

# Manderbrot Set 的生成和探索

邵盛栋

信息与计算科学 3200103951

**摘要** 对于 Mandelbrot 集, 它展示了一个精细且无限复杂的边界, 随着放大倍数的增加, 它会显示出越来越精细的递归细节, 本文将在研究 Mandelbrot 集的基础上, 首先探究 Mandelbrot 集的理论知识, 寻找适当的算法并利用 C++ 语言编写程序, 最终实现 Mandelbrot 集可视化。

## 1 引言

Mandelbrot 集是复平面中  $c$  值的集合, 其临界点的轨道为  $z = 0$  在二次映射的迭代下

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

仍然有界。因此, 复数  $c$  是 Mandelbrot 集中的元素, 不妨假设开始时  $z_0 = 0$ , 在一次次迭代后  $|z_n|$  对于任意  $n > 0$  有界, 则对应的  $c$  即属于 Mandelbrot 集。

例如, 对于  $c = 1$ , 序列是  $0, 1, 2, 5, 26, \dots$ , 趋于无穷, 则说明  $1$  不是 Mandelbrot 集中的元素; 另一方面, 对于  $c = -1$ , 序列是  $0, -1, 0, -1, 0, \dots$ , 是有界的, 则说明  $-1$  是 Mandelbrot 集中的元素 [1]。

## 2 问题背景

Mandelbrot 集起源于复动力学, 这是 20 世纪初法国数学 Pierre Fatou 和 Gaston Julia 首次研究的领域。1978 年, 罗伯特·W·布鲁克斯和彼得·马特爾斯基首次定义并绘制了这种分形, 作为 Kleinian groups 研究的一部分。1980 年 3 月 1 日, Benoit Mandelbrot 在纽约约克镇高地的 IBM 托马斯 J. 沃森研究中心首次看到了该集合的可视化。

Mandelbrot 在 1980 年发表的一篇文章中研究了二次多项式的参数空间。Mandelbrot 集的数学研究真正始于数学家 Adrien Douady 和 John H. Hubbard (1985) 的工作, 他们建立了许多其基本属

性, 并命名该集合以纪念 Mandelbrot 在分形几何方面的有影响的工作。

1985 年 8 月的《科学美国人》的封面文章向广大读者介绍了计算 Mandelbrot 集的算法。封面由不来梅大学的 Peitgen、Richter 和 Saupe 创作。Mandelbrot 集在 1980 年代中期作为计算机图形演示变得突出, 当时个人计算机变得足够强大, 可以以高分辨率绘制和显示该集。

## 3 数学理论

Mandelbrot 集是一个紧集, 由于它是闭合的并且包含在以原点为圆心的半径为 2 的闭合圆中, 即点  $c$  属于 Mandelbrot 集当且仅当  $|z_n| \leq 2$  对于所有  $n \geq 0$  有界 [2], 则有如下定理:

**定理 1.**  $0$  的轨道趋向于无穷大当且仅当在某个点它的模  $> 2$ 。

该定理可分为以下两个定理:

**定理 2.** 若  $c \in M$ , 则  $|c| \leq 2$ 。

**定理 3.** 若  $c \in M$ , 则  $|z_n| \leq 2, (n = 1, 2, \dots)$ 。

下面是对定理三的证明:

*Proof.* 要证明若  $|z_n| > 2, (n = 1, 2, \dots)$ , 则  $c \notin M$  首先分别讨论  $|c| > 2$  与  $|c| \leq 2$  两种情形由定理 2,  $z_n > 2, (n = 1, 2, \dots)$  且  $|c| > 2$  时,  $c \notin M$ 。

接着要证明  $|c| \leq 2$  时的情况:

假设  $|z_n| > 2$ , 因为  $|c| \leq 2$ , 所以  $|z_n| > |c|$ , 而

$$|z_{n+1}| = |z_n^2 + c| \geq |z_n^2| - |c| = |z_n|^2 - |c|$$

因为  $|z_n| > |c|$

$$|z_n|^2 - |c| > |z_n|^2 - |z_n|$$

由  $|z_n| > 2$ , 左右同乘  $|z_n|$  再减去  $|z_n|$  可得到下式

$$|z_n|^2 - |z_n| > 2|z_n| - |z_n| = |z_n|$$

由以上可知  $|z_{n+1}| > |z_n|$

由数学归纳法可知  $2 < |z_n| < |z_{n+1}| < |z_{n+2}| < \dots$ , 可以看出随着迭代次数的增加  $|z_n|$  递增并且发散。所以在  $|z_n| > 2, (n = 1, 2, \dots)$  且  $|c| \leq 2$  的情况下也是则  $c \notin M$ 。

综上所述, 若存在  $|z_n| > 2$ , 则  $c \notin M$  □

该定理只适用于  $z \mapsto z^2 + c$ , 但通过修改边界值 2, 可以适用于其他多项式族。这里的边界值不取决于  $c$ , 但在其他多项式族中可能取决于  $c$ 。

## 4 算法

算法伪代码如下:

```
Choose a maximal iteration number N
For each pixel p of the image:
  Let c be the complex number represented
  by p
  Let z be a complex variable
  Set z to 0
  Do the following N times:
    If |z|>2 then color the pixel white,
    end this loop prematurely, go to the
    next pixel Otherwise replace z by
    z*z+c
  If the loop above reached its natural
  end:
  color the pixel p in black
  Go to the next pixel
```

利用 C++ 实现算法的具体流程为:

(1) 创建 bmp 图像文件 (通过 RGB 三种颜色显现的图像), 图像中的像素可作为坐标轴当中的点, 并给定原点坐标;

(2) 定义一种迭代形式, 来检验对应的点  $c$  是发散还是收敛;

(3) 检验图像中的每一个点 (像素), 并对收敛和发散的点进行不同的着色处理, 绘制形成目标图像。

## 5 数值算例

设置  $ox, oy, dimension$  与迭代次数  $N$  分别为 0,0,4,100, 在 run 文件中输入如下命令

```
./test picture1.bmp 0 0 4 100
```

可得到 picture1, 如图 1所示。

我们可以调节  $N$  的大小来得到更加精细的 Mandelbrot 集的图案, 不妨设置  $N$  的值为 200, 即在 run 文件中输入命令:

```
./test picture1.bmp 0 0 4 200
```

可得到 picture2, 如图 2所示。

我们还可以通过调节  $ox, oy, dimension$  的值来观察 Mandelbrot 集的细节部分, 在 run 中输入如下命令:

```
./test picture1.bmp 0 0 4 200
```

从而得到想要观察的位置的放大图, 如图 3所示。

最后, 我们还可以改变图案的颜色, 使其更加美观, 可视化效果更好, 如图 4所示。

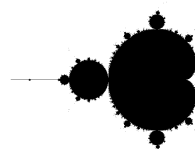


图 1: picture1

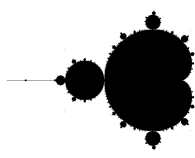


图 2: picture2

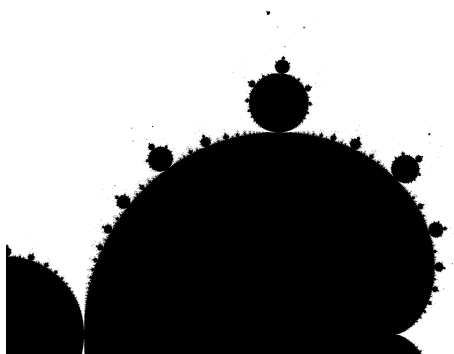


图 3: picture3

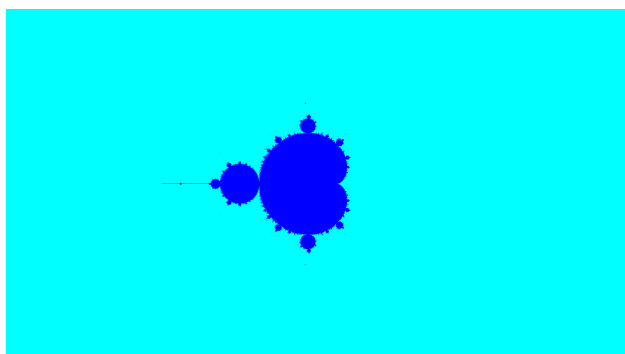


图 4: picture4

## 6 结论

Mandelbrot 集的迭代次数可间接反映发散程度，本文中的代码将收敛与发散两种不同情况进行区分，并赋予黑色与白色两种颜色的值，由此得到可视化效果效果。在此基础上，我们仍可以通过改变维数以及迭代次数，得到一些新的研究思路与方法。

## 参考文献

- [1] Robert Devaney. Unveiling the mandelbrot set. *Plus [Online]*, 2006.
- [2] Adrien Douady. Julia sets and the mandelbrot set. In *The beauty of fractals*, pages 161–174. Springer, 1986.
- [3] Eric W Weisstein. Mandelbrot set. <https://mathworld.wolfram.com/>, 2002.