作业一: 带皮亚诺余项的泰勒定理问题的叙述与证明

邵盛栋
信息与计算科学 3200103951

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自数学分析领域的问题, 如果函数 f 在点 x_0 可导, 则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

即在点 x_0 附近, 用一次多项式 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 逼近函数 $f(x)$ 时, 其误差为 $(x - x_0)$ 的高阶无穷小量. 然而在很多场合, 取一次多项式逼近是不够的, 往往需要用二次或高于二次的多项式去逼近, 并要求误差为 $o((x-x_0)^n)$, 其中 n 为多项式的次数. 为此, 我们考察任一 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{1}$$

逐次求它在点 x_0 的各阶导数, 得到

$$p_n(x_0) = a_0, p'_n(x_0) = a_1, p''_n(x_0) = 2!a_2, \cdots, p_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

即

$$a_0 = p_n(x_0), a_1 = \frac{p'_n(x_0)}{1!}, a_2 = \frac{p''_n(x_0)}{2!}, \cdots, a_n = \frac{p_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

由此可见, 多项式 $p_n(x)$ 的各项系数由其在点 x_0 的各阶导数值所唯一确定.

对于一般函数 f, 设它在点 x_0 存在直到 n 阶的导数. 由这些导数构造一个 n 次多项式

$$\begin{aligned} T_n(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ & \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned} \tag{2}$$

称为函数 f 在点 x_0 的**泰勒多项式**,$T_n(x)$ 的各项系数 $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(k=1,2,\cdots,n)$ 称为**泰勒系数**. 由上面对多项式系数的讨论, 易知 $f(x)$ 与其泰勒多项式 $T_n(x)$ 在点 x_0 有相同的函数值和相同的直至 n 阶导数值, 即

$$f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0),k=0,1,2,\cdots,n \tag{3}$$

下面要证明 $f(x)-T_n(x)=o((x-x_0)^n)$, 即以式 2所示的泰勒多项式逼近 $f(x)$ 时, 其误差为关于 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量.

1 定理描述

定理叙述如下: 若函数 f 在点 x_0 存在直至 n 阶导数, 则有 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$, 即

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\\ &\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \end{aligned} \tag{4}$$

2 证明

设

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x),Q_n(x)=(x-x_0)^n$$

现在只要证

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=0$$

由关系式 3可知,

$$R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$$

并易知

$$Q_n(x_0)=Q_n'(x_0)=\cdots=Q_n^{(n-1)}(x_0)=0,Q_n^{(n)}(x_0)=n!$$

因为 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 所以在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上 f 存在 $n-1$ 阶导函数.

于是, 当 $x \in U^\circ(x_0)$ 且 $x \to x_0$ 时, 允许接连使用洛必达法则 $n-1$ 次, 得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n'(x)}{Q_n'(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{Q_n^{n-1}(x)} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n(n-1)\cdots 2(x-x_0)} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

定理所证的式 4称为函数 f 在 x_0 的**泰勒公式**,$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ 称为**泰勒公式的余项**, 形如 $o((x-x_0)^n)$ 的余项称为**皮亚诺 (Peano) 型余项**. 所以式 4又称为**带有皮亚诺型余项的泰勒公式**.