西安交通大学考试题

课　程 概率论与数理统计（A 卷）

学　院 ________　考 试 日 期　2024 年 6 月 28 日

专业班号 ________

姓　名 ________　学　号 ________　期末 √

一、单选题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 下列关系式中错误的是（　　）.

A. $A\cup B=(A-AB)\cup B$　　B. $A\cup B\cup C=A\cup(B-AB)\cup(C-AC)$

C. $A\bar{B}\bar{C}\subset A\cup B$　　D. $(A\cup B)-A=B$

2. 有 5 条长度分别为 1，3，5，7，9 的线段，从中任取三条，所取三条线段能构成三角形的概率为（　　）.

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{7}{10}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 1,0\le y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 X 与 Y 至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为（　　）.

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 设 $X\sim t(n)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 $t_\alpha(n)$ 满足 $P\{X>t_\alpha(n)\}=\alpha$，若 $P\{|X|>c\}=\alpha$，则 $c=$（　　）.

A. $t_\alpha(n)$　　B. $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$　　C. $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$　　D. $t_\alpha(n)$

5. 下列结论中不正确的是（　　）.

A. 二维随机变量 (X,Y) 的两个边缘分布均是一维正态分布，则 $X+Y$ 依然服从一维正态分布

B. X 与 Y 相互独立且都服从一维正态分布，则 $X-Y$ 依然服从一维正态分布

C. 服从二维正态分布的随机变量的边缘分布都为一维正态分布

D. X 与 Y 相互独立且都服从一维正态分布，则 (X,Y) 服从二维正态分布

6. 从总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽得容量为 16 的样本，S^2 为其样本方差，则 $D(S^2)=$（　　）.

A. $\frac{\sigma^2}{8}$　　B. $\frac{2\sigma^2}{15}$　　C. $\frac{2\sigma^4}{15}$　　D. $\frac{\sigma^4}{8}$

二、填空题（共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 已知事件 A,B 相互独立且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$，则 $P\left(A\middle|(A-B)\cup(B-A)\right)=$ ______.

8. 设随机变量 $X\sim U(0,1),Y=-2\ln X$，则 Y 的概率密度为 ______.

9. 设 $\{X_i\}$ 为独立同分布的随机变量序列，且服从参数为 2 的指数分布，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ______.

10. 设 $(X_1,\cdots,X_m,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本，则 $\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2+\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=m+1}^{n}X_i\right)^2$ 服从的分布为 ______.（写出分布类型和自由度）.

11. 设 $X\sim B(100,0.1)$，$Y\sim P(4)$，且 X 与 Y 的相关系数为 0.5，则 $D(2X-Y)=$ ______.

12. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知，则 μ 的置信度为 $1-\alpha=95\%$ 的单侧置信上限为 ______.

三、（10 分）设甲、乙、丙三个地区爆发一种传染病，三个地区感染此病的比例分别为 $\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4}$，已知某人来自这三个地区中的其中一个.（1）求此人感染此病的概率；（2）若此人感染此传染病，求他来自乙地区的概率.

四、（8 分）某射手射击，得 10 环概率为 0.5，得 9 环概率为 0.3，得 8 环概率为 0.1，得 7 环概率为 0.05，得 6 环概率为 0.05. 现独立射击 100 次，试用中心极限定理估计所得总环数介于 900 与 930 分之间的概率.（用标准正态分布的分布函数表示）.

五、（14 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y), & 0\le y\le 1,0\le x\le y\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求：（1）X 与 Y 的边缘概率密度，X 与 Y 是否独立并给出理由；

（2）$f_{X|Y}\left(x\middle|\frac{1}{2}\right)$；　　（3）$Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度.

六、（10 分）设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} ax^2y, & x^2<y\le 1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$. 求：

（1）常数 a；　（2）$P\{Y<X\}$；　（3）$\mathrm{Cov}(X^2,Y)$.

七、（12 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x\ge\mu \\ 0, & 其它 \end{cases}$，其中 μ 是未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自 X 的样本，求：（1）μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1$；

（2）μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}_2$；　（3）$\hat{\mu}_1$ 是否为 μ 的相合估计量，为什么？

八、（10 分）用方法 A、B 测定某物质的一项物理性能指标，用方法 A 测得 13 个样本值，其样本均值 $\bar{X}_A=80.02$，样本方差 $S_A^2=0.024^2$；用方法 B 测得 8 个样本值，其样本均值 $\bar{X}_B=79.98$，样本方差 $S_B^2=0.031^2$. 设两组样本相互独立，且分别来自正态总体 $N(\mu_A,\sigma_A^2)$ 和 $N(\mu_B,\sigma_B^2)$，其中 $\mu_A,\sigma_A^2,\mu_B,\sigma_B^2$ 均未知.

（1）检验假设 $H_0:\sigma_A^2=\sigma_B^2$，$H_1:\sigma_A^2\ne\sigma_B^2$（$\alpha=0.01$）.

（2）检验假设 $H_0:\mu_A=\mu_B$，$H_1:\mu_A>\mu_B$（$\alpha=0.05$）.

附：可供参考的上侧分位数

$F_{0.005}(13,8)=6.94, F_{0.005}(12,7)=8.18, F_{0.005}(7,12)=5.52, F_{0.005}(8,13)=5.08$

$t_{0.05}(19)=1.729, t_{0.05}(21)=1.720, t_{0.025}(19)=2.093, t_{0.025}(21)=2.079$