フーリエ変換の公式

フーリエ変換の公式は以下の通り。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

これを言葉で表現すると

$f(t)$に$e^{-j\omega t}$をかけ、$-\infty$~∞の範囲で時間積分をする

$\Downarrow$

その結果、角周波数ωの関数$F(\omega)$が得られる

つまり、時間の関数を周波数の関数に変換しているだけ

フーリエ変換とフーリエ級数展開の違い

フーリエ変換とフーリエ級数展開の違いは以下の表の通り。

フーリエ変換とフーリエ級数展開の違い

手法	対象
フーリエ変換	周期関数
フーリエ級数展開	非周期関数

フーリエ級数展開

フーリエ級数展開は次式のように周期関数を三角関数の和で表すことをいう。

フーリエ級数展開

$f(t)$が角周波ωの関数のとき

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

と展開することができる。
ただし、周期Tに対して以下の公式が成り立つ。

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ここでなぜこのように展開できるかを考えたい。

実は三角関数はベクトルと同じように直交性がある。

まず直交性を確認するために、関数の内積を定義する。

ベクトルの内積は以下の通り。

ベクトルの内積
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{i}^{n} a_i b_i$$

次に関数の内積は以下の通り。

関数の内積
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

この関数の内積を利用して、三角関数の直交性を示す。

三角関数の直交性
$$\langle \sin a\omega x\,, \sin b\omega x \rangle = \begin{cases} 0 & (a \neq b) \\ T & (a = b) \end{cases}$$ $$\langle \cos a\omega x\,, \cos b\omega x \rangle = \begin{cases} 0 & (a \neq b) \\ T & (a = b) \end{cases}$$ $$\langle \cos a\omega x\,, \sin b\omega x \rangle = \begin{cases} 0 & (a \neq b) \\ T & (a = b) \end{cases}$$ ※証明は関数の奇関数性と偶関数性を用いると容易に証明できる。また範囲は無限ではなく、周期関数なので一周期だけ積分すればよい。

三角関数で表現すると同じ周期のサインとコサインに分かれるため、同じ周期ごとにまとめたい。

そこでオイラー関数を利用する。

オイラー関数

指数を三角関数で表現することができる。

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

逆に三角関数を以下のように指数で表すことが可能。

$$\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

これに基づいて、フーリエ級数展開は以下のように変形することができる。

フーリエ級数展開（オイラー形式）

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\}\\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t}\right\} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\omega t}\right\}\\
&= \frac{a_0}{2}e^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t}\right\} + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left\{\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega t}\right\}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega t}
\end{aligned}$$

したがって、係数F_nは各周波数成分がどれくらい入っているかを示している。

次に係数F_nの値を求める。

三角関数と同様に$\{e^{jn\omega t}\}_n$は互いに直交していることが計算するとわかる。

つまり、F_nは内積によって求まることがわかる。

複素数空間での内積は以下のように定義されている。

複素数の内積
複素数の内積は複素共役との掛け算で与えられる。 $$\langle a, b \rangle = a \cdot \bar{b}$$

これより、係数F_nは以下のように求められる。

フーリエ係数
$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$$

以上のようにしてフーリエ級数展開が可能である。

フーリエ変換

フーリエ級数展開を非周期関数へ拡張したもの。

ここでのキーアイデアは

<u>非周期関数は周期関数の周期を無限大にしたものと同じである</u>

ということ。

角周波数ωと周期Tには以下の関係が成り立っている。

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

またフーリエ級数展開では、その角周波数ωの整数倍の三角関数で展開されていた。

これらから周期Tを無限大にしたとすると、角周波数ωは非常に小さくなり、連続的なスペクトルが得られることがわかります。

ここでフーリエ級数展開の極限の形を求めることにする。

$T \to \infty$の極限では$\omega = 2\pi/T \to 0$となる。

これに関連して、リーマン和の極限による定積分の定義を考える。

リーマン和の極限
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0, N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} g(k\Delta x)\,\Delta x$$

これよりフーリエ級数展開の極限形は以下のようになる。

フーリエ級数展開（極限形）
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Delta\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n}{\Delta\omega} e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega$$

ここで$F_n/\Delta\omega$について考える。

本来、F_nは$\omega_n = n\Delta\omega$という１点における振幅ではあるが、$n\Delta\omega$を中心とした幅$\Delta\omega$の範囲の振動の振幅がF_nと考えてもよい。

このとき、$F_n/\Delta\omega$は単位振動数あたりの振幅、つまり振幅の密度$F(\omega_n)$を与える。

$$\frac{F_n}{\Delta\omega} = \frac{F_n T}{2\pi} \equiv \frac{1}{2\pi} F(n\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega_n)$$

ただし、係数については$F(\omega_n)$の決め方次第であるため、1でも$1/\sqrt{2\pi}$でもよい。

フーリエ級数展開（極限形）
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega$$ $$F(\omega_n) = TF_n = T \times \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\Delta\omega t}\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega_n t}\,dt$$

ここで、$T \to \infty$の極限で$\omega_n \to \omega$（連続変数）、$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega \to \int_{-\infty}^{\infty} d\omega$であるから、以下のようにすることができる。

フーリエ級数展開（極限形）
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$ $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_n t}\, dt$$

離散フーリエ変換

フーリエ変換は連続的な関数を対象にしているが、実際の計測においては一定時間ごとの計測値が得られることが多い。

そこで必要となるのがフーリエ変換の離散値に対応したものであり、それが離散フーリエ変換である。

区間$[0, T]$でΔt秒ごとにN個のデータが与えられたとき、データを取得した時間は次のように示される。

$$t_n = n\frac{T}{N} = n\Delta t$$

その離散時刻において得られた値を次のように表現する。

$$f_n = f(t_n)$$

フーリエ変換における連続関数$f(t)$をこの離散関数f_jで表すと次のようになる。

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \cdot \delta(t - n\Delta t)$$

ここでδはディラックのデルタ関数である。

この式はこれまでとは若干様相が異なります。

それは$f(n\Delta t)$で無限の値を取ってしまうことである。

それはなぜかというと、デルタ関数自体は密度を示しているためである。

したがって、観測値を抽出したい場合は$n\Delta t - \epsilon \to n\Delta t + \epsilon$の区間で積分する必要があります。

ここでディラックのデルタ関数についての理解を深めておく。

ディラックのデルタのフーリエ変換は次のようになる。

ディラックのデルタ関数のフーリエ変換

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

ただし、1 をフーリエ逆変換するとデルタ関数になるというのは少し飛躍があるだろう。

$F(\omega) = 1$は絶対可積分な関数でないため、公式を当てはめることはできない。

そこで次のように考える。

1 のフーリエ逆変換

フーリエ逆変換の式にフーリエ変換の式を代入したものは次式のようになる。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-j\omega t'}\, dt' \right) e^{j\omega t}\, d\omega$$

この式の積分順序を交換（可換性は証明したいけど、まだしてない）すると、次式のようになる。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-t')}\, d\omega \right) dt'$$

この式の積分項の第二項はデルタ関数と同じ働きをしていることがわかる。

したがって、次のように書くことができる。

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\, d\omega$$

これは 1 を逆フーリエ変換していることに等しい。

この関数をフーリエ変換すると次のように離散的な周波数の三角関数の和になる。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N} f(t_n) \delta(t - t_n) e^{-j\omega t} \right\} dt = \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\, e^{-j\omega t_n} = \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\, e^{-j\omega t_n}$$

離散的な波に含まれる波の最大周波数f_{max}はサンプリング周波数f_sの半分である（サンプリング定理）。

また離散的な波の基準となる周波数Δfを次のように定める。

$$\Delta f = \frac{1}{T}\ (\Delta\omega = 2\pi\Delta f)$$

以上より、

$$f_{max} = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T} = \frac{N}{2}\Delta f$$

となる。

離散フーリエ変換
離散フーリエ変換は以下のようになる。 $$F(\omega_m) = \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\, e^{-j\omega_m t_n}$$ ただし、 $$\omega_m = m\frac{2\pi}{N\Delta t} = m\omega_0$$ である。

Column：区分求積的導出

離散フーリエ変換の公式を区分求積法のように求めることも可能です。

区分求積法で求めると、公式の頭に$1/N$がつきます。

このような時は、フーリエ逆変換の時の係数をいじればよいので、特に気にする必要はありません。

高速フーリエ変換

離散フーリエ変換は次式で表される。

$$F(\omega_m) = \sum_{n=0}^{N} f(t_n)\, e^{-jm\omega_0 t_n}$$

ここで、次のようにWを定義する。

$$W = e^{-j\omega_0}$$

これより、16個のデータが与えられたときは次のようになる。
（よく 8 個の例が上がっているので、あえて多めに。N 個の場合は逆にわかりやすさを欠くのでやめました。）

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\
W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & W^8 & W^9 & W^{10} & W^{11} & W^{12} & W^{13} & W^{14} & W^{15} \\
W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} & W^{16} & W^{18} & W^{20} & W^{22} & W^{24} & W^{26} & W^{28} & W^{30} \\
W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} & W^{24} & W^{27} & W^{30} & W^{33} & W^{36} & W^{39} & W^{42} & W^{45} \\
W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} & W^{32} & W^{36} & W^{40} & W^{44} & W^{48} & W^{52} & W^{56} & W^{60} \\
W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} & W^{40} & W^{45} & W^{50} & W^{55} & W^{60} & W^{65} & W^{70} & W^{75} \\
W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} & W^{48} & W^{54} & W^{60} & W^{66} & W^{72} & W^{78} & W^{84} & W^{90} \\
W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} & W^{56} & W^{63} & W^{70} & W^{77} & W^{84} & W^{91} & W^{98} & W^{105} \\
W^0 & W^8 & W^{16} & W^{24} & W^{32} & W^{40} & W^{48} & W^{56} & W^{64} & W^{72} & W^{80} & W^{88} & W^{96} & W^{104} & W^{112} & W^{120} \\
W^0 & W^9 & W^{18} & W^{27} & W^{36} & W^{45} & W^{54} & W^{63} & W^{72} & W^{81} & W^{90} & W^{99} & W^{108} & W^{117} & W^{126} & W^{135} \\
W^0 & W^{10} & W^{20} & W^{30} & W^{40} & W^{50} & W^{60} & W^{70} & W^{80} & W^{90} & W^{100} & W^{110} & W^{120} & W^{130} & W^{140} & W^{150} \\
W^0 & W^{11} & W^{22} & W^{33} & W^{44} & W^{55} & W^{66} & W^{77} & W^{88} & W^{99} & W^{110} & W^{121} & W^{132} & W^{143} & W^{154} & W^{165} \\
W^0 & W^{12} & W^{24} & W^{36} & W^{48} & W^{60} & W^{72} & W^{84} & W^{96} & W^{108} & W^{120} & W^{132} & W^{144} & W^{156} & W^{168} & W^{180} \\
W^0 & W^{13} & W^{26} & W^{39} & W^{52} & W^{65} & W^{78} & W^{91} & W^{104} & W^{117} & W^{130} & W^{143} & W^{156} & W^{169} & W^{182} & W^{195} \\
W^0 & W^{14} & W^{28} & W^{42} & W^{56} & W^{70} & W^{84} & W^{98} & W^{112} & W^{126} & W^{140} & W^{154} & W^{168} & W^{182} & W^{196} & W^{210} \\
W^0 & W^{15} & W^{30} & W^{45} & W^{60} & W^{75} & W^{90} & W^{105} & W^{120} & W^{135} & W^{150} & W^{165} & W^{180} & W^{195} & W^{210} & W^{225}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{15} \end{bmatrix}$$

このとき$W^0 = W^{16}$であることを利用すると、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\
W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 & W^8 & W^9 & W^{10} & W^{11} & W^{12} & W^{13} & W^{14} & W^{15} \\
W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\
W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^2 & W^5 & W^8 & W^{11} & W^{14} & W^1 & W^4 & W^7 & W^{10} & W^{13} \\
W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} \\
W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^4 & W^9 & W^{14} & W^3 & W^8 & W^{13} & W^2 & W^7 & W^{12} & W^1 & W^6 & W^{11} \\
W^0 & W^6 & W^{12} & W^2 & W^8 & W^{14} & W^4 & W^{10} & W^0 & W^6 & W^{12} & W^2 & W^8 & W^{14} & W^4 & W^{10} \\
W^0 & W^7 & W^{14} & W^5 & W^{12} & W^3 & W^{10} & W^1 & W^8 & W^{15} & W^6 & W^{13} & W^4 & W^{11} & W^2 & W^9 \\
W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 \\
W^0 & W^9 & W^2 & W^{11} & W^4 & W^{13} & W^6 & W^{15} & W^8 & W^1 & W^{10} & W^3 & W^{12} & W^5 & W^{14} & W^7 \\
W^0 & W^{10} & W^4 & W^{14} & W^8 & W^2 & W^{12} & W^6 & W^0 & W^{10} & W^4 & W^{14} & W^8 & W^2 & W^{12} & W^6 \\
W^0 & W^{11} & W^6 & W^1 & W^{12} & W^7 & W^2 & W^{13} & W^8 & W^3 & W^{14} & W^9 & W^4 & W^{15} & W^{10} & W^5 \\
W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 & W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 & W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 & W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 \\
W^0 & W^{13} & W^{10} & W^7 & W^4 & W^1 & W^{14} & W^{11} & W^8 & W^5 & W^2 & W^{15} & W^{12} & W^9 & W^6 & W^3 \\
W^0 & W^{14} & W^{12} & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^{14} & W^{12} & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 \\
W^0 & W^{15} & W^{14} & W^{13} & W^{12} & W^{11} & W^{10} & W^9 & W^8 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1
\end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{15} \end{bmatrix}$$

上の行列を真ん中で左右に分けて考えると、添え字が偶数の行については左と右の部分が同じで、添え字が奇数の行については添え字が左と右の部分で半周期ずれたものになっていることがわかる。

したがって、次式と等価である。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_6 \\ F_8 \\ F_{10} \\ F_{12} \\ F_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^2 & W^8 & W^{14} & W^4 & W^{10} \\ W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 & W^0 & W^8 \\ W^0 & W^{10} & W^4 & W^{14} & W^8 & W^2 & W^{12} & W^6 \\ W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 & W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 \\ W^0 & W^{14} & W^{12} & W^{10} & W^8 & W^6 & W^4 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 \\ f_1 + W^0 f_9 \\ f_2 + W^0 f_{10} \\ f_3 + W^0 f_{11} \\ f_4 + W^0 f_{12} \\ f_5 + W^0 f_{13} \\ f_6 + W^0 f_{14} \\ f_7 + W^0 f_{15} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_7 \\ F_9 \\ F_{11} \\ F_{13} \\ F_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^4 & W^9 & W^{14} & W^3 \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^5 & W^{12} & W^3 & W^{10} & W^1 \\ W^0 & W^9 & W^2 & W^{11} & W^4 & W^{13} & W^6 & W^{15} \\ W^0 & W^{11} & W^6 & W^1 & W^{12} & W^7 & W^2 & W^{13} \\ W^0 & W^{13} & W^{10} & W^7 & W^4 & W^1 & W^{14} & W^{11} \\ W^0 & W^{15} & W^{14} & W^{13} & W^{12} & W^{11} & W^{10} & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 \\ f_1 + W^8 f_9 \\ f_2 + W^8 f_{10} \\ f_3 + W^8 f_{11} \\ f_4 + W^8 f_{12} \\ f_5 + W^8 f_{13} \\ f_6 + W^8 f_{14} \\ f_7 + W^8 f_{15} \end{bmatrix}$$

さらに同じようにすると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_4 \\ F_8 \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} \\ W^0 & W^8 & W^0 & W^8 \\ W^0 & W^{12} & W^8 & W^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^0(f_4 + W^0 f_{12}) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^0(f_5 + W^0 f_{13}) \\ f_2 + W^0 f_{10} + W^0(f_6 + W^0 f_{14}) \\ f_3 + W^0 f_{11} + W^0(f_7 + W^0 f_{15}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_6 \\ F_{10} \\ F_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^2 \\ W^0 & W^{10} & W^4 & W^{14} \\ W^0 & W^{14} & W^{12} & W^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^8(f_4 + W^0 f_{12}) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^8(f_5 + W^0 f_{13}) \\ f_2 + W^0 f_{10} + W^8(f_6 + W^0 f_{14}) \\ f_3 + W^0 f_{11} + W^8(f_7 + W^0 f_{15}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_5 \\ F_9 \\ F_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} \\ W^0 & W^9 & W^2 & W^{11} \\ W^0 & W^{13} & W^{10} & W^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^4(f_4 + W^0 f_{12}) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^4(f_5 + W^0 f_{13}) \\ f_2 + W^8 f_{10} + W^4(f_6 + W^0 f_{14}) \\ f_3 + W^8 f_{11} + W^4(f_7 + W^0 f_{15}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_7 \\ F_{11} \\ F_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^5 \\ W^0 & W^{11} & W^6 & W^1 \\ W^0 & W^{15} & W^{14} & W^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^{12}(f_4 + W^0 f_{12}) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^{12}(f_5 + W^0 f_{13}) \\ f_2 + W^8 f_{10} + W^{12}(f_6 + W^0 f_{14}) \\ f_3 + W^8 f_{11} + W^{12}(f_7 + W^0 f_{15}) \end{bmatrix}$$

さらに同様のことを繰り返すと次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^0(f_4 + W^0 f_{12}) + W^0\big(f_2 + W^0 f_{10} + W^0(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^0(f_5 + W^0 f_{13}) + W^0\big(f_3 + W^0 f_{11} + W^0(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_4 \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^4 \\ W^0 & W^{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^0(f_4 + W^0 f_{12}) + W^8\big(f_2 + W^0 f_{10} + W^0(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^0(f_5 + W^0 f_{13}) + W^8\big(f_3 + W^0 f_{11} + W^0(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^2 \\ W^0 & W^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^8(f_4 + W^0 f_{12}) + W^4\big(f_2 + W^0 f_{10} + W^8(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^8(f_5 + W^0 f_{13}) + W^4\big(f_3 + W^0 f_{11} + W^8(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_6 \\ F_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^6 \\ W^0 & W^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^0 f_8 + W^8(f_4 + W^0 f_{12}) + W^{12}\big(f_2 + W^0 f_{10} + W^8(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^0 f_9 + W^8(f_5 + W^0 f_{13}) + W^{12}\big(f_3 + W^0 f_{11} + W^8(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^1 \\ W^0 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^4(f_4 + W^0 f_{12}) + W^2\big(f_2 + W^8 f_{10} + W^4(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^4(f_5 + W^0 f_{13}) + W^2\big(f_3 + W^8 f_{11} + W^4(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^5 \\ W^0 & W^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^4(f_4 + W^0 f_{12}) + W^{10}\big(f_2 + W^8 f_{10} + W^4(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^4(f_5 + W^0 f_{13}) + W^{10}\big(f_3 + W^8 f_{11} + W^4(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^3 \\ W^0 & W^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^{12}(f_4 + W^0 f_{12}) + W^6\big(f_2 + W^8 f_{10} + W^{12}(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^{12}(f_5 + W^0 f_{13}) + W^6\big(f_3 + W^8 f_{11} + W^4(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_7 \\ F_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^7 \\ W^0 & W^{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 + W^8 f_8 + W^{12}(f_4 + W^0 f_{12}) + W^{14}\big(f_2 + W^8 f_{10} + W^{12}(f_6 + W^0 f_{14})\big) \\ f_1 + W^8 f_9 + W^{12}(f_5 + W^0 f_{13}) + W^{14}\big(f_3 + W^8 f_{11} + W^4(f_7 + W^0 f_{15})\big) \end{bmatrix}$$

このような計算方法をバタフライ演算と呼びます。

上述の例を見てわかるように高速フーリエ変換は2^n個のデータに対してしか使用できません。

※コードを後に掲載する予定。

<Coding>

$16(=2^4)$個のとき

$$a_0=\begin{bmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\\f_7\\f_8\\f_9\\f_{10}\\f_{11}\\f_{12}\\f_{13}\\f_{14}\\f_{15}\end{bmatrix},index_0=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad a_1=\begin{bmatrix}a_0[0]+W^0a_0[8]\\a_0[1]+W^0a_0[9]\\a_0[2]+W^0a_0[10]\\a_0[3]+W^0a_0[11]\\a_0[4]+W^0a_0[12]\\a_0[5]+W^0a_0[13]\\a_0[6]+W^0a_0[14]\\a_0[7]+W^0a_0[15]\\a_0[0]+W^8a_0[8]\\a_0[1]+W^8a_0[9]\\a_0[2]+W^8a_0[10]\\a_0[3]+W^8a_0[11]\\a_0[4]+W^8a_0[12]\\a_0[5]+W^8a_0[13]\\a_0[6]+W^8a_0[14]\\a_0[7]+W^8a_0[15]\end{bmatrix},index_1=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\\8\\10\\12\\14\\1\\3\\5\\7\\9\\11\\13\\15\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad a_2=\begin{bmatrix}a_1[0]+W^0a_1[4]\\a_1[1]+W^0a_1[5]\\a_1[2]+W^0a_1[6]\\a_1[3]+W^0a_1[7]\\a_1[0]+W^8a_1[4]\\a_1[1]+W^8a_1[5]\\a_1[2]+W^8a_1[6]\\a_1[3]+W^8a_1[7]\\a_1[8]+W^4a_1[12]\\a_1[9]+W^4a_1[13]\\a_1[10]+W^4a_1[14]\\a_1[11]+W^4a_1[15]\\a_1[8]+W^{12}a_1[12]\\a_1[9]+W^{12}a_1[13]\\a_1[10]+W^{12}a_1[14]\\a_1[11]+W^{12}a_1[15]\end{bmatrix},index_2=\begin{bmatrix}0\\4\\8\\12\\2\\6\\10\\14\\1\\5\\9\\13\\3\\7\\11\\15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad a_3=\begin{bmatrix}a_2[0]+W^0a_2[2]\\a_2[1]+W^0a_2[3]\\a_2[0]+W^8a_2[2]\\a_2[1]+W^8a_2[3]\\a_2[4]+W^4a_2[6]\\a_2[5]+W^4a_2[7]\\a_2[4]+W^{12}a_2[6]\\a_2[5]+W^{12}a_2[7]\\a_2[8]+W^2a_2[10]\\a_2[9]+W^2a_2[11]\\a_2[8]+W^{10}a_2[10]\\a_2[9]+W^{10}a_2[11]\\a_2[12]+W^6a_2[14]\\a_2[13]+W^6a_2[15]\\a_2[12]+W^{14}a_2[14]\\a_2[13]+W^{14}a_2[15]\end{bmatrix},index_3=\begin{bmatrix}0\\8\\4\\12\\2\\10\\6\\14\\1\\9\\5\\13\\3\\11\\7\\15\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad a_4=\begin{bmatrix}a_3[0]+W^0a_3[1]\\a_3[0]+W^8a_3[1]\\a_3[2]+W^4a_3[3]\\a_3[2]+W^{12}a_3[3]\\a_3[4]+W^2a_3[5]\\a_3[4]+W^{10}a_3[5]\\a_3[6]+W^6a_3[7]\\a_3[6]+W^{14}a_3[7]\\a_3[8]+W^1a_3[9]\\a_3[8]+W^9a_3[9]\\a_3[10]+W^5a_3[11]\\a_3[10]+W^{13}a_3[11]\\a_3[12]+W^3a_3[13]\\a_3[12]+W^{11}a_3[13]\\a_3[14]+W^7a_3[15]\\a_3[14]+W^{15}a_3[15]\end{bmatrix},index_3=\begin{bmatrix}0\\8\\4\\12\\2\\10\\6\\14\\1\\9\\5\\13\\3\\11\\7\\15\end{bmatrix}$$

$8=(2^3)$のとき

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\\f_4\\f_5\\f_6\\f_7\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}0\\2\\4\\6\\1\\3\\5\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0[0]+W^0a_0[4]\\a_0[1]+W^0a_0[5]\\a_0[2]+W^0a_0[6]\\a_0[3]+W^0a_0[7]\\a_0[0]+W^4a_0[4]\\a_0[1]+W^4a_0[5]\\a_0[2]+W^4a_0[6]\\a_0[3]+W^4a_0[7]\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}0\\4\\2\\6\\1\\5\\3\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1[0]+W^0a_1[2]\\a_1[1]+W^0a_1[3]\\a_1[0]+W^4a_1[2]\\a_1[1]+W^4a_1[3]\\a_1[4]+W^2a_1[6]\\a_1[5]+W^2a_1[7]\\a_1[4]+W^6a_1[6]\\a_1[5]+W^6a_1[7]\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}0\\4\\2\\6\\1\\5\\3\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2[0]+W^0a_2[1]\\a_2[0]+W^4a_2[1]\\a_2[2]+W^2a_2[3]\\a_2[2]+W^6a_2[3]\\a_2[4]+W^1a_2[5]\\a_2[4]+W^5a_2[5]\\a_2[6]+W^3a_2[7]\\a_2[6]+W^3a_2[7]\end{bmatrix}$$

<コード内容>
N個のデータが与えられた時、全体で$\log_2 N$回反復する。

<インデックス配列編>
i番目のイテレーションのとき、$i-1$番目のインデックス配列を2^{i-1}個に分割した結果をブロック$IB^{(i-1)}$と呼ぶことにする。

各ブロック$IB^{(i-1)}[n]$を、偶数番目を集めたブロックと奇数番目を集めたブロックに分け、前者を$IB^{(i)}[2n]$、後者を$IB^{(i)}[2n+1]$とする。

ただし、最後のイテレーションに関しては、インデックス配列は一つ前のインデックス配列をそのまま用いる。

<計算編>
i番目のイテレーションのとき、$i-1$番目のインデックスを2^{i-1}個に分割した結果をブロック$SB^{(i-1)}$と呼ぶことにする。

各ブロック$SB^{(i-1)}[n]$を上半分と下半分に分け、前者を$SB_{upper}^{(i-1)}[n]$、後者を$SB_{lower}^{(i-1)}[n]$とする。

このとき$i-1$番目のイテレーションブロック$SB^{(i-1)}[n]$はi番目のイテレーションのブロック$SB^{(i)}[2n]$と$SB^{(i)}[2n+1]$に分割される。

ブロック$SB^{(i)}[2n]$と$SB^{(i)}[2n+1]$は次にように求まる。

$$SB^{(i)}[2n][j] = SB_{upper}^{(i-1)}[n][j] + W^{\frac{N}{2^i}\times IB^{(i)}[2n][0]} BS_{lower}^{(i-1)}[n][j]$$

$$SB^{(i)}[2n+1][j] = SB_{upper}^{(i-1)}[n][j] + W^{\frac{N}{2^i}\times IB^{(i)}[2n+1][0]} BS_{lower}^{(i-1)}[n][j]$$

ただし、最後のイテレーションに関してはWの肩は偶奇で場合分けされないので、インデックス配列の値をそのまま肩に乗せる。