Linear Algebra Exercises Part01

Taka.N

2024 年 12 月 20 日

Prob1.1

行列 X, Y が同サイズで積 XY が定義できるとする。$(XY)^T = Y^T X^T$ であることを示せ。

Solution: XY の (i,j) 成分を $(XY)_{ij}$ とする。このとき、

$$(XY)_{ij} = \sum_k X_{ik} Y_{kj}.$$

転置をとると、

$$(XY)^T_{ij} = (XY)_{ji} = \sum_k X_{jk} Y_{ki}.$$

一方で $Y^T X^T$ の (i,j) 成分は

$$(Y^T X^T)_{ij} = \sum_k (Y^T)_{ik} (X^T)_{kj} = \sum_k Y_{ki} X_{jk}.$$

よって $(XY)^T = Y^T X^T$ が示された。

Prob1.2

行列 X, Y, Z が適切なサイズで積 XYZ が定義できるとする。$(XYZ)^T = Z^T Y^T X^T$ であることを示せ。

Solution: (1) の結果を二度適用することで示す。

$$(XYZ)^T = (X(YZ))^T = (YZ)^T X^T.$$

さらに $(YZ)^T$ に (1) を適用すると、

$$(YZ)^T = Z^T Y^T.$$

したがって、

$$(XYZ)^T = Z^T Y^T X^T.$$

Prob1.3

$n \times n$ 行列 A が可逆であるとき、A^T も可逆であり、$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ であることを示せ。

Solution: A が可逆であるならば、A^{-1} が存在する。このとき、

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I.$$

したがって、$(A^{-1})^T$ は A^T の逆行列となる。よって、

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$