

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 12a

3 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

Uwaga! Z list 12a i 12b **nie można**
zdobyć łącznie więcej niż **12 punktów**.

- L12.1.** 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania Pw0++ ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(f)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-20}^{24} f(x)dx$, gdzie $f \in C[-20, 24]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x) dx \quad (a < b; g \in C[a, b])?$$

- L12.2.** 1 punkt Udowodnij, że kwadratura postaci

$$(1) \quad Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

ma rząd $\geq n + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

- L12.3.** 2 punkty Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła f , liczby $a < b$ oraz parami różne węzły x_0, x_1, \dots, x_n . Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami x_0, x_1, \dots, x_n przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Jak wiadomo, współczynniki A_k ($0 \leq k \leq n$) kwadratury Q_n ,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników A_0, A_1, \dots, A_n i określ jego złożoność.

- L12.4.** 1 punkt Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$(2) \quad Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(a + k \cdot h_n) \quad \left(h_n := \frac{b-a}{n} \right)$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

L12.5. 1 punkt Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.??–L12.??**) i określ jego złożoność.

L12.6. **Włącz komputer!** 1 punkt Wykorzystując **własną implementację algorytmu**, o którym mowa w zadaniu **L12.??**, oblicz $Q_n^{NC}(f)$ ($2 \leq n \leq 24$) dla całki

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + 25x^2}.$$

Skomentuj wyniki.

(–) Paweł Woźny