1-4

(1) $3n^2+10n$

可取 $g(n)=n^2$, $C=13$

有 $3n^2+10n \le 13n^2$ 对 $n \ge 1$ 成立

即 $f(n)=O(n^2)$

(2) $\frac{n^2}{10}+2^n$

取 $g(n)=2^n$, $C=2$ 时 有 $n \ge 1$ 时.

$\frac{n^2}{10}+2^n \le 2 \cdot 2^n$ 成立

即 $f(n)=O(2^n)$

(3) $21+\frac{1}{n}$

取 $g(n)=1$. $C=22$

有 $21+\frac{1}{n} \le 22 \times 1$ 在 $n \ge 1$ 时成立

故 $f(n)=O(1)$

(4) $\log n^3 = 3\log n$

取 $g(n)=\log n$, $C=3$

则有 $\log n^3 \le 3 \cdot \log n$ 在 $n \ge 1$ 时成立

故 $f(n)=O(\log n)$

(5) $\log 3^n = 10n\log 3$

取 $g(n)=n$，$C=20$

有 $10\log 3^n \le 20n$ 在 $n\ge 1$ 时成立

即 $f(n)=O(n)$

1-9

(1) $f(n)=\Theta(g(n))$

$f(n)=\log n^2 = 2\log n$

知 $C=1$ 时 $g(n)$ 为 $f(n)$ 的一个下界

$C=2$ 时，对 $n\ge 1$ 有 $f(n)\le 2g(n)$

即 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$

故 $f(n)=\Theta(g(n))$

(2) $f(n)=O(g(n))$

$f(n)=2\log n$

令 $C=1$，当 $n\ge 256$ 时

有 $f(n)\le 1\cdot g(n)$ 且不存在 C 使 n 很大时 $f(n)\ge Cg(n)$

即 $f(n)=O(g(n))$

(3) $f(n)=\Omega(g(n))$

n 充分大时 $\sqrt{n} > \log n \Rightarrow n^2 > \log^2 n$.

由(2)知 $f(n)=\Omega(g(n))$

(4) $f(n)=\Omega(g(n))$ 不存在 c 使 $f(n)\le cg(n)$

对于常数 c, n 充分大时 $n\log n+n\ge c\log n$ 成立

故 $f(n)=\Omega(g(n))$

(5) $f(n)=\Theta(g(n))$

取 $C=1$ 有 $f(n)\ge C\cdot g(n)$ 恒成立

取 $C=4$ 有 $f(n)\le C\cdot g(n)$ 恒成立

有 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$

从而 $f(n)=\Theta(g(n))$

(6) $f(n)=\Omega(g(n))$

n 充分大时

显然 $g(n)$ 为 $f(n)$ 的一个下界, 不存在 C 使 $f(n)\le C\,g(n)$

因此 $f(n)=\Omega(g(n))$

(7) $f(n)=\Omega(g(n))$

$n\ge 15$ 时

$f(n)\ge 1\cdot g(n)$ 成立 $\Rightarrow f(n)=\Omega(g(n))$

又不存在 C 使 n 充分大时有 $f(n)\le C\cdot g(n)$

从而 $f(n)=\Omega(g(n))$

(8). $f(n) = \Theta(g(n))$

显然 $n > 1$ 时有 $f(n) < g(n)$ 成立

而找不到 c 使 n 充分大时

有 $c \cdot g(n) \leq f(n)$

因此 $f(n) = \Theta(g(n))$