Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. (-) Znajdź pokolorowanie grafu Mycielskiego M_4 za pomocą algorytmu sekwencyjnego.

2. (+) Niech M_k będzie k-tym grafem Mycielskiego. Wykaż, że M_k nie zawiera trojkątow i $\chi(M_k) = k$ dla każdego k.

3. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy" od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

4. (-) Zmodyfikuj algorytm Dijkstry tak, by działał dla grafów skierowanych.

5. Czy algorytm Dijkstry działa również wtedy gdy krawędzie mogą mieć ujemne wagi? Który fragment dowodu poprawności tego algorytmu nie zachodzi w przypadku ujemnych wag?

6. Załóżmy, że chcielibyśmy obliczyć najkrótszą scieżkę między wierzchołkami s i t w grafie G, w którym wagi c niektórych krawędzi są ujemne. Niech z oznacza najmniejszą wagę ujemną krawędzi w grafie. Zdefinujmy nową funkcję wag $c'(e) = c(e) - z$. Czy w każdym przypadku najkrótsza ścieżka miedzy s i t w G względem c' jest również najkrótszą ścieżką w G względem c?

7. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

8. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

9. (+) Graf *przedziałowy* to graf utworzony ze zbioru odcinków na prostej, poprzez przypisanie każdemu odcinkowi wierzchołka i połączenie krawędziami każdej pary wierzchołków, dla której odpowiadające im odcinki mają niepuste przecięcie. Opracuj wielomianowy algorytm kolorowania wierzchołków grafu przedziałowego G, który używa $\chi(G)$ kolorów.

10. (+) Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G. Pokaż, że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu G.

    Pokaż, jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.

11. (+) Organizowany jest turniej n osób, w którym każdy gra z każdym. Każda rozgrywka kończy się wygraną dokładnie jednej z osób - nie ma remisów. Wynik turnieju to graf pełny skierowany na n wierzchołkach, w którym krawędź skierowana z u do v oznacza wygraną wierzchołka u w meczu z v. Czy możliwy jest wynik turnieju, w którym różnica liczby wygranych dowolnych dwóch osób jest niewiększa od 1?

    Ogólniej, czy dla każdego ciągu n liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takiego, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = \binom{n}{2}$ istnieje wynik turnieju taki, że osoba i wygrała dokładnie a_i pojedynków? W obu przypadkach pokaż algorytm znajdowania takiego rozkładu, o ile istnieje.

    Wskazówka: przepływy.

12. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i $b : V \to N$. Wtedy $M \subseteq E$ jest *b-skojarzeniem*, jeśli $\forall_{v \in V}\ deg_M(v) \leq b(v)$ (liczba krawędzi z M incydentna do v nie przekracza $b(v)$).

    Skonstruuj wielomianowy algorytm znajdujący największe licznościowo b-skojarzenie w grafie dwudzielnym.

    Wskazówka: przepływy.

Jeszcze co najmniej jedno zadanie będzie dodane do tej listy.