

Julia 集的分析 and 探索

邵盛栋

信息与计算科学

3200103951

2022 年, 7 月 4 日

目录

- 1 引言
- 2 数学理论
- 3 算法
- 4 数值算例
- 5 结论

引言

Julia 集合可由下式进行反复迭代得到：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

对于固定的复数 c ，取某一 z 值（如 $z = z_0$ ），可以得到序列

$$z_0, f_c(z_0), f_c(f_c(z_0)), f_c(f_c(f_c(z_0))), \dots$$

这一序列可能反散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集合。

背景:

Julia 集以法国数学家 Gaston Julia 的名字命名, 他在 1915 年研究了它们的性质, 并在 1918 年发表了他的著名论文: **Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles**. 虽然 Julia 集现在与 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 有关, 但 Julia 感兴趣的是更一般表达式的迭代性质, 即

$$z^4 + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^2}{z^3 + 4z^2 + 5} + c$$

由 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 定义的 Julia 集合可以有各种形状, c 的一个小变化可以极大地改变 Julia 集合。1979 年, 在计算机的帮助下, B.B.Mandelbrot 研究了 Julia 集, 试图对所有可能的形状进行分类, 并提出了一个新的形状: Mandelbrot 集 [1]。

与 Mandelbrot 集之间的关系：

由于 Mandelbrot 集合的定义，在给定点上 Mandelbrot 集合的几何与对应的 Julia 集合的结构之间有密切的对应关系。换句话说，Mandelbrot 集合形成了 Julia 集合的一种索引。[2] Julia 集合要么是连通的，要么是断开的，从 Mandelbrot 集合内选择的 c 值是连通的，而从 Mandelbrot 集合外选择的 c 值是断开的。这些不相连的集合通常被称为 *dust*，它们由独立的点组成，不管它们以什么分辨率被观察 [3]。

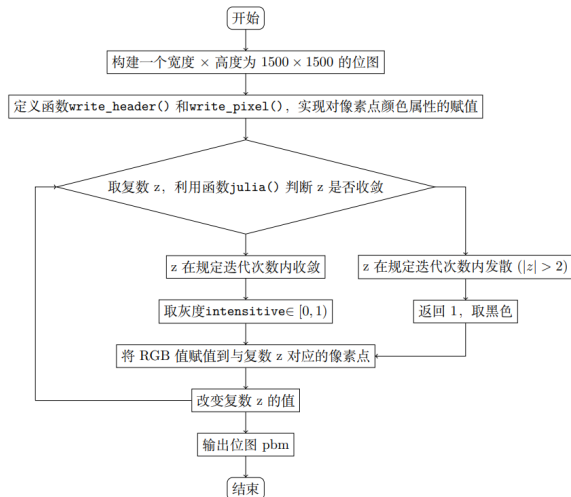
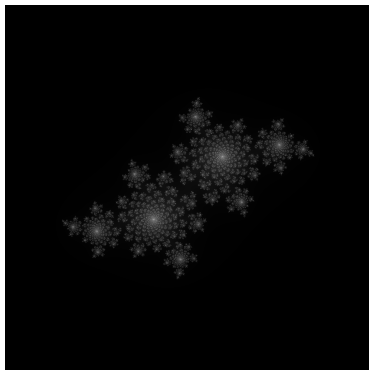
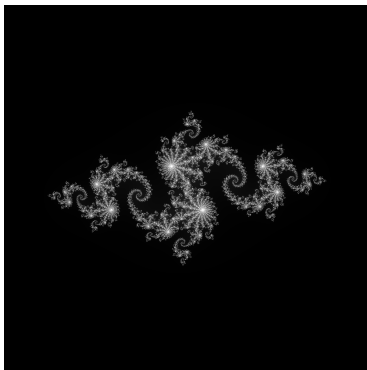


图 1: 具体算法

数值算例

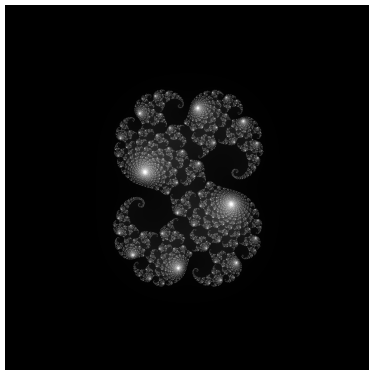


(a) $c = -0.4 + 0.6i$

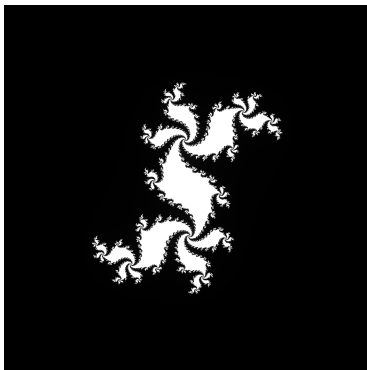


(b) $c = -0.8 + 0.156i$

数值算例



(c) $c = 0.28 + 0.01i$



(d) $c = 0.3 + 0.5i$

结论

Julia 集的中 c 的不同取值可反映出复数 z 不同的发散程度，本文中的代码将复数 z 收敛与发散两种不同情况进行区分，并赋予不同的颜色，由此得到不同的美丽的图案。在此基础上，我们仍可以通过改变维数以及改变 c 的值，得到一些新的研究思路与方法，发现复变函数中“分形”之美。

參考文獻



Adrien Douady.

Julia sets and the mandelbrot set.

In *The beauty of fractals*, pages 161–174. Springer, 1986.



Tan Lei.

Similarity between the mandelbrot set and julia sets.

Communications in mathematical physics, 134(3):587–617, 1990.



Juan Carlos Ponce Campuzano.

The julia set.

Website, 2019-2022.

https://complex-analysis.com/content/julia_set.html.