Julia 集的分析和探索

邵盛栋
信息与计算科学 3200103951

2022 年 7 月 4 日

摘　要　Julia 集是一个在复平面上形成分形的点的集合，以法国数学家加斯顿 · 朱利亚（Gaston Julia）的名字命名，本文将在研究 Julia 集的基础上，首先介绍 Julia 集，并探究其与 Mandelbrot 集之间的关系，寻找适当的算法并利用 C++ 语言编写程序，最终实现 Julia 集可视化。

1　引言

Julia 集合可由下式进行反复迭代得到：

$$f_c(z) = z^2 + c$$

对于固定的复数 c，取某一 z 值（如 $z = z_0$），可以得到序列

$$z_0, f_c(z_0), f_c(f_c(z_0)), f_c(f_c(f_c(z_0))), \ldots$$

这一序列可能反散于无穷大或始终处于某一范围之内并收敛于某一值。我们将使其不扩散的 z 值的集合称为 Julia 集合。

2　数学理论

2.1　背景

Julia 集以法国数学家 Gaston Julia 的名字命名，他在 1915 年研究了它们的性质，并在 1918 年发表了他的著名论文：**Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles**。虽然 Julia 集现在与 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 有关，但 Julia 感兴趣的是更一般表达式的迭代性质，即

$$z^4 + \frac{z^3}{z-1} + \frac{z^2}{z^3 + 4z^2 + 5} + c$$

由 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ 定义的 Julia 集合可以有各种形状，c 的一个小变化可以极大地改变 Julia 集合。1979 年，在计算机的帮助下，B.B.Mandelbrot 研究了 Julia 集，试图对所有可能的形状进行分类，并提出了一个新的形状: Mandelbrot 集 [1]。

2.2 相关定理

定理 1. *在 c 已知的情况下，z_0 的轨道趋向于无穷大当且仅当在某个点它的模 >2。*

该定理等价于以下定理：

定理 2. *若 $z_0 \in J$，则 $|z_n| \leq 2, (n = 1, 2, \dots)$。*

下面是对定理 2 的证明：

Proof. 要证明若存在 $n(n \geq 1)$，使得 $|z_n| > 2$，则 $z_0 \notin J$
首先分别讨论 $|z_0| > 2$ 与 $|z_0| \leq 2$ 两种情形
显然当存在 $n(n \geq 1)$ 使得 $|z_n| > 2$ 且 $|z_0| > 2$ 时，$z_0 \notin J$.
接着要证明 $|z_0| \leq 2$ 时的情况：
假设 $|z_n| > 2$，因为 $|z_0| \leq 2$，所以 $|z_n| > |z_0|$，而

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + z_0| \geq |z_n^2| - |z_0| = |z_n|^2 - |z_0|$$

因为 $|z_n| > |z_0|$

$$|z_n|^2 - |z_0| > |z_n|^2 - |z_n|$$

由 $|z_n| > 2$，左右同乘 $|z_n|$ 再减去 $|z_n|$ 可得到下式

$$|z_n|^2 - |z_n| > 2|z_n| - |z_n| = |z_n|$$

由以上可知 $|z_{n+1}| > |z_n|$
由数学归纳法可知 $2 < |z_n| < |z_{n+1}| < |z_{n+2}| < \dots$，可以看出随着迭代次数的增加 $|z_n|$ 递增并且发散。
所以在存在 $n(n \geq 1)$ 使得 $|z_n| > 2$ 且 $|z_0| \leq 2$ 的情况下也是 $z_0 \notin J$。
综上所述，若存在 $n(n \geq 1)$ 使得 $|z_n| > 2$，则 $z_0 \notin J$ □

2.3 与 Mandelbrot 集之间的关系：

由于 Mandelbrot 集合的定义，在给定点上 Mandelbrot 集合的几何与对应的 Julia 集合的结构之间有密切的对应关系。换句话说，Mandelbrot 集合形成了 Julia 集合的一种索引。[2]Julia 集合要么是连通的，要么是断开的，从 Mandelbrot 集合内选择的 c 值是连通的，而从 Mandelbrot 集合外选择的 c 值是断开的。这些不相连的集合通常被称为 *dust*，它们由独立的点组成，不管它们以什么分辨率被观察 [3]。

3 算法

算法如流程图 1所示

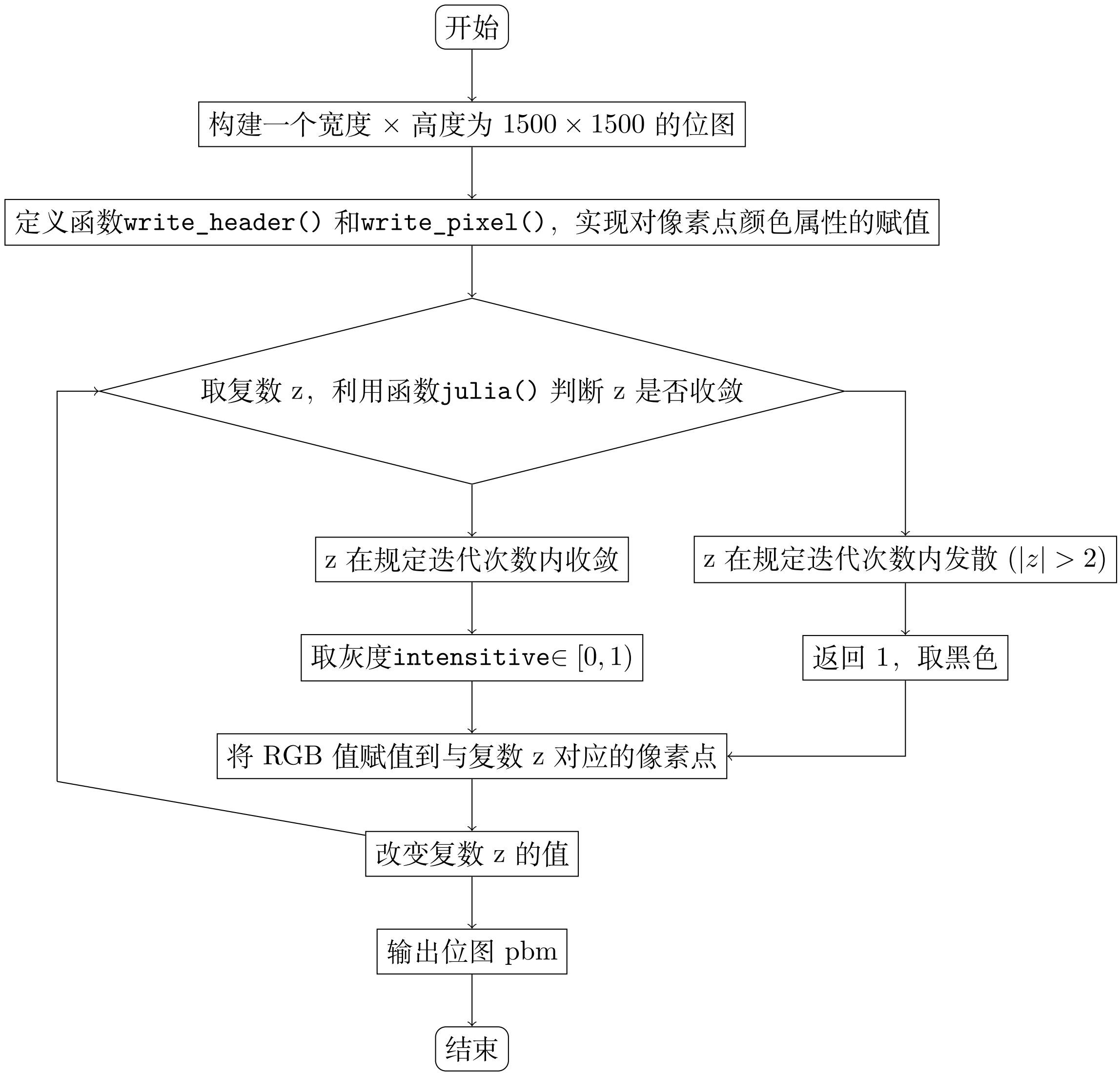


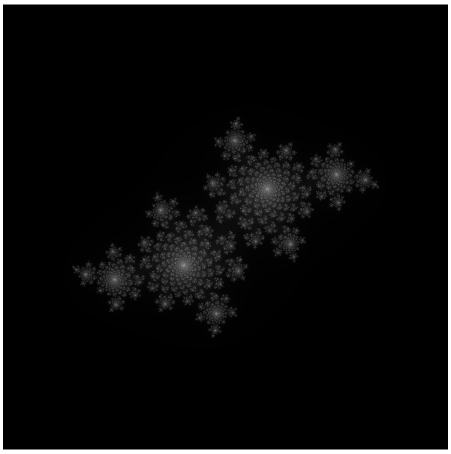
图 1: 具体算法

4 数值算例

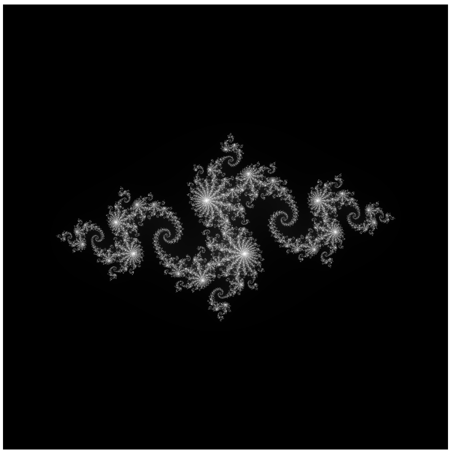
当我们取不同的复数 c 的值时，我们能够得到不同的 Julia 集，这些 Julia 集大小不同，形状各异，当取某些特定的 c 的值的时候，对应的 Julia 集会形成一个连通的区域。执行以下命令可得到相应的 pbm 图像：

```
./juliaset -0.4 0.6 picture1.pbm
./juliaset -0.8 0.156 picture2.pbm
./juliaset 0.28 0.01 picture3.pbm
./juliaset 0.3 0.5 picture4.pbm
```

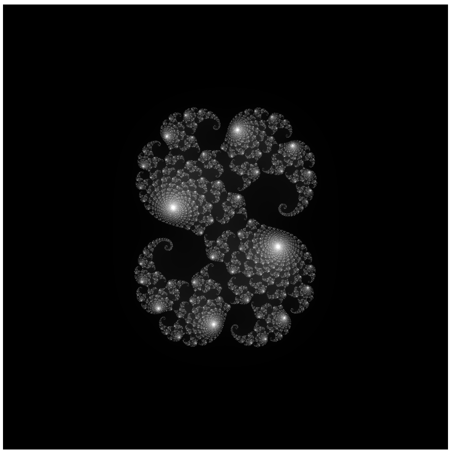
以下是取不同的 c 时，对应的 Julia 集的图像：



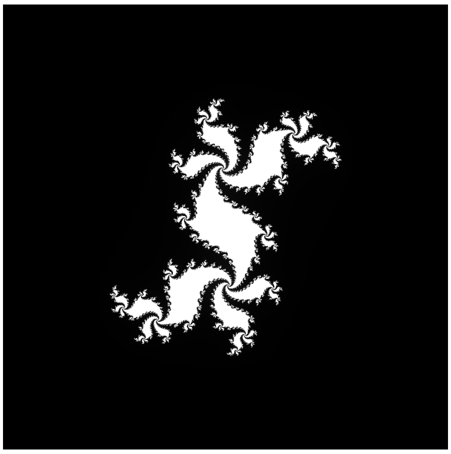
(a) $c = -0.4 + 0.6i$



(b) $c = -0.8 + 0.156i$



(c) $c = 0.28 + 0.01i$



(d) $c = 0.3 + 0.5i$

5 结论

Julia 集的中 c 的不同取值可反映出复数 z 不同的发散程度，本文中的代码将复数 z 收敛与发散两种不同情况进行区分，并赋予不同的颜色，由此得到不同的美丽的图案。在此基础上，我们仍可以通过改变维数以及改变 c 的值，得到一些新的研究思路与方法，发现复变函数中“分形”之美。

参考文献

[1] Adrien Douady. Julia sets and the mandelbrot set. In *The beauty of fractals*, pages 161–174. Springer, 1986.

[2] Tan Lei. Similarity between the mandelbrot set and julia sets. *Communications in mathematical physics*, 134(3):587–617, 1990.

[3] Juan Carlos Ponce Campuzano. The julia set. Website, 2019-2022. `https://complex-analysis.com/content/julia_set.html`.