

PRML 2 章練習問題解答

Taka007

最終更新日：2023 年 12 月 12 日

目次

2-1	2
2-12	2
2-26	3
参考文献	3

2-1

[1] ベルヌーイ分布は正規化されている。つまり下記が成立することを示す。

$$\sum_{n=0}^1 p(x|\mu) = 1$$

ベルヌーイ分布は $Ber(x|\mu) = \mu^x(1-\mu)^{1-x}$ となる。

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^1 Ber(x|\mu) &= Ber(0|\mu) + Ber(1|\mu) = \mu^0(1-\mu)^{1-0} + \mu^1(1-\mu)^{1-1} = 1 \times (1-\mu) + \mu \times 1 \\ &= 1 - \mu + \mu = \underline{1}\end{aligned}$$

上記より、

$$\sum_{n=0}^1 Ber(x|\mu) = 1$$

が成立するので、ベルヌーイ分布は正規化されている。

[2] $E[x] = \mu$ であることを示す。

$$E[x] = 0 \times Ber(0|\mu) + 1 \times Ber(1|\mu) = 0 \times (1-\mu) + 1 \times \mu = \underline{\mu}$$

[3] $V[x] = \mu(1-\mu)$ であることを示す。

$$V[x] = E[x^2] - E[x]^2$$

$$\text{ここで、} E[x^2] = 0^2 \times Ber(0|\mu) + 1^2 \times Ber(1|\mu) = 0 \times (1-\mu) + 1 \times \mu = \underline{\mu}$$

$$\text{よって、} V[x] = \mu - \mu^2 = \underline{\mu(1-\mu)}$$

[4] エントロピー $H[x]$ が $-\mu \log_e \mu - (1-\mu) \log_e \mu(1-\mu)$ であることを示す。

エントロピーは下記のように定義される。(P.50)

$$H[p] = - \sum_i p(x_i) \log_e p(x_i)$$

$$H[x] = - \sum_i Ber(x_i|\mu) \log_e Ber(x_i|\mu) = - \sum_i \mu_i^x (1-\mu)^{1-x_i} \log_e \mu_i^x (1-\mu)^{1-x_i}$$

2-12

一様分布は下記のように定義される。

$$U(x|a,b) = \frac{1}{b-a} \quad (a \leq x \leq b)$$

2-26

下記の *Woodbury* 行列反転公式を証明せよ。

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

A, B, C, D は行列とする。

$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$ を示す。

右辺に $(A + BCD)$ を右から掛ける。

$$(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1})(A + BCD) =$$

参考文献

[1] Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.