binom{2}{3}$ i promieniu 2,

(b) fragment sinusoidy obejmującej jeden pełny okres.

24. Opisz parametrycznie (przy pomocy dwóch parametrów t i r) koło zadane nierównością $x^2 + y^2 \leq 4$.

Zadania z gwiazdką

25. Uzasadnij, że współczynnik kierunkowy prostej, tzn. współczynnik a w równaniu $y = ax+b$ to tangens kąta nachylenia prostej do dodatniej półosi Ox.

26. Rozpoznaj krzywą opisaną poniższym równaniem i naszkicuj tę krzywą w układzie współrzędnych:

(a) $4x^2 + 4x + y = 0$, (b) $x - y^2 + 2y = 0$.

27. Napisz równanie kwadratowe opisujące zbiór złożony z dwóch przecinających się prostych na płaszczyźnie: prostej $2x + y = 0$ i prostej $3x - 2y = 0$.

28. Opisz parametrycznie elipsę o równaniu $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

1.3 ILOCZYN SKALARNY I WYZNACZNIK

Iloczyn skalarny. Nierówność Schwarza. Postać biegunowa wektora. Kąt między wektorami i kąt między prostymi. Wektor normalny prostej. Twierdzenie cosinusów. Rzut prostopadły wektora na wektor. Odległość punktu od prostej (w tym znakowana odległość). Wyznacznik pary wektorów. Pole trójkąta i równoległoboku. Orientacja pary wektorów. Znakowane pole. Pole wielokąta jako suma wyznaczników.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyznacz cosinus kąta między każdą parą spośród wektorów: $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{-4}{2}$, $w = \binom{1}{1}$. Ustal, który z tych kątów jest ostry, który prosty, a który rozwarty.

2. Zapisz wektory $\binom{1}{1}$ i $\binom{-1}{1}$ w postaci biegunowej, tzn. w postaci $\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$ dla pewnych r i θ.

3. Znajdź jednostkowy wektor, który jest: (a) współliniowy, (b) prostopadły do wektora $\binom{3}{4}$. Ile jest takich wektorów?

4. Oblicz odległość podanego punktu od prostej o podanym równaniu:

(a) $3x - 4y + 2 = 0$ i $\binom{2}{3}$, (b) $-x + 5y + 1 = 0$ i $\binom{6}{1}$, (c) $2x - 5y + 3 = 0$ i $\binom{1}{-1}$.

5. Napisz równanie ogólne i parametryczne prostej przechodzącej, która:

(a) przechodzi przez punkt $\binom{1}{3}$ i jest prostopadła do wektora $\binom{4}{1}$,

(b) przechodzi przez punkt $\binom{2}{1}$ i jest prostopadła do prostej o równaniu $5x - 4y + 3 = 0$,

(c) przechodzi przez punkt $\binom{2}{5}$ i jest równoległa do prostej o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{1}{7} + \binom{3}{4}$,

6. Znajdź rzut wektora u na wektor v oraz rzut wektora v na wektor u, gdzie $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{3}{1}$.

7. Jeśli $|u| = 5$, zaś $|v| = 3$, to jakie wartości może przyjmować iloczyn skalarny $u \circ v$? Podaj wszystkie możliwości.

8. Oblicz wyznacznik pary wektorów $\det(u, v)$, a następnie ustal orientację pary wektorów (u, v) jeśli:

(a) $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{2}{1}$, (b) $u = \binom{-3}{5}$, $v = \binom{-1}{-2}$, (c) $u = \binom{3}{1}$, $v = \binom{4}{-2}$.

9. Narysuj w układzie współrzędnych i oblicz pole:

(a) trójkąta rozpiętego przez wektory $\binom{-1}{3}$ i $\binom{2}{5}$,

(b) równoległoboku rozpiętego przez wektory $\binom{-1}{3}$ i $\binom{2}{5}$,

(c) trójkąta ABC, gdzie $A = \binom{2}{3}$, $B = \binom{-1}{4}$, $C = \binom{5}{1}$.

Zadania domowe

10. Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = \binom{0}{2}$, $B = \binom{2}{1}$, $C = \binom{3}{5}$, $D = \binom{1}{4}$. Wyznacz miary wszystkich kątów tego czworokąta. Ustal, które z tych kątów są ostre, które proste, a które rozwarte.

11. W trójkacie ABC dane są współrzędne wierzchołków $A = \binom{1}{2}$ i $B = \binom{5}{8}$. Ustal, czy trójkąt ten jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny, jeśli:

(a) $C = \binom{8}{6}$, (b) $C = \binom{-2}{6}$, (c) $C = \binom{4}{3}$.

Oblicz długości boków w znalezionym trójkącie prostokątnym i upewnij się, że spełniają one Twierdzenie Pitagorasa.

12. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A = \binom{1}{2}$, $B = \binom{3}{1}$, $C = \binom{4}{4}$. Wyznacz:

(a) równania ogólne prostych zawierających boki trójkąta ABC,

(b) długości wysokości trójkąta ABC (przy pomocy wzoru na odległość punktu od prostej),

(c) równania ogólne prostych zawierających wysokości trójkąta ABC,

(d) punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC.

13. W trójkącie z zadania 12 wyznacz spodek każdej wysokości (tzn. koniec wysokości leżący na podstawie trójkąta) na dwa sposoby:

(a) wyznaczając punkt przecięcia prostej zawierającej bok i prostej zawierającej wysokość,

(b) wykorzystując wzór na rzut wektora na wektor oraz rachunek wektorowy.

14. Wyznacz miarę kąta ostrego między prostymi o równaniach:

(a) $2x + 3y - 1 = 0$ i $2x - y + 5 = 0$,

(b) $\binom{x}{y} = t\binom{2}{1} + \binom{3}{0}$ i $\binom{x}{y} = t\binom{-1}{1} + \binom{3}{2}$.

15. Oblicz odległość punktu $\binom{4}{1}$ od prostej o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{3}{4} + \binom{1}{2}$.

16. Ustal, czy prosta o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$ przecina okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$.

17. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = \binom{a}{0}$, $B = \binom{0}{b}$, $C = \binom{2}{3}$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

18. Oblicz pole:

(a) czworokąta $ABCD$, gdzie $A = \binom{1}{2}$, $B = \binom{4}{3}$, $C = \binom{3}{5}$, $D = \binom{-2}{3}$,

(b) pięciokąta $ABCDE$, gdzie $A = \binom{-1}{1}$, $B = \binom{2}{-3}$, $C = \binom{4}{-1}$, $D = \binom{5}{4}$, $E = \binom{0}{6}$.

Zadania egzaminacyjne

19. Dane są wektory u, v, w, o których wiadomo, że $u \circ v = 3$, $v \circ w = 4$, $u \circ w = 0$ oraz $|u| = 5$ i $|v| = 1$. Oblicz:

(a) $v \circ (u + v)$,

(b) $(u + v) \circ (u - v)$,

(c) $(u + w) \circ (u + v)$.

20. Który z poniższych wektorów jest rzutem pewnego wektora na wektor $\binom{1}{2}$? Wymień wszystkie prawidłowe odpowiedzi: $a = \binom{2}{1}$, $b = \binom{2}{-1}$, $c = \binom{3}{6}$, $d = \binom{2}{4}$.

21. Dany jest punkt $P = \binom{-1}{2}$ oraz prosta ℓ o równaniu $\binom{x}{y} = t\binom{3}{-1} + \binom{0}{1}$. Na prostej ℓ obrano punkt $A = \binom{0}{1}$. Wyznacz rzut wektora $\overrightarrow{AP}$ na wektor kierunkowy prostej ℓ i wykorzystaj otrzymany wynik do znalezienia rzutu punktu P na prostą ℓ.

22. Dane są wierzchołki $A = \binom{0}{0}$ i $B = \binom{1}{3}$ trójkąta ABC. Wyznacz wszystkie możliwe położenia wierzchołka C, jeśli pole trójkąta wynosi 3, a miara kąta α przy wierzchołku A spełnia warunek $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

23. Dany jest punkt $C = \binom{0}{1}$. Wyznacz wszystkie takie trójkąty ABC, które spełniają (jednocześnie) następujące warunki:

- wierzchołek A leży na prostej o równaniu $2x + y - 1 = 0$,
- wierzchołek B leży na prostej o równaniu $3x + y - 1 = 0$,
- wierzchołki A i B leżą w tej samej odległości od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ oraz leżą po tej samej stronie tej prostej,
- pole trójkąta ABC wynosi 1.

Zadania z gwiazdką

24. Znajdź wektor v tworzący jednakowe kąty z wektorami $A = \binom{1}{7}$ i $B = \binom{1}{1}$, a następnie wykorzystaj go do napisania równania prostej będącej dwusieczną kąta $\angle AOB$ (tzn. prostej tworzącej jednakowe kąty z ramionami kąta).

25. Dany jest okrąg o średnicy AB, gdzie $A = \binom{a}{0}$ i $B = \binom{-a}{0}$. Uzasadnij (przy pomocy iloczynu skalarnego), że dla dowolnego punktu $C = \binom{x}{y}$ leżącego na tym okręgu, kąt $\angle ACB$ jest prosty.

26. Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów u i v zachodzą wzory:

(a) $(u + v) \circ (u - v) = |u|^2 - |v|^2$ (b) $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$

Zinterpretuj oba te wzory odwołując się do boków i przekątnych równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v.

2.1 MACIERZE

Macierze prostokątne. Dodawanie macierzy i mnożenie macierzy przez skalary. Mnożenie i potęgowanie macierzy. Macierz odwrotna. Macierz diagonalna. Wyznacznik macierzy. Wzory Cramera. Równania macierzowe. Transpozycja macierzy.

Zadania rozgrzewkowe

1. Oblicz $2A+B$, $3C-B+A$, $A-C$, $A+B+C$, gdzie:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

2. Ustal, które pary poniższych macierzy można pomnożyć i wykonaj te mnożenia. Pamiętaj, że mnożenie macierzy nie jest przemienne.

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$$

3. Znajdź macierze odwrotne do podanych niżej macierzy i sprawdź (wykonując odpowiednie mnożenia), że faktycznie są one macierzami odwrotnymi:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 7\end{pmatrix}$$

4. Rozwiąż metodą wyznaczników następujące układy równań:

(a) $\begin{cases}7x-5y=-1\\ 5x+2y=3\end{cases}$ (b) $\begin{cases}4x-3y=-3\\ 2x+y=6\end{cases}$ (c) $\begin{cases}x-3y=1\\ -3x+9y=3\end{cases}$

5. Rozwiąż następujące równania macierzowe:

(a) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -3\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}7 & 5\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$

6. Wyznacz macierze transponowane do każdej z podanych niżej macierzy:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$

7. Oblicz AB^{-1} i $A^{-1}B$ oraz $A^\top B$ i $AB^\top$, gdzie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Zadania domowe

8. Co się dzieje z wierszami lub kolumnami macierzy rozmiaru 2×2, jeśli pomnożymy ją przez macierz diagonalną $D=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$:

(a) z lewej strony, (b) z prawej strony.

Co zaobserwujemy, jeśli będziemy mnożyć przez macierz D (z lewej lub prawej strony) macierz niekwadratową?

9. Sprawdź, że jeśli $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, to dla dowolnej macierzy B rozmiaru 2×2 zachodzi warunek $A \cdot B = B \cdot A$. Wytłumacz, powołując się na poprzednie zadanie.

10. Co się dzieje z wierszami lub kolumnami macierzy rozmiaru 2×2, jeśli pomnożymy ją:

(a) z lewej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) z lewej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Znajdź taką macierz A rozmiaru 2×2, że dla dowolnego wektora $v \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $A\cdot v = 5v$.

12. Przedstaw wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, rozwiązując odpowiedni układ równań metodą wyznaczników.

13. Ustal rozmiary macierzy A, B i C i rozwiąż poniższe równania macierzowe:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $B \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

14. Ustal rozmiar macierzy A oraz rozwiąż następujące równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Oblicz iloczyny $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, a następnie (bez wykonywania żadnych dodatkowych rachunków) podaj wynik mnożenia macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Czy jest macierzą symetryczną:

(a) iloczyn dowolnych symetrycznych macierzy 2×2?

(b) odwrotność dowolnej symetrycznej macierzy 2×2?

Jeśli tak, podaj uzasadnienie. Jeśli nie, podaj kontrprzykład.

Zadania egzaminacyjne

17. Dane są macierze $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Podaj wynik mnożenia lub ustal, że mnożenie jest niewykonalne:

(a) $A \cdot B$ (b) $B \cdot A$ (c) $A \cdot A$ (d) $B \cdot B$

18. Przedstaw w postaci $X^\top AX$, gdzie A jest macierzą symetryczną, a $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ każdy z następujących wielomianów drugiego stopnia:

(a) $2x^2 - 4xy + 5y^2$ (b) $x^2 - 7y^2$ (c) $5x^2 - 7xy$

19. Wektor $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów u i v, jeśli:

(a) $u = \binom{-2}{4}$ i $v = \binom{1}{2}$
(b) $u = \binom{1}{3}$ i $v = \binom{3}{9}$
(c) $u = \binom{2}{1}$ i $v = \binom{4}{5}$
(d) $u = \binom{3}{7}$ i $v = \binom{-7}{3}$

20. Ustal przy pomocy wyznacznika, dla jakich wartości parametru a wektory $\binom{a+1}{a}$ i $\binom{8}{a+3}$ są współliniowe.

21. Wyznacz liczbę rozwiązań poniższego układu równań w zależności od parametru p. W przypadku, gdy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie – podaj to rozwiązanie.

$$\begin{cases} px + 3y = 1 + p \\ x + (p+2)y = 2 \end{cases}$$

Zadania z gwiazdką

22. Niech A, B, C będą odwracalnymi macierzami rozmiaru 2×2. Uzasadnij następujące wzory:

(a) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$,
(b) $(ABC)^{\top} = C^{\top}B^{\top}A^{\top}$.

23. Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy A rozmiaru 2×2 macierze $A \cdot A^{\top}$ oraz $A^{\top} \cdot A$ są symetryczne.

24. Uzasadnij, że dla dowolnych macierzy A i B rozmiaru 2×2 wyznaczniki macierzy AB oraz BA są jednakowe.

25. Udowodnij, że jeśli D, P są macierzami rozmiaru 2×2, macierz D jest diagonalna, a macierz P jest odwracalna, to zachodzą wzory:

(a) $(P^{\top})^{-1} = (P^{-1})^{\top}$,
(b) $(PDP^{-1})^{\top} = (P^{\top})^{-1}DP^{\top}$,
(c) $(PDP^{\top})^{\top} = PDP^{\top}$.

2.2 PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE

Przekształcenia afiniczne płaszczyzny. Przykłady: translacja, obrót, odbicie, rzut prostokątny, rzut ukośny, jednokładność, powinowactwo prostokątne, powinowactwo ścinające. Przekształcenie identycznościowe i przekształcenie stałe. Izometrie płaszczyzny. Punkty stałe.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyprowadź wzór każdego z poniższych przekształceń afinicznych, przedstaw ten wzór w postaci $F(X) = AX + v$ oraz wyznacz obraz punktu $\binom{1}{1}$:

(a) translacja o wektor $\binom{1}{2}$,
(b) odbicie względem osi Ox,
(c) odbicie względem osi Oy,
(d) symetria środkowa o środku O,
(e) rzut na oś Ox,
(f) rzut na oś Oy,
(g) jednokładność o środku O i skali -2,
(h) jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{2}$,
(i) powinowactwo prostokątne o osi Ox i skali 2,
(j) powinowactwo prostokątne o osi Oy i skali 2,
(k) powinowactwo ścinające o osi Ox i wektorze $\binom{1}{0}$,
(l) powinowactwo ścinające o osi Oy i wektorze $\binom{0}{1}$.

2. Wyznacz (bez żadnych rachunków) punkty stałe każdego z przekształceń z zadania 1.

3. Korzystając ze wzoru (2.11) napisz macierz obrotu wokół punktu O o kąt:

(a) $90°$ (b) $-90°$ (c) $-60°$ (d) $180°$ (e) $30°$

Dla każdego obrotu zaznacz na rysunku obrazy punktów $\binom{1}{0}$ i $\binom{0}{1}$.

4. Dla jakiego wektora v rzut ukośny na prostą ℓ w kierunku wektora v jest rzutem prostokątnym na prostą ℓ?

5. Uzasadnij, że każda z poniższych par składa się z dwóch równych (jednakowych) przekształceń płaszczyzny:

(a) obrót o kąt $+270°$ wokół punktu S i obrót o kąt $-90°$ wokół punktu S,
(b) symetria środkowa o środku S i obrót o kąt π wokół punktu S,
(c) jednokładność o skali 1 i identyczność.

6. Wyznacz wszystkie takie przekształcenie afiniczne płaszczyzny, które punkty $\binom{0}{1}$, $\binom{1}{0}$ i $\binom{1}{1}$ przeprowadza odpowiednio na punkty $\binom{3}{2}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{4}{2}$.

Zadania domowe

7. Wyprowadź wzór każdego z poniższych przekształceń afinicznych, przedstaw ten wzór w postaci $F(X) = AX + v$ oraz wyznacz obraz punktu $\binom{1}{2}$:

(a) translacja o wektor $\binom{5}{3}$,
(b) odbicie względem prostej $y = 2$,
(c) odbicie względem prostej $x = 3$,
(d) symetria środkowa o środku $\binom{4}{1}$,
(e) rzut (prostokątny) na prostą $y = 2$,
(f) rzut (prostokątny) na prostą $x = 3$,
(g) jednokładność o środku $\binom{2}{1}$ i skali -2,
(h) jednokładność o środku $\binom{2}{1}$ i skali $\frac{1}{2}$,
(i) powinowactwo prostokątne o osi $y = 2$ i skali 2,
(j) powinowactwo prostokątne o osi $x = 3$ i skali 2,
(k) powinowactwo ścinające o osi $y = 2$ i wektorze $\binom{1}{0}$,
(l) powinowactwo ścinające o osi $x = 3$ i wektorze $\binom{0}{1}$.

Porównaj otrzymane macierze A z macierzami z zadania 1.

8. Wyznacz (bez żadnych rachunków) punkty stałe każdego z przekształceń z zadania 7.

9. Niech ℓ będzie prostą o równaniu $3x - y + 2 = 0$. Zapisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) rzut (prostokątny) na prostą ℓ

(b) rzut ukośny na prostą ℓ w kierunku wektora $\binom{1}{4}$.

(c) odbicie względem prostej ℓ,

(d) powinowactwo prostokątne o skali 4 i osi ℓ,

(e) powinowactwo prostokątne o skali $-\frac{1}{3}$ i osi ℓ,

(f) powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze $\binom{1}{3}$.

10. Znajdź rzut (prostokątny) punktu $\binom{1}{3}$ na prostą o równaniu $x + y + 1 = 0$, a następnie punkt symetryczny do punktu $\binom{1}{3}$ względem tej prostej.

11. Uzasadnij, że każda z poniższych par składa się z dwóch równych (jednakowych) przekształceń płaszczyzny:

(a) symetria środkowa o środku S i jednokładność o środku S i skali -1,

(b) odbicie względem prostej ℓ i powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali -1,

(c) powinowactwo prostokątne o skali 1 i identyczność

12. Znajdź przekształcenie afiniczne płaszczyzny, które punkty $\binom{3}{2}$, $\binom{2}{1}$ i $\binom{1}{1}$ przekształca odpowiednio na punkty $\binom{1}{0}$, $\binom{0}{1}$ i $\binom{4}{1}$.

13. Wzór pewnego odbicia ma postać: $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Znajdź punkty stałe tego przekształcenia, a następnie podaj oś odbicia.

14. Znajdź wszystkie punkty stałe każdego z poniższych przekształceń afinicznych:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(b) $G(X) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(c) $H(X) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X$.

15. Podaj kilka przykładów takich przekształceń afinicznych, które mają:

(a) tylko jeden punkt stały,

(b) całą prostą punktów stałych,

(c) całą płaszczyznę punktów stałych.

Zadania egzaminacyjne

16. Znajdź wszystkie takie przekształcenia afiniczne, które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- obrazem punktu $\binom{1}{1}$ jest punkt $\binom{6}{1}$,
- obrazem punktu $\binom{2}{-1}$ jest punkt $\binom{2}{4}$,
- obrazem punktu $\binom{1}{-1}$ jest punkt leżący na osi OY,
- obrazem punktu $\binom{0}{1}$ jest punkt leżący na osi OX,

17. Wyznacz rzut (prostokątny) punktu $\binom{p}{q}$ na prostą o równaniu $x+y+1=0$ oraz punkt symetryczny do punktu $\binom{p}{q}$ względem tej prostej.

18. Wzór pewnego obrotu ma postać: $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Znajdź punkt stały tego przekształcenia, a następnie podaj:

(a) środek tego obrotu, (b) kąt tego obrotu.

Zadania z gwiazdką

19. Niech R_θ^O i R_θ^P oznaczają obroty o kąt θ wokół punktów, odpowiednio, O i P. Uzasadnij, że dla każdego X spełniony jest warunek: $R_P(P+X) = P + R_O(X)$. Wykorzystaj ten fakt do wyprowadzenia wzoru na obrót wokół punktu $P = \binom{1}{1}$ o kąt:

(a) $90°$, (b) $30°$, (c) θ.

20. Odbiciem z poślizgiem o osi ℓ i wektorze v (równoległym do ℓ) nazywamy przekształcenie płaszczyzny, które każdy punkt płaszczyzny przesuwa o wektor v, a następnie odbija względem prostej ℓ. Napisz wzór odbicia z poślizgiem o osi $x+y+1=0$ i wektorze $\binom{2}{-2}$.

2.3 PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Przekształcenia liniowe płaszczyzny. Addytywność i jednorodność. Izometrie liniowe i macierz izometrii. Obrazy wersorów. Wyznacznik macierzy przekształcenia. Zachowywanie i zmiana orientacji.

Zadania rozgrzewkowe

1. Podaj dużo przykładów przekształceń, które są:

(a) izometriami liniowymi,
(b) izometriami, które nie są liniowe,
(c) liniowe, ale nie są izometriami,
(d) afiniczne, ale nie są liniowe,
(e) afiniczne, ale nie są izometriami.

2. Napisz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $2x + y = 0$,
(b) odbicie względem prostej o równaniu $2x + y = 0$,
(c) powinowactwo prostokątne o skali -2 i osi o równaniu $2x + y = 0$,
(d) powinowactwo prostokątne o skali $\frac{1}{2}$ i osi o równaniu $2x + y = 0$,
(e) rzut ukośny na prostą o równaniu $2x + y = 0$ w kierunku wektora $\binom{-1}{1}$,
(f) powinowactwo ścinające o osi będącej prostą o równaniu $3x + 4y = 0$ i wektorze $\binom{4}{-3}$.
(g) przekształcenie zerowe,
(h) przekształcenie identycznościowe.

3. O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u) = \binom{3}{-1}$ oraz $F(v) = \binom{5}{2}$. Oblicz $F(u + v)$, $F(u - v)$ i $F(2u + 3v)$.

4. O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u + v) = \binom{2}{3}$ oraz $F(u - v) = \binom{4}{1}$. Oblicz $F(u)$ i $F(v)$.

5. Znajdź macierz przekształcenia liniowego przeprowadzającego punkty $\binom{1}{0}$ i $\binom{0}{1}$ odpowiednio na $\binom{2}{3}$ i $\binom{4}{1}$.

6. Wyznacz obrazy wersorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) symetria środkowa względem O,
(b) odbicie względem osi Ox,
(c) odbicie względem osi Oy,
(d) obrót o $-90°$ wokół O,
(e) jednokładność o środku O i skali 2,
(f) powinowactwo prostokątne o osi Ox i skali $\frac{1}{2}$.

7. Ile jest takich przekształceń liniowych płaszczyzny, które punkty $\binom{1}{1}$ i $\binom{2}{1}$ przekształcają odpowiednio na punkty $\binom{2}{1}$ i $\binom{4}{0}$? Znajdź je wszystkie.

8. Które z poniższych przekształceń zmieniają, a które zachowują orientację? Jak przekształcenia te zmieniają pola figur?

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X, \qquad G(X) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X, \qquad H(X) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X$$

9. Które z poniższych przekształceń zachowują, a które zmieniają orientację?

(a) translacja (b) symetria środkowa (c) odbicie względem prostej
(d) obrót (e) identyczność

10. Dla każdej z podanych poniżej macierzy:

(a) rozstrzygnij, czy jest ona macierzą izometrii,

(b) rozstrzygnij, czy jest ona macierzą przekształcenia zachowującego orientację,

(c) wyznacz macierz do niej odwrotną i macierz do niej transponowaną.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zadania domowe

11. Wyznacz obrazy wersorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych:

(a) symetria względem prostej $y + x = 0$,

(b) rzut (prostokątny) na prostą $y = x$,

(c) rzut ukośny w kierunku wektora $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ na prostą $y = x$,

(d) symetria względem prostej nachylonej do osi Ox pod kątem $15°$.

12. Dane jest przekształcenie liniowe F, takie że $F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $F(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz $F(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right))$, $F(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right))$, $F(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix})$, $F(\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))$:

(a) korzystając z warunku liniowości, (b) rozwiązując układ równań.

13. Znajdź przekształcenie liniowe, które punkty $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ przeprowadza odpowiednio na $u' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $v' = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Narysuj siatkę równoległoboków rozpiętą przez wektory u i v oraz obraz tej siatki przez wyznaczone przekształcenie liniowe.

14. Sprawdź jak poniższe przekształcenia zmieniają pola i czy zachowują orientację. Narysuj obraz rozpiętego przez wersory kwadratu przez każde z tych przekształceń.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$, (b) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$, (c) $H(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$.

15. Przy jakich założeniach poniższe przekształcenia zachowują orientację, a przy jakich założeniach – zmieniają orientację?

(a) jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$,

(b) powinowactwo prostokątne o osi ℓ i skali $k \neq 0$,

(c) powinowactwo ścinające o osi ℓ i wektorze v.

16. Każdą z macierzy uzupełnij do macierzy izometrii (na wszystkie możliwe sposoby):

(a) $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & * \\ * & * \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & * \\ * & * \end{pmatrix}$.

17. Podaj przykład przekształcenia liniowego:

(a) które zachowuje kąty, ale nie jest izometrią;

(b) które zachowuje pola, ale nie jest izometrią;

(c) które zachowuje pola i przeprowadza wersor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ na siebie, ale nie jest izometrią.

18. Napisz wzór przekształcenia liniowego, które przeprowadza punkt $\binom{1}{2}$ na punkt $\binom{-1}{3}$, a punkt $\binom{1}{1}$ na punkt $\binom{2}{4}$. Zrób to na dwa sposoby:

(a) rozwiązując układ 4 równań z 4 niewiadomymi,

(b) rozwiązując jedno równanie macierzowe.

Zadania egzaminacyjne

19. O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u + 2v) = \binom{1}{7}$ oraz $F(u + v) = \binom{-1}{3}$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$ i $F(4u + 3v)$.

20. Macierz powinowactwa prostokątnego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ względem pewnej prostej ma postać $m(F) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Podaj skalę tego powinowactwa.

21. Znajdź wszystkie takie przekształcenia liniowe, które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- punkt $\binom{2}{1}$ jest punktem stałym przekształcenia,
- obrazem punktu $\binom{1}{1}$ jest punkt leżący na prostej $x + y = 0$,
- przekształcenie powiększa pola trzykrotnie.

22. Jedno z poniższych przekształceń liniowych jest obrotem, jedno jest powinowactwem prostokątnym, a jedno powinowactwem ścinającym. Analizując zbiory punktów stałych oraz wyznaczniki macierzy ustal, jakie przekształcenie opisuje każdy ze wzorów. Podaj skalę powinowactwa prostokątnego.

$$F(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X, \qquad G(X) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix} X, \qquad H(X) = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} & -\frac{16}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix} X$$

23. Poniżej podane są macierze czterech przekształceń liniowych płaszczyzny. Wiemy, że jedno z tych przekształceń to odbicie względem prostej, drugie to obrót, trzecie to powinowactwo prostokątne (o skali różnej od -1), a czwarte to rzut ukośny na prostą.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{21}{5} \end{pmatrix}$$

(a) Przyporządkuj każdą z macierzy do odpowiedniego przekształcenia liniowego.

(b) Dla obrotu wyznacz cosinus kąta obrotu i ustal czy obrót jest w kierunku dodatnim czy ujemnym.

(c) Dla odbicia wyznacz oś odbicia.

(d) Dla powinowactwa prostokątnego wyznacz skalę powinowactwa.

24. Znajdź wszystkie izometrie liniowe, które przeprowadzają punkt $\binom{1}{2}$ na punkt $\binom{-2}{1}$, a następnie napisz ich macierze.

Zadania z gwiazdką

25. Dane jest izometria płaszczyzny o wzorze $F(X) = AX + v$. Znajdź taką translację T, że $T \circ F$ jest izometrią liniową oraz wywnioskuj stąd, że A jest macierzą izometrii.

26. Znajdź przekształcenie liniowe, które okrąg o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ przekształca na elipsę o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Posługując się wyznacznikiem tego przekształcenia wyprowadź wzór na pole obszaru ograniczonego tą elipsą.

2.4 ZŁOŻENIE PRZEKSZTAŁCEŃ

Złożenie przekształceń. Złożenie przekształceń liniowych a mnożenie macierzy. Przekształcenie odwrotne. Przekształcenia różnowartościowe i „na”. Obraz i przeciwobraz.

Zadania rozgrzewkowe

1. Niech T_v oznacza translację o wektor $v = \binom{4}{2}$, S_x i S_y – odbicia względem osi Ox i Oy, S_ℓ – symetrię względem prostej ℓ o równaniu $x = y$, zaś S_O i S_A – symetrie środkowe o środkach $O = \binom{0}{0}$ i $A = \binom{1}{1}$. Napisz wzory następujących przekształeń liniowych:

(a) $T_v \circ T_v$ (b) $S_x \circ S_O$ oraz $S_O \circ S_x$ (c) $T_v \circ S_x$ oraz $S_x \circ T_v$
(d) $S_O \circ T_v$ oraz $T_v \circ S_O$ (e) $S_O \circ S_A$ oraz $S_A \circ S_O$

2. Niech R_θ oznacza obrót o kąt θ wokół punktu $O = \binom{0}{0}$. Ustal (bez wykonywania rachunków) jakim przekształceniem jest każde z poniższych złożeń, a następnie potwierdź to odpowiednim rachunkiem na macierzach.

(a) $R_{90^\circ} \circ R_{90^\circ}$ (b) $R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ}$ (c) $R_{30^\circ} \circ R_{-60^\circ}$

3. Znajdź macierze przekształceń liniowych $F \circ G$ i $G \circ F$ oraz $G \circ H$ i $H \circ G$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X, \quad G(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad H(X) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

4. Przedstaw przekształcenie F w postaci złożenia $T_v \circ G$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T_v translacją, jeśli:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

5. Podaj przykład przekształcenia liniowego F płaszczyzny oraz punktu płaszczyzny, którego przeciwobraz przez przekształcenie F jest:

(a) zbiorem pustym, (b) punktem, (c) prostą, (d) płaszczyzną.

6. Wyznacz obrazy i przeciwobrazy punktów $\binom{1}{0}$ i $\binom{0}{1}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:

(a) rzut (prostokątny) na oś Ox,

(b) odbicie względem punktu $\binom{1}{1}$,

(c) przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$,

(d) przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

7. Sprawdź, które z poniższych przekształceń płaszczyzny są różnowartościowe i które są „na”:

(a) symetria względem punktu $\binom{1}{2}$,

(b) powinowactwo prostokątne względem prostej $x + y = 0$ o skali 2,

(c) rzut ukośny wzdłuż wektora $\binom{2}{1}$ na prostą o równaniu $x + y = 0$,

(d) przekształcenie zerowe.

8. Rozstrzygnij czym są przekształcenia odwrotne do podanych poniżej przekształceń liniowych. Napisz macierz każdego z tych przekształceń oraz macierz przekształcenia do niego odwrotnego.

(a) obrót $R_{\pi/3}$ o kąt $\frac{\pi}{3}$,

(b) jednokładność $D_{\frac{1}{2}}$ o skali $\frac{1}{2}$,

(c) jednokładność D_{-2} o skali -2,

(d) odbicie S_ℓ względem prostej ℓ o równaniu $x = y$.

9. Napisz wzór przekształcenia odwrotnego do każdego z poniższych przekształceń liniowych:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$ (b) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X$ (c) $H(X) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$

Zadania domowe

10. Podaj przykład dwóch nieliniowych przekształceń afinicznych, których złożenie jest przekształceniem liniowym.

11. Niech S_ℓ oznacza odbicie względem prostej ℓ o równaniu $x + 2y = 0$, P_k – rzut na prostą k o równaniu $3x - 4y = 0$, zaś R_θ – obrót o kąt θ wokół punktu O. Wyznacz wzory następujących złożeń przekształceń liniowych oraz napisz macierze tych złożeń:

(a) $S_\ell \circ R_{90^\circ}$ oraz $R_{90^\circ} \circ S_\ell$, (b) $S_\ell \circ P_k$ oraz $P_k \circ S_\ell$.

12. Znajdź wzory przekształceń afinicznych $F \circ G$, $G \circ F$, $F \circ H$ i $H \circ F$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad H(X) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X$$

13. Przedstaw (jeśli jest to możliwe) przekształcenie F w postaci złożenia $G \circ T_u$, gdzie G jest przekształceniem liniowym, a T_u translacją, jeśli:

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

Porównaj otrzymane wyniki z wynikami zadania 4.

14. Wyznacz przekształcenia odwrotne do następujących przekształceń:

(a) obrót o kąt θ wokół punktu P,

(b) odbicie względem prostej ℓ,

(c) translacja o wektor v.

15. Wyznacz obraz punktu $\binom{2}{0}$ oraz przeciwobrazy punktów $\binom{1}{1}$ i $\binom{2}{0}$ przez następujące przekształcenia afiniczne płaszczyzny:

(a) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $x + y - 2 = 0$,

(b) odbicie względem prostej o równaniu $x = y$,

(c) przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$,

(d) przekształcenie $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

16. Przekształcenie liniowe F zwiększa wszystkie pola 2 razy, a przekształcenie G zmniejsza wszystkie pola 4 razy. Jak skalują pola przekształcenia $F \circ G$, $G \circ F$, F^{-1} i G^{-1}?

17. Wyznacz wzory przekształceń odwrotnych (jeśli takowe istnieją) do następujących przekształceń:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad G(X) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad H(X) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

18. Ustal, czy podane przekształcenie F jest różnowartościowe, czy jest „na" oraz wyznacz przeciwobraz $F^{-1}[v]$ podanego punktu v:

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będące obrotem wokół punktu O o kąt $-\frac{\pi}{2}$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będące rzutem (prostokątnym) na prostą $x + y = 0$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gdzie $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od prostej $3x - 4y = 0$ oraz $v = 0$,

(e) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowane pole trójkąta OAX, gdzie $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $v = 0$,

(f) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \circ X$ oraz $v = 0$,

(g) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gdzie $F(t) = t\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(h) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $F(t) = 2t$ oraz $v = 0$.

19. Zapisz wzór każdego przekształcenia z poprzedniego zadania w postaci $F(X) = AX$, gdzie A jest pewną (prostokątną) macierzą.

Zadania egzaminacyjne

20. Wskaż (możliwie dużo i możliwie różnorodnych) przykładów takich przekształceń afinicznych F, że $F \circ F = \mathrm{Id}$.

21. Napisz macierz odbicia S_y względem osi Oy oraz macierz odbicia S_ℓ względem prostej o równaniu $x + y = 0$, a następnie macierze przekształceń $S_y \circ S_\ell$ i $S_\ell \circ S_y$. Rozpoznaj jakimi przekształceniami są te złożenia.

22. Napisz wzór jednokładności D_1 o środku $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i skali k oraz jednokładności D_2 o środku $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i skali l, a następnie wzór złożenia $D_1 \circ D_2$. Dla jakich wartości k i l to złożenie będzie translacją?

23. Dane są odwracalne przekształcenia liniowe F i G. Ustal czy przekształcenie $F \circ G$ zachowuje orientację, czy zmienia orientację, jeśli:

(a) F i G zachowują orientację,

(b) F i G zmieniają orientację,

(c) F zachowuje orientację, a G zmienia orientację.

Zadania z gwiazdką

24. Uzasadnij, że:

(a) złożenie izometrii jest izometrią,

(b) złożenie izometrii liniowych jest izometrią liniową.

25. Niech F i G będą afinicznymi przekształceniami płaszczyzny. Udowodnij, że jeśli $F \circ G$ jest translacją, to $G \circ F$ również jest translacją.

26. Przedstaw każde z następujących przekształceń afinicznych w postaci $T_v \circ F \circ T_{-v}$, gdzie T_v i T_{-v} to translacje o wektor, odpowiednio, v i $-v$, natomiast F to przekształcenie liniowe.

(a) obrót wokół punktu $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ o kąt 90°,

(b) jednokładność o środku $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i skali 2,

(c) odbicie względem prostej o równaniu $x + y - 1 = 0$,

27. Uzasadnij, że jeśli k i l są prostymi równoległymi, to $S_k \circ S_l$ jest translacją. Jaki będzie wektor tej translacji? Czy $S_k \circ S_l = S_l \circ S_k$?

28. Uzasadnij, że jeśli przekształcenia F i G są różnowartościowe, to $F \circ G$ też jest różnowartościowe (o ile złożenie ma sens). Znajdź przykład pokazujący, że $F \circ G$ nie musi być różnowartościowe, jeśli tylko jedno z przekształceń F i G jest różnowartościowe.

29. Uzasadnij, że jeśli przekształcenia F i G są „na”, to $F \circ G$ też jest „na” (o ile złożenie ma sens). Znajdź przykład pokazujący, że $F \circ G$ nie musi być „na”, jeśli tylko jedno z przekształceń F i G jest „na”.

3.1 WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE

Wartości własne i wektory własne przekształcenia i macierzy. Wielomian charakterystyczny. Przestrzeń własna. Diagonalizacja macierzy. Zastosowania diagonalizacji (potęgowanie macierzy, wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego). Twierdzenie spektralne.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź, które z wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ są wektorami własnymi macierzy $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2. Wyznacz wielomiany charakterystyczne, wartości własne i wektory własne poniższych macierzy, a następnie zdiagonalizuj macierz (tzn. zapisz w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną), jeśli jest to możliwe:

(a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix}6 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

3. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy diagonalnej $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. Czym różni się przypadek $a \neq b$ od przypadku $a = b$?

4. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne:

(a) powinowactwa prostokątnego o osi Ox i skali 2,

(b) symetrii środkowej o środku O,

(c) powinowactwa ścinającego o osi Ox i wektorze $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$.

5. Oblicz $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{10}$ oraz $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{30}$.

6. Dla jakich wartości parametrów a, b i c macierz $\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ jest diagonalizowalna?

7. Napisz diagonalizację macierzy odbicia względem prostej o równaniu $2x - 5y = 0$.

8. Macierz A ma ma wartości własne 2 i 3. Wektorami własnymi dla tych wartości własnych są, odpowiednio, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$. Napisz diagonalizację macierzy A, a następnie wylicz macierz A.

9. Czy istnieje macierz symetryczna, która nie ma żadnych wartości własnych?

Zadania domowe

10. Znajdź wartości i wektory własne, a następnie napisz macierz każdego z przekształceń:

(a) odbicie względem prostej o równaniu $2x + 5y = 0$,

(b) rzut prostokątny na prostą o równaniu $7x - 2y = 0$,

(c) rzut ukośny na prostą o równaniu $2x + 3y = 0$ wzdłuż wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

11. Dla jakich wartości parametru p macierz $\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ ma dwie wartości własne?

12. Jakie wartości własne może mieć izometria liniowa? Podaj wszystkie możliwości i każdą zilustruj przykładem.

13. Wykaż, że przekształcenie liniowe, które ma wartość własną 0 nie jest różnowartościowe.

14. Oblicz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{100}$ oraz $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{n}$

15. Macierz A ma ma wartości własne 1 i 4. Przestrzenie własne dla tych wartości własnych to, odpowiednio, proste $x + y = 0$ i $x + 2y = 0$. Napisz diagonalizację macierzy A, a następnie wylicz macierz A.

16. Napisz diagonalizację, a następnie wyznacz jakąkolwiek macierz, która ma wartości własne 2 i 1, a jednym z jej wektorów własnych jest wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

17. Podaj przykład macierzy, która ma tylko jedną wartość własną i:

(a) nie jest diagonalizowalna, (b) jest diagonalizowalna.

18. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że:

(a) jeśli v jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ, to tv też jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ (dla dowolnego skalara t);

(b) jeśli u i v są wektorami własnymi F dla wartości własnej λ, to $u + v$ też jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ.

19. Czy istnieje macierz symetryczna 2×2, która ma tylko jedną wartość własną? Co w takiej sytuacji można powiedzieć o zbiorze jej wektorów własnych?

Zadania egzaminacyjne

20. Ustal liczbę wartości własnych macierzy $\begin{pmatrix} p & 3p+1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ w zależności od parametru p.

21. Macierz A ma wartości własne 2 i 3, a odpowiadające im wektory własne to, odpowiednio, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Podaj wartości własne i wektory własne macierzy A^2 (po jednym niezerowym wektorze własnym dla każdej wartości własnej).

22. Znajdź wszystkie symetryczne macierze 2×2, których wartościami własnymi są 1 i -1.

23. Wyznacz wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (jest to przykład tzw. *macierzy górnotrójkątnej*) w przypadku, gdy:

(a) $a \neq b$, (b) $a = b$.

24. Udowodnij, że jeśli przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunek $F(u+v) = F(u-v)$ dla pewnych niezerowych wektorów u i v, to v jest wektorem własnym F. Dla jakiej wartości własnej?

25. Rozwiąż poniższe dwa zadania, a następnie wytłumacz związek między nimi:

(a) Macierz A rozmiaru 2×2 spełnia warunek $A^2 = A$. Jakie wartości własne może mieć ta macierz?

(b) Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełnia warunek $F \circ F = F$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Podaj przynajmniej trzy przykłady przekształceń spełniających ten warunek.

26. Rozwiąż poniższe dwa zadania, a następnie wytłumacz związek między nimi:

(a) Uzasadnij, że jeżeli v jest (niezerowym) wektorem własnym macierzy A rozmiaru 2×2 dla wartości własnej λ, to v jest też wektorem własnym macierzy A^2 dla wartości własnej λ^2.

(b) Uzasadnij, że jeżeli v jest (niezerowym) wektorem własnym przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dla wartości własnej λ, to v jest też wektorem własnym przekształcenia $F \circ F$ dla wartości własnej λ^2.

27. Podaj wszystkie wartości parametrów a i b, dla których poniższa macierz jest diagonalizowalna.

(a) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

28. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 3-p & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, gdzie p jest parametrem.

(a) Dla jakiej wartości parametru p wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym tej macierzy?

(b) Oblicz A^n dla wyznaczonej w punkcie (a) wartości parametru p.

Zadania z gwiazdką

29. Uzasadnij, że wielomian charakterystyczny macierzy A rozmiaru 2×2 ma postać:

$$\chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A$$

(gdzie $\operatorname{tr} A$, czyli *ślad* macierzy A to suma wyrazów na przekątnej macierzy), a następnie wyprowadź następujące wzory na sumę i iloczyn wartości własnych λ_1 i λ_2 macierzy A:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A \qquad \text{oraz} \qquad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$$

30. Niech v będzie (niezerowym) wektorem własnym zarówno przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jak i przekształcenia liniowego $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że v jest wektorem własnym przekształcenia $F \circ G$.

31. Przekształcenia liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oraz $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniają warunek: $G \circ F = F \circ G$. Uzasadnij, że jeśli v jest (niezerowym) wektorem własnym przekształcenia F, to $G(v)$ też jest wektorem własnym przekształcenia F.

32. Gucio i Felek grają w następującą grę: Gucio podaje dowolną macierz rozmiaru 2×2 o wyrazach całkowitych, a Felek zmienia jeden dowolnie wybrany wyraz tej macierzy. Jeśli zmodyfikowana w ten sposób macierz jest diagonalizowalna - wygrywa Felek, a jeśli nie jest diagonalizowalna - wygrywa Gucio. Który z chłopców jest w stanie zapewnić sobie wygraną w tej grze i w jak ma grać, by taką wygraną sobie zapewnić?

3.2 NOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Nowy układ współrzędnych (prostokątny i nieprostokątny). Współrzędne wektora w starym i nowym układzie. Równanie prostej w starym i nowym układzie współrzędnych. Macierz zamiany współrzędnych. Macierz przekształcenia w starych i nowych współrzędnych. Macierz przekształcenia w układzie wyznaczonym przez wektory własne.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wektory $e_1' = \binom{-1}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Narysuj nowy układ współrzędnych i zaznacz wektory v i w takie, że $[v]_{nowy} = \binom{1}{1}$ i $[w]_{nowy} = \binom{2}{1}$. Jakie są stare współrzędne tych wektorów?

2. Wektory $e_1' = \binom{1}{1}$ i $e_2' = \binom{2}{1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Narysuj nowy układ współrzędnych i zaznacz wektory e_1', e_2', $2e_1'+3e_2'$. Jakie są nowe współrzędne każdego z tych wektorów?

3. Wektory $\binom{2}{1}$ i $\binom{1}{-2}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają wektory $\binom{3}{-1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{2}{-4}$ w nowym układzie?

4. Wektory $e_1' = \binom{2}{1}$ i $e_2' = \binom{-1}{2}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w, dla których $[v]_{nowy} = \binom{2}{3}$ i $[w]_{nowy} = \binom{1}{5}$.

5. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e_1' = -e_1$, $e_2' = 2e_2$. Jakie są nowe współrzędne wektora v, dla którego $[v]_{stary} = \binom{x}{y}$?

6. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{2}$ i $e_2' = \binom{1}{1}$. Napisz w nowych współrzędnych równanie prostej, która w starych współrzędnych ma równanie $x + 2y = 0$.

7. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{1}$ i $e_2' = \binom{-1}{1}$. Napisz w starych współrzędnych równanie prostej, która w nowych współrzędnych ma równanie $3x' - y' = 0$.

8. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{1}$ i $e_2' = \binom{2}{1}$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) $[F(e_1')]_{nowy}$ (b) $[F(e_2')]_{nowy}$ (c) $[F(e_1')]_{stary}$ (d) $[F(e_2')]_{stary}$

9. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{-1}$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Wyznacz stare współrzędne wektorów:

(a) $F\left(\binom{1}{1}\right)$ (b) $F\left(\binom{1}{-1}\right)$ (c) $F\left(\binom{2}{0}\right)$ (d) $F\left(\binom{3}{1}\right)$

10. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma wartości własne $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$, a odpowiadające im wektory własne to (odpowiednio) $v_1 = \binom{4}{1}$ i $v_2 = \binom{2}{5}$. Napisz macierz $m_{nowy}(F)$ przekształcenia F w nowym układzie współrzędnych, którego wersorami są v_1 i v_2.

Zadania domowe

11. Wektory $e_1' = \binom{3}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{2}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w, dla których $[v]_{nowy} = \binom{1}{4}$ i $[w]_{nowy} = \binom{5}{-2}$.

12. Wektory $e_1' = \binom{-1}{3}$ i $e_2' = \binom{1}{-1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź nowe współrzędne wektorów v i w, dla których $[v]_{stary} = \binom{2}{3}$ i $[w]_{stary} = \binom{3}{1}$.

13. Wektory $e_1' = \binom{1}{-1}$ i $e_2' = \binom{1}{1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź nowe współrzędne starych wersorów oraz stare współrzędne nowych wersorów.

14. Znajdź taki układ współrzędnych (tzn. wyznacz jego wersory), by wektory $v = \binom{2}{1}$ i $w = \binom{5}{3}$ w nowym układzie miały współrzędne $[v]_{nowy} = \binom{1}{1}$, $[w]_{nowy} = \binom{-1}{1}$.

15. Znajdź taki prostokątny układ współrzędnych (tzn. wyznacz jego wersory), by wektor $v = \binom{1}{1}$ miał nowe współrzędne $[v]_{nowy} = \binom{2}{1}$.

16. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e_1' = 3e_1 - 2e_2$, $e_2' = e_1 + 3e_2$. Jakie są nowe współrzędne wektora v, dla którego $[v]_{stary} = \binom{x}{y}$?

17. Wersory nowego układu współrzędnych spełniają warunek: $e_1 = e_1' + 3e_2'$, $e_2 = e_1' + e_2'$. Jakie są nowe współrzędne wektora v, dla którego $[v]_{stary} = \binom{x}{y}$?

18. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{2}$ i $e_2' = \binom{2}{-1}$. Macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w starych współrzędnych ma postać $m_{stary}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w nowych współrzędnych.

19. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{3}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{3}$. Macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowych współrzędnych ma postać $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz macierz F w starych współrzędnych.

20. Rozpoznaj i narysuj krzywą opisaną równaniem:

(a) $-5x^2+24xy+5y^2 = 1$ (b) $x^2 + xy + y^2 = 1$ (c) $-2x^2+12xy+7y^2 = 1$

Zadania egzaminacyjne

21. Wektory $e_1' = \binom{1}{1}$ i $e_2' = \binom{2}{1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Wyznacz równanie każdej z poniższych prostych w nowych współrzędnych:

(a) $3x + 2y = 0$ (b) $2x - 5y + 1 = 0$ (c) $\binom{x}{y} = t\binom{2}{3} + \binom{1}{1}$

22. Wektory $e_1' = \binom{-1}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{1}$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Wyznacz w starym układzie współrzędnych równania prostych, które w nowych współrzędnych są zapisywane równaniami:

(a) $2x' - 5y' = 0$ (b) $x' + y' + 1 = 0$ (c) $-3x' + 7y' - 1 = 0$

23. W nowym układzie współrzędnych macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest diagonalna. Co można powiedzieć o wersorach tego układu współrzędnych?

24. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{2}{1}$ i $e_2' = \binom{1}{-2}$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Dla wektorów $v = \binom{3}{-1}$ oraz $w = \binom{5}{0}$ wyznacz:

(a) $[F(v)]_{nowy}$ (b) $[F(w)]_{nowy}$ (c) $[F(v)]_{stary}$ (d) $[F(w)]_{stary}$

25. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \binom{1}{3}$ i $e_2' = \binom{2}{4}$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznacz stare i nowe współrzędne wektorów:

(a) $F\left(\binom{1}{3}\right)$ (b) $F\left(\binom{1}{5}\right)$ (c) $F\left(\binom{3}{7}\right)$ (d) $F\left(\binom{0}{2}\right)$

26. Napisz równanie paraboli $y = 2x^2$ w prostokątnym układzie współrzędnych o wersorach $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

4 LICZBY ZESPOLONE

Arytmetyka liczb zespolonych. Część rzeczywista i urojona. Przedstawienie trygonometryczne liczby zespolonej. Moduł i argument. Wzór de Moivre'a. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Postać wykładnicza liczby zespolonej. Układy równań liniowych w liczbach zespolonych. Równanie kwadratowe. Sprzężenie liczby zespolonej. Macierze o zespolonych wartościach własnych.

Zadania rozgrzewkowe

1. Dane są liczby zespolone $z_1 = 2 + i$ oraz $z_2 = 3 - 2i$. Wykonaj następujące działania i wynik przedstaw w postaci $a + bi$.

(a) $z_1 z_2$ (b) z_1/z_2 (c) z_2/z_1 (d) z_1^{-1} (e) z_2^{-1} (f) z_1^2

2. Wyznacz część rzeczywistą i urojoną dla każdej z następujących liczb:

(a) $(2 + 3i)(1 - 5i)$ (b) $(1 - 2i)/(3 + i)$ (c) $(2 + 5i)^2$

3. Dla każdej z wymienionych poniżej liczb zespolonych znajdź moduł, argument, a następnie zapisz ją w postaci trygonometrycznej:

(a) $2i$ (b) $-1 + i$ (c) $4 - 4i$ (d) $\sqrt{3} + i$ (e) $-\sqrt{3} + i$

4. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczbę z oraz liczby $-z$, iz, $\bar{z}$ dla każdej z poniższych liczb.

(a) $z = 1 + i$ (b) $z = 2 + 3i$ (c) $z = 1 - 5i$ (d) $z = -3 + 2i$

5. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:

(a) $(1 - i)^{10}$ (b) $(-\sqrt{3}+i)^8$ (c) $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^7$ (d) $(-\sqrt{3} + i)^{-1}$

6. Dla każdej z liczb 1, i, -1, $i + 1$, zaznacz na płaszczyźnie zespolonej (bez wyliczania części rzeczywistej i urojonej) wszystkie pierwiastki podanego stopnia. Zauważ pewną prawidłowość.

(a) pierwiastki stopnia 2 (b) pierwiastki stopnia 3 (c) pierwiastki stopnia 4

7. Korzystając z postaci trygonometrycznej wyznacz wszystkie pierwiastki podanego stopnia (wylicz części rzeczywiste i urojone), a następnie zaznacz je na płaszczyźnie zespolonej.

(a) pierwiastki z $4i$ stopnia 2 (b) pierwiastki z $8i$ stopnia 3

(c) pierwiastki z -16 stopnia 4

8. Rozwiąż następujące równania (w liczbach zespolonych). Wynik zapisz w postaci $a + bi$.

(a) $(1 + i)z + (2 + i) = (3 + 2i)$ (b) $(2 - i)z + (3 + 2i) = i$

(c) $z^2 + 2z + 2 = 0$ (d) $2z^2 - 3z + 2 = 0$

(e) $z^2 + 4z + 8 = 0$ (f) $z^2 + iz - 1 = 0$

9. Znajdź (zespolone) wartości własne i wektory własne następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Zadania domowe

10. Rozwiąż następujące układy równań:

(a) $\begin{cases} (1+i)z + iw = (1+i) \\ iz + (1-i)w = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} iz + (i-2)w = (3+i) \\ z + (2+i)w = 1 \end{cases}$

11. Wyraź:

(a) $\mathrm{Re}(z_1+z_2)$ oraz $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$ przy pomocy $\mathrm{Re}z_1$, $\mathrm{Im}z_1$, $\mathrm{Re}z_2$, $\mathrm{Im}z_2$.

(b) $\mathrm{Re}(iz)$ oraz $\mathrm{Im}(iz)$ przy pomocy $\mathrm{Re}z$ i $\mathrm{Im}z$.

12. Oblicz następujące potęgi liczb zespolonych:

(a) $(1-i)^{40}$ (b) $(\sqrt{3}-i)^{10}$ (c) $(1-i\sqrt{3})^{50}$

13. Wyznacz oraz zaznacz na płaszczyźnie zespolonej wszystkie pierwiastki:

(a) stopnia 3 z liczby $2i$ (b) stopnia 3 z liczby -8 (c) stopnia 2 z liczby $-4i$

(d) stopnia 3 z liczby 1 (e) stopnia 4 z liczby 1 (f) stopnia 6 z liczby 1

14. Opisz geometrycznie przekształcenie $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ płaszczyzny zdefiniowane wzorem:

(a) $F(z) = iz$ (b) $F(z) = -z$ (c) $F(z) = z + (1+i)$

15. Uzasadnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej t oraz dowolnej liczby zespolonej z zachodzi $|tz| = t \cdot |z|$ oraz $|-z| = |z|$.

16. Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy równe są ich części rzeczywiste i równe są ich części urojone. Wykorzystując ten fakt, wyprowadź wzory:

(a) na $\cos(\theta_1+\theta_2)$ i $\sin(\theta_1+\theta_2)$ wykorzystując wzór (4.3) na mnożenie liczb zespolonych (w przypadku $r_1 = r_2 = 1$);

(b) na $\cos(2\alpha)$ i $\sin(2\alpha)$ wykorzystując wzór de Moivre'a dla $n = 2$;

(c) na $\cos(3\alpha)$ i $\sin(3\alpha)$ wykorzystując wzór de Moivre'a dla $n = 3$.

17. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wskaż taką liczbę zespoloną z, że $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ są wszystkimi pierwiastkami stopnia n z 1. Liczbę z nazywamy wówczas *pierwiastkiem pierwotnym stopnia n z 1*.

18. Przy pomocy diagonalizacji macierzy oblicz:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^{10}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{15}$

19. Udowodnij następujące własności sprzężenia liczby zespolonej:

(a) $|\overline{z}| = |z|$ (b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ (c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(d) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ (e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ (f) $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$

Zadania egzaminacyjne

20. Napisz macierz obrotu o kąt θ, a następnie wyznacz wartości i wektory własne tej macierzy. Jakie są moduły i argumenty tych wartości własnych?

21. Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n, dla których:

(a) liczba $(\sqrt{3}+i)^n$ jest liczbą rzeczywistą o module większym niż 100;

(b) istnieje pierwiastek n-tego stopnia z liczby zespolonej $1+i$, który należy do IV ćwiartki układu współrzędnych.

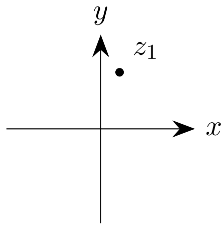
22. Podaj wszystkie rzeczywiste wartości parametru p, dla których macierz $\begin{pmatrix} 2 & p \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ nie diagonalizuje się nawet przy użyciu liczb zespolonych.

23. Macierz A jest macierzą rozmiaru 2×2 o wyrazach rzeczywistych. Jedną z jej wartości własnych jest $1+i$, zaś wektor $\binom{2+i}{3}$ jest wektorem własnym dla tej wartości własnej. Napisz diagonalizację macierzy A.

24. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie:

(a) $(\sqrt{3}+i)^3 = -z^3$ (b) $(i+1)z^4+(i-1)z^2 = 0$ (c) $z^5 + 4z = 0$

25. Na płaszczyźnie zespolonej na poniższym rysunku zaznaczono jedno z rozwiązań (z_1) równania $z^4 = 7 - 24i$. Zaznacz na rysunku trzy pozostałe rozwiązania tego równania.



Zadania z gwiazdką

26. Liczba $z \neq 1$ jest pierwiastkiem stopnia n z jedynki. Oblicz sumę następującego ciągu geometrycznego: $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$. Wykorzystaj ten fakt do ustalenia sumy wszystkich pierwiastków stopnia n z 1.

27. Udowodnij, że suma wszystkich pierwiastków stopnia n z dowolnej liczby zespolonej $z \neq 0$ jest równa 0.

28. Uzasadnij, że każdą zachowującą orientację izometrię liniową płaszczyzny $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ można opisać wzorem: $F(z) = a \cdot z$, gdzie a jest pewną liczbą zespoloną. Jakie liczby zespolone a mogą się pojawić w powyższym wzorze?

29. Uzasadnij, że wzory $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$ oraz $\lambda_1\lambda_2 = \det A$ są prawdziwe również dla macierzy 2×2, która ma zespolone wartości własne. Wykorzystaj te wzory do napisania macierzy o wyrazach rzeczywistych, których wartości własne są równe $\lambda_1 = 3 + 2i$ oraz $\lambda_2 = 3 - 2i$.

5 WEKTORY W PRZESTRZENI

Wektory w $\mathbb{R}^3$ (algebraicznie i geometrycznie). Działania na wektorach. Długość wektora. Równanie sfery. Liniowa niezależność. Kombinacja liniowa. Równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny. Równanie parametryczne i postać krawędziowa prostej w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn skalarny (geomerycznie i algebraicznie). Kąt między wektorami. Nierówność Schwarza. Wektor normalny płaszczyzny. Kąt między płaszczyznami oraz między płaszczyzną a prostą. Rzut wektora na wektor. Odległość punktu od płaszczyzny (w tym znakowana odległość). Nierówność półprzestrzeni.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB, gdzie $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, w stosunku $2 : 1$ (tzn. $|AP| : |PB| = 2 : 1$).

2. Wyznacz promień i środek sfery o równaniu $x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 = 9$.

3. Przedstaw wektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. Znajdź równanie parametryczne płaszczyzny o równaniu ogólnym $2x - 3y + z - 1 = 0$.

5. Znajdź równanie ogólne płaszczyzny, która jest opisana następującym równaniem parametrycznym: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Znajdź równanie parametryczne prostej o postaci krawędziowej: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-7}{5}$.

7. Znajdź postać krawędziową prostej o równaniu parametrycznym: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

8. Napisz równanie parametryczne oraz postać krawędziową prostej przechodzącej przez punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ i równoległej do wektora $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

9. Napisz równanie parametryczne oraz równanie ogólne płaszczyzny:

(a) przechodzącej przez punkty $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$,

(b) przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ i prostopadłej do wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

10. Wyznacz miarę kąta między wektorami $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. Wiedząc, że $|u| = 1$, $|v| = 2$ i $u \circ v = -1$ oblicz $(u + 2v) \circ (u + v)$.

12. Wyznacz rzut wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ na wektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

13. Wyznacz odległość punktu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ od płaszczyzny o równaniu $2x - 3y + z + 1 = 0$.

14. Ustal czy punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ leżą po tej samej stronie płaszczyzny $3x - 2y + z - 1 = 0$.

Zadania domowe

15. Wyznacz współrzędne punktu P, który dzieli odcinek AB, gdzie $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, w stosunku $2 : 1$ (tzn. $|AP| : |BP| = 2 : 1$).

16. Uzasadnij, że środek odcinka łączącego środki krawędzi AB i CD czworościanu $ABCD$ pokrywa się ze środkiem odcinka łączącego środki krawędzi AC i BD tego czworościanu.

17. Napisz równanie sfery o średnicy AB, gdzie $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}3\\5\\7\end{smallmatrix}\right)$.

18. Wśród wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}-2\\2\\-2\end{smallmatrix}\right)$ znajdź:

(a) wszystkie pary wektorów współliniowych,

(b) wszystkie trójki wektorów współpłaszczyznowych.

19. O wektorach $u, v \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że $|u| = 3$ oraz $|v| = 7$. Jaka może być długość wektora $u + v$? Podaj wszystkie możliwości.

20. Napisz równanie ogólne i równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right)$.

21. Przedstaw prostą przechodzącą przez punkty $\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}5\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ w postaci krawędziowej oraz w postaci parametrycznej.

22. Znajdź punkt wspólny podanej płaszczyzny i podanej prostej:

(a) $2x + 3y + z - 5 = 0$ oraz $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{5}$,

(b) $x + y + z - 2 = 0$ oraz $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$,

(c) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\2\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\3\end{smallmatrix}\right)$ oraz $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$,

(d) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\5\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\3\end{smallmatrix}\right)$.

23. Znajdź rzut punktu $P = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ na płaszczyznę o równaniu $x + 2y + z + 1 = 0$ oraz rzut tego punktu na prostą o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

24. Oblicz miarę kąta między płaszczyznami:

(a) $2x + 3y + z - 1 = 0$ i $5x - 2y + z - 2 = 0$,

(b) $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)$

25. Znajdź miarę kąta między prostą o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ a płaszczyzną o równaniu $x + 2y + z = 0$.

Zadania egzaminacyjne

26. Napisz równanie parametryczne i postać krawędziową wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $2x + y - z - 4 = 0$ i $3x + 3y - 2z - 9 = 0$.

27. Napisz równanie parametryczne i postać krawędziową wspólnej prostej płaszczyzn o równaniach $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\0\end{smallmatrix}\right) + s\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\-2\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}-1\\5\\-3\end{smallmatrix}\right)$.

28. Ustal, czy proste o równaniach $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\0\end{smallmatrix}\right) + t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$ przecinają się i znajdź ich punkt przecięcia (jeśli istnieje).

29. Podaj wszystkie wartości parametru p, dla których płaszczyzna o równaniu ogólnym $2x + py - z + 1 = 0$ oraz płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ są prostopadłe.

30. O wektorach u, v, w wiadomo, że $|u| = 3$, $|v| = 2$, $|w| = 1$, $u \perp v$, $u \perp w$ oraz $\angle(v, w) = \pi/3$.

(a) Oblicz $u \circ (u + v + w)$ oraz $(u + v + w) \circ (u + v + w)$.

(b) Wyznacz długość wektora $u + v + w$.

(c) Wyznacz miarę kąta między wektorami u i $u + v + w$.

31. Poniższe równania opisują proste i płaszczyzny. Wskaż wszystkie takie pary równań, które opisują płaszczyznę oraz prostopadłą do niej prostą.

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2x + 3y + z + 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

32. Dla jakiej wartości parametru t punkty $\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 2t \\ t-1 \\ t+1 \end{pmatrix}$ leżą w tej samej odległości od płaszczyzny o równaniu $2x - 3y + z + 1 = 0$, ale po przeciwnych jej stronach?

Zadania z gwiazdką

33. Znajdź miarę kąta między przekątnymi ścian sześcianu wychodzącymi ze wspólnego wierzchołka.

34. Napisz równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, która jest równoległa do prostej $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ i którą prosta o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ przecina pod kątem 60°.

6.1 MACIERZE

Iloczyn wektorowy (geometrycznie i algebraicznie). Pole równoległoboku w $\mathbb{R}^3$. Wyznacznik macierzy 3×3. Znakowana objętość równoległościanu i czworościanu. Orientacja trójki wektorów. Rozwinięcie wyznacznika względem wiersza/kolumny. Układ równań liniowych. Wzory Cramera. Macierz odwrotna.

Zadania rozgrzewkowe

1. Oblicz pole:

(a) równoległoboku rozpiętego przez wektory $\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$,

(b) trójkąta o wierzchołkach $A = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$.

2. Oblicz następujące iloczyny skalarne, wektorowe i mieszane.

(a) $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}\right)$

3. Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$.

4. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$ oraz objętość czworościanu rozpiętego przez te same wektory.

5. Sprawdź, która trójka wektorów jest zorientowana dodatnio, a która ujemnie:

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

6. Oblicz wyznacznik każdej z poniższych macierzy:

(a) $\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\0 & 3 & -2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 4 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\1 & 0 & 4\\0 & 3 & 6\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

7. Rozwiąż metodą Cramera poniższe układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x - y - z = 4\\ 3x + 4y - 2z = -1\\ 3x - 2y - 4z = -1\end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3\\ 2x + 3y + z = 8\\ 4x + y + 5z = -10\end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y - 2z = -4\\ -x + 3y + z = 0\\ 3x + y - z = -1\end{cases}$

8. Znajdź macierz odwrotną (o ile istnieje) dla każdej z poniższych macierzy. Sprawdź (wykonując odpowiednie mnożenia), że faktycznie są one macierzami odwrotnymi:

(a) $\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\0 & 3 & -2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 4 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\1 & 0 & 4\\0 & 3 & 6\end{pmatrix}$

9. Rozwiąż następujące równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\1 & 0 & 4\\0 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Zadania domowe

10. Napisz równanie parametryczne i ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ i równoległej do wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

11. Dany jest czworościan $ABCD$, gdzie $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$. Wyznacz:

(a) pole ściany ABC,

(b) odległość wierzchołka D od ściany ABC (wykorzystując wzór na odległość punktu od płaszczyzny),

(c) objętość czworościanu (wykorzystując wzór wyznacznikowy)

Sprawdź, że wyniki uzyskane w punktach (a), (b) i (c) zgadzają się ze sobą.

12. Jak zmieni się wyznacznik macierzy rozmiaru 3×3, gdy:

(a) cyklicznie zamienimy jej kolumny,

(b) cyklicznie zamienimy jej wiersze,

(c) wszystkie wyrazy macierzy przemnożymy przez t,

(d) zmienimy znak wszystkich wyrazów macierzy.

13. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy:

(a) $\begin{pmatrix}1&2&0\\4&1&5\\3&2&0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\2&-2&2\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}3&2&0\\1&1&1\\4&1&7\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix}a&x&y\\0&b&z\\0&0&c\end{pmatrix}$

14. Przedstaw wektor $\left(\begin{smallmatrix}7\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

15. Dowiedz się, na czym polega metoda obliczania wyznacznika macierzy rozmiaru 3×3 zwana *schematem Sarrusa* i sprawdź, że jest ona zgodna z podaną w skrypcie definicją wyznacznika.

16. Wyznacz macierze A i B spełniające poniższe równania macierzowe:

(a) $\begin{pmatrix}0&3&2\\1&0&4\\0&3&6\end{pmatrix} A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&3\\-1&0&0\end{pmatrix} B \begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&1\\-1&3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

Zadania egzaminacyjne

17. Wskaż, które z poniższych działań mają sens dla wektorów $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

(a) $u \times (v \times w)$, (b) $u \circ (v \times w)$, (c) $(u \circ v) \times w$, (d) $(u \circ v) \circ w$.

18. Uprość każde z poniższych wyrażeń:

(a) $(u \times u) \times u$ (b) $(u \times v) \circ u$ (c) $(u+v)\times(u-v)$ (d) $(u+v)\circ(u-v)$

19. Dla jakich wartości parametru p wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\p+1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}p\\p-2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$ są liniowo niezależne?

20. Wierzchołki A i B czworościanu $ABCD$ leżą na prostej $x = y = z$, zaś wierzchołki C i D leżą na prostej $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Ponadto $|AB| = \sqrt{3}$, $|CD| = \sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{2}$, zaś pole ściany ABC wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Znajdź współrzędne wszystkich wierzchołków jakigokolwiek czworościanu spełniającego wszystkie te warunki.

21. Przedstaw wektor $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ w postaci kombinacji liniowej wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\p+1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}p\\p-2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\2\end{smallmatrix}\right)$, gdzie parametr p przyjmuje jedną z takich wartości, dla których powyższa trójka wektorów jest liniowo niezależna.

22. Wyznacz równanie ogólne jakiejkolwiek płaszczyzny, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- przecina płaszczyznę o równaniu $x = 0$ pod kątem $\frac{\pi}{4}$,
- przecina płaszczyznę o równaniu $y = 0$ pod kątem $\frac{\pi}{3}$,
- przechodzi przez punkt $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Następnie oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia wskazanej płaszczyzny z osiami Ox, Oy i Oz układu współrzędnych.

23. Podaj takie przykładowe wartości parametrów a, b, c, dla których zbiorem rozwiązań poniższego układu równań jest prosta:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ ax + by + cz = 3 \end{cases}$$

24. Podaj wszystkie takie trójki (a, b, c), dla których poniższy układ równań ma więcej niż jedno rozwiązanie.

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = a \\ 3x + y - 5z = b \\ 7x - y - 4z = c \end{cases}$$

25. Trzy wierzchołki czworościanu $ABCD$ mają współrzędne: $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Znajdź przynajmniej jedno z możliwych położeń wierzchołka D, jeśli wiadomo, że:

- objętość czworościanu $ABCD$ wynosi $\frac{1}{3}$,
- wierzchołek D leży na płaszczyźnie o równaniu $x - y + z = 0$,
- pola ścian ABD i ABC są równe.

Zadania z gwiazdką

26. Czy iloczyn wektorowy wektorów w $\mathbb{R}^3$ jest łączny? Odpowiedź uzasadnij.

27. Dany jest czworościan $OABC$ (w $\mathbb{R}^3$), gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. Wektor v_A ma początek na środku ściany OBC, ma kierunek prostopadły do tej ściany, skierowany jest na zewnątrz czworościanu i ma długość równą polu tej ściany. Analogicznie definiujemy wektor v_B (dla ściany OAC), wektor v_C (dla ściany OAB) oraz wektor v_O (dla ściany ABC). Uzasadnij, że:

$$v_A + v_B + v_C + v_O = 0$$

28. Uzasadnij, że dodanie lub odjęcie dowolnej krotności jednej kolumny macierzy 3×3 od innej kolumny tej macierzy nie zmienia wyznacznika. Wykorzystaj tę własność do sprowadzenia macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ do macierzy górnotrójkątnej o tym samym wyznaczniku.

29. Uzasadnij, że dodanie lub odjęcie dowolnej krotności jednego wiersza macierzy 3×3 od innego wiersza tej macierzy nie zmienia wyznacznika.

6.2 PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE I LINIOWE

Przykłady przekształceń afinicznych $\mathbb{R}^3$ (translacja, obrót, odbicie, rzut prostokątny i ukośny, jednokładność, powinowactwo prostokątne, powinowactwo ścinające). Przekształcenia afiniczne i liniowe $\mathbb{R}^3$. Izometrie $\mathbb{R}^3$. Macierz przekształcenia liniowego. Addytywność i jednorodność przekształceń liniowych. Obrazy wersorów. Wyznacznik przekształcenia liniowego. Zachowywanie i zmiana orientacji. Przeciwobraz. Punkt stały. Macierz izometrii.

Zadania rozgrzewkowe

1. Ustal, kiedy następujące przekształcenia afiniczne są przekształceniami liniowymi, kiedy są izometriami i kiedy są izometriami liniowymi:

(a) obrót wokół prostej ℓ o kąt θ,
(b) odbicie względem płaszczyzny π,
(c) odbicie względem prostej ℓ,
(d) jednokładność o środku S i skali k,
(e) rzut prostokątny na płaszczyznę π,
(f) rzut prostokątny na prostą ℓ,
(g) translacja o wektor v,
(h) symetria środkowa o środku S.

2. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) translacja o wektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$,
(b) odbicie względem osi Ox,
(c) odbicie względem osi Oy,
(d) odbicie względem płaszczyzny Oxy,
(e) odbicie względem płaszczyzny Oyz,
(f) symetria środkowa o środku O,
(g) jednokładność o środku O i skali -2,
(h) jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{2}$,
(i) powinowactwo prostokątne o skali 2 względem płaszczyzny Oxz,
(j) powinowactwo ścinające o płaszczyźnie Oxy i wektorze $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(k) przekształcenie zerowe,
(l) przekształcenie identycznościowe,

3. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) rzut (prostokątny) na płaszczyznę o równaniu $x + y + 3z = 0$,
(b) odbicie względem płaszczyzny o równaniu $x + y + 3z = 0$,
(c) powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny o równaniu $x+y+3z = 0$ i skali -2,
(d) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,
(e) odbicie względem prostej o równaniu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(f) symetria środkowa o środku $S = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
(g) jednokładność o środku $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ i skali $k = -3$.

4. O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(u) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Oblicz $F(u + v)$, $F(u - v)$ i $F(4u + 2v)$.

5. Znajdź macierz przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przeprowadzającego punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ odpowiednio na punkty $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Wyznacz (bez żadnych rachunków) obrazy wersorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$:

(a) symetria środkowa o środku O,

(b) odbicie względem osi Oy,

(c) odbicie względem płaszczyzny Oxz,

(d) obrót o $90°$ wokół osi Ox,

(e) jednokładność o środku O i skali 2,

(f) rzut na płaszczyznę Oyz.

7. Wyznacz (bez żadnych obliczeń) wszystkie punkty stałe każdego z przekształceń z poprzedniego ćwiczenia oraz przekształcenia odwrotne do tych przekształceń (o ile istnieją).

8. Znajdź macierze przekształceń liniowych $F \circ G$, $G \circ F$ oraz F^{-1} i G^{-1}, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X, \quad G(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$$

9. Rozstrzygnij która z poniższych macierzy jest macierzą izometrii. Czy zachowuje ona, czy też zmienia orientację? Wyznacz macierz do niej odwrotną.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Zadania domowe

10. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) translacja o wektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) odbicie względem płaszczyzny $y = 3$,

(c) odbicie względem prostej $x = y = 1$,

(d) symetria środkowa o środku $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) jednokładność o środku $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i skali 3,

(f) powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny $y = 3$ i skali 4,

(g) powinowactwo ścinające o płaszczyźnie $x = 2$ i wektorze $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

11. Napisz w postaci $F(X) = AX + v$ wzory następujących przekształceń afinicznych:

(a) rzut (prostokątny) na płaszczyznę o równaniu $2x - y + 2z + 1 = 0$,

(b) odbicie względem płaszczyzny o równaniu $2x - y + 2z + 1 = 0$,

(c) powinowactwo prostokątne o skali -2 względem płaszczyzny o równaniu $2x-y+2z+1 = 0$.

(d) rzut (prostokątny) na prostą o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) odbicie względem prostej o równaniu parametrycznym $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(f) rzut ukośny na płaszczyznę o równaniu $x + y + z + 1 = 0$ w kierunku wektora $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,

(g) powinowactwo ścinające o płaszczyźnie $2x - y + 2z - 1 = 0$ i wektorze $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

12. Znajdź:

(a) punkt symetryczny do punktu $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ względem płaszczyzny o równaniu $x+y+z+1=0$,

(b) rzut (prostokątny) punktu $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ na prostą $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

13. Wyznacz obrazy wersorów oraz macierze następujących przekształceń liniowych $\mathbb{R}^3$:

(a) symetria względem płaszczyzny $y+z=0$,

(b) rzut (prostokątny) na płaszczyznę $y=x$,

(c) symetria względem prostej $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$,

(d) rzut (prostokątny) na prostą $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$,

(e) rzut ukośny w kierunku wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ na płaszczyznę Oxy.

14. Napisz macierz obrotu o kąt θ wokół:

(a) osi Ox, (b) osi Oy, (c) osi Oz.

15. Znajdź wszystkie punkty stałe przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem:

$$F(X) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

16. Ustal czy i jak poniższe przekształcenia liniowe $\mathbb{R}^3$ zmieniają objętości figur oraz czy zachowują, czy zmieniają orientację.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -3 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} X$, (b) $G(X) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -\frac{1}{2} & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} X$, (c) $H(X) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\3 & 1 & -1\end{pmatrix} X$.

17. Podaj przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oraz punktu, którego przeciwobraz przez przekształcenie F jest:

(a) punktem, (b) prostą, (c) płaszczyzną, (d) zbiorem pustym, (e) $\mathbb{R}^3$,

18. Wyznacz (bez żadnych rachunków) przekształcenia odwrotne do następujących przekształceń afinicznych $\mathbb{R}^3$ lub uzasadnij, że przekształcenie odwrotne nie istnieje:

(a) translacja o wektor v,

(b) rzut (prostokątny) na płaszczyznę π,

(c) odbicie względem płaszczyzny π,

(d) symetria środkowa o środku S,

(e) obrót o kąt θ wokół prostej ℓ,

(f) rzut (prostokątny) na prostą ℓ,

(g) odbicie względem prostej ℓ,

(h) jednokładność o środku S i skali $k \neq 0$,

(i) przekształcenie stałe,

(j) przekształcenie identycznościowe.

19. Wyznacz wzory przekształceń afinicznych $F \circ G$ oraz $G \circ F$, gdzie:

$$F(X) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & 1\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 0 & 0\end{pmatrix} X$$

20. Wyznacz przekształcenie odwrotne do przekształcenia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o wzorze:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

21. Uzupełnij poniższą macierz do macierzy izometrii (na wszystkie możliwe sposoby):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

22. Wyznacz przeciwobrazy punktów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ przez następujące przekształcenia afiniczne $\mathbb{R}^3$:

(a) rzut (prostokątny) na płaszczyznę Oxy,

(b) rzut (prostokątny) na oś Ox,

(c) przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o wzorze $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$,

(d) przekształcenie $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o wzorze $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zadania egzaminacyjne

23. Ustal czy podane przekształcenie jest różnowartościowe, czy jest „na”, czy jest odwracalne oraz zapisz jego wzór w postaci $F(X) = AX$, gdzie A jest pewną macierzą prostokątną.

(a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana odległość X od płaszczyzny $3x + 2y + 6z = 0$,

(b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X) = X \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $F(X) = X \times \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $F(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = x \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + y \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$,

(e) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gdzie $F(X)$ to znakowana objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory $(X, \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$.

24. O przekształceniu liniowym $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wiadomo, że dla pewnych wektorów u i v zachodzi $F(3u + v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $F(u + v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Oblicz $F(u)$, $F(v)$ i $F(u + 2v)$.

25. Dane jest przekształcenie liniowe F, takie że $F\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $F\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $F\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Przy pomocy warunku liniowości wyznacz $F\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ i $F\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

26. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oraz wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Wiedząc, że $F(u + v) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $F(v + w) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $F(w + u) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, oblicz $F(u + v + w)$.

27. Znajdź przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, które punkty $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}3\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ oraz $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ przeprowadza odpowiednio na $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Spróbuj zrobić to rozwiązując jedno równanie macierzowe.

Zadania z gwiazdką

28. Udowodnij, że jeśli $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym, to zbiór takich wektorów v, dla których $F(v) = 0$ jest punktem, prostą, płaszczyzną lub całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

29. Przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ to obrót o $120°$ wokół prostej $x = y = z$. Znajdź obrazy wersorów przez F oraz napisz macierz F.

7.1 WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE. NOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

Wartości własne i wektory własne. Wielomian charakterystyczny. Przestrzenie własne. Diagonalizacja macierzy. Zastosowania diagonalizacji (potęgowanie macierzy, wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego). Nowy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$. Stare i nowe współrzędne wektora. Macierz zamiany współrzędnych. Równania płaszczyzny i prostej w nowych i starych współrzędnych. Macierz przekształcenia w starych i nowych współrzędnych. Macierz obrotu wokół prostej w $\mathbb{R}^3$.

Zadania rozgrzewkowe

1. Sprawdź, które z wektorów $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right)$ są wektorami własnymi macierzy $\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\0 & 4 & -4\\0 & -2 & 2\end{pmatrix}$. Dla jakich wartości własnych?

2. Wyznacz wielomiany charakterystyczne, wartości własne i wektory własne następujących macierzy (zakładając, że $a \neq b \neq c \neq a$):

(a) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & -2\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}2 & -5 & 5\\1 & -4 & 5\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\0 & a & 1\\0 & 0 & a\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}a & 1 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & b\end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$

3. Znajdź (bezpośrednio z definicji) wszystkie wartości własne i wektory własne:

(a) symetrii środkowej o środku O,

(b) obrotu o kąt $90°$ wokół prostej o równaniu $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\7\end{smallmatrix}\right)$,

(c) rzutu prostokątnego na płaszczyznę o równaniu $x + y + z = 0$.

4. Zdiagonalizuj następujące macierze lub ustal, że diagonalizacja jest niemożliwa.

(a) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\-6 & 3 & 4\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\4 & 0 & -3\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}9 & -9 & -1\\3 & -1 & -1\\2 & -4 & 4\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}7 & -7 & -3\\2 & 0 & -2\\-1 & -1 & 5\end{pmatrix}$

5. Oblicz następujące potęgi macierzy:

(a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{10}$ (b) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}^{20}$ (c) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}^{50}$

6. Macierz A ma wartości własne $1, 2, -1$, a odpowiadające im wektory własne to, odpowiednio, $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Napisz diagonalizację macierzy A, a następnie wylicz tę macierz.

7. Napisz diagonalizację macierzy odbicia względem płaszczyzny o równaniu $x + y + z = 0$, a następnie wylicz tę macierz.

8. Wektory $e_1' = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2' = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $e_3' = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Jakie współrzędne mają wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$ w tym nowym układzie?

9. Wektory $e_1' = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2' = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e_3' = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ są wersorami nowego układu współrzędnych. Znajdź stare współrzędne wektorów v i w, dla których $[v]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $[w]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\5\end{smallmatrix}\right)$.

10. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Napisz w nowych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w starych współrzędnych ma równanie $x + 2y - 3z = 0$.

11. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$. Napisz w starych współrzędnych równanie płaszczyzny, która w nowych współrzędnych ma równanie $x' + 2y' = 0$.

12. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\4&1&5\end{pmatrix}$. Wyznacz:

(a) $[F(e'_1)]_{nowy}$ (b) $[F(e'_2)]_{nowy}$ (c) $[F(e'_3)]_{nowy}$

(d) $[F(e'_1)]_{stary}$ (e) $[F(e'_2)]_{stary}$ (f) $[F(e'_3)]_{stary}$

13. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w nowym układzie współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ma macierz $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix}-1&3&0\\2&1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$. Wyznacz stare współrzędne wektorów:

(a) $F(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right))$ (b) $F(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right))$ (c) $F(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right))$ (d) $F(\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right))$

Zadania domowe

14. Wyznacz wektory własne i wartości własne podanego przekształcenia $\mathbb{R}^3$ i napisz diagonalizację macierzy tego przekształcenia. Podaj również macierz przekształcenia w nowym układzie współrzędnych, którego wersorami są wektory własne (podaj te wersory).

(a) symetria względem płaszczyzny o równaniu $2x + 3y - z = 0$,

(b) powinowactwo prostokątne względem płaszczyzny o równaniu $2x+y+z = 0$ i skali -2,

(c) rzut ukośny na płaszczyznę o równaniu $x + 2y - 4z = 0$ w kierunku wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$,

15. Macierz A rozmiaru 3×3 ma wartości własne 2 i 1, a odpowiadające im przestrzenie własne to, odpowiednio, prosta o postaci krawędziwej $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ oraz płaszczyzna o równaniu $x - 2y - 4z = 0$. Napisz diagonalizację macierzy A, a następnie wylicz macierz A.

16. Napisz diagonalizację, a następnie wyznacz jakąkolwiek macierz, która ma wartości własne 1, 2, 3, a wśród jej wektorów własnych są wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\1\end{smallmatrix}\right)$.

17. Podaj przykład macierzy, która:

(a) ma podwójną wartość własną i jest diagonalizowalna,

(b) ma podwójną wartość własną i nie jest diagonalizowalna,

(c) ma potrójną wartość własną i jest diagonalizowalna,

(d) ma potrójną wartość własną i nie jest diagonalizowalna.

18. Oblicz następujące potęgi macierzy:

(a) $\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&0\\-6&3&4\end{pmatrix}^{10}$ (b) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}^{10}$ (c) $\begin{pmatrix}7&-7&-3\\2&0&-2\\-1&-1&5\end{pmatrix}^{15}$

19. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$. Napisz w nowych współrzędnych:

(a) równanie płaszczyzny, która w starych współrzędnych ma równanie $2x - y + 4z = 0$.

(b) współrzędne wektora v, którego stare współrzędne to $[v]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\4\end{smallmatrix}\right)$.

20. Dany jest nowy układ współrzędnych o wersorach $e'_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\3\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $e'_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Napisz w starych współrzędnych:

(a) równanie płaszczyzny, która w nowych współrzędnych ma równanie $3x' + 2y' - z' = 0$.

(b) współrzędne wektora v, którego nowe współrzędne to $[v]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\-1\end{smallmatrix}\right)$.

21. Wprowadź nowy układ współrzędnych, w którym macierz obrotu wokół prostej ℓ o postaci krawędziowej $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ będzie jedną z macierzy z poprzedniego zadania. Wykorzystaj tę informację do napisania macierzy obrotu o kąt $\theta = \arccos \frac{4}{5}$ wokół prostej ℓ.

22. Dane są punkty $A = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Napisz macierz przekształcenia liniowego F, dla którego $F(A) = B$, $F(B) = C$, $F(C) = A$:

(a) w nowym, odpowiednio dobranym, układzie współrzędnych,

(b) w starym układzie współrzędnych.

Zadania egzaminacyjne

23. Macierz $A \in M_{3\times 3}$ ma wartości własne 2 i 1. Wektory $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ są wektorami własnymi tej macierzy – jeden z nich przynależy do wartości własnej 2, a pozostałe trzy – do wartości własnej 1. Przypisz wartość własną do każdego z wektorów.

24. Wyznacz wielomian charakterystyczny i wartości własne macierzy $\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & d & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}$ (zwanej *macierzą górnotrójkątną*). Wyznacz wektory własne tej macierzy w przypadku gdy wszystkie wartości własne są pojedyncze.

25. Wyznacz wszystkie przekształcenia liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające jednocześnie następujące warunki:

- $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym dla wartości własnej 2,
- obrazem wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ jest wektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right)$,
- obraz wektora $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ leży na płaszczyźnie yz,
- 1 i -1 są wartościami własnymi tego przekształcenia.

26. Wyznacz wszystkie przekształcenia liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające równocześnie następujące warunki:

- Obraz każdego punktu leży na płaszczyźnie $y - z = 0$.
- Wektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym F dla wartości własnej 2.
- Obraz punktu $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ leży na płaszczyźnie o równaniu $2x + y + z = 0$.
- Wektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ jest wektorem własnym przekształcenia F.

27. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ oraz liniowo niezależne wektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ spełniające warunki: $F(u) = v + w$, $F(v) = u + w$, $F(w) = u + v$. Ustal, czy wektory $u + v + w$ oraz $u - v$ są wektorami własnymi przekształcenia F i (jeśli są) to dla jakich wartości własnych.

28. Poniżej podane są wielomiany charakterystyczne trzech macierzy 3×3. Dla każdej z tych macierzy ustal, czy na podstawie podanych informacji mamy pewność, że macierz diagonalizuje się, czy też nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy macierz się diagonalizuje.

(a) $\chi_A(x) = (1-x^2)(2-x)$ (b) $\chi_B(x) = (1-x)^2(2-x)$ (c) $\chi_C(x) = (1-x)^3$

29. Podaj wszystkie wartości parametrów a, b i c, dla których macierz $\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ jest diagonalizowalna.

30. Napisz dowolną macierz przekształcenia liniowego $\mathbb{R}^3$ spełniającego następujące warunki:

- liczba 2 jest jego wartością własną,
- wektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ są jej wektorami własnymi,
- zbiór punktów stałych tego przekształcenia jest płaszczyzną

31. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dla którego $F(u) = u + v$, $F(v) = w + 2u$, $F(w) = u + v + w$, gdzie $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Napisz macierz F:

(a) w nowym, odpowiednio dobranym, układzie współrzędnych,

(b) w starym układzie współrzędnych,

(c) wyznacz stare i nowe współrzędne wektorów: $F(2u + 3v - 2w)$ i $F(4u - v - w)$.

32. Jak należy dobrać nowy układ współrzędnych, aby dane przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w nowym układzie miało macierz diagonalną? Dla jakich przekształceń jest to możliwe?

33. Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem:

$$F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X$$

(a) Wyznacz zbiór punktów stałych przekształcenia F.

(b) Wprowadź taki nowy układ współrzędnych (tzn. podaj wersory tego układu), w którym zbiorem punktów stałych będzie płaszczyzna rozpięta przez nowe osie Ox' i Oy'.

(c) Zapisz macierz przekształcenia F w nowym układzie współrzędnych.

(d) Zapisz równanie płaszczyzny $x + y + z = 0$ w nowym układzie współrzędnych.

Zadania z gwiazdką

34. Uzasadnij, że jeśli macierz rozmiaru 3×3 ma trzy niewspółpłaszczyznowe wektory własne dla tej samej wartości własnej, to jest macierzą diagonalną.

35. Uzasadnij, że jeżeli A to macierz 3×3 mająca jedną wartość własną λ, a zbiór wektorów dla tej wartości własnej to cała przestrzeń, to $A = \lambda I$.

7.2 TWIERDZENIE SPEKTRALNE. WIELOMIANY

Twierdzenie spektralne. Dzielenie wielomianów z resztą. Twierdzenie Bezouta. Rozkład wielomianu na czynniki. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Zadania rozgrzewkowe

1. Wykorzystując twierdzenie spektralne podaj kilka różnych przykładów macierzy, o których bez rachunków możemy stwierdzić, że są diagonalizowalne (i to bez użycia liczb zespolonych).

2. Wyznacz wartości i wektory własne każdej z poniższych macierzy, a następnie porównaj otrzymane wyniki z twierdzeniem spektralnym.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Zapisz w postaci $X^\top AX$, gdzie $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, zaś A jest macierzą symetryczną, następujące wielomiany kwadratowe trzech zmiennych:

(a) $x^2 + 2xy - 4yz + 3y^2 + z^2$ (b) $4xy + 6yz - 2zx$

4. Rozłóż na iloczyn czynników liniowych (zespolonych) następujące wielomiany:

(a) $z^3 - 5z^2 + 8z - 6$ (b) $2z^3 - 9z^2 + 30z - 13$ (c) $z^3 + 7z^2 + 16z + 10$

Zadania domowe

5. Rozłóż wielomian na iloczyn czynników liniowych wiedząc, że podana liczba z_0 jest jednym z pierwiastków.

(a) $z^4 - 2z^3 + 10z^2 + 6z + 65$, $z_0 = 2 + 3i$, (b) $z^4 + 4$, $z_0 = 1 + i$

6. Wyznacz zespolone wartości własne oraz zespolone wektory własne macierzy obrotu o kąt θ wokół osi Oz.

7. Uzasadnij, że wielomian charakterystyczny macierzy A rozmiaru 3×3 ma postać $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$, gdzie $a = \operatorname{tr} A$ (tzw. *ślad macierzy*, czyli suma wyrazów na głównej przekątnej) oraz $c = \det A$.

Zadania egzaminacyjne

8. Ile rzeczywistych wartości własnych może mieć przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Podaj wszystkie możliwości.

9. Wartościami własnymi macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ są λ_1 i λ_2. Znajdź, wielomian charakterystyczny oraz wartości własne macierzy $B = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.

10. Jakie wartości własne (rzeczywiste lub nierzeczywiste) może mieć macierz A rozmiaru 3×3, która spełnia warunek:

(a) $A^2 = A$ (b) $A^3 = A$ (c) $A^5 = A$

11. Uzasadnij, że macierz rozmiaru 3×3 o wyrazach rzeczywistych nie może mieć podwójnej nierzeczywistej wartości własnej.

12. Podaj przykład takiego wielomianu P o współczynnikach rzeczywistych, który spełnia następujący warunek:

(a) liczby $1 + i$ oraz 2 są pierwiastkami P;

(b) P ma podwójny pierwiastek z_0, będący nierzeczywistą liczbą zespoloną leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

13. Liczby $2+i$ oraz $3-2i$ są pierwiastkami wielomianu P czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych. Wiedząc, że współczynnik przy x^4 wielomianu P wynosi 1, wyznacz rozkład tego wielomianu na iloczyn rzeczywistych wielomianów kwadratowych.

Zadania z gwiazdką

14. Jakie zespolone wartości własne może mieć izometria liniowa $\mathbb{R}^3$? Podaj wszystkie możliwości i każdą zilustruj przykładem.

15. Uzasadnij, że jeśli D jest macierzą diagonalną (o wyrazach zespolonych), której wyrazy na przekątnej są pierwiastkami stopnia n z 1, to macierz $A = PDP^{-1}$ spełnia warunek $A^n = I$.

16. Wykorzystując poprzednie zadanie, podaj kilka przykładów takich (niediagonalnych) macierzy A rozmiaru 3×3, że $A^2 = I$.

Odpowiedzi

1.1.1. (a) $\binom{3}{0}$, $\binom{0}{7}$ oraz 3 i 7, (b) $\binom{-4}{0}$, $\binom{0}{-2}$ oraz 4 i 2, (c) $\binom{x}{0}$, $\binom{0}{y}$ oraz $|x|$ i $|y|$.

1.1.2. $\overrightarrow{AB} = \binom{-2}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \binom{3}{-6}$, $\overrightarrow{AC} = \binom{1}{-4}$

1.1.3. $B = \binom{-1}{11}$, $C = \binom{1}{-2}$

1.1.4. $-\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix}-3\\-4\end{smallmatrix}\right)$, $\vec{u}+\vec{v} = \binom{5}{5}$, $\vec{u}-\vec{v} = \binom{1}{3}$, $2\vec{u}+3\vec{v} = \binom{12}{11}$, $4\vec{u}-3\vec{v} = \binom{6}{13}$

1.1.5. $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix}2\\-\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right)$

1.1.6. $\binom{2}{1}$ i $\binom{6}{3}$, $\binom{5}{0}$ i $\binom{1}{0}$, $\binom{-1}{2}$ i $\binom{2}{-4}$ oraz $\binom{0}{0}$ i dowolny z pozostałych wektorów.

1.1.7. $|\binom{3}{4}| = 5$, $|\binom{2}{-1}| = \sqrt{5}$, $|\binom{1}{2}| = \sqrt{5}$, $|\binom{2}{4}| = 2\sqrt{5}$, $|\binom{0}{0}| = 0$,

1.1.8. (a) $x = 0$, $y = z = 1$, (b) $x = -5$, $y = 2$, $z = 1$, (c) $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 2$

1.1.9. $|AB| = \sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{17}$, $|CD| = 5$, $|DA| = \sqrt{13}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, $|BD| = 4\sqrt{2}$.

1.1.10. (a) $D = \binom{6}{3}$ (b) $C = \binom{0}{-1}$.

1.1.11. (a) $\binom{2}{-1}$, (b) $\left(\begin{smallmatrix}\frac{9}{5}\\-\frac{3}{5}\end{smallmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{smallmatrix}\frac{5}{2}\\-2\end{smallmatrix}\right)$.

1.1.12. $\binom{1}{1} = 2\cdot\binom{1}{2} - \binom{1}{3}$, $\binom{1}{0} = 3\cdot\binom{1}{2} - 2\cdot\binom{1}{3}$, $\binom{0}{1} = -\binom{1}{2} + \binom{1}{3}$.

1.1.13. $\vec{u} = \binom{1}{2}$, $\vec{v} = \binom{2}{1}$

1.1.14. $\binom{4}{0}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{0}{6}$.

1.1.15. Dowolny wektor współliniowy z $\vec{u}$ i mający zwrot zgodny z $\vec{u}$, np. $\vec{v} = \binom{4}{6}$.

1.1.16. (a) $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 1$, (b) $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$, $t = 0$, (c) $x = 0$, $y = -2$, $z = 2$, $t = 1$

1.1.17. $4 \times 4\frac{1}{2} \times 6$

1.1.18. 2, 7, 5, -2, -7

1.1.19. $W(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

1.1.20. $\binom{2}{0}$

1.1.21. (a) $D = \binom{1}{0}$, (b) $D = \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1.22. $P = \binom{5}{5}$, $S = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

1.1.23. $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{v} - \vec{u}$, $\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$.

1.1.24. *Wskazówka*: Zastosuj (wielokrotnie) regułę przykładania.

1.1.25. Dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[3, 7]$.

1.1.26. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$
Wskazówka: Zacznij od przekształcenia układu 3 równań kwadratowych w układ składający się z 1 równania kwadratowego i 2 równań liniowych.

1.1.27. $\binom{0}{0}$, $\binom{-2}{4}$, $\binom{2}{8}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{4}{0}$

1.1.28. *Wskazówka*: Zastosuj (wielokrotnie) wzór na środek odcinka.

1.1.29. *Wskazówka*: Wprowadź układ współrzędnych, gdzie środkiem będzie środek prostokąta, a boki będą równoległe do osi.

1.1.30. *Wskazówka*: Postępuj podobnie jak przy dowodzie pokazanym w skrypcie.

1.2.1. (a) $\binom{-1}{2}$, (b) $\binom{1}{1}$.

1.2.2. (a) np. $6x - 4y + 14 = 0$, $-3x + 2y - 7 = 0$, (b) np. $\binom{x}{y} = t\binom{6}{2} + \binom{1}{2}$, $\binom{x}{y} = t\binom{3}{1} + \binom{4}{3}$.

1.2.3. (a) np. $\binom{x}{y} = t\binom{5}{2} + \binom{1}{1}$, (b) np. $\binom{x}{y} = t\binom{3}{-4} + \binom{-1}{1}$, (c) np. $\binom{x}{y} = t\binom{1}{2} + \binom{1}{1}$.

1.2.4.

(a) $2x + y - 3 = 0$, (b) $2x - y - 5 = 0$, (c) $x - y + 3 = 0$,

1.2.5.

(a) $\binom{x}{y} = t\binom{-1}{2} + \binom{4}{5}$,
(b) $\binom{x}{y} = t\binom{4}{1} + \binom{1}{2}$,
(c) $2x + 3y - 9 = 0$.

1.2.6.

(a) $\binom{x}{y} = t\binom{7}{-5} + \binom{-1}{4}$, (b) $5x + 7y - 23 = 0$.

1.2.7. Po jednej stronie prostej leżą: $\binom{1}{1}$, $\binom{5}{1}$, a po drugiej stronie: $\binom{0}{3}$, $\binom{2}{3}$, $\binom{-1}{2}$.

1.2.8. $x - 4y + 7 \geq 0$ oraz $x - 4y + 7 \leq 0$

1.2.9.

(a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, (b) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 4$

1.2.10.

(a) elipsa (b) hiperbola (c) hiperbola (d) parabola

1.2.11.

(a) $\binom{1}{2}$, (b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (c) $\binom{2}{3}$.

1.2.12. $\binom{3}{4}$

1.2.13. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

1.2.14. $3x + 4y - 17 \geq 0$

1.2.15. $\binom{2}{1}$, $\binom{-2}{3}$ i $\binom{1}{1}$ powyżej, $\binom{4}{-2}$ poniżej.

1.2.16.

(a) $\binom{3}{2}$ i $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

(b) $\binom{0}{1}$ i $\begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{17} \\ -2/\sqrt{17} \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{17} \\ 2/\sqrt{17} \end{pmatrix}$

1.2.17.

(a) hiperbola,

(b) hiperbola,

(c) elipsa o półosiach długości 1 i $\frac{1}{2}$,

(d) elipsa o półosiach długości $\frac{2}{3}$ i 1,

(e) okrąg o środku $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ i promieniu 5,

(f) okrąg o środku $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ i promieniu $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

1.2.18.

(a) prosta $x + y = 0$,

(b) dwie proste równoległe $x + y = 1$ i $x + y = -1$,

(c) dwie proste równoległe $x = 1$ i $x = -1$,

(d) dwie proste przecinające się $x + y = 0$ i $x - y = 0$,

(e) punkt $\binom{0}{0}$,

(f) zbiór pusty.

1.2.19.

(a) $\binom{x}{y} = \binom{3\cos t}{3\sin t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$,

(b) np. $\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$ dla $t \in [0, 1]$,

1.2.20. $\binom{0}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{6}{3}$ oraz $\binom{0}{-5}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{3}{4}$.

1.2.21. Punkt o współrzędnych $x = \frac{1-5\alpha}{3-4\alpha}$ i $y = \frac{11}{3-4\alpha}$ (w przypadku gdy $\alpha \neq \frac{3}{4}$). W przypadku gdy $\alpha = \frac{3}{4}$ proste te są różne i równoległe.

1.2.22. $p < 3$

1.2.23.

(a) $\binom{x}{y} = \binom{2+2\cos t}{3+2\sin t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $\binom{x}{y} = \binom{t}{\sin t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

1.2.24. $\binom{x}{y} = \binom{r\cos t}{r\sin t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 2]$

1.2.25. *Wskazówka*: Rozważ trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są równoległe do osi układu współrzędnych.

1.2.26.

(a) parabola o wierzchołku $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ i osi symetrii równoległej do osi Oy,

(b) parabola o wierzchołku $\binom{-1}{1}$ i osi symetrii równoległej do osi Ox.

1.2.27. $6x^2 - xy - 2y^2 = 0$

1.2.28. $\binom{x}{y} = \binom{2\cos t}{3\sin t}$ dla $t \in [0, 2\pi]$

1.3.1. $\angle(u, v) = 90°$ (kąt prosty), $\angle(v, w) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$ (kąt rozwarty), $\angle(w, u) = \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ (kąt ostry).

1.3.2. $\binom{1}{1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot\cos 45° \\ \sqrt{2}\cdot\sin 45° \end{pmatrix}$, $\binom{-1}{1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cdot\cos 135° \\ \sqrt{2}\cdot\sin 135° \end{pmatrix}$.

1.3.3. (a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

1.3.4. (a) $\frac{4}{5}$, (b) 0, (c) $\frac{10\sqrt{29}}{29}$.

1.3.5.

(a) $4x + y - 7 = 0$ i $\binom{x}{y} = t\binom{1}{-4} + \binom{1}{3}$, (b) $4x + 5y - 13 = 0$ i $\binom{x}{y} = t\binom{5}{-4} + \binom{2}{1}$,

(c) $7x - y - 9 = 0$ i $\binom{x}{y} = t\binom{1}{7} + \binom{2}{5}$.

1.3.6. $p_v(u) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $p_u(v) = \binom{1}{2}$

1.3.7. Dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[-15, 15]$.

1.3.8.

(a) -3, ujemna, (b) 11, dodatnia, (c) -10, ujemna.

1.3.9.

(a) $\frac{11}{2}$, (b) 11, (c) $\frac{3}{2}$.

1.3.10. $\angle BAD = 90°$, $\angle CBA = \arccos\frac{2\sqrt{85}}{85}$ (kąt ostry), $\angle DCB = \arccos\frac{6\sqrt{85}}{85}$ (kąt ostry), $\angle ADC = \arccos(-\frac{4}{5})$ (kąt rozwarty),

1.3.11. (a) Prostokątny (kąt prosty przy wierzchołku B), (b) ostrokątny, (c) rozwartokątny (kąt rozwarty przy wierzchołku C).

1.3.12. (a) AB: $x+2y-5=0$, BC: $3x-y-8=0$, CA: $2x-3y+4=0$.
(b) $|AA'|=\frac{7\sqrt{10}}{10}$, $|BB'|=\frac{7\sqrt{13}}{13}$, $|CC'|=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.
(c) AA': $x+3y-7=0$, BB': $3x+2y-11=0$, CC': $2x-y-4=0$.
(d) $\begin{pmatrix}\frac{19}{7}\\ \frac{10}{7}\end{pmatrix}$

1.3.13. $A'=\begin{pmatrix}\frac{31}{10}\\ \frac{13}{10}\end{pmatrix}$, $B'=\begin{pmatrix}\frac{25}{13}\\ \frac{34}{13}\end{pmatrix}$, $C'=\begin{pmatrix}\frac{13}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}$.

1.3.14. (a) $\arccos\frac{\sqrt{65}}{65}$, (b) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

1.3.15. 3

1.3.16. Nie.

1.3.17. $\frac{1}{2}|ab-3a-2b|$

1.3.18. (a) 9, (b) 34.

1.3.19. (a) 4, (b) 24, (c) 32.

1.3.20. c i d

1.3.21. Rzut wektora $\overrightarrow{AP}$ to $\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$. Rzut punktu P to $\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}$.

1.3.22. $\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}-\frac{8}{5}\\ \frac{6}{5}\end{pmatrix}$.

1.3.23. $A=\left(\begin{smallmatrix}2\\-3\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ lub $A=\left(\begin{smallmatrix}-2\\5\end{smallmatrix}\right)$, $B=\left(\begin{smallmatrix}-1\\4\end{smallmatrix}\right)$.

1.3.24. Wektor $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ (lub jakakolwiek jego niezerowa wielokrotność), prosta $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=t\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$.

1.3.25. *Wskazówka*: Oblicz iloczyn skalarny $\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}$ i wykorzystaj równanie okręgu.

1.3.26. *Wskazówka*: Zastosuj własności z Faktu 1.42 (podobnie jak w dowodzie twierdzenia cosinusów). Interpretacja wzorów:
(a) iloczyn skalarny wektorów wyznaczonych przez przekątne równoległoboku jest równy różnicy kwadratów długości boków,
(b) suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego wszystkich czterech boków.

2.1.1. $2A+B=\left(\begin{smallmatrix}3&4\\-2&3\end{smallmatrix}\right)$, $3C-B+A=\left(\begin{smallmatrix}9&-7\\2&6\end{smallmatrix}\right)$, $A-C=\begin{pmatrix}-2&3\\-2&3\end{pmatrix}$, $A+B+C=\left(\begin{smallmatrix}5&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

2.1.2.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 6 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (3)$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (7)$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

2.1.3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

2.1.4. (a) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, (b) $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$, (c) układ sprzeczny.

2.1.5.

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} \\ -\frac{17}{11} \end{pmatrix}$ $\quad$ (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.1.6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1.7. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2.1.8.

(a) pierwszy wiersz mnoży się przez a, drugi wiersz mnoży się przez b,

(b) pierwsza kolumna mnoży się przez a, druga kolumna mnoży się przez b.

2.1.9. Każdy wyraz macierzy jest mnożony przez a.

2.1.10.

(a) do pierwszego wiersza dodawany jest drugi wiersz,

(b) do drugiej kolumny dodawana jest pierwsza kolumna,

(c) do drugiego wiersza dodawany jest pierwszy wiersz,

(d) do pierwszej kolumny dodawana jest druga kolumna.

2.1.11. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

2.1.12. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.1.13. (a) $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$, (b) $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -14 & 5 \\ 9 & -3 \\ -23 & 8 \end{pmatrix}$, (c) $C = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

2.1.14. $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{9}{4} & 3 \end{pmatrix}$

2.1.15. $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2.1.16.

(a) Nie. (b) Tak.

2.1.17.

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ (b) (10) (c) niewykonalne

(d) niewykonalne

2.1.18.

(a) $\left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ (b) $\left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ (c) $\left(\begin{smallmatrix} x & y \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 5 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

2.1.19. (a), (c), (d)

2.1.20. $a = 1$ lub $a = 3$.

2.1.21. Jeśli $p \neq 1$ i $p \neq -3$, to układ ma jedno rozwiązanie $\begin{cases} x = \frac{p^2+3p-4}{p^2+2p-3} \\ y = \frac{p-1}{p^2+2p-3} \end{cases}$.
Jeśli $p = 1$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.
Jeśli $p = -3$, to układ jest sprzeczny.

2.1.22. *Wskazówka*: Zastosuj (kilkukrotnie) analogiczne wzory dla iloczynu dwóch macierzy.

2.1.23. *Wskazówka*: skorzystaj ze wzoru na transpozycję iloczynu.

2.1.24. $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$

2.1.25. *Wskazówka*: Skorzystaj z definicji macierzy odwrotnej oraz ze wzoru na transpozycję iloczynu macierzy.

2.2.1.

(a) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

(b) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(d) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(e) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

(f) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(g) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(h) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(i) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ 2y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(j) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(k) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(l) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x+y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $F(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

2.2.2. (a) brak, (b), (e), (i), (k) oś Ox, (c), (f), (j), (l) oś Oy, (d), (g), (h) punkt O.

2.2.3. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

2.2.4. Dla wektora v będącego wektorem prostopadłym (normalnym) do prostej ℓ.

2.2.5. Dla dowolnego punktu X, jego obraz X' jest taki sam dla obu przekształceń.

2.2.6. $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2.7.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = v52$

(d) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(g) $F(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(h) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(i) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(j) $F(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(k) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(l) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.2.8.

(a) brak
(b) prosta $y = 2$
(c) prosta $x = 3$
(d) punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
(e) prosta $y = 2$
(f) prosta $x = 3$
(g) punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(h) punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(i) prosta $y = 2$
(j) prosta $x = 3$
(k) prosta $y = 2$
(l) prosta $x = 3$

2.2.9.

(a) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(b) $F(X) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(c) $F(X) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(d) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{9}{10} & \frac{13}{10} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(e) $F(X) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{13}{15} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

(f) $F(X) = \begin{pmatrix} 1+\frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{9\sqrt{10}}{10} & 1-\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$

2.2.10. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2.2.11. Dla dowolnego punktu X, jego obraz X' jest taki sam dla obu przekształceń.

2.2.12. $F(X) = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.2.13. $-2x + 4y + 5 = 0$ (oś odbicia to zbiór punktów stałych)

2.2.14. (a) prosta o równaniu $x = -1$, (b) punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (c) prosta o równaniu $y = 2x$.

2.2.15.

(a) obrót, jednokładność, symetria środkowa, przekształcenie stałe,

(b) odbicie, powinowactwo prostokątne, rzut prostokątny, rzut ukośny, powinowactwo ścinające,

(c) identyczność.

2.2.16. $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

2.2.17. $\begin{pmatrix} \frac{p-q-1}{2} \\ \frac{-p+q-1}{2} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} -q-1 \\ -p-1 \end{pmatrix}$.

2.2.18. (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ (punkt stały), (b) $-90°$.

2.2.19.

(a) $R^P_{90°}(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $R^P_{30°}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$,

(c) $R^P_\theta(X) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1+\sin\theta-\cos\theta \\ 1-\sin\theta-\cos\theta \end{pmatrix}$.

2.2.20. $F(X) = \begin{pmatrix} -y+1 \\ -x-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$

2.3.1.

(a) obrót wokół 0, odbicie względem prostej przechodzącej przez 0, identyczność,

(b) obrót wokół punktu innego niż 0, odbicie względem prostej nie przechodzącej przez 0, translacja o niezerowy wektor,

(c) jednokładność o środku 0 i skali różnej od ± 1, powinowactwo prostokątne o osi przechodzącej przez 0 i skali różnej od ± 1, powinowactwo ścinające o osi przechodzącej przez 0, rzut (prostokątny lub ukośny) na prostą przechodzącą przez 0,

(d) obrót wokół punktu innego niż 0, odbicie względem prostej nie przechodzącej przez 0, translacja o niezerowy wektor, jednokładność o środku innym niż 0, powinowactwo prostokątne o osi nie przechodzącej przez 0, powinowactwo ścinające o osi nie przechodzącej przez 0, rzut (prostokątny lub ukośny) na prostą nie przechodzącą przez 0,

(e) jednokładność o skali różnej od ± 1, powinowactwo prostokątne o skali różnej od ± 1, powinowactwo ścinające, rzut (prostokątny lub ukośny).

2.3.2.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$ (e) $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (f) $\begin{pmatrix} \frac{17}{5} & \frac{16}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$

(g) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, (h) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2.3.3. $F(u+v) = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $F(u-v) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $F(2u+3v) = \left(\begin{smallmatrix} 21 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$

2.3.4. $F(u) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $F(v) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

2.3.5. $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

2.3.6.

(a) $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

2.3.7. Jedno: $F(X) = \begin{pmatrix}2&0\\-1&2\end{pmatrix} X$.

2.3.8. F zachowuje orientację i skaluje pola przez 5 (zwiększa pola 5-krotnie)
G zmienia orientację i skaluje pola przez 1 (zachowuje pola)
H zachowuje orientację i skaluje pola przez $\frac{1}{3}$ (zmniejsza pola 3-krotnie)

2.3.9.

(a) Tak. (b) Tak. (c) Nie. (d) Tak. (e) Tak.

2.3.10.

(a) macierze izometrii $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,

(b) macierze przekształceń zachowujących orientację: $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$; macierze przekształceń zmieniających orientację: $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{\top}$ (macierz izometrii)
$\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}^{\top}$ (macierz izometrii)
$\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{15}{7}&\frac{20}{7}\\\frac{20}{7}&-\frac{15}{7}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}^{\top}$ (macierz izometrii)
$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^{\top}$ (macierz izometrii)

2.3.11.

(a) $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

2.3.12. $F(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

2.3.13. $F(X) = \begin{pmatrix}-1&2\\2&-2\end{pmatrix} X$

2.3.14.

(a) skaluje pola 5 razy (zwiększa 5-krotnie) i zmienia orientację, (b) skaluje pola $\frac{1}{2}$ razy (zmniejsza 2-krotnie) i zmienia orientację, (c) zachowuje pola i zachowuje orientację.

2.3.15.

(a) Zawsze zachowuje orientację.

(b) Zachowuje orientację, gdy $k > 0$ i zmienia orientację, gdy $k < 0$.

(c) Zawsze zachowuje orientację.

2.3.16.

(a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

2.3.17.

(a) jednokładność o skali różnej od ± 1,

(b) dowolne przekształcenie o macierzy A, która nie jest macierzą izometrii, ale $\det A = \pm 1$,

(c) przekształcenie o macierzy $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

2.3.18. $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -1 \end{smallmatrix}\right) X$

2.3.19. $F(u) = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $F(v) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $F(4u + 3v) = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$.

2.3.20. 6

2.3.21. $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$ lub $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{smallmatrix}\right) X$

2.3.22. F obrót (jeden punkt stały, zachowuje orientację, zachowuje pola),
G powinowactwo prostokątne o skali 2 (prosta punktów stałych, zachowuje orientację, pola zwiększa 2-krotnie)
H powinowactwo ścinające (prosta punktów stałych, zachowuje orientację, zachowuje pola).

2.3.23.

(a) obrót, rzut ukośny, odbicie, powinowactwo prostokątne

(b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ w kierunku dodatnim

(c) $-x + 2y = 0$

(d) 6

2.3.24. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

2.3.25. $T = T_{-v}$

2.3.26. Przekształcenie $F(X) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Pole obszaru ograniczonego elipsą to πab.

2.4.1.

(a) $(T_v \circ T_v)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+8 \\ y+4 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $(S_x \circ S_O)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = (S_O \circ S_x)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} -x \\ y \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $(T_v \circ S_x)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+4 \\ -y+2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz $(S_x \circ T_v)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} x+4 \\ -y-2 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $(S_O \circ T_v)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} -x-4 \\ -y-2 \end{pmatrix}$ oraz $(T_v \circ S_O)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} -x+4 \\ -y+2 \end{pmatrix}$,

(e) $(S_O \circ S_A)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$ oraz $(S_A \circ S_O)(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) = \begin{pmatrix} x+2 \\ y+2 \end{pmatrix}$.

2.4.2. (a) R_{180°, (b) $R_{0^\circ} = \mathrm{Id}$, (c) R_{-30°.

2.4.3. $m(F \circ G) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{smallmatrix}\right)$, $m(G \circ F) = \left(\begin{smallmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $m(G \circ H) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $m(H \circ G) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

2.4.4. (a) $G(X) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $G(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$,

2.4.5.

(a) rzut na prostą i dowolny punkt nie leżący na tej prostej; przekształcenie zerowe i punkt różny od 0,

(b) translacja, odbicie, obrót, jednokładność lub powinowactwo prostokątne i dowolny punkt,

(c) rzut na prostą i dowolny punkt na tej prostej,

(d) przekształcenie zerowe i punkt 0.

2.4.6.

(a) obrazy: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: prosta $x = 1$ oraz zbiór pusty,

(b) obrazy: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ oraz punkt $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) obrazy: $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$

(d) obrazy: $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: zbiór pusty oraz prosta $x + y - 1 = 0$

2.4.7.

(a) różnowartościowe i „na”

(b) różnowartościowe i „na”

(c) nie jest ani różnowartościowe, ani „na”

(d) nie jest ani różnowartościowe, ani „na”

2.4.8.

(a) $(R_{\pi/3})^{-1} = R_{-\pi/3}$, $m(R_{\pi/3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $m(R_{-\pi/3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) $(D_{\frac{1}{2}})^{-1} = D_2$, $m(D_{\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $m(D_2) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

(c) $(D_{-2})^{-1} = D_{-\frac{1}{2}}$, $m(D_{-2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $m(D_{-\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(d) $(S_\ell)^{-1} = S_\ell$, $m(S_\ell) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

2.4.9.

(a) $F^{-1}(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) X$

(b) $G^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{1}{17} \end{pmatrix} X$

(c) $H^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} X$

2.4.10. *Wskazówka*: Złożenie dwóch przekształceń afinicznych zawsze jest przekształceniem afinicznym, czyli jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza punkt O na siebie.

2.4.11. $S_\ell(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X$, $R_{90^\circ}(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$, $P_k(X) = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix} X$. Zatem:

(a) $(S_\ell \circ R_{90^\circ})(X) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X$ oraz $(R_{90^\circ} \circ S_\ell)(X) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} X$,

(b) $(S_\ell \circ P_k)(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X$ oraz $(P_k \circ S_\ell)(X) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} X$.

2.4.12. $(F \circ G)(X) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,
$(G \circ F)(X) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$,
$(F \circ H)(X) = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 11 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,
$(H \circ F)(X) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 3 \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$.

2.4.13. (a) $G(X) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, (b) niemożliwe.

2.4.14.

(a) obrót o kąt $-\theta$ wokół punktu P,

(b) odbicie względem prostej ℓ,

(c) translacja o wektor $-v$.

2.4.15.

(a) obraz: $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: prosta $x - y = 0$ oraz prosta $x - y - 2 = 0$

(b) obraz: $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy:

(c) punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ oraz punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

(d) obraz: $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: prosta $2x + 2y - 1 = 0$ oraz zbiór pusty

(e) obraz: $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)$, przeciwobrazy: punkt $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oraz punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2.4.16. $F \circ G$, $G \circ F$ i F^{-1} zmniejszają pola 2 razy, a G^{-1} zwiększa pola 4 razy.

2.4.17. $F^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $G^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$, H^{-1} nie istnieje

2.4.18.

(a) tak, tak, punkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) nie, nie, zbiór pusty,

(c) nie, nie, cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$,

(d) nie, tak, wszystkie punkty prostej o równaniu $3x - 4y = 0$,

(e) nie, tak, wszystkie punkty postaci $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$,

(f) nie, tak, wszystkie punkty postaci $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$,

(g) tak, nie, punkt 0,

(h) tak, tak, punkt 0.

2.4.19.

(a) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(b) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(c) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(d) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ lub $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(e) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ lub $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(f) $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$

(g) $F(x) = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (x)$

(h) $F(x) = (2) \cdot (x)$

2.4.20. Odbicie względem dowolnej prostej, symetria środkowa o dowolnym środku, identyczność.

2.4.21. $S_y(X) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) X$, $S_\ell(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$, $(S_y \circ S_\ell)(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$ (obrót o $-90°$), $(S_\ell \circ S_y)(X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) X$ (obrót o $90°$).

2.4.22. $D_1(X) = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right) X$, $D_2(X) = \left(\begin{smallmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} 1-l \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(D_1 \circ D_2)(X) = \left(\begin{smallmatrix} kl & 0 \\ 0 & kl \end{smallmatrix}\right) X + \left(\begin{smallmatrix} k-kl \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Złożenie będzie translacją, jeśli $kl = 1$.

2.4.23.

(a) Zachowuje orientację. (b) Zachowuje orientację. (c) Zmienia orientację.

2.4.24. *Wskazówka*: Sprawdź, czy złożenie izometrii zachowuje odległości punktów.

2.4.25. *Wskazówka*: Oznacz $F(X) = AX + v$, $G(X) = BX + u$ i wyznacz wzory obu złożeń.

2.4.26.

(a) $T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \circ F \circ T_{-\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$, gdzie F to obrót o kąt $90°$ wokół O,

(b) $T_{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \circ F \circ T_{-\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}$, gdzie F to jednokładność o środku O i skali 2,

(c) $T_{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)} \circ F \circ T_{-\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}$, gdzie F to odbicie względem prostej o równaniu $x + y = 0$,

2.4.27. Wektor prostopadły do obu prostych, o długości równej podwojonej odległości między prostymi i zwrocie od l do k (dla złożenia $S_k \circ S_l$) lub od k do l (dla złożenia $S_l \circ S_k$).

2.4.28. *Wskazówka*: Przeanalizuj obrazy $(F \circ G)(A) = F(G(A))$ oraz $(F \circ G)(B) = F(G(B))$ dla dwóch różnych punktów A i B.

2.4.29. *Wskazówka*: Uzasadnij, że dla dowolnego punktu P z przeciwdziedziny G istnieje taki punkt X, że $(F \circ G)(X) = F(G(X)) = P$.

3.1.1. $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3.1.2.

(a) x^2-2, $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$, $\begin{pmatrix} x \\ (\sqrt{2}-1)x \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} x \\ (-\sqrt{2}-1)x \end{pmatrix}$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$,

(b) $x^2 - 2x$, 0 i 2, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$,

(c) $x^2 - 4x + 3$, 1 i 3, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$,

(d) $x^2 - 4x + 4$, 2, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right)$, nie diagonalizuje się,

(e) $x^2 - 5x - 14$, -2 i 7, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ -4x \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 2y \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$,

(f) $x^2 - 6x + 9$, 3, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, nie diagonalizuje się.

3.1.3. W przypadku $a \neq b$: $(x-a)(x-b)$, a i b, $\binom{x}{0}$ i $\binom{0}{y}$.
W przypadku $a = b$: $(x-a)^2$, a, całe $\mathbb{R}^2$.

3.1.4.

(a) wartości własne 1 (dla wektorów własnych postaci $\binom{x}{0}$) oraz 2 (dla wektorów własnych postaci $\binom{0}{y}$),

(b) wartość własna -1, a wektorem własnym jest każdy wektor z $\mathbb{R}^2$,

(c) wartość własna 1 dla wektorów własnych postaci $\binom{x}{0}$.

3.1.5. $\begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.6. Dla dowolnych wartości a, b i c.

3.1.7. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}$

3.1.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.1.9. Nie.

3.1.10.

(a) wartość własna 1 dla wektorów własnych $\binom{5t}{-2t}$ oraz wartość własna -1 dla wektorów własnych $\binom{2t}{5t}$; macierz $\frac{1}{29}\begin{pmatrix} 21 & -20 \\ -20 & -21 \end{pmatrix}$,

(b) wartość własna 1 dla wektorów własnych $\binom{2t}{7t}$ oraz wartość własna 0 dla wektorów własnych $\binom{7t}{-2t}$; macierz $\frac{1}{53}\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 49 \end{pmatrix}$,

(c) Wartość własna 1 dla wektorów własnych $\binom{3t}{-2t}$ oraz wartość własna 0 dla wektorów własnych $\binom{t}{t}$; macierz $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.1.11. $p > -1$

3.1.12. $+1$ lub -1 (oba przykłady ilustruje odbicie względem prostej).

3.1.13. *Wskazówka*: Jaką własność mają wektory własne dla wartości własnej 0?

3.1.14. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{201}+1 & 2^{201}-2 \\ 4^{100}-1 & 4^{100}+2 \end{pmatrix}$ oraz $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8\cdot 7^n+(-2)^n & 2\cdot 7^n-2\cdot(-2)^n \\ 4\cdot 7^n-4\cdot(-2)^n & 7^n+8\cdot(-2)^n \end{pmatrix}$

3.1.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

3.1.16. np. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.1.17. (a) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dla dowolnego a i dowolnego $b \neq 0$, (b) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ dla dowolnego a.

3.1.18. *Wskazówka*: Skorzystaj z warunków jednorodności i addytywności.

3.1.19. Tak. Jej zbiór wektorów własnych to $\mathbb{R}^2$.

3.1.20. 0 dla $p \in (1,5)$, 1 dla $p \in \{1,5\}$, 2 dla $p \in (-\infty,1) \cup (5,\infty)$.

3.1.21. Wartości własne 4 i 9, a odpowiadające im wektory własne to, odpowiednio, $\binom{1}{2}$ i $\binom{5}{1}$.

3.1.22. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, gdzie $a^2 + b^2 = 1$

3.1.23.

(a) $(x-a)(x-b)$, a i b, $\binom{x}{0}$ oraz $\begin{pmatrix} \frac{2}{b-a} y \\ y \end{pmatrix}$,

(b) $(x-a)^2$, $a = b$, $\binom{x}{0}$.

3.1.24. Dla wartości własnej 0. *Wskazówka*: Użyj warunku liniowości.

3.1.25. 0 lub 1

3.1.26. *Wskazówka*: (a) Oblicz wartość $A \cdot A \cdot v$. (b) Oblicz wartość $(F \circ F)(v) = F(F(v))$.

3.1.27.

(a) $a \neq b$ (b) $b = 0$

3.1.28.

(a) $p = 2$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2^p - 1 \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}$

3.1.29. *Wskazówka:* zastosuj wzory Viete'a.

3.1.30. *Wskazówka*: Oblicz $(F \circ G)(v)$.

3.1.31. *Wskazówka*: Oblicz $G(F(v)) = (G \circ F)(v) = (F \circ G)(v) = F(G(v))$.

3.1.32. Felek, doprowadzając do macierzy symetrycznej.

3.2.1. $[v]_{stary} = \binom{0}{2}$, $[w]_{stary} = \binom{-1}{3}$.

3.2.2. $[e_1']_{nowy} = \binom{1}{0}$, $[e_2']_{nowy} = \binom{0}{1}$, $[2e_1' + 3e_2']_{nowy} = \binom{2}{3}$.

3.2.3. $[\binom{3}{-1}]_{nowy} = \binom{1}{1}$, $[\binom{4}{2}]_{nowy} = \binom{2}{0}$, $[\binom{2}{-4}]_{nowy} = \binom{0}{2}$.

3.2.4. $[v]_{stary} = \binom{1}{8}$, $[w]_{stary} = \binom{-3}{11}$.

3.2.5. $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{2} y \end{pmatrix}$.

3.2.6. $5x' + 3y' = 0$

3.2.7. $2x + y = 0$

3.2.8. (a) $\binom{2}{1}$, (b) $\binom{3}{4}$, (c) $\binom{4}{3}$, (d) $\binom{11}{7}$.

3.2.9. (a) $\binom{1}{1}$, (b) $\binom{5}{-1}$, (c) $\binom{6}{0}$, (d) $\binom{7}{1}$.

3.2.10. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

3.2.11. $[v]_{stary} = \binom{7}{9}$, $[w]_{stary} = \binom{13}{1}$.

3.2.12. $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$, $[w]_{nowy} = \binom{2}{5}$.

3.2.13. $[e_1]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $[e_2]_{nowy} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $[e_1']_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[e_2']_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

3.2.14. $e_1' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.2.15. $e_1' = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ (ale nie jest to jedyne rozwiązanie).

3.2.16. $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}x - \frac{1}{11}y \\ \frac{2}{11}x + \frac{3}{11}y \end{pmatrix}$

3.2.17. $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$

3.2.18. $m_{nowy}(F) = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 19 & -7 \\ 3 & 16 \end{smallmatrix}\right)$

3.2.19. $m_{stary}(F) = \frac{1}{4}\left(\begin{smallmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$

3.2.20.

(a) hiperbola o równaniu $169(x')^2 - 169(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2' = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) elipsa o równaniu $(x')^2 + 3(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) hiperbola o równaniu $50(x')^2 - 25(y')^2 = 1$ w układzie współrzędnych o wersorach $e_1' = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $e_2' = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

3.2.21.

(a) $5x' + 8y' = 0$ (b) $-3x' - y' + 1 = 0$ (c) $\left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right) = t\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$

3.2.22.

(a) $7x + 3y = 0$ (b) $y + 1 = 0$ (c) $5x + 2y - 1 = 0$

3.2.23. Wersory nowego układu to wektory własne F.

3.2.24. (a) $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, (b) $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, (c) $\left(\begin{smallmatrix} 10 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$, (d) $\left(\begin{smallmatrix} 12 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$.

3.2.25.

(a) $[F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $[F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right))]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$,

(b) $[F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right))]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $[F(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right))]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $[F(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right))]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $[F(\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right))]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 24 \end{smallmatrix}\right)$,

(d) $[F(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))]_{nowy} = \left(\begin{smallmatrix} -4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $[F(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))]_{stary} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$,

3.2.26. $18(x')^2 + 32(y')^2 + 48x'y' - 20x' + 15y' = 0$

4.1.

(a) $8 - i$ (b) $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$ (c) $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$ (d) $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

(e) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ (f) $3 + 4i$

4.2.

(a) $\mathrm{Re}z = 17$, $\mathrm{Im}z = -7$ (b) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{10}$, $\mathrm{Im}z = -\frac{7}{10}$ (c) $\mathrm{Re}z = -21$, $\mathrm{Im}z = 20$

4.3.

(a) $|2i| = 2$, $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

(b) $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

(c) $|4-4i| = 4\sqrt{2}$, $\arg(4-4i) = -\frac{\pi}{4}$, $4-4i = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))$

(d) $|\sqrt{3}+i| = 2$, $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$, $\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

(e) $|-\sqrt{3}+i| = 2$, $\arg(-\sqrt{3}+i) = \frac{5\pi}{6}$, $-\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

4.4.

(a) $-1-i$, $-1+i$, $1-i$,

(b) $-2-3i$, $-3+2i$, $2-3i$,

(c) $-1+5i$, $5+i$, $1+5i$,

(d) $3-2i$, $-2-3i$, $-3-2i$.

4.5.

(a) $-32i$ (b) $-128+128\sqrt{3}i$ (c) $64\sqrt{2}-64\sqrt{2}i$ (d) $-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

4.6. (a) są to liczby przeciwne, (b) są to wierzchołki trójkąta równobocznego o środku O, (c) są to wierzchołki kwadratu o środku O.

4.7.

(a) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

(b) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$

(c) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

4.8.

(a) $z = 1$

(b) $z = -1-i$

(c) $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$

(d) $z_1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{7}}{4}$, $z_2 = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{7}}{4}$

(e) $z_1 = -2+2i$, $z_2 = -2-2i$

(f) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

4.9.

(a) $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$, $v_1 = \binom{-i}{1}$, $v_2 = \binom{i}{1}$.

(b) $\lambda_1 = 4+3i$, $\lambda_2 = 4-3i$, $v_1 = \binom{1+3i}{2}$, $v_2 = \binom{1-3i}{2}$.

4.10.

(a) $z = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$, $w = \frac{2}{3}$

(b) $z = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}i$, $w = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

4.11.

(a) $\mathrm{Re}(z_1+z_2) = \mathrm{Re}z_1 + \mathrm{Re}z_2$ oraz $\mathrm{Im}(z_1+z_2) = \mathrm{Im}z_1 + \mathrm{Im}z_2$

(b) $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}z$ oraz $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}z$

4.12.

(a) 2^{20} (b) $512+512\sqrt{3}i$ (c) $-2^{49}-2^{49}\sqrt{3}i$

4.13.

(a) $\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$, $\sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$, $-\sqrt[3]{2}i$

(b) -2, $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$

(c) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

(d) 1, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(e) 1, i, -1, $-i$

(f) 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4.14.

(a) obrót o $\frac{\pi}{2}$ wokół O (b) symetria środkowa o środku O

(c) translacja o wektor $\binom{1}{1}$

4.15. *Wskazówka*: Wykorzystaj analogiczną własność dla wektorów.

4.16.

(a) $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$, $\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$.

(b) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$.

(c) $\cos(3\alpha)=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
$\sin(3\alpha)=-\sin^3\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$

4.17. $z=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n})$.

4.18.

(a) $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-128&128\\-384&128\end{pmatrix}$

4.19. *Wskazówka*: Podstaw $z_1=a+bi$ oraz $z_2=c+di$ (w podpunktach (a) i (b) $z=a+ib$), a następnie wylicz wartość lewej i prawej strony każdej równości.

4.20. Macierz: $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$. Wartości własne: $\lambda_1=\cos\theta+i\sin\theta$, $\lambda_2=\cos\theta-i\sin\theta$; $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$; $\arg\lambda_1=\theta$, $\arg\lambda_2=-\theta$.

4.21.

(a) n podzielna przez 6 i większa niż 6

(b) $n\geq 4$

4.22. $p=-1$

4.23. $\begin{pmatrix}2+i&2-i\\3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+i&2-i\\3&3\end{pmatrix}^{-1}$

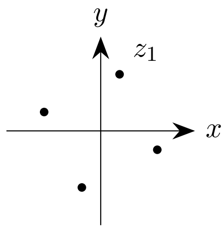
4.24.

(a) $z_1=-\sqrt{3}-i$, $z_2=\sqrt{3}-i$, $z_3=2i$.

(b) $z_1=z_2=0$, $z_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(c) $z_1=0$, $z_2=1+i$, $z_3=1-i$, $z_4=-1+i$, $z_5=-1-i$.

4.25.



4.26. 0

4.27. *Wskazówka*: Uzasadnij, że pierwiastki stopnia n z liczby zesponej z to liczby z_0, wz_0, $w^2z_0, \ldots, w^{n-1}z_0$, gdzie z_0 to jeden z pierwiastków stopnia n z liczby z, zaś w to piewiastek pierwotny stopnia n z 1.

4.28. Dowolna liczba zespolona a spełniająca warunek $|a| = 1$.

4.29. Dowolna macierz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, dla której $a + d = 6$ oraz $ad - bc = 13$.

5.1. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

5.2. Środek $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, promień $\sqrt{14}$.

5.3. $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.4. np. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

5.5. $x - 2y - 3z + 2 = 0$

5.6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

5.7. $x + 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$

5.8. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ oraz $x - 2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-8}{5}$

5.9.

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ oraz $2x + 3y - z = 0$

(b) np $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ oraz $x - y + 2z - 6 = 0$

5.10. $\arccos \frac{2\sqrt{42}}{42}$

5.11. 6

5.12. $\begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ \frac{10}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$

5.13. $\frac{5\sqrt{14}}{7}$

5.14. Nie.

5.15. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}y_0+\frac{2}{3}y_1 \\ \frac{1}{3}z_0+\frac{2}{3}z_1 \end{pmatrix}$

5.16. *Wskazówka*: Zastosuj (kilkukrotnie) wzór na środek odcinka.

5.17. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 = 14$

5.18.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

(b) dowolne trzy spośród wektorów $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

5.19. Dowolna liczba rzeczywista z przedziału $[4, 10]$.

5.20. $x+3y+z-5=0$ oraz np. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

5.21. np. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ oraz $\frac{x-3}{2} = 2-y = 1-z$

5.22.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.23. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ oraz $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

5.24.

(a) $\arccos\frac{\sqrt{105}}{42}$, (b) $\arccos\frac{8\sqrt{77}}{77}$.

5.25. $\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5.26. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ oraz $x-1 = y-2 = \frac{z}{3}$

5.27. np. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $\frac{x-1}{2} = 1-y = z-1$

5.28. $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

5.29. $p = \frac{1}{2}$

5.30.

(a) $u \circ (u+v+w) = 9$, $(u+v+w)\circ(u+v+w) = 16$,

(b) $|u+v+w| = 4$,

(c) $\angle(u, u+v+w) = \arccos\frac{3}{4}$.

5.31. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z \quad$ oraz $2x + 3y + z + 1 = 0$

5.32. $t = -5$

5.33. 60°. *Wskazówka*: Umieść sześcian w dogodnym układzie współrzędnych.

5.34. $y + z = 0$ lub $x + y - 1 = 0$.

6.1.1.

(a) $5\sqrt{11}$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{141}$

6.1.2.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (b) 5 (c) 11

6.1.3. $2x - 3y + 4z - 5 = 0$

6.1.4. Objętość równoległościanu: 53. Objętość czworościanu: $\frac{53}{6}$.

6.1.5. (a) dodatnio, (b) ujemnie, (c) dodatnio.

6.1.6. (a) -8, (b) 2, (c) 0, (d) abc, (e) -4,

6.1.7. (a) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases}$.

6.1.8. (a) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 2 \\ -6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, (b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, (d) nie istnieje.

6.1.9. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

6.1.10. $4x - 7y + 5z - 9 = 0$

6.1.11.

(a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$,

(b) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

(c) $\frac{2}{3}$

6.1.12. (a) nie zmieni się, (b) nie zmieni się, (c) przemnoży się przez t^3, (d) zmieni znak.

6.1.13. (a) 20, (b) 0, (c) 12, (d) 2, (e) abc

6.1.14. $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6.1.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -12 & 9 & -3 \\ 1 & 13 & -1 \\ 11 & -7 & 4 \end{pmatrix}$

6.1.17. (a) tak, (b) tak, (c) nie, (d) nie.

6.1.18. (a) 0, (b) 0, (c) $2v \times u$, (d) $|u|^2 - |v|^2$.

6.1.19. $p \neq \pm\frac{3}{2}$

6.1.20. Jest 16 takich czworościanów. Wierzchołki C i D to:
$\begin{cases} C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ lub $\begin{cases} C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ lub $\begin{cases} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ lub $\begin{cases} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$
natomiast wierzchołki A i B to:
$\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$ lub $\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right.$ lub $\left\{ A = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \right.$
lub $\left\{ A = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right.$

6.1.21. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3-2p}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ p+1 \end{pmatrix} - \frac{3p+1}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{p^2+p-1}{9-4p^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

6.1.22. $\sqrt{2}x + y + z - 1 = 0$ lub $\sqrt{2}x - y + z - 1 = 0$ lub $\sqrt{2}x + y - z + 1 = 0$ lub $\sqrt{2}x - y - z + 1 = 0$.

6.1.23. np. $a = 3$, $b = 7$, $c = 4$

6.1.24. $c = a + b$

6.1.25. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6.1.26. Nie.

6.1.27. *Wskazówka*: $v_A = \frac{1}{2}(B \times C)$, $v_B = \frac{1}{2}(C \times A)$, $v_C = \frac{1}{2}(A \times B)$, $v_O = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC})$.

6.1.28. *Wskazówka*: Skorzystaj z addytywności i jednorodności wyznacznika względem każdej kolumny.

6.1.29. *Wskazówka*: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz z faktu, że transpozycja macierzy nie zmienia wyznacznika.

6.2.1.

(a) zawsze jest izometrią, jest to izometria liniowa, gdy ℓ przechodzi przez O;

(b) zawsze jest izometrią, jest to izometria liniowa, gdy π przechodzi przez O;

(c) zawsze jest izometrią, jest to izometria liniowa, gdy ℓ przechodzi przez O;

(d) jest izometrią, gdy $k = \pm 1$, jest liniowe, gdy $S = O$, jest izometrią liniową, gdy $S = O$ i $k = \pm 1$;

(e) nie jest izometrią, jest liniowe, gdy π przechodzi przez O;

(f) nie jest izometrią, jest liniowe, gdy ℓ przechodzi przez O;

(g) zawsze jest izometrią, jest to izometria liniowa, gdy $v = 0$;

(h) zawsze jest izometrią, jest to izometria liniowa, gdy $S = O$;

6.2.2.

(a) $F(X) = X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, (b) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$, (c) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$,

(d) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$, (e) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$, (f) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$,

(g) $F(X) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X$, (h) $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X$, (i) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$,

(j) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$, (k) $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X$, (l) $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2.3.

(a) $F(X) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -3 \\ -1 & 10 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} X$,

(b) $F(X) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -6 \\ -2 & 9 & -6 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix} X$,

(c) $F(X) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -9 \\ -3 & 8 & -9 \\ -9 & -9 & -16 \end{pmatrix} X$,

(d) $F(X) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X$,

(e) $F(X) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 8 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} X$,

(f) $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

(g) $F(X) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.2.4. $F(u+v) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(u-v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(4u+2v) = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6.2.6.

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.2.7.

(a) punkt stały: O, przekształcenie odwrotne: symetria środkowa o środku O,

(b) punkty stałe: punkty osi Oy, przekształcenie odwrotne: odbicie względem osi Oy,

(c) punkty stałe: punkty płaszczyzny Oxz, przekształcenie odwrotne: odbicie względem płaszczyzny Oxz,

(d) punkty stałe: punkty osi Ox, przekształcenie odwrotne: obrót o -90° wokół osi Ox,

(e) punkt stały: O, przekształcenie odwrotne: jednokładność o środku O i skali $\frac{1}{2}$,

(f) punty stałe: płaszczyzna Oyz, nie ma przekształcenia odwrotnego.

6.2.8. $m(F\circ G)=\begin{pmatrix}4&2&1\\5&1&9\\9&1&12\end{pmatrix}$, $m(G\circ F)=\begin{pmatrix}3&2&4\\6&12&2\\2&5&2\end{pmatrix}$, $m(F^{-1})=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3&2\\-1&1&1\\2&3&-2\end{pmatrix}$, $m(G^{-1})=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&1&-4\\-2&-3&12\\-2&2&2\end{pmatrix}$.

6.2.9. Pierwsza macierz jest macierzą izometrii zmieniającej orientację, a druga nie jest macierzą izometrii.
$$\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&\frac13&-\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac13&\frac23&\frac23\\\frac23&\frac13&-\frac23\\\frac23&-\frac23&\frac13\end{pmatrix}$$

6.2.10.

(a) $F(X)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}$,

(b) $F(X)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$,

(c) $F(X)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$,

(d) $F(X)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$,

(e) $F(X)=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}$,

(f) $F(X)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\-9\\0\end{pmatrix}$,

(g) $F(X)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

6.2.11.

(a) $\frac19\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix}X+\frac19\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$,

(b) $\frac19\begin{pmatrix}1&4&-8\\4&7&4\\-8&4&1\end{pmatrix}X+\frac19\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}$,

(c) $\frac19\begin{pmatrix}-3&6&-12\\6&6&6\\-12&6&-3\end{pmatrix}X+\frac19\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

(d) $F(X)=\frac13\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}X+\frac13\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,

(e) $F(X)=\frac13\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}X+\frac13\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$,

(f) $F(X)=\frac13\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&3&0\\-2&-2&1\end{pmatrix}X+\frac13\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}$

(g) $F(X)=\frac13\begin{pmatrix}5&-1&2\\0&3&0\\-2&1&1\end{pmatrix}X+\frac13\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

6.2.12.

(a) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}\frac53\\\frac23\\\frac13\end{pmatrix}$.

6.2.13.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac12\\\frac12\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0\\\frac12&\frac12&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix}\frac12\\0\\\frac12\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac12\\0\\\frac12\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac12&0&\frac12\\0&0&0\\\frac12&0&\frac12\end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

6.2.14.

(a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta\\0&1&0\\\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ lub $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

6.2.15. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

6.2.16.

(a) zwiększa objętości 3-krotnie, zachowuje orientację,

(b) każdą figurę przekształca na figurę o objętości 0, pytanie o zachowywanie lub zmianę orientacji w tym przypadku nie ma sensu,

(c) zwiększa objętości 7-krotnie, zmienia orientację,

6.2.17.

(a) dowolne przekztałcenie odwracalne i dowolny punkt,

(b) rzut na płaszczyznę i punkt tej płaszczyzny,

(c) rzut na prostą i punkt tej prostej,

(d) rzut na płaszczyznę (prostą) i punkt nie leżący na tej płaszczyźnie (prostej),

(e) przekształcenie stałe i jedyny punkt należący do obrazu przekształcenia.

6.2.18.

(a) translacja o wektor $-v$,

(b) nie istnieje,

(c) odbicie względem płaszczyzny π,

(d) symetria środkowa o środku S,

(e) obrót o kąt $-\theta$ wokół prostej ℓ,

(f) nie istnieje,

(g) odbicie względem prostej ℓ,

(h) jednokładność o środku S i skali $\frac{1}{k}$,

(i) nie istnieje

(j) przekształcenie identycznościowe.

6.2.19. $(F \circ G)(X) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(G \circ F)(X) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.2.20. $F^{-1}(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

6.2.21. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

6.2.22.

(a) prosta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, prosta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, zbiór pusty,

(b) płaszczyzna $x = 1$, zbiór pusty, zbiór pusty,

(c) zbiór pusty, zbiór pusty, prosta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, punkt $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.2.23.

(a) nie jest różnowartościowe, jest „na”, nie jest odwracalne, $F(X) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} X$,

(b) nie jest różnowartościowe, jest „na”, nie jest odwracalne, $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$,

(c) nie jest różnowartościowe, nie jest „na”, nie jest odwracalne, $F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} X$,

(d) jest różnowartościowe $F(X) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X$,

(e) nie jest różnowartościowe, jest „na” (o ile wektory $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ nie są współliniowe), nie jest odwracalne, $F(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$

6.2.24. $F(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(u + 2v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.2.25. $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.2.26. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

6.2.27. $F(X) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} X$

6.2.28. *Wskazówka*: Zauważ, że ów zbiór jest zbiorem rozwiązań pewnego układu równań liniowych.

6.2.29. $F(e_1) = e_2$, $F(e_2) = e_3$, $F(e_3) = e_1$, $m(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ lub $F(e_1) = e_3$, $F(e_2) = e_1$, $F(e_3) = e_2$, $m(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7.1.1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 0, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 3, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 6.

7.1.2.

(a) $-x(x-3)^2$, wektory własne $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 0, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 3,

(b) $-(x-1)(x-2)(x+3)$, wektory własne $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 1, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 2, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej -3.

(c) $-(x-a)^3$, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej a,

(d) $-(x-a)^2(x-b)$, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej a, wektory własne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ dla wartości własnej b.

(e) $-(x-a)(x-b)(x-c)$, wektory własne $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej a, wektory własne $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej b, wektory własne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ dla wartości własnej c.

7.1.3.

(a) każdy wektor $\mathbb{R}^3$ dla wartości własnej -1,

(b) wektory $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 1,

(c) wektory $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 0 oraz punkty płaszczyzny o równaniu $x + y + z = 0$ dla wartości własnej 1.

7.1.4.

(a) $\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&2&0\\ 2&0&3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&2&0\\ 2&0&3 \end{pmatrix}^{-1}$,

(b) macierz nie diagonalizuje się,

(c) macierz nie diagonalizuje się,

(d) $\begin{pmatrix} 2&1&-1\\ 1&0&-1\\ 1&1&2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&4&0\\ 0&0&6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&1&-1\\ 1&0&-1\\ 1&1&2 \end{pmatrix}^{-1}$.

7.1.5. (a) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3^{20}&0&0\\ 0&1&3\cdot 2^{20}-1\\ 0&0&2^{20} \end{pmatrix}$, (c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^{50}+1&3^{50}-1&0\\ 3^{50}-1&3^{50}+1&0\\ 0&0&2\cdot 5^{50} \end{pmatrix}$

7.1.6. $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 2&1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 2&1&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4&-1&1\\ 6&-1&-1\\ 6&-3&1 \end{pmatrix}$

7.1.7. $\begin{pmatrix} 1&1&1\\ -1&0&1\\ 0&-1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&1&1\\ -1&0&1\\ 0&-1&1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1&-2&-2\\ -2&1&-2\\ -2&-2&1 \end{pmatrix}$

7.1.8. $[\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $[\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}]_{nowy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $[\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}]_{nowy} = \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}$.

7.1.9. $[v]_{stary} = \begin{pmatrix} 5\\ 2\\ 4 \end{pmatrix}$, $[w]_{stary} = \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 7 \end{pmatrix}$.

7.1.10. $3x' - y' - 3z' = 0$

7.1.11. $-x + y - 4z = 0$

7.1.12. (a) $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 4 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 0\\ 3\\ 5 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0\\ 9\\ 2 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 3\\ 5\\ 5 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 9\\ 13\\ 3 \end{pmatrix}$.

7.1.13. (a) $\begin{pmatrix} 7\\ 7\\ 6 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -2\\ \frac{3}{2}\\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1\\ \frac{5}{2}\\ 2 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} -4\\ 1\\ -3 \end{pmatrix}$.

7.1.14.

(a) wektory $t\begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej -1 oraz punkty płaszczyzny o równaniu $2x+3y-z=0$ dla wartości własnej 1, np. $\begin{pmatrix} 2&1&0\\ 3&0&1\\ -1&2&3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&1&0\\ 3&0&1\\ -1&2&3 \end{pmatrix}^{-1}$, $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} -1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, jeśli $e_1' = \begin{pmatrix} 2\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) wektory $t\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej -2 oraz punkty płaszczyzny o równaniu $2x+y+z=0$ dla wartości własnej 1, np. $\begin{pmatrix} 2&1&1\\ 1&-2&0\\ 1&0&-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&1&1\\ 1&-2&0\\ 1&0&-2 \end{pmatrix}^{-1}$, $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} -2&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, jeśli $e_1' = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) wektory $t\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 0 oraz punkty płaszczyzny o równaniu $x+2y-4z=0$ dla wartości własnej 1, np. $\begin{pmatrix} 1&4&0\\ 1&0&2\\ 1&1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&4&0\\ 1&0&2\\ 1&1&1 \end{pmatrix}^{-1}$, $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, jeśli $e_1' = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 0\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}$.

7.1.15. $\begin{pmatrix} 2&2&4\\ 3&1&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&2&4\\ 3&1&0\\ 1&0&1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6&4&8\\ -3&14&12\\ -1&2&12 \end{pmatrix}$

7.1.16. Np. $\begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&0\\ 1&1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&3&1\\ 2&4&0\\ 1&1&0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3&-\frac{1}{2}&-1\\ 0&3&-4\\ 0&\frac{1}{2}&0 \end{pmatrix}$.

7.1.17. (a) $\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&a&0\\ 0&0&b \end{pmatrix}$ $(a \neq b)$, (b) $\begin{pmatrix} a&1&0\\ 0&a&0\\ 0&0&b \end{pmatrix}$ $(a \neq b)$, (c) $\begin{pmatrix} a&0&0\\ 0&a&0\\ 0&0&a \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} a&1&0\\ 0&a&0\\ 0&0&a \end{pmatrix}$.

7.1.18. (a) $\begin{pmatrix} -2045&1023&1023\\ 0&1&0\\ -6138&3069&3070 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&1023\\ 0&0&1024 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3{\cdot}4^n+6^n-2{\cdot}2^n & -5{\cdot}4^n-6^n+6{\cdot}2^n & -4^n-6^n+2{\cdot}2^n\\ 6^n-2^n & 3{\cdot}2^n-6^n & 2^n-6^n\\ 3{\cdot}4^n-2{\cdot}6^n-2^n & -5{\cdot}4^n+2{\cdot}6^n+3{\cdot}2^n & -4^n+2{\cdot}6^n+2^n \end{pmatrix}$

7.1.19. (a) $7x' + 6y' + 4z' = 0$, (b) $[v]_{nowy} = \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ -1 \end{pmatrix}$.

7.1.20. (a) $-5x + 3y - z = 0$, (b) $\begin{pmatrix} 3\\ 11\\ 4 \end{pmatrix}$

7.1.21. $\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 37&-16&20\\ 20&40&-5\\ -16&13&40 \end{pmatrix}$ lub $\frac{1}{45}\begin{pmatrix} 37&20&-16\\ -16&40&13\\ 20&-5&40 \end{pmatrix}$.

7.1.22.

(a) $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$ dla wersorów $e_1' = A$, $e_2' = B$, $e_3' = C$,

(b) $m_{stary}(F) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 2&-1&1\\ -3&2&1 \end{pmatrix}$.

7.1.23. $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 1 oraz $\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej 2.

7.1.24. Wielomian charakterystyczny $-(x-a)(x-d)(x-f)$, wartości własne a, d, f. Wektory $\begin{pmatrix} x\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej a, wektory $\begin{pmatrix} \frac{b}{d-a}y\\ y\\ 0 \end{pmatrix}$ dla wartości własnej d, wektory $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ z \end{pmatrix}$ dla wartości własnej f.

7.1.25. $F(X) = \begin{pmatrix} 2&-2&1\\ 0&-1&3\\ 0&0&1 \end{pmatrix} X$

7.1.26. $F(X) = \begin{pmatrix} 2&-2-a&2a+b\\ 0&a&b\\ 0&a&b \end{pmatrix} X$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$

7.1.27. Wektor $u + v + w$ jest wektorem własnym dla wartości własnej 2.
Wektor $u - v$ jest wektorem własnym dla wartości własnej -1.

7.1.28.

(a) diagonalizuje się,

(b) nie jesteśmy w stanie stwierdzić,

(c) nie jesteśmy w stanie stwierdzić.

7.1.29. $a = 0$, b i c dowolne

7.1.30.

7.1.31.

(a) $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 1&2&1\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{pmatrix}$ dla wersorów $e_1' = u$, $e_2' = v$, $e_3' = w$,

(b) $m_{stary}(F) = \begin{pmatrix} -1&7&1\\ -\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&0\\ \frac{3}{4}&-\frac{5}{4}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(c) $[F(2u+3v-2w)]_{nowy} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oraz $[F(4u-v-w)]_{nowy} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $[F(2u+3v-2w)]_{stary} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ oraz $[F(4u-v-w)]_{stary} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

7.1.32. Wersorami powinny być wektory własne. Możliwe jest to dla macierzy diagonalizowalnych.

7.1.33.

(a) wszystkie punkty płaszczyzny o równaniu $x - y + 2z = 0$,

(b) np. $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $m_{nowy}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (dla układu z odpowiedzi (b))

(d) $2x' + 3y' + z' = 0$ (dla układu z odpowiedzi (b))

7.1.34. *Wskazówka*: Zdiagonalizuj tę macierz.

7.1.35. *Wskazówka*: Skorzystaj z tego, że $Av = \lambda v$ dla dowolnego wektora v.

7.2.1. Dowolna macierz symetryczna, tzn. postaci $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

7.2.2.

(a) Wartość własna 4 dla wektorów $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, wartość własna 3 dla wektorów $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, wartość własna 1 dla wektorów $\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Wartość własna 3 dla wektorów $\begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$, wartość własna 0 dla wektorów $\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

7.2.3. (a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

7.2.4.

(a) $(z-3)(z-(1-i))(z-(1+i))$

(b) $2(z-\frac{1}{2})(z-(2+3i))(z-(2-3i))$

(c) $(z+1)(z+(3-i))(z+(3+i))$

7.2.5.

(a) $(z-(2+3i))(z-(2-3i))(z+(1-2i))(z+(1+2i))$

(b) $(z-(1+i))(z-(1-i))(z+(1-i))(z+(1+i))$

7.2.6. Wartość własna $\cos\theta + i\sin\theta$, wektory własne $t\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ oraz wartość własna $\cos\theta - i\sin\theta$, wektory własne $t\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$.

7.2.7. *Wskazówka*: Zauważ, że $\chi_A(0) = \det A$.

7.2.8. 1, 2 lub 3

7.2.9. $-(x-p)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, wartości własne p, λ_1, λ_2.

7.2.10. (a) 0 lub 1, (b) 0 lub 1 lub -1, (c) 0 lub ± 1 lub $\pm i$.

7.2.11. *Wskazówka*: Uzasadnij, że wielomian stopnia 3 nie może mieć podwójnego nierzeczywistego pierwiastka.

7.2.12.

(a) np. $(x-2)(x-(1+i))(x-(1-i)) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$

(b) np. $(x-(1+i))^2(x-(1-i))^2 = (x^2 - 2x + 2)^2$

7.2.13. $(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)$

7.2.14. 1 lub -1 (np. symetria względem płaszczyzny lub prostej) lub $\cos\theta + i\sin\theta$, dla dowolnego θ (np. obrót o kąt θ wokół osi Oz).

7.2.15. *Wskazówka*: $A^n = PD^nP^{-1}$.

7.2.16. Dowolna macierz postaci $P\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}P^{-1}$.