

Höhere Personenversicherungsmathematik: Modellierung der Zinsentwicklung

Prof. Dr. Martina Brück und Prof. Dr. Claus Neidhardt

SS 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Literaturangaben

1. Term Structure Models, A Graduate Course, Damir Filipovic, Springer Verlag
2. Portfoliotheorie, Risikomanagement und die Bewertung von Derivaten, Jürgen Kremer, Springer Verlag
3. Optionen, Futures und andere Derivate, Hull
4. Interest Rate Models - Theory and Practice, Damiano Brigo und Fabio Mercurio
5. Implementing Derivatives Models, Les Clewlow and Chris Strickland

2 Die Zinsstrukturkurve - Definition und Möglichkeiten, sie zu ermitteln

2.1 Bezeichnungen

Definition 2.1.1

Sei $P(t, T)$ mit $t < T$ der Preis eines Zerobonds (auch Null-Kupon-Anleihe, oder T -Bond), der zum Zeitpunkt T (dem **Fälligkeitstermin**) eine Geldeinheit (bspw. einen Euro) auszahlt, zum Zeitpunkt t . Wir nehmen an, dass der Zerobond nicht ausfallgefährdet ist, d.h. die Zahlung zum Zeitpunkt T sicher ist. Weiterhin treffen wir folgende theoretische Annahmen:

1. Es existiert ein vollkommener Markt für T -Bonds für alle $T \geq t$.
2. Für alle $T > 0$ gilt $P(T, T) = 1$ (d.h. die Auszahlung von einer Geldeinheit findet immer in voller Höhe statt).
3. $T \mapsto P(t, T)$ sei differenzierbar in T .

Die Kurve $T \mapsto P(t, T)$ liefert die **Terminstruktur** der T -Bonds zum Zeitpunkt t und bestimmt die Zinsstruktur zu diesem Zeitpunkt.

Definition 2.1.2

Auf Basis der Terminstruktur der T -Bonds definieren wir nun folgende Zinssätze für $t \leq T \leq S$:

1. Die **einfache Forward Rate** $F(t, T, S)$ für den Zeitraum $[T, S]$ im Zeitpunkt t :

$$F(t, T, S) := \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right).$$

2. Die **einfache Spot Rate** $F(t, T)$ für den Zeitraum $[t, T]$ im Zeitpunkt t :

$$F(t, T) := F(t, t, T) := \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right).$$

3. Die **stetige Forward Rate** $R(t, T, S)$ für den Zeitraum $[T, S]$ im Zeitpunkt t :

$$R(t, T, S) := - \frac{\ln(P(t, S)) - \ln(P(t, T))}{S - T}.$$

4. Die **stetige Spot Rate** $R(t, T)$ für den Zeitraum $[t, T]$ im Zeitpunkt t :

$$R(t, T) := R(t, t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}.$$

5. Die **unmittelbare Forward Rate** für den Zeitpunkt T in t :

$$f(t, T) := \lim_{S \searrow T} R(t, T, S) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}.$$

6. Die **Short Rate** $r(t)$ im Zeitpunkt t :

$$r(t) := f(t, t) = \lim_{T \searrow t} R(t, T).$$

Bemerkung 2.1.3 1. Zur Herleitung der einzelnen Formeln: Siehe Vorlesung.

2. Aus der Definition der unmittelbaren Forward Rate zusammen mit der Bedingung $P(T, T) = 1$ folgt

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right).$$

Definition 2.1.4

Wenn ein Geldbetrag der Höhe 1 auf einem Konto angelegt wird, das jederzeit kündbar ist, und dementsprechend mit der zeitabhängigen Short Rate verzinst wird, ergibt sich für die Entwicklung des Geldbetrages:

$$B(t) := \exp \left(\int_0^t r(u) du \right).$$

Der Wert $B(t)$ wird auch **Geldmarktkonto** genannt (engl. money market account). Allgemeiner definiert man

$$B(t, T) := \frac{B(T)}{B(t)} = \exp \left(\int_t^T r(u) du \right).$$

Mit Hilfe des Money Market Accounts können wir wiederum einen Diskontfaktor für den Zeitraum $[t, T]$ definieren:

$$\tilde{B}(t, T) := \frac{1}{B(t, T)} = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp \left(- \int_t^T r(u) du \right).$$

Im Gegensatz zu $P(t, T)$ ist dieser Diskontfaktor allerdings stochastisch und zur Zeit t noch nicht bekannt.

Bemerkung 2.1.5 1. Im Prinzip sind die T -Bond-Preise $P(t, T)$ im Zeitpunkt t bekannt, und damit auch die unmittelbaren Forward Rates $f(t, T)$ (zu Schätztechniken, parametrischen und nicht-parametrischen: Siehe weiter unten).

2. Die Short Rate spielt die zentrale Rolle in den sogenannten „Short Rate Modellen“, die r durch einen stochastischen Prozess beschreiben.
3. Die Short Rate ist nicht direkt am Markt beobachtbar. Stattdessen verwendet man Proxies, d.h. Zinsen für kurze Laufzeiten.

2.2 Ein kurzer Überblick über verschiedene Finanzinstrumente

Ziel im Folgenden wird es sein, aus am Markt gehandelten zinstragenden Instrumenten die Zinsstrukturkurve bzw. die Kurve $T \mapsto P(t, T)$ zu ermitteln. Hierfür wird in der Regel - laufzeitabhängig - auf verschiedene Finanzinstrumente zurückgegriffen. Eine umfassende Darstellung bietet Filipovic, „Term-Structure Models“, Kap. 3. In diesem Abschnitt sollen einige kurz vorgestellt werden.

2.2.1 Die Day Count Conventions

In der Regel wird die Zeit zwischen zwei Zahlungen in Jahren gemessen. Für die Umrechnung der Zeitdifferenz $T - t$ in Jahre existieren folgende Day Count Conventions:

1. **Actual/365:** Ein Jahr wird hier mit 365 Tagen gezählt, die Tage im Zeitraum zwischen T und t werden exakt gezählt. Der erste Tag wird nicht mitgezählt, der letzte Tag wird mitgezählt. Der Zeitraum $T - t$ beträgt demnach in Jahren:

$$T - t = \frac{\text{Tage zwischen } T \text{ und } t}{365}.$$

Beispiel: Der Zeitraum von 1.10.2015 - 31.12.2015 entspricht in Jahren $91/365$.

2. **Actual/360:** Wie in 1., aber das Jahr wird mit 360 angesetzt. Geldmarktsätze (d.h. ESTR (früher EONIA), EURIBOR) werden im Markt nach der Actual/360-Methode quotiert.
3. **30/360:** Monate werden mit 30 Tagen, Jahre mit 360 Tagen gezählt. Für $t = d_1 / m_1 / y_1$ und $T = d_2 / m_2 / y_2$ ergibt sich

$$T - t = \frac{360 \cdot (y_2 - y_1) + 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - \min(d_1, 30) - \max(d_2 - 30, 0))}{360}.$$

4. **Actual/Actual:** Zähler und Nenner orientieren sich an der exakten Anzahl von Tagen.

Bei den Tagen gibt es noch Modifikationen, wenn t bzw. T auf einen Nicht-Bank-Arbeitstag fallen. Hier existieren unterschiedliche Konventionen („Arbeitstagkonventionen“), bspw. in den USA vs. Deutschland.

2.2.2 (Festverzinsliche) Kuponbonds und Clean- vs. Dirty-Price

Bemerkung 2.2.1 1. Festverzinsliche Kuponbonds (auch fixed coupon bonds oder festverzinsliche Anleihen) im US-Markt haben üblicherweise eine halbjährliche Zinszahlung. In den europäischen Märkten sind jährliche Kuponzahlungen verbreiteter.

2. Bei Schuldverschreibungen, die vom US-Schatzamt ausgegeben werden, unterscheidet man zwischen
 - *Bills:* Zero-Bonds mit einer Laufzeit ≤ 1 Jahr.
 - *Notes:* Kupon-Bonds mit halbjährlichen Kupons und Laufzeiten zwischen 2 und 10 Jahren.
 - *Bonds:* Kupon-Bonds mit halbjährlichen Kupons und Laufzeiten zwischen 10 und 30 Jahren.

3. Bei Bundeswertpapieren, die die Bundesrepublik Deutschland Finanzagentur im Auftrag des Bundes emittiert, unterscheidet man zwischen
 - *Bundesanleihen*: Börsengehandelte Anleihen mit einer Laufzeit von 10 oder 30 Jahren und jährlichen Kuponzahlungen.
 - *Bundesschatzbriefe*: Ähnlich wie Bundesanleihen, 5 Jahre Laufzeit.
 - *Bundesschatzbriefe*: Nicht börsengehandelt, jährlich steigende Kupons, man unterscheidet Typ A (6 Jahre Laufzeit, jährliche Kuponzahlung) und Typ B (7 Jahre Laufzeit, Zinszahlung gesammelt am Laufzeitende).
 - *Finanzierungsschätze*: Laufzeiten 1-2 Jahre, nicht börsengehandelt.
 - *Tagesanleihen*: Variabel verzinslich, unbefristet, jederzeit kündbar.

Für einen festverzinslichen Kuponbond mit Zahlungen c_1, c_2, \dots, c_n in den Zeitpunkten T_1, T_2, \dots, T_n ("festverzinslich", da die Höhe der Kupons zum Zeitpunkt der Emission des Bonds bereits feststehen) ergibt sich zur Zeit $t \leq T_1$ der Marktpreis (Barwert)

$$p(t) = \sum_{i=1}^n c_i P(t, T_i).$$

Für $\tilde{t} = T_1 + \epsilon$ beträgt der Marktpreis (Barwert) dagegen

$$p(\tilde{t}) = \sum_{i=2}^n c_i P(\tilde{t}, T_i).$$

Wegen des Wegfalls der ersten Kuponzahlung springt der Marktpreis daher im Zeitpunkt T_1 um die Höhe der Kupon-Zahlung nach unten. Ebenso zu den nächsten Zinszahlungs-Zeitpunkten. Wegen dieser Unstetigkeiten werden Preise von Anleihen an den Börsen daher mit ihrem **clean price** quotiert.

Definition 2.2.2 1. Der **Zinszuwachs** (engl. **accrued interest**) des Bonds im Zeitpunkt $t \in [T_{i-1}, T_i]$ ist gegeben durch

$$AI(i, t) := c_i \cdot \frac{t - T_{i-1}}{T_i - T_{i-1}}.$$

Dabei werden die Zeitdifferenzen in Zähler und Nenner gemäß den gültigen Daycount-Conventions ermittelt.

2. Der an der Börse quotierte Preis der Anleihe ist der **clean price**. Er hat die Form

$$p_{\text{clean}}(t) = p(t) - AI(i, t), \quad t \in [T_{i-1}, T_i].$$

3. Bei Kauf der Anleihe zu zahlen ist der Marktpreis (auch **dirty price** oder cash price), der sich als Summe aus clean price und accrued interest ergibt

$$p_{\text{dirty}}(t) = p(t) = p_{\text{clean}}(t) + AI(i, t), \quad t \in [T_{i-1}, T_i].$$

Bemerkung 2.2.3

Die Quotierung des Clean Price findet für festverzinsliche Anleihen ebenso statt, wie für variabel verzinsliche Anleihen (Floating Rate Notes, siehe unten). Die beiden unterscheiden sich darin, dass bei einer festverzinslichen Anleihe die Kuponzahlungen der Höhe nach bereits zu Beginn feststehen, bei einer variabel verzinslichen Anleihe nicht. Da bei variabel verzinslichen Anleihen die zukünftigen Cashflows zu Beginn noch nicht feststehen, muss hier für die Barwertermittlung (Ermittlung des Marktpreises) anders vorgegangen werden.

Definition 2.2.4

Festverzinsliche Kupon-Anleihen können auch mit ihrer Rendite (**Yield to maturity**) $y(t)$ angegeben werden.

1. Bei jährlichen Kupon-Zahlungen in T_1, \dots, T_n ergibt sich $y(t)$ in $t = T_i$ aus der Gleichung

$$p_{\text{clean}}(T_i) = \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{r_c \cdot N}{(1 + y(T_i))^{j-i}} \right) + \frac{N}{(1 + y(T_i))^{n-i}},$$

wobei N das Nominal und r_c die jährliche Kupon-Rate ist. In $t \in]T_i, T_{i+1}[$ bestimmt man $y(t)$ dagegen aus

$$p(t) = \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{r_c \cdot N}{(1 + y(t))^{j-i-1+\tau}} \right) + \frac{N}{(1 + y(t))^{n-i-1+\tau}},$$

wobei $\tau := \frac{T_{i+1}-t}{T_{i+1}-T_i}$ (wiederum unter Berücksichtigung der entsprechenden Day Count Conventions) ist.

2. Bei halbjährlichen Kupon-Zahlungen in T_1, \dots, T_n ergibt sich $y(t)$ in $t = T_i$ aus der Gleichung

$$p_{\text{clean}}(T_i) = \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{r_c \cdot N/2}{(1 + y(T_i)/2)^{j-i}} \right) + \frac{N}{(1 + y(T_i)/2)^{n-i}},$$

wobei N das Nominal und r_c die annualisierte Kupon-Rate ist. In $t \in]T_i, T_{i+1}[$ bestimmt man $y(t)$ dagegen aus

$$p(t) = \left(\sum_{j=i+1}^n \frac{r_c \cdot N/2}{(1 + y(t)/2)^{j-i-1+\tau}} \right) + \frac{N}{(1 + y(t)/2)^{n-i-1+\tau}},$$

wobei τ wie oben angegeben ist.

Genau genommen müssen bei der Ermittlung der _ Abdiskontierung ebenfalls wieder die Day Count Conventions berücksichtigt werden. Wir haben in obiger Formel angenommen, dass $T_{i+1} - T_i = \frac{1}{2}$ gilt.

2.2.3 Floating Rate Notes (variabel verzinsliche Anleihen)

Kuponbonds, bei denen die Höhe der Kupons zum Emissionszeitpunkt des Bonds ($t = 0$) noch nicht feststeht, sondern zu Beginn einer jeden Zahlungsperiode $[T_i, T_{i+1}]$ neu bestimmt wird (und

2 DIE ZINSSTRUKTURKURVE - DEFINITION UND MÖGLICHKEITEN, SIE ZU ERMITTELN

sich beispielsweise am Euribor oder Libor orientiert), werden **Floating Rate Notes** (auch variabel verzinsliche Anleihen) genannt. Eine Floating Rate Note wird spezifiziert durch

1. zukünftige Zeitpunkte $T_0 < T_1 < \dots < T_n$,
2. einen Nominalwert N ,
3. die Information, wie sich die variablen Kupon-Zahlungen ermitteln (an welchem Marktzins sie sich orientieren, Beispiel: 3M-Euribor + 50bp (Spread)).

Die deterministischen Kuponzahlungen der zuvor betrachteten festverzinslichen Kupon-Bonds werden nun ersetzt durch die entsprechende, in $t = 0$ noch nicht bekannte, Zinsrate, bspw.

$$c_i = (T_i - T_{i-1}) \cdot F(T_{i-1}, T_i) \cdot N,$$

wobei $F(T_{i-1}, T_i)$ die Spotrate ist, die zum Zeitpunkt T_{i-1} bekannt ist, und für die Zeitperiode $[T_{i-1}, T_i]$ gilt (aus diesem Grunde ist nun auch der Zeitpunkt T_0 relevant, da dort die Zinsrate für die erste Periode festgelegt wird).

Lemma 2.2.5

Sei $N = 1$. Für den Barwert der Floating Rate Note zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ gilt:

$$p(t) = P(t, T_0), \text{ insbesondere } p(T_0) = 1.$$

Dies gilt auch für den Clean Price zu allen folgenden Zinsfixing-Terminen, d.h. $p(T_i) = 1 \ \forall i = 0, \dots, n$.

2.2.4 Zinsterminkontrakte (FRA's, Forward Rate Agreements)

Ein Forward Rate Agreement (FRA, Zinsterminkontrakt) ist eine außerbörsliche Vereinbarung, dass für Aufnahme oder Anlage eines bestimmten Nominalkapitals während eines festgelegten zukünftigen Zeitraumes ein bestimmter Zinssatz gilt. Dabei sichert sich der Käufer des FRAs den zukünftigen Zins für eine Geldaufnahme, der Verkäufer den zukünftigen Zins für die Geldanlage. Der Käufer sichert sich insofern gegen steigende Zinsen ab und verzichtet auf Einsparmöglichkeiten bei fallenden Zinsen, der Verkäufer sichert sich gegen sinkende Zinsen ab und verzichtet auf höhere Erträge durch steigende Zinsen. Das dem FRA entsprechende Geschäft an Terminbörsen ist der Zinsfuture (s.u.).

Die Vereinbarung umfasst dabei nicht die reale Geldaufnahme bzw. -anlage, vielmehr wird nur ein Tausch von Zinszahlungen vereinbart, de facto findet eine Nettozahlung statt, s.u. Ein FRA wird spezifiziert durch

1. einen Nominalbetrag N ,
2. eine zukünftige Zeitperiode $[T, S]$ mit $t < T < S$ (T wird Expiry genannt, S Maturity),
3. einem im FRA vereinbarten Zinssatz c (c wird FRA-Satz genannt),
4. einen Referenzzins für dieselbe Periode $[T, S]$, typischerweise ein Geldmarktsatz (Euribor oder Libor).

Zum Zeitpunkt des Abschlusses des FRAs (in t) hat der FRA in der Regel einen Marktwert (Barwert) von 0. In diesem Fall gilt (in der „Single Curve Welt“, in der wir uns hier bewegen) $c = F(t, T, S)$. Im Zeitpunkt T wird die Höhe des Referenzzinses ermittelt ("gefixt"). Der Käufer erhält vom Verkäufer den Referenzzins bezogen auf das Nominal und den Zeithorizont $[T, S]$, im Gegenzug bezahlt er den vertraglich fixierten FRA-Satz c . Tatsächlich wird nur der Differenzbetrag zwischen beiden beglichen. Dabei wird unterstellt, dass die Zinszahlungen nachschüssig am Ende der Periode S stattfinden, der reale Zahlungsausgleich findet aber in T (entsprechend abdiskontiert) statt. Die in T stattfindende Zahlung beläuft sich demnach aus Sicht des Verkäufers auf

$$\frac{N \cdot (S - T) \cdot (c - F(T, S))}{1 + F(T, S) \cdot (S - T)},$$

wobei $F(T, S)$ die Spotrate im Zeitpunkt T für die Zeitperiode $[T, S]$ ist, und sich nach dem im Vertrag spezifizierten Referenzzins ermittelt.

Beispiel 2.2.6

Beim Pricing eines FRAs sind ein paar Dinge zu beachten:

- Euribor / Libor-Raten werden auf act/360-Basis quotiert.
 - Die Long-Position im FRA ist „long den Zins“, d.h. gewinnt, wenn der Zins steigt und verliert, wenn er sinkt.
1. Berechnen Sie die FRA-Rate eines FRAs mit folgenden Eckdaten: $t(\text{heute}) = 31.05.2015$, $T = 30.06.2015$, $S = 30.09.2015$. Der aktuelle 30-Tage-Libor beträgt 0.04, der aktuelle 120-Tage-Libor beträgt 0.05.
 2. Wie hoch ist der Wert obigen FRAs (Nominal 1 Mio. Euro) zum Zeitpunkt T , wenn der 90-Tage-Libor zu diesem Zeitpunkt 0.06 beträgt (aus Sicht des Käufers)?

2.2.5 Zins-Futures

Zinsfutures können unterteilt werden in Futures auf kurzfristige Instrumente und Futures auf Kuponbonds. Wir betrachten an dieser Stelle nur Eurodollar-Futures, die ein Beispiel für erstere sind.

Ein **Eurodollar** ist ein Dollar, der bei einer US-amerikanischen oder ausländischen Bank ausserhalb der USA angelegt wird. Der Eurodollar-Zinssatz ist der Zinssatz, den eine Bank durch die Einlage von Eurodollar-Beträgen bei einer anderen Bank erzielt. Er stimmt im Wesentlichen mit dem Libor überein.

3-Monats-Eurodollar-Futures sind Futures-Kontrakte auf den 3-Monats-Zinssatz für Eurodollars (d.h. den 3-Monats-Libor). Derart kann ein Anleger einen Zinssatz für einen zukünftigen 3-Monats-Zeitraum festschreiben. Mögliche Starttermine für den 3-Monatszeitraum, für welchen der Zins gilt, sind alle Mittwoche im März, Juni, September oder Dezember innerhalb der kommenden 10 Jahre. Nominal eines Kontraktes ist eine Million USD. D.h. ein Anleger im Jahr 2016 kann Eurodollar Futures bis zum Jahr 2026 zur Fixierung von Zinssätzen für 3-Monatszeiträume verwenden. Für kurzfristige Kontrakte sind auch Starttermine, die nicht auf einen dritten Mittwoch im März, Juni, September, Dezember fallen, möglich.

Ein Investor, der die Long-Position in einem Eurodollar-Future eingeht, fixiert zum Zeitpunkt t den Zins, den er in der Zukunft für eine dreimonatige Periode auf ein Nominal von 1 Mio. USD erhalten wird. Steigen die Zinsen, so verliert der Investor, sinken die Zinsen so gewinnt er.

Die laufende Quotierung Q_t eines Eurodollar-Futures folgt der u.a. Konvention:

$$Q_t = 100\% - \text{Eurodollar-Zinssatz},$$

wobei t der aktuelle Zeitpunkt, T der Beginn der 3-Monats-Zeitperiode, S das Ende der 3-Monats-Zeitperiode ist, und der Eurodollar-Zinssatz, der in t fixiert wurde, der Forwardrate $F(t, T, S)$ (annualisiert, bei vierteljährlicher Verzinsung und Actual/360-Tageszählweise) entspricht (in der 'Single Curve Welt'). Der Kontrakt wird bis zum Zeitpunkt T täglich quotiert (d.h. $F(t, T, S)$ wird täglich neu ermittelt und damit auch Q_t). Zum Zeitpunkt T wird Q_T auf $100 - F(T, S)$ gesetzt, wobei $F(T, S)$ dem in T gültigen Spotzins für die Periode $[T, S]$ (also bspw. dem Libor für diese Zeitperiode, ebenfalls annualisiert) entspricht. Der Wert einer Long-Position eines Kontraktes, die ein Investor zum Niveau $Q_t = 100\% - F(t, T, S)$ in t abgeschlossen hat, beträgt zum Zeitpunkt T demnach

$$\begin{aligned} (Q_T - Q_t) \cdot (S - T) \cdot 1.000.000 &= (F(t, T, S) - F(T, S)) \cdot (S - T) \cdot 1.000.000 \\ &\approx (F(t, T, S) - F(T, S)) \cdot 250.000. \end{aligned}$$

Die Quotierung ist derart, dass ein Anstieg von Q um einen Basispunkt einem Gewinn oder Verlust (Investor/Käufer: Verlust) von 25 USD pro Kontrakt entspricht. Dies entspricht der Tatsache, dass ein Anstieg des 3-Monats-Libors (annualisiert) um einen Basispunkt einen Verlust der Long-Position (Gewinn der Short-Position) i.H.v. 25 USD bedeutet.

Bei bekannter Quotierung Q_t die Forwardrate $F(t, T, S)$ zu ermitteln, ist hier natürlich denkbar einfach.

Eurodollar-Futures und FRA entsprechen sich dahingehend, dass sie den Zinssatz für einen zukünftigen Zeitraum festlegen. Für kurze Laufzeiten (bis ca. 1 Jahr) können die beiden Kontrakte (in der 'Single Curve Welt') als gleich angesehen werden. D.h. der Eurodollar-Future stimmt mit der entsprechenden Forwardrate des FRA überein. Für Kontrakte mit längeren Laufzeiten gewinnen die Unterschiede zwischen den Kontrakten an Bedeutung.

2.2.6 Zinsswaps

Ein **Swap** ist eine Vereinbarung zwischen zwei Parteien, in der Zukunft bestimmte Zahlungsströme auszutauschen. Die Spezifikation eines Swaps umfasst die folgenden Festlegungen:

1. Zukünftige Zeitpunkte, zu denen die Zahlungsströme auszutauschen sind,
2. ein Kontraktvolumen (Nominal), das als Berechnungsgrundlage gilt,
3. die Berechnungsmethode, wie die zukünftigen Zahlungsströme zu ermitteln sind.

Ein Zinsswap ist ein Swap, bei dem Zinszahlungen zwischen zwei Parteien ausgetauscht werden. Bei einem Standard-Zinsswap werden feste Zinszahlungen (i.H.v. einem zu Beginn des Kontraktes festgelegten %-Satz auf das Nominal) gegen variable Zinsen, die sich beispielsweise am Euribor/Libor oder einem anderen Referenzzins orientieren, und die zu Kontraktbeginn noch nicht der

Höhe nach feststehen, getauscht. Die Spezifikation eines Standard-Zinsswaps umfasst die folgenden Festlegungen:

1. Die Laufzeit des Swaps,
2. die Frequenz (und genauen Zeitpunkte) des Austausches der Zinszahlungen,
3. die Höhe eines Festzinses (in % des Nominals), den die eine Partei der anderen zahlt,
4. die Berechnungsregel für die Ermittlung des variablen Zinses. Bei Standard-Zinsswaps wird hier ein Referenzzins (3-/6-/9-/12-Monats-Euribor) angegeben.
5. Das Kontraktvolumen (Nominal),
6. und welche der beiden Parteien Festzinsszahler bzw. Festzinsempfänger ist.

Aus Sicht des Festzinsszahlers sprechen wir von einem **Payer-Swap**, aus Sicht des Festzinsempfängers von einem **Receiver-Swap**. Bei Swaps ist die Unterscheidung nicht wirklich notwendig, da es sich um denselben Swap, nur aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet, handelt. Wichtig wird die Unterscheidung bei Swaptions, d.h. Optionen, die erlauben zu einem zukünftigen Zeitpunkt in einen Swap einzutreten. Hat der Käufer der Option das Recht, in einen Swap als Festzinsszahler (Festzinsempfänger) einzutreten, so spricht man von einer Payer-Swaption (Receiver-Swaption).

De facto findet bei Zinsswaps kein Austausch des Nominals statt. Vielmehr stellt dies eine Berechnungsgröße dar, anhand der sich die Höhe der Zinszahlungen, die die eine der anderen Partei zu zahlen hat, ermittelt wird. Die Zahlungen erfolgen, falls sie zeitgleich stattfinden (was oft nicht der Fall ist) saldiert, d.h. es wird nur der Differenzbetrag ausgetauscht. Die Zinszahlungen erfolgen im Zinsswap i.R. am Ende einer Zinsperiode. Genauer wird für die Zinsperiode $[T_{i-1}, T_i]$ zu Beginn der Periode der variable Zins festgestellt: $F(T_{i-1}, T_i)$, zum Ende der Periode findet die Zahlung $(Z - F(T_{i-1}, T_i)) \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot N$ statt, wobei Z der vertraglich fixierte Festzins des Zinsswaps ist.

Die Tageszählweisen, nach denen Festzins (entsprechend den Konventionen für Festzinssbonds) bzw. variabler Zins (entsprechend den Konventionen der Geldmarktsätze) ermittelt werden, unterscheiden sich in Standard-Swaps. Der Einfachheit halber wollen wir dies im weiteren Verlauf ignorieren.

Für den Barwert (d.h. Wert, Preis) eines Swaps mit Nominal 1 aus Sicht des Festzinsempfängers zum Zeitpunkt T_0 gilt nun

$$BW_{T_0} = \sum_{i=1}^n Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i) - \sum_{i=1}^n F(T_{i-1}, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i),$$

was dem Barwert der Festzinsseite abzgl. dem Barwert der variablen Seite entspricht. Hierbei sind $T_i, i = 1, \dots, n$ die Zahlungstermine des Swaps, Z der vertraglich fixierte Festzins, $F(T_{i-1}, T_i)$ die zukünftigen Spotrates.

Unter Ausnutzung der Tatsache, dass

1. die Cashflows des Swaps aus Sicht des Festzinsszahlers übereinstimmen mit
 - (a) dem Kauf einer variabel verzinslichen Anleihe (mit gleicher Laufzeit, gleichem Nominal, gleichen Zinsmodalitäten wie die variable Seite des Swaps), und
 - (b) dem Verkauf (Kreditaufnahme / Emission) eines Festzinssbonds (mit gleicher Laufzeit, gleichem Nominal, gleichen Zinsmodalitäten wie die Festzinsseite des Swaps),

2. der Barwert (genauer: Der Clean-Price) der variabel verzinslichen Anleihe zum jedem Zinszahlungs-/zinsfixing-Termin 100% beträgt (siehe Lemma 2.2.5),

lässt sich obige Barwert-Formel vereinfachen zu:

$$BW_{T_0} = \sum_{i=1}^n Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i) + P(T_0, T_n) - 1.$$

Bemerkung 2.2.7

Im Rahmen der Finanzmarktkrise wurde bei der Bewertung besicherter Derivate von einem 'Single Curve Approach' auf einen *Multi Curve Approach* umgestellt. Seither ist obige Argumentation für die Vereinfachung der Barwertberechnung eines Zinsswaps nur noch in bestimmten Situationen zulässig, da die Vereinfachung wesentlich darauf beruht, dass die zukünftigen Cashflows ($F(T_{i-1}, T_i)$) und die Diskontfaktoren ($P(T_{i-1}, T_i)$) auf derselben Zinsstrukturkurve ermittelt werden. Beim Multi Curve Approach, speziell beim sogenannten OIS-Discounting, werden zukünftige Cashflows von Euribor-Zinsswaps ($F(T_{i-1}, T_i)$) auf Basis einer Euribor-Zinsstrukturkurve, die Diskontfaktoren hingegen auf Basis einer Overnight-Zinsstrukturkurve ermittelt, und beide stimmen nicht exakt überein.

Definition 2.2.8

Die (aktuelle) **Swapsrate** bezeichnet den Festzins Z eines Zinsswaps, für den der Barwert des Zinsswaps null ist. Wir bezeichnen sie mit $S_T(T_0)$ (T die Fälligkeit, T_0 der Startzeitpunkt des Swaps, der mit dem Tag der Ermittlung der Swapsrate zusammenfällt).

Nach obigen Ausführungen gilt:

$$S_T(T_0) = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i)}.$$

Swapsrates für Standard-Zinsswaps unterschiedlicher Laufzeiten (bis zu 30 Jahre) werden am Markt auf laufender Basis quotiert. Sie hängen von der Laufzeit des Zinsswaps ab. Bei bekannten Swapsrates für die verschiedenen Laufzeiten können Diskontfaktoren bzw. Spotrates in Abhängigkeit von der Laufzeit im Rahmen eines iterativen Verfahrens ermittelt werden. Bei einem 'Single Curve Approach' sieht dies wie folgt aus:

1. $F(T_0, T_1)$, d.h. die aktuelle Spotrate, wird direkt am Markt quotiert und muss nicht auf Basis von Swapsrates ermittelt werden.
2. Angenommen nun, die Diskontfaktoren $P(T_0, T_1), \dots, P(T_0, T_{n-1})$ seien bereits aus den Swapsrates für die entsprechenden Laufzeiten T_2, \dots, T_{n-1} ermittelt worden. Dann lässt sich aus der Swapsrate zur Laufzeit T_n ($Z := S_{T_n}(T_0)$) der Diskontfaktor $P(T_0, T_n)$ wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i) + P(T_0, T_n) - 1 \\ \Leftrightarrow P(T_0, T_n) &= \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i)}{1 + Z \cdot (T_n - T_{n-1})} \end{aligned}$$

Aus der aktuellen Terminstrukturkurve lassen sich nicht nur die Swaprates für Zinsswaps unterschiedlicher Laufzeiten ermitteln (und umgekehrt), sondern auch **Forward-Swaprates**, die für zukünftige Zeitspannen gelten: Die Forward-Swaprate $S_T(t, T_0)$ ist definiert als die in $t \leq T_0$ fixierte Rate Z , für die ein in T_0 startender Zinsswap aus heutiger Sicht (d.h. Sicht in t) einen Barwert von null aufweist. Genauer ist die Forward-Swaprate definiert als der Zins Z , für den gilt:

$$BW_t := \sum_{i=1}^n Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i) - \sum_{i=1}^n F(T_{i-1}, T_i) \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i) = 0.$$

Mit ähnlichen Argumenten wie zuvor lässt sich zeigen, dass

$$BW_t = \sum_{i=1}^n Z \cdot (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i) + P(t, T_n) - P(t, T_0)$$

gilt und damit die Forward-Swaprate gleich

$$S_T(t, T_0) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot P(t, T_i)}$$

ist.

Seit der Etablierung des Multi Curve Approaches hängen Swaprates aber nicht nur von der Laufzeit, sondern auch von der Zinsbindungsperiode des variablen Zinses ab. D.h. Swaprates für Swaps mit dem 3-Monats-Euribor als variablem Zins sind - bei sonst gleichen Eckdaten (Nominal, Laufzeit) - nicht gleich den Swaprates für Swaps mit dem 12-Monats-Euribor als variablem Zins.

Infolgedesse werden für Overnight-Zinsen, 3-Monats-Euribor-, 6-Monats-Euribor, ..., unterschiedliche Zinsstrukturkurven (d.h. Diskontfaktoren/Spotrates) ermittelt. Die Overnight-Diskontfaktoren werden ähnlich wie oben für den 'Single Curve Approach' vorgestellt, ermittelt, wobei es Besonderheiten für Laufzeiten von Overnight-Swaps von bis zu einem Jahr gibt. Für die Ermittlung von Euribor-Diskontfaktoren/Spotrates:

1. werden Overnight-Diskontfaktoren auf Basis von Overnight-Swaprates ermittelt,
2. diese dann verwendet, um mit Hilfe obiger allgemeiner Barwert-Formel für Euribor-Zinsswaps die Euribor-Forwardzinssätze $F(t, T_i, T_{i+1})$ im Rahmen eines iterativen Verfahrens zu ermitteln,
3. aus welchen die Euribor-Spotrates/Diskontfaktoren ermittelt werden können.

2.2.7 Caps und Floors

Zinscaps und -floors sind Bündel europäischer Optionen, wobei das Underlying nun keine Aktien, sondern Zinssätze sind. Jede einzelne Option wird **Caplet** bzw. **Floorlet** genannt. Ein Caplet ist vergleichbar mit einer Calloption auf einen Zins, ein Floorlet mit einem Put. Sind die zukünftigen Zinsen höher als die im Cap vereinbarte Cap Rate, so erhält der Besitzer des Caps die Differenz zu den jeweiligen Fälligkeiten der Caplets.

Der Wert eines Caplets, beispielsweise auf einen einjährigen Zins $F(T, T+1)$ (mit einem angenommenen Daycount Faktor von 1), in T ist gleich:

$$\text{Wert des Caplets} = CL(T, T+1) = \frac{\max((F(T, T+1) - \text{Cap rate}), 0) \cdot N}{1 + F(T, T+1)},$$

wobei N die Höhe des Nominals angibt. Die vertraglich fixierte Cap Rate entspricht dem Strike der Calloption.

Der Wert eines Floorlets mit vertraglich fixierter **Floor Rate** auf den einjährigen Zins $F(T, T+1)$ beträgt in T

$$\text{Wert des Floorlets} = FL(T, T+1) = \frac{\max((\text{Floor rate} - F(T, T+1)), 0) \cdot N}{1 + F(T, T+1)}.$$

Die Abdiskontierung in obigen Formeln ergibt sich, da für Standard-Caplets / -Floorlets angenommen wird, dass die Zinszahlung zum Ende des Jahres, auf das sich der Zins bezieht, stattfindet. Tatsächlich findet sie zum Zeitpunkt T , entsprechend abdiskontiert mit $\frac{1}{1+F(T, T+1)}$, statt.

Für ein Cap sind nun zu spezifizieren:

- Eine Reihe von zukünftigen - äquidistanten - Terminen $T_0 < T_1 < \dots < T_n$,
- eine Cap Rate K ,
- der Referenzzins. Bei einem Standard-Zinscap stimmen Zinsbindungsfristen der Referenzzinsen und Fälligkeiten der Caplets überein.

Mit diesen Spezifikationen entspricht nun das Cap den Caplets $CL(T_0, T_1), \dots, CL(T_{n-1}, T_n)$. Für Floors gelten entsprechende Aussagen.

Ein Cap gibt dem Besitzer eine Absicherung gegen steigende Zinsen, ein Floor gegen fallende Zinsen.

Zur Bewertung von Standard-Zinsoptionen existieren Formeln ähnlich denen der Black Scholes Formeln für die Bewertung von Aktienoptionen (die sogenannten 'Black'76 Formeln'), wobei mittlerweile zu beachten ist, dass Zinsen auch negativ werden können, was im Black'76 nicht zugelassen ist (da die Black Scholes Formeln auf einer geometrischen Brownschen Bewegung basieren). Seither haben sich daher Alternativen entwickelt, unter anderem ein Modellierungsansatz auf Basis der Brownschen anstelle der Geometrischen Brownschen Bewegung und der sogenannte 'Shifte Lognormal' Ansatz. Um Nicht-Standard-Zinsoptionen preisen zu können, benötigen wir ein stochastisches Modell für mögliche Entwicklungen zukünftiger Zinsen. Die einfachsten derartigen Modelle sind die sogenannten **Shortrate Modelle**, die wir im weiteren Verlauf kennenlernen werden.

2.2.8 Swaptions

Swaptions sind Optionen auf Zinsswaps. Sie geben dem Inhaber das Recht, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt in einen bestimmten Zinsswap einzutreten. Dabei wird zwischen **Payer-Swaptions**, die dem Inhaber das Recht geben, in einen Swap als Festzinsszahler einzutreten, und **Receiver-Swaptions**, bei denen der Inhaber das Recht hat, als Festzinsempfänger einzutreten, unterschieden.

Wie zuvor dargelegt, ist die Swaprate für eine bestimmte Laufzeit zu einer bestimmten Zeit der feste Zinssatz, der in einem neu emittierten Swap mit dieser Laufzeit gegen den variablen Zins

(bspw. Euribor) getauscht werden kann. Zum Zeitpunkt der Fälligkeit T_0 der Fälligkeit der Option hat eine Standard-Payer-Swaption mit einer Laufzeit von n Zeitperioden daher folgenden Wert

$$\text{Wert der Payer-Swaption} = \max((S_{T_n}(T_0) - Z), 0) \cdot \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot P(T_0, T_i),$$

wobei Z der vertraglich fixierte Festzins ist (der Festzins des Zinsswaps, in den der Optionsbesitzer eintreten kann), $S_{T_n}(T_0)$ die in T_0 gültige Swaprate und $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ die Zahlungszeitpunkte des Swaps.

Motivation der Formel: Der Optionsbesitzer könnte zum Zeitpunkt T_0 seine Option ausüben und in den Zinsswap mit Festzins Z als Payer eintreten. Gleichzeitig könnte er einen Zinsswap als Receiver mit $S_{T_n}(T_0)$ abschliessen. Letzterer hat einen Barwert von null. Hierdurch würde der Optionsbesitzer zu den jeweiligen Zahlterminen den variablen Zins einfach 'durchreichen' und den Zins $(S_{T_n}(T_0) - Z)$ erhalten.

Eine Payer-Swaption wird zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ als 'at the money' bezeichnet, wenn $Z = S_{T_n}(t, T_0)$, d.h. wenn der Festzins Z , zu dem der Optionsbesitzer in T_0 in den Swap eintreten kann, der Forward-Swaprate $S_{T_n}(t, T_0)$ entspricht. Er wird als 'in the money' bezeichnet, wenn $Z < S_{T_n}(t, T_0)$ und als 'out of the money' wenn $Z > S_{T_n}(t, T_0)$. Bei Receiver-Swaptions verhält es sich umgekehrt.

Zur Bewertung von Standard-Swaptions gelten dieselben Aussagen wie zuvor für Caps / Floors.

2.3 Nicht-parametrische Verfahren zur Ermittlung der Zinsstrukturkurve

2.3.1 Bootstrapping-Beispiel, Vorbemerkungen

Bemerkung 2.3.1 1. **Interpolation zwischen bekannten Diskontfaktoren:** Um Diskontfaktoren für alle Laufzeiten zu erhalten, sind Interpolationen bekannter Stützstellen notwendig. Hierfür existieren die verschiedensten Ansätze. Wir verwenden im folgenden eine geometrische Interpolation: Seien Diskontfaktoren

$$P(t_0, S) = \exp(-R(t_0, S)(S - t_0)) \text{ und } P(t_0, T) = \exp(-R(t_0, T)(T - t_0)) \text{ mit } t_0 < T < S$$

bekannt. Für einen beliebigen Zeitpunkt $T < t < S$ ermitteln wir den Diskontfaktor $P(t_0, t)$ dann wie folgt

$$P(t_0, t) = \exp(-(t - t_0)(qR(t_0, T) + (1 - q)R(t_0, S)))$$

für $q := \frac{S-t}{S-T}$.

2. Für die sehr kurzen Laufzeiten sind die Spotrates direkt quotiert (in Form von Geldmarktsätzen: Euribor, Libor). Für mittelfristige Laufzeiten kann i.R. auf FRAs oder Zinsfutures abgestellt werden. Diese liefern Forwardrates $F(t_0, T, S)$. Um hieraus die Diskontfaktoren $P(t_0, S)$ zu ermitteln, müssen

(a) die Diskontfaktoren kürzerer Laufzeiten bekannt sein: In obiger Notation muss $P(t_0, T)$ bekannt sein (ggfs. durch Interpolation ermittelt werden),

(b) die Beziehung $P(t_0, S) = \frac{P(t_0, T)}{1 + (S - T) \cdot F(t_0, T, S)}$ ausgenutzt werden.

3. Für längere Laufzeiten (ab einem Jahr) schliesslich wird i.R. auf Swaprates abgestellt und das oben erläuterte iterative Verfahren durchgeführt. Für den Fall, dass Informationen fehlen, beispielsweise da die Swaprates nur für Swaps mit Laufzeiten 1,2,3,4,5 Jahre bekannt sind, es sich aber um 6-Monats-Euribor-Swaps handelt, die halbjährliche Zinszahlungen aufweisen (zum iterativen Verfahren des vorhergehenden Abschnittes also die Swaprates zu den Halbjahreszeitpunkten fehlen), muss auch hier eine Möglichkeit der Interpolation gefunden werden. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze. Wir folgen der linearen Interpolation der Swaprates, wie sie von Filipovic vorgegeben wird:

$$Z_t = q \cdot Z_T + (1 - q) \cdot Z_S$$

für $T < t < S$ und $q := \frac{S-t}{S-T}$.

4. Die Resultate des Bootstrapping-Beispiels werden zeigen, dass aktuelle Marktpreise / Marktquotierungen exakt rekonstruiert werden, was beispielsweise für Zinsoptions-Händler oft wünschenswert ist, da sie ihre Positionen gegen aktuelle Marktpreise benchmarken müssen. Die hieraus resultierende Forward-Kurve ist allerdings instabil und irregulär. Ein impliziter Fehler bei dem hier dargestellten Bootstrapping-Beispiel ist, dass angenommen wird, dass es nur eine zugrundeliegende Zinsstrukturkurve gibt, unabhängig davon, aus welchen Produkten sie gewonnen wird. Jedoch gibt es (auch schon in der 'Single Curve Welt') systematische Unterschiede zwischen Geldmarktinstrumenten (Euribors), Futures, Swaps, die hier ignoriert werden.

2.3.2 Bootstrapping Beispiel, siehe Filipovic, Abschnitt 3.1.

Wir betrachten folgende Daten: t_0 sei der 11. Januar 1996. Wir haben

1. LIBOR-Informationen (Angaben in %):

$L(t_0, S_1 := 12. \text{ Januar } 1996)$	0.49
$L(t_0, S_2 := 18. \text{ Januar } 1996)$	0.50
$L(t_0, S_3 := 13. \text{ Februar } 1996)$	0.53
$L(t_0, S_4 := 11. \text{ März } 1996)$	0.55
$L(t_0, S_5 := 11. \text{ April } 1996)$	0.56,

2. Zinsfutures-Quotierungen (Eurodollar Futures) (Angaben in %):

$$Q_{t_0}^{T_1 T_2} = 99.34, \quad Q_{t_0}^{T_2 T_3} = 99.25, \quad Q_{t_0}^{T_3 T_4} = 99.10, \quad Q_{t_0}^{T_4 T_5} = 98.9,$$

wobei $Q_{t_0}^{T_i T_{i+1}}$ die Quotierung des Eurodollar-Futures ist, der sich auf die zukünftige Zeitperiode $[T_i, T_{i+1}]$ bezieht und T_1, \dots, T_5 folgenden Tagen entsprechen: 20.03.1996, 19.06.1996, 18.09.1996, 18.12.1996, 19.03.1997.

3. Aktuelle Swaprates (Swaps die in t_0 starten) mit halbjährlichen Zahlungen und folgenden Daten:

$$SR(2J) = 1.14, \quad SR(3J) = 1.6, \quad SR(4J) = 2.04, \quad SR(5J) = 2.43, \quad SR(7J) = 3.01, \quad SR(10J) = 3.36$$

und folgenden Zahlterminen:

$$\{U_1, \dots, U_{20}\} = \left\{ \begin{array}{cccc} 11.07.96 & 13.01.97 & 11.07.97 & 12.01.98 \\ 13.07.98 & 11.01.99 & 12.07.99 & 11.01.00 \\ 11.07.00 & 11.01.01 & 11.07.01 & 11.01.02 \\ 11.07.02 & 13.01.03 & 11.07.03 & 12.01.04 \\ 12.07.04 & 11.01.05 & 11.07.05 & 11.01.06 \end{array} \right\}$$

Aufgabe: Ermitteln Sie auf Basis der oben angegebenen Daten die Zinsstrukturkurve, genauer: Die möglichen Stützstellen (gemäß dem zur Verfügung gestellten Excelsheet).

2.3.3 Allgemeines über nicht-parametrische Verfahren

Wir haben zuvor gesehen, dass der naive Ansatz der Ermittlung von Zinsen aus vorgegebenen Instrumenten, ohne den Versuch, Instrumente unterschiedlichen Typs miteinander zu verschmelzen, zu Problemen führen kann. Dies wird hierdurch verstärkt, dass sich die Laufzeiten unterschiedlicher am Markt quotierter Instrumente überlappen. Die allgemeine Problemstellung, die Terminstrukturkurve der T-Bonds (die Diskontkurve) zu ermitteln, lässt sich wie folgt formulieren:

Sei $T = t_0 + x$. Suche die Kurve $x \mapsto D(x) := P(t_0, t_0 + x)$ für $x \geq 0$. Setze dazu an:

$$p = Cd + \epsilon,$$

wobei p ein Spaltenvektor bestehend aus n Marktpreisen, C die zugehörige Cashflow-Matrix (d.h. c_{ij} der Cashflow des i -ten Finanztitels zum Zeitpunkt T_j), und $d = (D(x_1), \dots, D(x_N))^t$ mit Cashflow-Zeitpunkten $t_0 < T_1 < \dots < T_N$ und $T_i - t_0 = x_i$ ist, sowie ϵ ein Vektor bestehend aus Pricing-Fehlern, der minimiert werden soll. In einem perfekten Markt würde der Preisvektor p mit den diskontierten Cashflows Cd übereinstimmen. Allerdings liegt den Preisen verschiedener Finanzinstrumente in der Praxis niemals eine vollständig einheitliche Zinsstruktur zugrunde, sodass eine Übereinstimmung $p = Cd$ nicht zu erwarten ist. Das kann man auch rein algebraisch erkennen: Für $N \neq n$ ist C keine quadratische Matrix (und selbst für $N = n$ muss C nicht invertierbar sein), daher ist das Gleichungssystem $p = Cd$ i.A. nicht oder nicht eindeutig lösbar.

Im Folgenden betrachten wir, wie Marktpreise in obiges Schema gebracht werden können.

1. Bondpreise:

- (a) Gegeben ein Vektor p aus quotierten Bondpreisen (genauer: Dirtypreisen) $p = (p_1, \dots, p_n)^t$,
- (b) Cashflow-Zeitpunkte $t_0 < T_1 < \dots < T_N$,
- (c) für jeden Bond $i = 1, \dots, n$ die (Kupon- und Nominal-)Cashflows $c_{i,j}$ zum Zeitpunkt T_j (null erlaubt), die insgesamt die Cashflow-Matrix

$$C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq N}$$

aufspannen.

2. **Geldmarktsätze (Libor, Euribor):** Wenn L die Rate ist und T die Maturity, dann setzen wir $p = 1$ und $c = 1 + (T - t_0)L$ zum Zeitpunkt T .
3. **FRAs:** Wenn F die FRA-Rate für $[T, S]$, dann setzen wir $p = 0$, $c_1 = -1$ in $T_1 = T$ und $c_2 = 1 + (S - T)F$ in $T_2 = S$.
4. **Zinsswaps (genauer: Receiver-Swaps):** Wenn K die Swaprate ist und die Zahlungstermine $t_0 \leq T_0 < \dots < T_n$ mit $T_i - T_{i-1} = \delta$ entsprechen, dann setzen wir
 - in $T_0 = t_0$: $p = 1$, $c_1 = \dots = c_{n-1} = \delta K$ sowie $c_n = 1 + \delta K$,
 - in $T_0 > t_0$: $p = 0$, $c_0 = -1$, sowie $c_1 = \dots = c_{n-1} = \delta K$ und $c_n = 1 + \delta K$.

2.4 Parametrische Verfahren zur Ermittlung der Zinsstrukturkurve

In der Praxis sind die gebräuchlichsten Modelle parametrische Ansätze für die unmittelbare Forward Rate $f(t_0, t_0 + x) = \phi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Mit diesem Ansatz gilt

$$\begin{aligned} D(x) &= P(t_0, t_0 + x) = \exp \left(- \int_{t_0}^{t_0+x} f(t_0, t_0 + \xi) d\xi \right) \\ &= \exp \left(- \int_{t_0}^{t_0+x} \phi(\xi, \alpha_1, \dots, \alpha_k) d\xi \right) = D(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k). \end{aligned}$$

Wichtige Beispiele sind

1. **Die Nelson-Siegel-Familie:** Diese hat vier Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_4$. Die Kurve ist gegeben durch

$$\phi_{NS}(x, \alpha_1, \dots, \alpha_4) = f(t_0, t_0 + x) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 \cdot x) \cdot \exp(-\alpha_4 \cdot x).$$

2. **Die Svensson-Familie:** Diese hat sechs Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_6$. Die Kurve ist gegeben durch:

$$\phi_S(x, \alpha_1, \dots, \alpha_6) = f(t_0, t_0 + x) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 \cdot x) \cdot \exp(-\alpha_5 \cdot x) + \alpha_4 \cdot x \cdot \exp(-\alpha_6 \cdot x).$$

Für diese Familien ist das Minimierungsproblem $\min_{\alpha \in Z} \|p - Cd(\alpha)\|$, wobei Z der Parameterraum ist, unter schwachen Regularitätsannahmen eindeutig lösbar.

Aufgaben:

1. Welches Grenzverhalten ergibt sich für ϕ_{NS} bzw. ϕ_S für $x = 0$ bzw. für $x \rightarrow \infty$?
2. Plotten Sie die NS-Familie für $\alpha_1 = 7.69$, $\alpha_2 = -4.13$, $\alpha_4 = 0.5$ und sieben verschiedene Werte für α_3 :

$$\alpha_3 \in \{-4.18; -3.19; -2.2; -1.21; -0.22; 0.77; 1.76\}.$$
3. Wie hängen die Diskontfaktoren und die Spotrates jeweils von obigen $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ ab?

2.5 Die Auswirkungen der Finanzkrise auf die Diskontierung

Die folgenden Ausführungen sind dem Buch 'Kreditderivate und Kreditrisikomodelle' von Marcus R.W. Martin, Stefan Reitz, Carsten S. Wehn, Springer Verlag, 2014 entnommen.

Die klassische Bewertung von zinsabhängigen Finanzinstrumenten basierte bis zur Finanzmarktkrise 2007/2008 auf der Approximation, dass die zum Diskontieren verwendeten Zinsen und die für die Ermittlung der zukünftigen Cashflows verwendeten Forwardrates auf ein- und derselben Zinsstrukturkurve ermittelt wurden. So wurden

- Swaprates für Swaps derselben Restlaufzeit, aber unterschiedlicher Zinsperioden (bspw. 3-Monats-Euribor versus 12-Monats-Euribor) als approximativ identisch angesehen.
- FRA-Rates wurden bis auf minimale Abweichungen identisch mit den Forward-Rates betrachtet.

- Die auf Euribor-/Libor basierenden Depositen-Zinssätze und die OIS-Raten (Overnight Index Swap Rates, hierbei handelt es sich um die feste Seite eines Swaps, bei dem ein durchschnittlicher realisierter Tagesgeldsatz am Ende der Swaplaufzeit gegen einen vorab definierten Festzinssatz getauscht wird) für dieselbe Halteperiode einer Anlage wurden als nahezu identisch betrachtet.

Die Differenzen zwischen diesen beobachteten Größen werden allgemein als **Basis** bezeichnet. Sie wurden lange Zeit als vernachlässigbar angesehen, und in der Modellierung nicht berücksichtigt.

Seit der Finanzmarktkrise hat sich diese Situation schlagartig verändert. Siehe hierzu bspw. die Ausführungen von Bianchetti und Carlicci, 'Markets Evolution After the Credit Crunch', 2012. Als Folge der Finanzmarktkrise konnte unter anderem beobachtet werden:

- Eine zunehmende Divergenz zwischen Euribor-/Libor-basierten und OIS-/Eonia-basierten Zinssätzen,
- eine deutliche und nicht-statische Basis zwischen FRA- und den zugehörigen Forward-Sätzen,
- eine deutliche Basis zwischen den Swaps unterschiedlicher variabler Zinszahlungsperioden.

Beispiel 2.5.1

Das Beispiel ist 'Interest Rates and The Credit Crunch: New Formulas and Market Models' von Mercurio, Bloomberg, 2009 entnommen und demonstriert eindrucksvoll die Abkopplung der alten 'arbitragefreien Single Curve Welt' von der Realität der Märkte.

Die Schlusskurse für 3-Monats-Depositen und 6-Monats-Depositen vom 12.11.2008 beliefen sich auf 4.286% und 4.345%. Bei einer angenommenen Tageszählweise von 30/360 ergibt sich hieraus für die klassische Forwardrate

$$F(0, 3m, 6m) = \frac{360}{30} \left(\frac{1 + \frac{180}{360} \cdot 4.345\%}{1 + \frac{90}{360} \cdot 4.286\%} - 1 \right) = 4.357\%.$$

Der am 12.11.2008 am Markt quotierte FRA-Satz hingegen betrug 2.85% für die entsprechende Zeitperiode.

Nach der klassischen Bewertungstheorie würden solche Unterschiede unmittelbar die Möglichkeit der Arbitrage garantieren. Berücksichtigt man jedoch auch Aspekte des Kontrahentenrisikos sowie des Liquiditätsrisikos, also bspw. Fragen

- ob die Gegenpartei zurückzahlen kann,
- ob die eigene Marktliquidität uneingeschränkt gegeben ist,

so lassen sich derartige Unterschiede erklären. Die obige Situation führt also unter Berücksichtigung besagter Aspekte nicht mehr zu Arbitragemöglichkeiten.

Aus diesem Grund ist der Markt zunehmend dazu übergegangen, mit einer separaten Diskontierungs- und einer Bewertungskurve zu arbeiten. Dabei ist die Diskontierungskurve abhängig vom Hintergrund des jeweiligen Geschäftes zu wählen (Bonität des Kontrahenten, Marktliquidität,).

Fortsetzung des obigen Beispiels: Berücksichtigt man im oben aufgeführten Beispiel von Morini, Bloomberg das Ausfallrisiko und führt ausfallrisikobehaftete Diskontfaktoren ein (de facto berücksichtigen die auf Basis von Depositen ermittelten Diskontfaktoren das entsprechende Ausfallrisiko):

$$P^{def}(t, T) := P(t, T)(RR + (1 - PD)(1 - RR))$$

(mit RR als Recovery Rate und PD als Ausfallwahrscheinlichkeit), so ergibt sich für die kreditrisikobehaftete Forward-Rate:

$$F^{def}(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P^{def}(t, T)}{P^{def}(t, S)} - 1 \right) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)(RR + (1 - PD(0, T))(1 - RR))}{P(t, S)(RR + (1 - PD(0, S))(1 - RR))} - 1 \right).$$

Angenommen nun, die Recovery Rate ist konstant im Zeitverlauf. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten steigen im Zeitverlauf (die Wahrscheinlichkeit, innerhalb von $[0, T]$ auszufallen ist geringer als die, innerhalb von $[0, S]$ auszufallen). Daher ist

$$\frac{RR + (1 - PD(0, T))(1 - RR)}{RR + (1 - PD(0, S))(1 - RR)} > 1$$

und somit

$$F^{def}(t, T, S) > F(t, T, S).$$

Obige Ausführungen enthalten die Spezialfälle $PD = 0$ und $RR = 100\%$. In diesen Fällen ergibt sich wieder

$$F^{def}(t, T, S) = F(t, T, S).$$

2.5.1 Konsequenzen für die Bewertung von Finanzinstrumenten

Als pragmatische Herangehensweise unmittelbar nach der Finanzmarktkrise hat sich der 'Mehrkurvenansatz' (Multi Curve Approach) für Zinsderivate marktseitig etabliert. Diese Vorgehensweise ist jedoch eher einem natürlichen Pragmatismus als dem tatsächlichen Ergebnis einer konsistenten Bewertungstheorie geschuldet!! Fortgeschrittenere Ansätze berücksichtigen das Kredit- und Liquiditätsrisiko explizit bei der Bewertung von Derivaten.

Mehrkurvenansatz für besicherte Zinsderivate:

Siehe hierzu auch Ametrano und Bianchetti, 'Bootstrapping the illiquidity', 2009:

- Im ersten Schritt wird zuerst die Diskontfaktorkurve $T \mapsto P_{ois}(t, T)$ aus Overnight Index Swap-basierten Instrumenten (früher EONIA) via Bootstrapping ermittelt. Diese Diskontfaktoren repräsentieren ein Kreditrisiko 'overnight', also bis zum nächsten Tag. Da bei besicherten Derivaten ein Nachschuss der Sicherheiten regelmäßig stattfindet, werden diese Diskontfaktoren zur Diskontierung der Cashflows besicherter Zinsderivate verwendet.
- Auf Basis der OIS-Diskontkurve können nach üblichen Arbitrage-Argumenten die OIS-Zinssätze, OIS-Forward Rates etc. ermittelt werden.

- Liegt die OIS-Terminstrukturkurve nun vollständig vor, so können andere tenorspezifische Terminstrukturkurven (bspw. die Terminstrukturkurve für 3-Monats-Euribor-Instrumente, für 6-Monats-Euribor-Instrumente, ...) ermittelt werden. Hierbei werden nur Instrumente, die zum Tenor passen, berücksichtigt. D.h. für die 3-Monats-Euribor-Terminstrukturkurve werden nur die 3-Monats-Euribor-Depositen, -FRAs, -Swaps,... berücksichtigt. Für die 6-Monats-Euribor-Terminstrukturkurve nur Instrumente, die auf den 6-Monats-Euribor lauten etc. Dies erfolgt wieder mittels Bootstrapping, wobei die in den Bewertungsformeln besicherten Derivate verwendeten Diskontfaktoren den $P_{ois}(t, T_i)$ entsprechen.
- Umgekehrt erfolgt die Bewertung von besicherten Zinsderivaten auf Basis von verschiedenen Terminstrukturkurven. Als Diskontfaktoren werden die $P_{ois}(t, T_i)$ verwendet. Die Zahlungsströme der Zinsderivate basieren hingegen auf tenorspezifischen Terminstrukturkurven. So basieren die Cashflows des 3-Monats-Euribor-FRAs, -Swaps, - Caps, - Swaptions, ... auf der 3-Monats-Euribor-Terminstrukturkurve und den hieraus ermittelten Zinsen, Forward Rates etc.
- Für einfache nicht-lineare und somit volatilitätsabhängige Zinsderivate wie Caps/Floors und Swaptions ist jeweils noch eine separierte Volatilitätsoberfläche für jede benötigte Zinsperiode (3M-Euribor-, 6M-Euribor-,...) unter Berücksichtigung von Zinsderivaten auf Underlyings ausschliesslich dieser Zinsperiode zu konstruieren und diese für die Bewertung der Cashflows zu verwenden.

2.6 Die Auswirkungen des 'Libor-Skandals' auf die Geldmarktsätze

Libor-/Euribor-Sätze werden ermittelt, indem von einer Gruppe sogenannter 'Panelbanken' abgefragt wird, zu welchem Zins sie bereit wären, einander Geld zu leihen. Diese Angaben waren bisher nicht notwendigerweise transaktionsbasiert. Von den gemeldeten Zinssätzen wurden die höchsten und niedrigsten 10% der Werte abgeschnitten, der Rest gemittelt und täglich veröffentlicht.

Gegen diverse Banken hat es seit 2012 Ermittlungen bzgl. der Manipulation dieser Zinsen gegeben. In weitestgehend außergerichtlichen Vergleichen wurden Strafzahlungen in Milliardenhöhe festgelegt. 2015 ist in der EU die 'Benchmark-Verordnung' in Kraft getreten, die für derartige 'Indizes' eine Genehmigungspflicht vorsieht. Relativ schnell nach dem Inkrafttreten war klar, dass der Overnight-Zins EONIA die Kriterien der Benchmark-Verordnung nicht erfüllen wird. Als Alternative wurde zwischenzeitlich von der EZB der ESTR (Euro Short Term Rate) entwickelt und die Ablösung des EONIA durch den ESTR empfohlen. Im Oktober 2019 wurde der EONIA in seiner alten Form eingestellt. Für eine Übergangsphase wird er weiterhin veröffentlicht, nun aber basierend auf einer anderen Berechnungslogik, die den jeweils aktuellen ESTR um fest 8.5 Basispunkte erhöht. Dies soll vor allem eine Erleichterung bei technischen Umstellungen von EONIA hin zu ESTR geben.

Die Zukunft des Euribors ist per dato nicht klar. Zwischenzeitlich wurde die Berechnungslogik des Euribor von einer nicht-transaktionsbasierten Ermittlung hin zu einem dreistufigen Modell, das transaktionsbasierte Zinsmeldungen der Banken priorisiert, umgestellt.

Auch in anderen Märkten finden entsprechende Umstellungen der bisherigen Geldmarktsätze hin zu neuen Zinssätzen statt. Siehe hierzu bspw. den SOFR in den USA. Mit der Einführung neuer Referenzzinsen entwickeln sich auch die Derivatemärkte (Zinsswaps, Zinsfutures, Optionen, ...) weiter.

3 Die Hauptkomponentenanalyse

Will man die Dynamik einer Zinsstrukturkurve beschreiben (bspw. im Rahmen der Risikomodellierung), könnte man pro Stützstelle der Kurve, d.h. für (r_1, r_2, \dots, r_n) , entsprechende Zeitreihen betrachten und die Wertentwicklung der Zinsen unterschiedlicher Laufzeiten hieraus ableiten. Aufgrund großer Datenmengen, insbesondere auch bei einer möglichen Weiterverarbeitung, kann dies sehr rechenintensiv werden. Im Rahmen der Hauptkomponentenanalyse (principal component analysis, PCA) wird die stochastische Entwicklung einer Zinsstrukturkurve auf wenige stochastische Variablen als beeinflussende Faktoren zurückgeführt, ohne viel Information zu verlieren.

Dabei eignet sich die PCA nur für stationäre Zeitreihen. Zeitreihen, die bspw. Trends aufweisen, müssen vor einer PCA durch Transformationen von diesen 'Instationaritäten' befreit werden.

Gegeben sei eine Beobachtungsmatrix $Y \in \mathbb{R}^{N \times p}$ von je N Beobachtungen von p verschiedenen Variablen. D.h. die j -te Spalte von Y stellt alle N Beobachtungen der j -ten Variable dar und wird im Folgenden mit Y_j bezeichnet. Im ersten Schritt standardisieren wir nun diese Beobachtungen:

$$z_{ij} := \frac{y_{ij} - \bar{y}_j}{s_j}$$

mit $\bar{y}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{ij}$ und $s_j^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$ die Stichprobenschätzer für den Erwartungswert und die Varianz der j -ten Variable. Sei $Z := (z_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times p}$ die zugehörige standardisierte Matrix. Die j -te Spalte der standardisierten Daten bezeichnen wir ihrerseits mit Z_j .

Lemma 3.0.1

Für die empirische Kovarianzmatrix von Z , $R := (\text{Cov}(Z_i, Z_j))_{i,j=1,\dots,p} = (\text{Corr}(Y_i, Y_j))_{i,j=1,\dots,p}$, gilt

$$R = \frac{1}{N-1} Z^T Z.$$

Beweis: Siehe Vorlesung.

Wir nehmen nun an, dass $\text{Rang}(Z) = \text{Rang}(Y) = p$ gilt. D.h. die p verschiedenen Beobachtungsvektoren Y_1, \dots, Y_p sind linear unabhängig (ansonsten müssten Variablen rausgenommen werden). Es folgt, dass auch $\text{Rang}(R) = p$ ist, denn R ist symmetrisch und positiv definit wegen $\lambda = \lambda \langle v, v \rangle = \langle Z^T Z v, v \rangle = \langle Z v, Z v \rangle > 0$ für jeden normierten Eigenvektor v von $Z^T Z$ zum passenden Eigenwert λ .

Ziel ist es nun, $Z_1, \dots, Z_p \in \mathbb{R}^N$ so zu transformieren, d.h. eine Darstellung

$$H_i := (Z_1, \dots, Z_p) \begin{pmatrix} T_i^1 \\ T_i^2 \\ \vdots \\ T_i^p \end{pmatrix} \quad \text{für } i \leq p \text{ bzw. } H = ZT \text{ mit } H \in \mathbb{R}^{N \times p}, T \in \mathbb{R}^{p \times p}$$

mit normierten Gewichtsvektoren $T_i := T_{\cdot i} = \begin{pmatrix} T_i^1 \\ T_i^2 \\ \vdots \\ T_i^p \end{pmatrix}$ und $T := (T_1, \dots, T_p)$ zu finden, so dass H_1, \dots, H_p orthogonal sind und H_1 die maximale Varianz trägt ($H_1^T H_1$ maximal), H_2 unter allen zu

H_1 orthogonalen Vektoren maximal variiert, usw. D.h. H_1 trägt unter allen Linearkombinationen der Datenvariablen Z_1, \dots, Z_p die größte Information, anschliessend H_2 etc. Die H_i werden als **Hauptkomponenten** bezeichnet.

Satz 3.0.2

Sei $Z \in \mathbb{R}^{N \times p}$ vom Rang p . Sei $T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ die Matrix bestehend aus normierten Eigenvektoren zu den geordneten Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ von R . Für $H := Z \cdot T$ gilt

$$\text{Cov}(H) = \frac{1}{N-1} H^T H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

D.h. die Spalten von H sind orthogonal zueinander. Sie besitzen der Reihe nach absteigende Quadratsummen, welche (bis auf Umskalierung mit $\frac{1}{N-1}$) ihren empirischen Varianzen entsprechen.

Beweis:

$$\begin{aligned} (\text{Cov}(H))_{ij} &= \text{Cov}(Z \cdot T_{\cdot i}, Z \cdot T_{\cdot j}) \\ &= T_{\cdot i}^T \text{Cov}(Z) T_{\cdot j} \\ &= T_{\cdot i}^T R T_{\cdot j} \\ &= \frac{1}{N-1} T_{\cdot i}^T Z^T Z T_{\cdot j} \\ &= \frac{1}{N-1} (Z T_{\cdot i})^T (Z T_{\cdot j}) \\ &= \frac{1}{N-1} H_i^T H_j. \end{aligned}$$

Also folgt $\text{Cov}(H) = \frac{1}{N-1} H^T H$, und damit weiterhin

$$\begin{aligned} \text{Cov}(H) &= \frac{1}{N-1} H^T H \\ &= \frac{1}{N-1} T^T Z^T Z T \\ &= T^T \left(\frac{1}{N-1} Z^T Z \right) T \\ &= T^T R T \\ &= T^T T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt verwendet, dass die Spalten von T den Eigenvektoren von R entsprechen, und im letzten Schritt, dass $T \in O(p)$ ist.

Lemma 3.0.3

H_1 besitzt unter allen Linearkombinationen von Z_1, \dots, Z_p mit normierten Gewichtsvektoren $\|T_{\cdot i}\| = 1$ die maximale Varianz. H_2 besitzt unter allen zu H_1 orthogonalen Linearkombinationen (mit normierten Gewichtsvektoren) die maximale Varianz, und so weiter.

Sei Z_i die i -te Spalte von Z . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^p \text{Var}(Z_i) &= \text{Spur}(\text{Cov}(Z)) = \text{Spur}(R) \\
 &= \frac{1}{N-1} \text{Spur}(Z^T Z) \\
 &= \frac{1}{N-1} \text{Spur}(T^T Z^T Z T) \\
 &= \frac{1}{N-1} \text{Spur}(H^T H) \\
 &= \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^p \lambda_i.
 \end{aligned}$$

Der Beweis hiervon basiert auf einem Resultat der Analysis: Die Abbildung $x \mapsto x^T \cdot A \cdot x$ für eine symmetrische, positiv definite Matrix A nimmt unter der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ ihr Maximum in a an, wobei ein normierter Eigenvektor zum größten Eigenwert λ ist.

Implementierung der PCA

1. Berechne die Eigenwerte, Eigenvektoren der Kovarianzmatrix $R := \frac{1}{N-1} Z^T Z$ der standardisierten Daten Z .
2. Ordne die Eigenwerte absteigend der Reihe nach: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$. Die zugehörigen Eigenvektoren (normiert) seien mit T_1, \dots, T_p bezeichnet. Setze $T := (T_1, \dots, T_p)$. Die **Hauptachsen** sind nun definiert wie folgt:

$$(H_1, \dots, H_p) = H := ZT \in \mathbb{R}^{N \times p}.$$

Die Hauptachsen sind zueinander unkorreliert und gemäß ihren Varianzen sortiert. Die Varianz von H_1 ist gleich $\frac{1}{N-1} H_1^T H_1$ etc.

3. Stelle nun Z in Abhängigkeit der Hauptachsen dar:

$$Z = HT^T \text{ bzw. } Z_j = H \cdot (T_j \cdot)^T = \sum_{i=1}^p H_i T_{ji}.$$

4. Schließlich können diejenigen Komponenten H_i vernachlässigt werden, die zu kleinen Eigenwerten λ_i gehören und demnach eine kleine Varianz aufweisen. D.h. wir approximieren

$$Z_j = \sum_{i=1}^p H_i T_{ji} \approx \sum_{i=1}^r H_i T_{ji} \text{ mit } r < p.$$

Hierdurch wird ein Anteil von

$$\frac{\sum_{i=1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}$$

der Gesamtvarianz

$$\sum_{i=1}^p \text{Var}(Z_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

erklärt.

Oft wird dadurch die Anzahl der Variablen, die für weitere Untersuchungen beibehalten werden, auf nur 2-3 reduziert.

Bemerkung 3.0.4

Es gibt verschiedene Analysen historischer Änderungen der Zinsstrukturkurve mithilfe von Hauptkomponentenanalysen, die belegen, dass sich die historischen Schwankungen der Zinsstrukturkurve auf 2-3 Hauptkomponenten zurückführen lassen: Parallelverschiebungen, Drehungen und Änderungen der Krümmung - 'Butterfly'-Effekte -, wobei durch Parallelverschiebungen bereits ein Großteil der historischen Schwankungen erklärt wird.

Bemerkung 3.0.5

Die Hauptkomponentenanalyse lässt sich auch direkt auf die nicht-standardisierten Daten Y und ihre Kovarianzmatrix anwenden.

Bemerkung 3.0.6

Ergänzend sei erwähnt, dass die Hauptkomponentenanalyse sich auf die aus der Linearen Algebra bekannte Singulärwertzerlegung zurückführen lässt:

Singulärwertzerlegung: Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt es orthogonale Matrizen $U \in O(m)$, $V \in O(n)$ sowie $C = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $l_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ und nicht-negativen Diagonaleinträgen $l_{11} \geq l_{22} \geq \dots \geq 0$, so dass

$$A = UCV^T.$$

Die $g_i := l_{ii}$ heißen **Singulärwerte**, die Darstellung heißt **Singulärwertzerlegung**.

4 Exkurs zur Simulation

4.1 Der Wiener Prozess

Definition 4.1.1 (Wiener Prozess bzw. Brownsche Bewegung)

Ein **Wiener Prozess** $W = \{W(t) | t \geq 0\}$ ist ein reellwertiger stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden, der durch die folgenden Eigenschaften definiert ist:

1. $W(0) = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1.
2. Für $0 \leq s \leq t$ gilt $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, d.h. die Zuwächse sind normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.
3. Für $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ sind $W(t_2) - W(t_1)$ und $W(t_4) - W(t_3)$ stochastisch unabhängig.

Hierbei definieren wir für unsere Belange einen stochastischen Prozess wie folgt:

Definition 4.1.2 (Stochastischer Prozess)

Seien (Ω, \mathbb{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ die reellen Zahlen versehen mit der Borelschen σ -Algebra $\mathbb{B}(\mathbb{R})$. Sei I eine Indexmenge, in unserem Fall $I = [0, \infty[$. Ein **stochastischer Prozess** X ist eine Familie von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, also eine Abbildung

$$X : \Omega \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, (\omega, t) \mapsto X_t(\omega).$$

Für jedes $\omega \in \Omega$ erhält man eine Abbildung $X(\cdot, \omega) : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$. Diese Abbildungen nennt man **Pfade**.

Man kann zeigen, dass fast alle Pfade des Wiener Prozesses (W_t) nirgends differenzierbar sind. D.h. es gibt eine Teilmenge $N \subset \Omega$ mit $P(N) = 0$, so dass $t \mapsto W_t(\omega)$ nirgends differenzierbar ist für alle $\omega \in \Omega \setminus N$.

Definition 4.1.3 (Filtration)

Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_t)_{t \in I}$ von Unter- σ -Algebren von \mathbb{A} mit $\mathbb{F}_s \subseteq \mathbb{F}_t \subseteq \mathbb{A}$ für alle $s \leq t \in I$ heißt **Filtration**.

Bemerkung 4.1.4

Die Menge \mathbb{F}_t wird als Information interpretiert, die der Beobachter zum Zeitpunkt t hat.

Definition 4.1.5 (Adaptierte Prozesse)

Ein stochastischer Prozess X heißt **adaptiert zur Filtration** \mathbb{F} , falls X_t für alle $t \in I$ \mathbb{F}_t -messbar ist.

Definition 4.1.6

Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess. Die kleinste Filtration, bzgl. der X adaptiert ist, heisst die von X erzeugte Filtration.

4.2 Stochastische Differentialgleichungen

Vor der formalen Definition des stochastischen Integrals ein Beispiel (siehe Iacus, Stefano M. (2008). Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations, Springer, New York):

Angenommen, $S(t)$ sei der Wert eines Finanztitels und $\frac{\Delta S}{S} := \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)}$ die Rendite dieses Titels im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$. Die Rendite kann modelliert werden über eine deterministische und eine stochastische Komponente:

$$\frac{\Delta S}{S} = \text{deterministischer Anteil} + \text{stochastischer Anteil}.$$

Angenommen, der deterministische Anteil ist proportional zur Zeit ($= \mu \Delta t$) und der stochastische Anteil ist auf eine Brownschen Bewegung $W(t)$ wie unten angegeben zurückzuführen, so ergibt sich

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \cdot (W(t + \Delta t) - W(t)).$$

Beim Übergang $\Delta t \rightarrow 0$ ergibt sich formal folgende Differentialgleichung

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \mu + \sigma W'(t) \Leftrightarrow \frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t) + \sigma S(t) \frac{dW(t)}{dt} \Leftrightarrow dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t).$$

S ist ein Beispiel eines **Itô-Prozesses**. μ wird **Drift** genannt, σ wird **Volatilität** genannt.

Man beachte, dass das Ergebnis zwar eine stochastische Differentialgleichung ist, der Wiener Prozess $W(t)$ allerdings nicht differenzierbar ist. Daher schreibt man obige Differentialgleichung oft auch in Integralschreibweise:

$$S(t) = S(0) + \mu \int_0^t S(u) du + \int_0^t \sigma S(u) dW(u),$$

wobei noch zu definieren ist, was $\int_0^t dW(u)$ bedeutet.

4.3 Stochastische Integrale und Itô-Prozesse

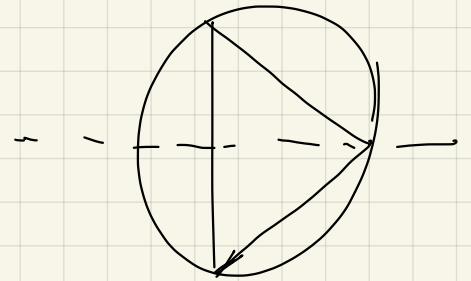
Definition 4.3.1 (Stochastische Integration)

Wir fixieren einen festen Zeithorizont T . $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ sei ein (\mathbb{F}_t) -adaptierter stochastischer Prozess, wobei (\mathbb{F}_t) die zur Brownschen Bewegung gehörende Filtration sei. Weiterhin werde

$$E \left(\int_0^T (X_t)^2 dt \right) < \infty$$

vorausgesetzt, d.h. $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist **quadratintegrierbar**. Das **stochastische Integral von (X_t) bzgl. der Brownschen Bewegung (W_t) (Itô-Integral)** definiert man nun als Grenzwert im quadratischen Mittel (Definition s.u.):

$$\int_0^T X_s dW(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (W(t_i) - W(t_{i-1})).$$



Achtung: Die korrekte Konstruktion des obigen Integrals erfolgt als Grenzwert von Integralen von quadratintegrierbaren adaptierten Treppenprozessen:

$$\mathbb{T}[0, T] := \left\{ f = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 1_{[t_i, t_{i+1}[} + c_n 1_{\{t_n\}} \mid 0 = t_0 < \dots < t_n = T, c_i \mathbb{F}_{t_i} - \text{meßbar} \right\}.$$

Für derartige quadratintegrierbare adaptierte Treppenprozesse kann das stochastische Integral auf naheliegende Weise durch

$$I(f) := \int_0^T f_f dW_t := \sum_{i=1}^n c_{i-1} (W(t_i) - W(t_{i-1}))$$

definiert werden. Man beachte, dass die c_i hier keine Zahlen sondern Zufallsvariablen sind.

Weiter lässt sich zeigen, dass der Abschluss der Menge der quadratintegrierbaren adaptierten Treppenprozesse dem Raum aller quadratintegrierbaren adaptierten Prozesse entspricht. Auf diesem lässt sich die Definition des stochastischen Integrals nun über Grenzwertbetrachtungen ausdehnen.

Definition 4.3.2 (Kovergenz im quadratischen Mittel)

Sei X_1, \dots, X_n eine Folge von Zufallsvariablen. Dann heisst die Folge **konvergent im quadratischen Mittel** gegen X , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0.$$

Definition 4.3.3 (Itô-Prozesse)

Ein stochastischer Prozess (X_t) wird **Itô-Prozess** genannt, wenn es eine Brownsche Bewegung und adaptierte stochastische Prozesse $(\mu(X_t, t), \sigma(X_t, t))$ gibt mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW(s),$$

wobei angenommen wird, dass die beiden Integrale existieren. Dies entspricht in Differentialschreibweise:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW(t).$$

Ein Itô-Prozess kann als Wiener-Prozess mit zufälliger Drift und Volatilität angesehen werden.

Beispiel 4.3.4

Einige wichtige Beispiele sind:

1. Der verallgemeinerte Wiener Prozess: $dX_t = \mu dt + \sigma \cdot dW(t)$.
2. Die geometrische Brownsche Bewegung: $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t \cdot dW(t)$.

4.4 Die Itô-Formel

Wird eine Funktion g auf eine Brownsche Bewegung $W(t)$ angewandt, so entsteht hierdurch ein neuer stochastischer Prozess $g(W(t))$. Das Pendant zur aus der Analysis bekannten Kettenregel für stochastische Prozesse ist die Formel von Itô, die hier ohne Beweis angegeben sei:

Sei X_t ein Itô-Prozess, d.h. gelte

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW(s)$$

(Existenz der Integrale vorausgesetzt), bzw. in Differentialschreibweise

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t.$$

Sei $g(t, x)$ zweimal stetig differenzierbar und beschränkt mit beschränkten Ableitungen. Dann gilt:

$$dg(t, X_t) = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \mu(X_t, t) \frac{\partial g}{\partial x} dt + \sigma(X_t, t) \frac{\partial g}{\partial x} dW(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) dt,$$

d.h.

$$dg(t, X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu(X_t, t) \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) \right) dt + \sigma(X_t, t) \frac{\partial g}{\partial x} dW(t).$$

Beispiel 4.4.1

Die Geometrische Brownsche Bewegung: $g(t, X_t) := \ln(X_t)$, $\mu(x, t) = \mu x$, $\sigma(x, t) = \sigma x$. Man berechnet:

$$d \ln(X_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t),$$

woraus sich in Integralschreibweise

$$\ln(X_t) = \ln(X_0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t)$$

ergibt, so dass für X_t selber

$$X_t = X_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right)$$

folgt. X_t ist also exp einer nicht-standardisierten Brownschen Bewegung, die normalverteilt mit Mittelwert $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t$ und Varianz $\sigma^2 t$ ist. Die Geometrische Brownsche Bewegung ist das Standardmodell für die Rendite einer Aktie.

4.5 Simulation von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen

Das **Euler-Maruyama-Verfahren** ist ein Verfahren zur numerischen Lösung stochastischer Differentialgleichungen. Es basiert auf dem von Leonhard Euler stammenden Euler-Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Gegeben ein Wiener Prozess $(W(t))_{t \geq 0}$ sowie das folgende stochastische Anfangswertproblem:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW(t), X_0 = A.$$

Zur Berechnung einer numerischen Näherungslösung auf dem Intervall $[0, T]$ werden wie beim gewöhnlichen Eulerverfahren zunächst diskrete Zeitpunkte $t_k := k \cdot h$ mit $h = \frac{T}{n}$ (Schrittweite) und $k = 0, \dots, n-1$ gewählt. Anschliessend wird für die diskreten Zeitpunkte t_k

$$\hat{X}_{t_{k+1}} := \hat{X}_{t_k} + \mu(\hat{X}_{t_k}, t_k) \cdot h + \sigma(\hat{X}_{t_k}, t_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k)), k = 0, \dots, n-1$$

gesetzt. Aus der Eigenschaft des Wiener Prozesses folgt, dass $\Delta W_k := W(t_{k+1}) - W(t_k)$ stochastisch unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h sind. Die \hat{X}_{t_k} stellen nun eine Approximation für X_{t_k} dar.

Es kann gezeigt werden, dass im Falle des Euler-Maruyama-Schemas die Diskretisierung \hat{X}_t für $h \rightarrow 0$ stark mit Ordnung $\frac{1}{2}$ gegen die Lösung X_t konvergiert (d.h. es gibt eine Konstante c mit $E(|\hat{X}_t^n - X_t|) \leq cn^{-\frac{1}{2}} \forall t$).

Das Vorgehen von Euler-Maruyama führt in der Regel zu Diskretisierungsfehlern, ähnlich dem Euler-Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese lassen sich vermeiden, wenn man die Lösung der stochastischen Differentialgleichung kennt und diese direkt simuliert:

- Beispiel 4.5.1** 1. Die stochastische Differentialgleichung $dX_t = dW(t)$, $X_0 = 0$ hat die exakte Lösung $X_t = W(t)$. Egal, mit welcher Schrittweite simuliert wird, in den Stützpunkten sind simulierte und exakte Lösung identisch. Ein Diskretisierungsfehler tritt nicht auf.
2. Die stochastische Differentialgleichung $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW(t)$, $X_0 = x_0$ hat die exakte Lösung $X_t = x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))$. Simuliert man die Brownsche Bewegung exakt und setzt die simulierten Werte in die exakte Lösung ein, so ergibt sich eine geringfügig andere Verteilung als bei Anwendung des Euler-Maruyama-Schemas. Der Unterschied ist auf die Diskretisierungsfehler zurückzuführen, die bei Euler-Maruyama auftreten, bei Einsetzen in die exakte Lösung aber nicht.

- Beispiel 4.5.2** 1. Simulieren Sie (in R) einen Itô-Prozess der Form $dX_t = e^t dt + \ln(t+1)dW_t$ für $t = 0, \dots, 2$ in $\frac{1}{100}$ -Schritten. Wiederholen Sie die Simulation für $dX_t = e^{it} dt + \ln(t+i)dW_t$ für $i=0.1, 2, 3$. Vergleichen Sie die Ergebnisse.
2. Simulieren Sie die geometrische Brownsche Bewegung $dX_t = 2X_t dt + 3X_t \cdot dW(t)$ einmal exakt und einmal nach dem Verfahren von Euler-Maruyama.

4.6 Ein Exkurs zur risikoneutralen Bewertung

Grundsätzlich stellt sich bei der Modellierung von stochastischen Zinsen die Frage, ob die Parametrisierung auf Basis realer Daten (bspw. historischer Volatilitäten und Drift-Terme) erfolgt oder zum Zwecke des Pricings von Instrumenten in der 'risikoneutralen Welt'. In dieser Welt ergeben sich die Parameter als implizite Parameter aus Marktpreisen. In arbitragefreien Märkten, die wir grundsätzlich unterstellen, müssen dabei bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sein, die dazu ausgenutzt werden können, die Preise von Instrumenten als Erwartungswerte (nun allerdings in einer 'risikoneutralen Welt') darzustellen. Im Folgenden soll die 'risikoneutrale' Betrachtung kurz vorgestellt werden.

Der folgende Abschnitt ist dem Buch 'Derivate und Interne Modelle' von Hans-Peter Deutsch und Mark Beinker, Schäffer Poeschel Verlag, 5. Auflage, entnommen.

Wir betrachten allgemein ein (nicht notwendigerweise handelbares) Underlying S , das in der realen Welt einem allgemeinen Ito-Prozess folgt, also

$$dS(t) = a(S, t)dt + b(S, t)dW_t.$$

Hierbei stellt dW_t eine Brownsche Bewegung dar. Sei $U(t, T)$ der Preis eines handelbaren Finanzinstrumentes mit S als Underlying. Der Prozess für U in der realen Welt ist dann gemäß Ito's Lemma

$$dU(S, t) = \left(\frac{\partial U}{\partial S} a(S, t) + \frac{\partial U}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} b(S, t)^2 \right) dt + \frac{\partial U}{\partial S} b(S, t) dW_t =: a_U(S, t) dt + \frac{\partial U}{\partial S} b(S, t) dW_t.$$

Weiterhin wählen wir ein handelbares, überall strikt positives Instrument ohne Dividenden Y als Numeraire (Preise werden im Folgenden relativ zum Numeraire angegeben). Man beachte aber, dass das Numeraire Y nicht vollkommen beliebig ist. Wir setzen nämlich stillschweigend voraus, dass es nur eine Zufallskomponente in unserem Markt gibt (also ein Ein-Faktor-Modell vorliegt), nämlich die Brownsche Bewegung W_t . Das Underlying kann nun einem beliebigen Prozess der folgenden Form genügen:

$$dY(t) = m(Y, t)dt + n(Y, t)dW_t$$

mit adaptierten Prozessen m und n und derselben Brownschen Bewegung W_t .

Betrachten wir nun die relativen Preise von U bzgl. Y , so ergibt sich ein neuer stochastischer Prozess

$$Z(S, t) := \frac{U(S, t)}{Y(t)}.$$

Es lässt sich mithilfe der 'Produktregel' und Ito's Lemma nachrechnen, dass

$$dZ = \left(\frac{b}{Y} \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{n}{Y} \frac{U}{Y} \right) \left(dW + \frac{a_U + \left(\frac{n^2}{Y^2} - \frac{m}{Y} \right) U - b \frac{n}{Y} \frac{\partial U}{\partial S}}{b \frac{\partial U}{\partial S} - n \frac{U}{Y}} dt \right)$$

gilt.

Wenn es uns gelingt, ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu finden, bzgl. dem

$$d\tilde{W} := dW + \frac{a_U + \left(\frac{n^2}{Y^2} - \frac{m}{Y} \right) U - b \frac{n}{Y} \frac{\partial U}{\partial S}}{b \frac{\partial U}{\partial S} - n \frac{U}{Y}} dt$$

eine einfache Brownsche Bewegung ist, dann hat dZ die Form

$$dZ = \left(\frac{b}{Y} \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{n}{Y} \frac{U}{Y} \right) \cdot d\tilde{W}_t.$$

Ein solcher Prozess ohne Drift (das lässt sich zeigen - unter gewissen technischen Bedingungen, die wir als erfüllt ansehen) ist ein **Martingal**, d.h. für einen solchen Prozess gilt

$$Z(t) = E_t(Z(u)) \quad \forall u \geq t.$$

Insbesondere lässt sich dann der heutige (in t ermittelte) relative Preis Z als Erwartungswert zukünftiger Wertentwicklungen darstellen.

Hierzu gibt es in der stochastischen Analysis einen sehr tiefgehenden Satz, der unter gewissen technischen Bedingungen, die in unseren Modellen immer erfüllt sein sollten, genau dies aussagt: Das Theorem von Girsanov:

Satz 4.6.1

Ist $W(t)$ eine Brownsche Bewegung bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P und $\gamma(t)$ ein adaptierter Prozess, der (für irgendeine zukünftige Zeit T) die technische Beschränktheitsbedingung

$$E_P \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma(t) dt \right) \right) < \infty$$

erfüllt, dann existiert ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q , bzgl. dessen

$$\tilde{W}(t) := W(t) + \int_0^t \gamma(s) ds$$

eine Brownsche Bewegung ist. Dies bedeutet umgekehrt, dass der ursprüngliche Prozess $W(t)$ in dem Wahrscheinlichkeitsraum mit W -Maß Q eine Brownsche Bewegung mit Drift $-\gamma(t)$ ausführt. Hierbei heißen zwei Wahrscheinlichkeitsmaße 'äquivalent', wenn ihre Nullmengen übereinstimmen. Das Radon-Nikodym-Derivative ist gegeben durch

$$\frac{dP}{dQ} = \exp \left(- \int_0^t \gamma(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds \right)$$

Um das Theorem von Girsanow anwenden zu können, stellen wir fest, dass $\frac{a_U + \left(\frac{n^2}{Y^2} - \frac{m}{Y} \right) U - b \frac{n}{Y} \frac{\partial U}{\partial S}}{b \frac{\partial U}{\partial S} - n \frac{U}{Y}}$ adaptiert ist (da nur aus Größen bestehend, die zur Zeit t ausgewertet werden können), den wir nun mit γ identifizieren.

Durch den Maßwechsel ist Z also zu einem Martingal geworden. Weiterhin lässt sich zeigen, dass in **arbitragefreien Märkten** die Preise aller mit dem Numeraire normierten handelbaren Finanzinstrumente Martingale bzgl. desselben W -Maßes Q sind. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist dabei genau dann eindeutig, wenn der Markt vollständig ist. Dabei heißt ein Markt vollständig, wenn jedes Finanzinstrument durch ein selbstfinanzierendes Portfolio repliziert werden kann. Dies ist das bekannte Theorem von **Harrison-Pliska**.

Satz 4.6.2

Ein Markt bestehend aus Finanzinstrumenten und einem Numeraire-Instrument ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein zu dem Wahrscheinlichkeitsmaß der realen Welt P äquivalentes Maß gibt, bzgl. dessen die Preise aller mit dem Numeraire-Instrument normierten Finanzinstrumente Martingale sind. Dieses Maß ist genau dann eindeutig, wenn der Markt vollständig ist.

Q wird auch als **äquivalentes Martingalmaß** (vom konkret gewählten Numeraire abhängiges...) genannt.

In einem vollständigen arbitragefreien Markt haben also alle handelbaren Instrumente ein und dasselbe Martingalmaß. D.h. für alle handelbaren Instrumente muss $d\tilde{W}$ in diesem Maß ein- und dieselbe einfache Brownsche Bewegung sein. Da auch die Brownsche Bewegung in der realen Welt dW nicht vom spezifischen Finanzinstrument abhängt, muss dies auch für $d\tilde{W} - dW$ gelten. Die Driftänderung von $d\tilde{W}$ auf dW muss also für alle handelbaren Instrumente dieselbe sein. D.h. wie auch immer die Drift a_U eines handelbaren Finanzinstrumentes in der realen Welt aussieht,

$$\gamma_U := \frac{a_U + \left(\frac{n^2}{Y^2} - \frac{m}{Y}\right)U - b \frac{n}{Y} \frac{\partial U}{\partial S}}{b \frac{\partial U}{\partial S} - n \frac{U}{Y}}$$

ist für alle handelbaren Instrumente gleich und wird **Marktpreis des Risikos** genannt. Es entspricht dem im Girsanow Theorem erwähnten adaptierten Prozess, der die Drift-Transformation für den Übergang vom Wahrscheinlichkeitsmaß P der realen Welt zum Martingalmaß Q bewirkt. Aus dieser Tatsache folgt nun sofort:

Satz 4.6.3

Der Marktpreis des Risikos ist für alle handelbaren Instrumente eines vollständigen und arbitragefreien Marktes gleich.

Die Wahl des als Numeraire verwendeten Finanzinstrumentes ist grundsätzlich beliebig, beeinflusst aber entscheidend, wie umständlich ein bestimmtes Problem zu lösen ist. Wünschenswert sind Numeraires, die dem stochastischen Prozess

$$dY(t) = m(Y, t)dt$$

mit einem adaptierten Prozess m folgen. Für solche Numeraires ist $\frac{m}{Y}$ gerade die Rendite des Numeraire-Instrumentes:

$$\frac{m}{Y} = \frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = \frac{d \ln Y}{dt}.$$

In diesem Falle wird aus der Transformation der Brownschen Bewegung

$$d\tilde{W} = dW + \frac{a_U - \frac{d \ln Y}{dt} U}{b \frac{\partial U}{\partial S}} dt = dW + \gamma_U dt.$$

Der Marktpreis des Risikos ergibt sich hier also als

$$\gamma_U = \frac{a_U - \frac{d \ln Y}{dt} U}{b \frac{\partial U}{\partial S}}.$$

Der Underlying Prozess $dS(t)$ geht durch den Maßwechsel über in

$$\begin{aligned} dS(t) &= a(S, t)dt + b(t, S)dW_t \\ &= a(S, t)dt + b(S, t) \left(d\tilde{W}_t - \gamma(t)dt \right) \\ &= (a(S, t) - \gamma(t)b(S, t))dt + b(S, t)d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Insbesondere ändert sich zwar der Drift-Term, die Volatilität aber bleibt gleich. Der Prozess eines nicht-normierten handelbaren Instrumentes $dU(t)$ geht durch den Maßwechsel über in

$$\begin{aligned}
dU(t) &= a_U(S, t)dt + \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S)dW_t \\
&= a_U(S, t)dt + \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S) \left(d\tilde{W}_t - \gamma(t)dt \right) \\
&= \left(a_U(S, t) - \gamma(t) \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S) \right) dt + b(t, S)d\tilde{W}_t \\
&= \left(a_U(S, t) - \frac{a_U - \frac{d\ln Y}{dt}U}{b \frac{\partial U}{\partial S}} \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S) \right) dt + b(t, S)d\tilde{W}_t \\
&= \frac{d\ln Y(t)}{dt}U(S, t) + b(t, S)d\tilde{W}_t.
\end{aligned}$$

Die Drift eines handelbaren Instrumentes im Martinalma Q ist also einfach das Produkt aus dem Preis des Instrumentes und der Rendite des Numeraires.

In der realen Welt hingegen ergibt sich für dU in Abhängigkeit vom Marktpreis des Risikos:

$$\begin{aligned}
dU(t) &= a_U(S, t)dt + \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S)dW_t \\
&= \left(\frac{d\ln Y(t)}{dt}U(S, t) + \gamma_U b(t, S) \frac{\partial U}{\partial S} \right) dt + \frac{\partial U}{\partial S}b(t, S)dW_t.
\end{aligned}$$

Die Bewertung des Finanzinstrumentes geschieht aber nicht in der realen Welt, sondern im Martingalmaß. Hiermit lässt sich folgendes 'Kochrezept' zur Bewertung von Finanzinstrumenten formulieren:

Satz 4.6.4

Setzt man in dem stochastischen Prozess, dem das Finanzinstrument in der realen Welt folgt, den Marktpreis des Risikos gleich Null, erhält man direkt den Prozess, dem das Finanzinstrument im Martinalma folgt. Also den Prozess, der zur Bewertung des Instrumentes zu verwenden ist.

4.7 Die wichtigsten Normierungen

Bis auf wenige Ausnahmen geht man bei der Bewertung von Aktienderivaten (oder auch anderen Assetklassen wie Währungen) von deterministischen oder sogar konstanten Zinsen aus. Bei der Bewertung von Zinsoptionen ist dies nicht länger möglich. Im Gegensatz zu Aktien- oder Währungskursen ist ein Zinssatz stets von zwei Parametern abhängig: Dem aktuellen Zeitpunkt t und dem Fälligkeitstag T . Für die Modellierung der Zinsen, und motiviert durch Ergebnisse wie die der PCA, bei denen sich die stochastischen Entwicklungen von Zinsen auf einige wenige Faktoren zurückführen lassen, reduziert man auch bei stochastischen Zinsmodellen die stochastische Entwicklung der gesamten Zinsstrukturkurve auf einige wenige Faktoren. Die im nächsten Abschnitt vorgestellten Shortratemodelle sind allesamt 1-Faktor-Shortratemodelle.

Für die Bewertung von Zinsderivaten ist die Festlegung eines Numeraires wichtig, wie im letzten Abschnitt dargestellt wurde. Hier seien das 'risikoneutrale Maß' und das 'terminpreisneutrale Maß' angeführt.

Das risikoneutrale Maß: Hier wird der 'Money Market Account'

$$Y(t) = B(t_0, t) = \frac{B(t)}{B(t_0)} = \exp \left(\int_{t_0}^t r(u) du \right)$$

mit Shortrate r als Numeraire angesetzt. Das Numeraire besitzt die wünschenswerte Eigenschaft

$$\frac{dY(t)}{dt} = r(t)Y(t).$$

Sowohl $r(t)$ als auch $Y(t)$ sind zur Zeit t schon bekannt und damit ist $m(t) = r(t)Y(t)$ adaptiert. Mit diesem Numeraire kann die Martingaleigenschaft (für ein handelbares Finanzinstrument V) wie folgt formuliert werden:

$$\frac{V(t)}{B(t_0, t)} = E_t^Q \left(\frac{V(u)}{B(t_0, u)} \right) \quad \forall u \geq t \geq t_0.$$

Da der Startzeitpunkt t_0 beliebig gewählt werden kann, folgt für $t_0 = t$ und wegen $B(t, t) = 1$:

$$V(t) = E_t^Q \left(\frac{V(u)}{B(t, u)} \right) = E_t^Q \left(V(u) \exp \left(- \int_t^u r(s) ds \right) \right) \quad \forall u \geq t.$$

Als Beispiel betrachten wir den Wert zur Zeit t eines Zerobonds mit Fälligkeit u , wir setzen also $V(u) = 1$ und $V(t) = P(t, u)$. Es ergibt sich

$$V(t) = P(t, u) = E_t^Q \left(\frac{V(u)}{B(t, u)} \right) = E_t^Q \left(\exp \left(- \int_t^u r(s) ds \right) \right).$$

Im risikoneutralen Maß ist der Bondpreis also der Erwartungswert des Kehrwertes des Geldmarktkontos.

Das terminpreisneutrale Maß: (Oder auch Forward Neutral Measure): Hier wird

$$Y(t) := P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right)$$

als Numeraire gewählt. T wird dabei fest gewählt. Man spricht in diesem Falle auch vom T -Forward-Maß. Auch hier gilt

$$\frac{dY(t)}{dt} = f(t, t)Y(t) = r(t)Y(t).$$

Sowohl $r(t)$ als auch $Y(t)$ sind zur Zeit t schon bekannt und damit ist $m(t) = r(t)Y(t)$ adaptiert. Mit diesem Numeraire kann die Martingaleigenschaft (für ein handelbares Finanzinstrument V) wie folgt formuliert werden:

$$\frac{V(t)}{P(t, T)} = E_t^T \left(\frac{V(u)}{P(u, T)} \right) \quad \forall T \geq u \geq t.$$

Der Index T entspricht dabei stets der Fälligkeit des Zerobond-Numeraires. Man beachte, dass die Fälligkeit beliebig gewählt werden kann. Für jedes T erhält man ein anderes Numeraire und deshalb ein anderes terminpreisneutrales Maß. Setzt man nun $T = u$, so erhält man wegen $P(u, u) = 1$:

$$\frac{V(t)}{P(t, u)} = E_t^T(V(u)) \Leftrightarrow V(t) = P(t, u)E_t^T(V(u)) \forall u \geq t.$$

Unter dem T-Forward-Maß gilt weiterhin

$$F(t, T, S) = E_t^T(F(u, T, S)) \forall S \geq T \geq u \geq t$$

und

$$f(t, T) = E_t^T(r(T)).$$

5 Shortrate Modelle

Bei der stochastischen Modellierung von Zinsen muss die Entscheidung getroffen werden, welches Underlying modelliert werden soll: Die Shortrate oder Spotrates für bestimmte Laufzeiten oder Forwardrates, ... Wichtige Fragen, die in diesem Kontext zu bedenken sind, sind u.a.:

- Soll unter dem 'reale-Welt-Maß' P (bspw. im Rahmen der Risikomodellierung) oder risikoneutral (zum Zwecke der Derivatebewertung) modelliert werden?
- Ist das Modell in der Lage, die aktuelle Zinsstrukturkurve vollständig abzubilden?
- Wie gut werden beobachtbare Marktpreise, bspw. von Zinsderivaten, getroffen?
- Gibt es ggfs. analytische Formeln? Numerische Verfahren zur Bewertung von Derivaten?
- Welche Eigenschaften von Zinsen sollen abgebildet werden (Mean-Reversion?, auch negative Zinsen, ...).

Definition 5.0.1

Als **Shortrate Modell** bezeichnen wir ein Modell, in dem die stochastische Natur der zukünftigen Zinsstruktur durch ein stochastisches Modell für die zukünftige Shortrate $r(t)$ beschrieben wird. Dabei wird die Shortrate durch eine stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dW_t$$

beschrieben. Ferner setzen wir voraus, dass ein arbitragefreier Markt vorliegt.

5.1 Kalibrierung

Für die Bewertung von Derivaten wird die Shortrate oft direkt unter Q modelliert und auf Marktpreise kalibriert. Die Transformation zurück zum reale Welt Maß erfolgt dann mithilfe des Marktpreises des Risikos, das aus historischen Preisentwicklungen ermittelt wird.

Gilt für den Shortrate Prozess im reale-Welt-Maß

$$dr(t) = b(r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t),$$

so ergibt sich für das risikoneutrale Maß Q

$$dr(t) = (b(r, t) - \gamma(t)\sigma(r, t)) dt + \sigma(r, t)d\tilde{W}(t).$$

Im risikoneutralen Maß folgt, wie wir zuvor gesehen hatten

$$P(t, T) = E_t^Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right).$$

Für beliebige handelbare Finanzinstrumente V ergibt sich schließlich

$$V(t) = E_t^Q \left(V(u) \exp \left(- \int_t^u r(s) ds \right) \right) \quad \forall u \geq t.$$

Dies erlaubt eine Kalibrierung des betreffenden Shortratemodells auf Basis von Zerobondpreisen und anderen Marktpreisen von Finanzinstrumenten (Swaptions, Caps, Floors,...). Dabei wird in der Regel direkt die Q -Dynamik unterstellt.

Die Ermittlung von Preisen lässt sich auch mithilfe numerischer Verfahren zur Lösung gewöhnlicher PDGs erreichen. Dies wollen wir im Folgenden kurz skizzieren. Wir nehmen dafür an, dass die Bondpreise $P(t, T)$ (allgemeiner: die Preise beliebiger handelbarer Finanzinstrumente) als Funktion in Abhängigkeit von $r(t), t, T$ darstellbar sind. Ferner unterstellen wir das risikoneutrale Maß.

Satz 5.1.1 (Zinsstrukturgleichung)

Gegeben ein Shortrate Prozess $dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$. Sei $P(t, T) = F(t, r(t), T) = F^T(t, r(t))$. Falls der Anleihenmarkt arbitragefrei ist, genügt F^T der partiellen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$F_t^T + (\mu(t, r) - \sigma(t, r) \cdot \gamma(t, r)) F_r^T + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) F_{rr}^T - r F^T = 0.$$

Hierbei ist

$$\gamma(t, r) = \frac{F_t^T + \mu(t, r) F_r^T + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) F_{rr}^T - r F^T}{F_r^T \sigma(t, r)}$$

der für alle T gleiche **Marktpreis des Risikos**.

Es ist wie gesagt gängig, den Shortrate Prozess direkt in der risikoneutralen Welt zu kalibrieren und für die Transformation in die reale Welt (das W -Maß P) den Marktpreis des Risikos auf Basis historischer Daten zu ermitteln.

5.2 Beispiele von Shortrate Modellen

Beispiel 5.2.1

Wir geben im Folgenden einige bekannte Beispiele für Shortrate Modelle an:

1. Vasicek-Modell:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

2. Cox-Ingersoll-Ross-Modell (CIR):

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t).$$

3. Ho-Lee-Modell:

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t).$$

4. Hull-White-Modell:

$$dr(t) = a(t)(b(t) - r(t))dt + \sigma(t)dW(t).$$

(Erweiterung des Vasicek-Modells).

5. Manchmal findet man auch eine entsprechende Erweiterung des CIR-Modells unter dem Namen Hull-White:

$$dr(t) = a(t)(b(t) - r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW(t).$$

6. Black-Derman-Toy-Modell:

$$dr(t) = \theta(t)r(t)dt + \sigma(t)r(t)dW(t).$$

7. Black-Karasinski-Modell: Setze $l(t) := \ln(r(t))$:

$$dl(t) = a(t)(b(t) - l(t))dt + \sigma(t)dW(t).$$

Bemerkung 5.2.2

Zur Interpretation:

1. Vasicek- und CIR-Modelle werden auch als 'Gleichgewichtsmodelle' bezeichnet: Der Term $a(b - r(t))dt$ bewirkt eine 'Mean Reversion' Tendenz, d.h. die Shortrate wird sich im Mittel um das Niveau b herum bewegen, die Höhe a stellt die Stärke der Mean Reversion dar.
Allerdings haben diese Modelle den Nachteil, dass die Parameter a , b und σ in der Regel nicht genügen, um die momentane Zinsstruktur $P(t, T)$ durch das Modell zu erklären. Hierfür benötigt man vielmehr zeitabhängige Parameter.
2. Im Ho-Lee-, Hull-White- und BDT-Modell ist es möglich, durch geeignete Wahl der Faktoren und Parameter die aktuelle Zinsstruktur durch das Modell zu beschreiben. Diese Modelle werden daher auch als 'No-Arbitrage-Modelle' bezeichnet.
3. Black-Karasinski- und BDT-Modell führen zu Lognormal-verteilten Shortrates. Dadurch erhält die Shortrate eher eine 'mean-fleeing' als eine 'mean reverting' Tendenz.

Definition 5.2.3

Eine wichtige und beliebte Gruppe von Shortrate-Modellen bilden die sogenannten ATS-Modelle (ATS für 'affine term structure'), die eine affine Zinsstruktur bewirken. Dies bedeutet, dass sich die Zerobond-Preise aus dem Shortrate-Modell nach der Formel

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t))$$

bestimmen lassen. Dabei sind $A(t, T)$ und $B(t, T)$ Funktionen, die nur von den Parametern bzw. Faktoren des Shortrate-Modells abhängen.

Satz 5.2.4

Ein Shortrate-Modell $dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$ ist genau dann ein ATS-Modell, wenn es Funktionen $a(t), \alpha(t), b(t), \beta(t)$ gibt, so dass

$$\sigma(t, r(t)) = \sqrt{a(t) + \alpha(t)r(t)}, \quad \mu(t, r(t)) = b(t) + \beta(t)r(t).$$

In diesem Fall ergeben sich die Funktionen $A(t, T)$ und $B(t, T)$ durch Lösen des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen für alle $t < T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} &= \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \\ \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1. \\ NB: \quad A(T, T) &= B(T, T) = 0. \end{aligned}$$

Vasicek-, CIR-, Ho-Lee- und Hull-White-Modell sind ATS-Modelle, BDT- und Black-Karasinski-Modell dagegen nicht. Wir untersuchen nun einige wichtige Shortrate-Modelle näher. Dazu sei stets $t = 0$ (heute).

5.3 Vasicek-Modell

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad r(0) = r_0.$$

5.3.1 Theoretische Ergebnisse**Satz 5.3.1**

Die stochastische Differentialgleichung $dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$ mit Anfangswert $r(0) = r_0$ hat die Lösung

$$r(t) = b + (r_0 - b) \cdot \exp(-at) + \sigma \cdot \int_0^t \exp(-a(t-u))dW(u).$$

Daher gilt $r(t) \sim N(E[r(t)], \text{Var}(r(t)))$ mit

$$E[r(t)] = b + (r_0 - b) \cdot \exp(-at) \quad \text{und} \quad \text{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - \exp(-2at)).$$

Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit für eine negative Shortrate $r(t) < 0$ zu jeder Zeit $t > 0$ größer als null und beträgt

$$p = \Phi\left(-\frac{E[r(t)]}{\sqrt{\text{Var}(r(t))}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Phi\left(-\frac{\sqrt{2a} \cdot b}{\sigma}\right).$$

Bemerkung 5.3.2

Aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung für eine affine Terminstruktur folgt, dass

das Vasicek-Modell eine affine Terminstruktur beschreibt. Daher können wir die Zerobond-Preise direkt über die Funktionen A, B aus den Parametern bzw. dem Anfangswert der stochastischen Differentialgleichung ableiten und müssen nicht simulieren, zu welcher Terminstruktur das Modell führt. Für das Vasicek-Modell gilt dabei mit den Bezeichnungen von oben:

$$a(t) = \sigma^2, \quad \alpha(t) = 0, \quad b(t) = ab, \quad \beta(t) = -a.$$

Daher erhalten wir für die Funktionen A, B das DGL-System:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(t, T) - abB(t, T), \\ \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} &= aB(t, T) - 1. \\ NB : A(T, T) &= B(T, T) = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich geschlossen lösen:

Satz 5.3.3

Die Lösungen des DGL-Systems sind gegeben durch

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \frac{1}{a} \cdot (1 - \exp(-a(T - t))) \\ A(t, T) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \cdot (-B(t, T) + (T - t)) + \frac{\sigma^2 \cdot B(t, T)^2}{4a}. \end{aligned}$$

Für Zerobond-Preise und Spotrates gilt damit

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t)), \\ R(t, T) &= -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} = \frac{A(t, T)}{T - t} + \frac{B(t, T)}{T - t} \cdot r(t), \end{aligned}$$

insbesondere

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

5.3.2 Empirische Erkundung

Wir betrachten folgende Parameter:

$$a = 1, \quad b = 4\%, \quad \sigma = 10\%, \quad r_0 = 3.4\%.$$

1. Simulieren Sie mehrere Pfade des Vasicek-Modells für die Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{100}$ bis zum Zeitpunkt $T_{max} = 10$ und plotten Sie sie. Gibt es Auffälligkeiten?
2. Simulieren Sie $N = 10000$ Pfade und plotten Sie folgende empirischen Werte im zeitlichen Verlauf $T \in [0, 10]$:
 - (a) Erwartungswert $E[r(T)]$.
 - (b) Varianz $Var(r(T))$.

3. Vergleichen Sie Erwartungswert und Varianz für $T_{max} = 10$ mit Satz 5.3.1 (den expliziten Formeln für Erwartungswert und Varianz) im Skript.
4. Bestimmen Sie $B(0, T) = \exp\left(\int_0^T r(\tau) d\tau\right)$ (näherungsweise numerisch) für jeden Pfad. Ermitteln Sie damit $P(0, T) = E\left[\frac{1}{B(0, T)}\right]$ und plotten Sie $P(0, T)$ im zeitlichen Verlauf.
5. Vergleichen Sie dies mit Satz 5.3.3 (den expliziten Formeln für die Zerobondpreise). Plotten Sie beides ins selbe Diagramm.
6. Bestimmen Sie die heutige Zinsstrukturkurve $R(0, T) = -\frac{\ln(P(0, T))}{T}$ und plotten Sie sie.
7. Führen Sie die beiden letzten Punkte auch durch für $r_0 = 3\%$ und $r_0 = 5\%$.

Bemerkung 5.3.4

Kritikpunkte des Vasicek-Modells:

1. (+) Sehr einfach strukturiertes Modell, schnell zu implementieren.
2. (+) Verteilung der Shortrate und der Zerobondpreise ist bekannt und mit analytischen Formeln angebbbar.
3. (+) Damit können analytische Formeln für Zero-, Forward-, Swaprates hergeleitet werden.
4. (+) Aus demselben Grund können geschlossene Formeln für Wertpapiere und Caps/Floors und Swaptions abgeleitet werden.
5. (+) Die klassischen drei Typen für Zinsstrukturkurven (normale, inverse und mit einem Extremum versehene Zinsstrukturkurven) können mit dem Vasicek-Modell dargestellt werden.
6. (+) Das Modell ist sehr einfach aufgebaut und ermöglicht das Studium wichtiger Eigenschaften von Zinsstrukturmodellen.
7. (-) Die drei Parameter des Vasicek-Modells genügen oft nicht, um die am Markt beobachtete Terminstruktur der Zinsen geeignet nachzubilden.
8. (-) Erfahrungsgemäß passen Marktpreise von Zinsderivaten nicht gut zu Aussagen des Vasicek-Modells.
9. (-) Spotrates für verschiedene Laufzeiten sind wegen $R(t, T_i) = A(t, T_i) + B(t, T_i) \cdot r(t)$ perfekt korreliert.

Der letzte Negativpunkt tritt offensichtlich bei jedem Modell, das eine affine Terminstruktur erzeugt, auf und ist ein genereller Nachteil der Einfaktor-Shortrate-Modelle.

5.4 Das Hull-White-Modell

Eine naheliegende Erweiterung des klassischen Vasicek-Modelles ist das Hull-White-Modell, das wir hier kurz in seiner einfachsten Form vorstellen. Die Dynamik der Shortrate im klassischen Hull-White-Modell (unter \mathbb{Q}) lautet:

$$dr(t) = a(b(t) - r(t))dt + \sigma dW(t).$$

Satz 5.4.1

Es gilt für $s \in [0, t]$:

$$r(t) = r(s) \cdot \exp(-a(t-s)) + \int_s^t \exp(-a(t-u)) \cdot a \cdot b(u) du + \sigma \cdot \int_s^t \exp(-a(t-u)) dW(u).$$

Daher gilt $r(t)|\mathbb{F}_s \sim N(E(r(t)|\mathbb{F}_s), \text{Var}(r(t)|\mathbb{F}_s))$ mit

$$E(r(t)|\mathbb{F}_s) = r(s) \cdot \exp(-a(t-s)) + \int_s^t \exp(-a(t-u)) \cdot a \cdot b(u) du$$

und

$$\text{Var}(r(t)|\mathbb{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2a} \cdot (1 - \exp(-2a(t-s))).$$

Auch hier ist (aufgrund der Normalverteilung) die Wahrscheinlichkeit für eine negative Shortrate $r(t) < 0$ zu jeder Zeit $t > 0$ größer als null.

Bemerkung 5.4.2

Aus der notwendigen und hinreichenden Bedingung für eine affine Terminstruktur folgt, dass auch das Hull-White-Modell eine affine Terminstruktur beschreibt. Zerobond-Preise haben im Hull-White-Modell die Form

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t))$$

mit

$$B(t, T) = \frac{1}{a} \cdot (1 - \exp(-a(T-t)))$$

$$A(t, T) = -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s, T) ds + a \int_t^T b(s) B(s, T) ds.$$

Das Hull-White-Modell erlaubt eine Kalibrierung, die die aktuelle Zinsstrukturkurve exakt nachbildet:

Satz 5.4.3

Sei $P(0, T)$ die Terminstruktur der Zerobonds in $t = 0$. Seien $f(0, t)$ die unmittelbaren Forwardrates. Setzt man

$$b(t) := \frac{1}{a} \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - \exp(-2at)),$$

dann erzeugt das Hull-White-Modell für beliebige $a > 0$ und $\sigma \geq 0$ Zerobond-Preise, die exakt den am Markt beobachteten entsprechen.

Bemerkung 5.4.4

Kritikpunkte des Hull-White-Modells:

1. (+) Einfach strukturiertes Modell.
2. (+) Verteilung der Shortrate und der Zerobond-Preise bekannt.

3. (+) Die aktuelle Zinsstrukturkurve kann exakt abgebildet werden.
4. (-) Zur Schätzung der Mean Reversion ($b(t)$) sind die unmittelbaren Forwardrates notwendig. Diese sind in der Regel allerdings nur approximativ bekannt (da nur Stützstellen der Terminstruktur bekannt sind, die dann auf verschiedene Arten interpoliert werden können). Die Kalibrierung der Mean Reversion ist numerisch anspruchsvoll und potentiell instabil.
5. (-) Die Marktpreise von Zinsderivaten werden nur approximativ nachgebildet.
6. (-) Spotrates für verschiedene Laufzeiten sind wegen $R(t, T_i) = A(t, T_i) + B(t, T_i) \cdot r(t)$ auch hier perfekt korreliert.

5.5 Mehrfaktor Modelle

Für Mehrfaktormodelle stellt sich die Frage nach der Anzahl der zu modellierenden stochastischen Faktoren. Hierbei sei auf die Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse verwiesen, bei der sich zeigt, dass eine realistische Abbildung der Dynamik der Zinsstrukturkurve nur durch einen mindestens zwei- oder dreidimensionalen Prozess (je nach Anzahl der dominierenden Hauptkomponenten und deren Gesamtanteil an der Beschreibung der Varianz der Zinsstruktur) bewerkstelligt werden kann.

Im Folgenden sind einige Zweifaktor-Ansätze dargestellt:

1. Gauß'sche Mehrfaktor Shortrate-Modelle:

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

mit

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= -\mu_1(x_1, t)dt + \sigma_1(x_1, t)dW_t^1, \quad x_1(0) = 0, \\ dx_2(t) &= -\mu_2(x_2, t)dt + \sigma_2(x_2, t)dW_t^2, \quad x_2(0) = 0, \end{aligned}$$

wobei (W_1, W_2) eine zweidimensionale Brownsche Bewegung darstellt.

2. Heath-Jarrow-Morton-Modelle: Heath-Jarrow-Morton modellieren alle unmittelbaren Forwardrates synchron:

$$df(t, T) = \alpha_f(t, T)dt + \sum_{i=1}^d \sigma_f^i(t, T)dW^i(t),$$

wobei (W_1, \dots, W_d) eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung ist. Um Arbitragefreiheit sicherzustellen, müssen bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sein.

3. Marktmodelle: Die Kalibrierung an Shortrates und unmittelbaren Forwardrates, welche nicht direkt am Markt beobachtet werden können, ist oft schwierig. Marktmodelle hingegen stellen darauf ab, am Markt beobachtbare Zinsen zu modellieren. Libor-Marktmodelle modellieren Forwardrates bei linearer Verzinsung (gefitet an Euribor-/Liborsätzen). Beobachtbare Caps-/Floors-/Swaptionpreise werden durch Marktmodelle reproduziert.