3 章 Part3

Taka-N

2023 年 2 月 24 日

対称形の双対性

最小化：$c^T x$
制約条件：$Ax \geqq b \quad (x \geqq 0)$
この最小化問題に対する双対問題は下記に示す最大化問題になる。
最大化：$b^T y$
制約条件：$A^T y \leq c$
上述の主問題・双対問題のことを**対称形**という。
スラック変数 s を導入すると、主問題・双対問題は下記のようになる。

最小化：$c^T x$
制約条件：$Ax - s \geqq b \quad (x, s \geqq 0)$

最大化：$b^T y$
制約条件：$A^T y \leq c$, $y \leq 0$

主問題の実行可能解を $\bar{x}$, 双対問題の実行可能解を$\bar{y}$ とすると、各制約条件より
$A\bar{x} = b, \quad c - A^T\bar{y} \geqq 0$
が成立する。
$\bar{x} \geqq 0, \quad c - A^T\bar{y} \geqq 0$ より, $0 \leqq \bar{x}^T(c - A^T\bar{y})$
展開して $\bar{x}^T(c - A^T\bar{y}) = \bar{x}^T c - (A\bar{x})^T\bar{y}$
$A\bar{x} = b$ より,$\bar{x}^T c - (A\bar{x})^T\bar{y} = \bar{x}^T c - b^T\bar{y} = \bar{f}_d = \bar{f}_p$
双対定理より、$\bar{x}, \bar{y}$ がそれぞれ最適解になる条件は、$\bar{f}_d = \bar{f}_p$ である。
よって最適性条件は $\bar{x}(c - A^T\bar{y}) = 0$
以上より、この定理を導くことができる。

相補性定理

x, y が主問題・双対問題の最適解になるための必要十分条件は次の 3 つが成立することである。
[1] $Ax = b$ →主問題の実行可能性を満たしている。
[2] $A^T y \leqq c$ →双対問題の実行可能性を満たしている。
[3] $\bar{x}^T(c - A^T\bar{y}) = 0$ → $\bar{f}_d = \bar{f}_p$ を満たしている。

感度解析と再最適化

線形問題の最適解が求められた後で、目的関数の係数や制約条件の定数項が変化した時の最適解の変化について調べることを**感度解析**という。また、係数や定数項が変化した場合に最適解を求める下記の線形問題の標準形を解き、最適解が求まっているものとする。
最小化：$w = c^T x$
制約条件：$Ax = b$
この時、最適基底変数 $x_B = B^{-1}b \geqq 0$, 単体乗数 $y = (B^{-1})^T c_B$, 目的関数値 $w = b^T y$, 最適性基準 $c_i - {a_i}^T y \geqq 0$
が成立している。
ここで、$c = \bar{c} = c + \Delta c$ に変わったとする。
P98 のような計算を行うと、下記のことが判明する。
(1)$\bar{c} \geqq 0$ ならば、変化後も最適性基準が満たされている。
(2) その時の目的関数値は $w + \Delta {c_B}^T x_B$

二者択一定理

早速だが、線型不等式論のうち有名な **Farkas の定理**について紹介する。

Farkas の定理

任意の行列 $(m \times n)$ 行列 A と任意のベクトル $b \in R^m$ に対して下記の命題の**どちらか一方だけが**成立する。
(1)$Ax = b, x \geqq 0$ を満たす x が存在する。
(2)$A^T y \leqq 0, b^T y \geq 0$ を満たす y が存在する。

早速この定理について証明していく。
まず、「どちらか一方だけが成立する」とあるので、「片方が成立しないときにもう片方が成立する」というパターンを証明すれば問題ないことがわかる。
そのため、下記の 2 パターンを証明する。以下、(1) を満たす x の集合を X, (2) を満たす y の集合を Y とおいて考える。
[1] X が空集合でないときに、Y が空集合であることを示す。
背理法で示す。X が空集合でないときに、Y も空集合でないとする。この時、$0 \leqq b^T y = (Ax)^T y \leqq x^T(A^T y) \leqq 0$ となり矛盾。

よって X が空集合でないときに、Y は空集合。
[2]X が空集合であるときに、Y も空集合であることを示す。
X が空集合なので、主問題は実行可能解を持たない。
弱双対定理の系 3.1(2) より、双対問題の目的関数が有界でない or 実行可能解を持たないのどちらかが成立する。
しかし、双対問題には $y = 0$ という自明な解があるため、目的関数は上に有界ではない。（消去法的な感じ）
目的関数が上に有界ではないので、$b^T y$ はいくらでも大きくできるため、$b^T y \leqq, A^T y \geqq 0$ を満たすベクトル y が存在する。
よって X が空集合であるときに、Y も空集合

参考文献

[1]NTT データ数理システム. 双対単体法. 数理計画用語集—株式会社 NTT データ数理システム. https://www.msi.co.jp/solution/nuopt/glossary/term_858eb936fb0ba142e517d9dea5d922fe4463fafb.html