概率统计期末考试模拟题（五） 2021.1

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列说法错误的是（　　）。

(A) A, B 互为对立事件, 则 A, B 一定互不相容

(B) A, B 互不相容，且 $P(A), P(B)$均不为 0，则 A, B 一定不是相互独立的

(C) 同一个试验的基本事件（即由单个样本点构成的随机事件）一定互不相容

(D) 同一个试验的基本事件一定相互独立

2. 连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 必满足条件（　　）。

(A) $0 \le f(x) \le 1$　　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(C) 是单调不减函数　　(D) 是连续函数

3. 下列说法错误的是（　　）。

(A) 若 (X, Y) 服从二维正态分布，则 X 和 Y 都服从一维正态分布；

(B) 若 (X, Y) 服从二维正态分布，则 $X+Y$ 服从一维正态分布；

(C) 若 X 和 Y 都服从一维正态分布，且 X, Y 相互独立，则 $X+Y$ 服从一维正态分布；

(D) 若 X 和 Y 都服从一维正态分布，且 $\rho_{XY} = 0$，则 X, Y 相互独立。

4. 设总体 X 的均值 μ、方差 σ^2 均未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自该总体的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 σ^2 的**矩估计量**是（　　）。

(A) $\overline{X}$　　(B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$　　(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

5.设 (X_1, X_2) 是来自总体 X 的样本，则总体均值 μ 最有效的无偏估计是（　　）。

(A) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$　　(B) $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$

(C) $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$　　(D) $\hat{\mu}_4 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6. 若 $P(A \cup B) = \frac{3}{5}, P(\overline{A} \cup B) = \frac{9}{10}$, 则 $P(B) =$ ______________。

7. 随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.4, & 1\le x<2\\ 0.5, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$，则

$P\{X=1\}=$____________，$P\{X=2\}=$____________，

$P\{X=3\}=$____________。

8. 设随机变量 $X\sim N(\frac{1}{2},2)$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中 $\{X\le\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$____________。（结果用分数表示）

9. 设某种病菌在人群中的带菌率为 10%，检测时带菌者呈阳性、阴性反应的概率分别为 0.95 和 0.05，不带菌者呈阳性、阴性反应的概率分别为 0.01 和 0.99。今某人检测一次呈阳性，则他是带菌者的概率为____________。（结果用分数表示）

10. 设两总体 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,4)$ 相互独立，X_1,X_2,X_3,X_4 和 $Y_1,Y_2,Y_3\cdots,Y_9$ 分别为来自总体 X 和 Y 的样本，则统计量 $Z=\dfrac{3(X_1+X_2+X_3+X_4)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{9}Y_i^2}}$ 服从分布____________。（给出分布类型和参数）

三、判断题：判断以下说法正确与否,正确的打√，错误的打 X（**每小题 2 分，共 10 分）**

11. 若 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，则 $AB=\varnothing$。 （　　）

12. $P(A|B)$ 的含义是事件 A,B 都发生的概率。 （　　）

13. 取值范围为连续区间的随机变量就是连续型随机变量。 （　　）

14. 伯努利大数定律为实际中用频率近似代替概率提供了理论依据。（　　）

15. 假设检验可能犯弃真错误和纳伪错误，在样本容量一定时，不能同时减小犯这两类错误的概率。（　　）

四、解答题（每小题 10 分，共 60 分）

16. 加法器在做加法运算时,根据四舍五入原则先对每个数取整后再运算，这样产生的误差服从区间[-0.5,0.5]上的均匀分布。问：要使误差总和的绝对值不超过 10 的概率大于 0.95，最多能有多少个数相加?（$\Phi(0.95)=0.829$，$\Phi(0.05)=0.52$，$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$）

17. 设随机变量 X，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases},\ (\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1\ne\lambda_2)，$$

且 X，Y 相互独立。

(1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度；

(2) 根据(1)中结论回答指数分布是否具有可加性，并列举两种具有可加性的分布类型。

18. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}c, & |y|<x, 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

(1) 求常数 c；　　(2) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(3) 问 X 与 Y 是否相互独立？是否不相关？请说明理由。

19. 设某校女生的身高服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今从该校随机抽取 9 名女生，计算身高样本均值和样本标准差为：$\overline{x}=162.67cm$，$s=4.20cm$，求身高方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间。

$(\chi_{0.025}{}^2(8)=17.535$，$\chi_{0.975}{}^2(8)=2.18$；$\chi_{0.025}{}^2(9)=19.02$，$\chi_{0.975}{}^2(9)=2.7)$

20. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma}} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$，其中 $\sigma>0$ 未知，$(X_1，X_2,\cdots，X_n)$ 为来自 X 的样本，求 σ 的极大似然估计量。

21. 已知人每分钟的脉搏次数服从正态分布，正常人的平均脉搏为 72 次/每分钟，现测得 9 例酏剂中毒患者的脉搏，算得平均次数为 66.4 次，样本方差为 5.92^2。试问：中毒患者与正常人的平均脉搏有无显著差异?（$\alpha=0.05$）

$(\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.65)=0.95,t_{0.025}(8)=2.306,t_{0.05}(8)=1.8595,t_{0.025}(9)=2.2622,t_{0.05}(9)=1.8331)$

概率统计期末考试模拟题（六） 2021.6

（标准正态分布函数$\Phi(x):\Phi(1.50)=0.9332,\Phi(2.5)=0.9938$，

$\chi^2_{0.975}(14)=5.629$，$\chi^2_{0.025}(14)=26.119$，$\chi^2_{0.975}(15)=6.262$，$\chi^2_{0.025}$（15） $=27.488$

$t_{0.025}(14)=2.1448, t_{0.025}(15)=2.1314, t_{0.05}(14)=1.7613, t_{0.05}(15)=1.7531$）

一．填空题 （每小题 3 分，共 30 分）

1. 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为$\dfrac{80}{81}$，则该射手进行一次射击的命中率为____________.

2. 随机变量X和Y独立同分布于参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布，令$U=2X+Y, V=2X-Y$， 则U和V的相关系数为___________.

3. 随机变量$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，设$p_1=P(X\le\mu-4), p_2=P(Y\ge\mu+5)$，则比较$p_1$_______$p_2$ (填$\le$，$\ge$或=).

4. 设有事件A, B, $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$, 则$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______.

5. 随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$E[\mathrm{e}^X]=$___________.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ，σ^2是未知参数，样本均值记为$\overline{X}$, 样本方差为S^2， 则参数μ的置信水平为$1\text{-}\alpha$的置信区间长度为___________________________.

7. 设总体$X\sim N(0,1)$,（$X_1,X_2,...,X_6$）是来自X的样本，设$Y=(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2$，若$CY\sim\chi^2(2)$，则$C=$___________.

8. 设随机变量X服从参数为9的泊松分布，$Y\sim N(9,4)$，且X,Y相互独立，则根据切比雪夫不等式有：$P(|X-Y|\ge 4)\le$__________.

9. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则$Y=-2\ln X$的概率密度$f_Y(y)=$__________________________.

10. 设 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 1 的指数分布，则$P\{1<\min(X,Y)\le 2\}=$________________.

二.（8 分）已知男人中有 5%是色盲患者，女人中有 0.25%是色盲患者，今从男、女人数相等的人群中随机挑选一人，发现恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多大？

三.（8 分）某箱装 100 件产品，其中一、二、三等品分别为 80，10 和 10 件. 现从中随机取一件，定义三个随机变量 X_1, X_2, X_3 如下：

$X_i = \begin{cases} 1, & 抽到 i 等品 \\ 0, & 其他 \end{cases}, i = 1, 2, 3$. 求 X_1 和 X_2 的相关系数.

四.（14 分）二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2, \max\{0, x-1\} \le y \le \min\{1, x\} \\ 0, & 其他 \end{cases}.$$

求（1）边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；（2）协方差 $Cov(X, Y)$；

（3）对 $y \in (0,1)$，求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

五.（10 分）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 服从区间(0, 4)上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，求 $Z = X + 2Y$ 的分布函数.

六.（10 分）从一台车床加工的一批轴料中取 15 件测量其椭圆度，计算得椭圆度的样本标准差 $s = 0.025$, 问该批轴料椭圆度的方差与规定的 $\sigma^2 = 0.0004$ 有无显著差别（$\alpha = 0.05$，椭圆度服从正态分布）？

七.（10 分）有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m, 现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少？

八.（10 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \theta, & 0 \le x < 1; \\ 1-\theta, & 1 \le x \le 2; \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

其中 θ>0 为未知参数. $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，记 N 是样本观测值中小于 1 的个数，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$，并试计算极大似然估计量 $\hat{\theta}_L$ 的无偏性.

期末考试模拟题（七）2022.2

备用数据：$\Phi(\cdot)$:标准正态分布函数，$t_\alpha(n)$ 和 $\chi^2_\alpha(n)$：相应分布的上侧 α 分位数.

$\Phi(1)=0.841, \Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2)=0.977$；

$t_{0.025}(8)=2.306,\ t_{0.05}(8)=1.860;\quad \chi^2_{0.05}(8)=15.507,\ \chi^2_{0.95}(8)=2.733.$

一、完成下列各题 （每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 A,B,C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必然发生，B 与 C 互不相容， 且 $P(A)$=0.2, $P(B)$=0.4, $P(C)$=0.3，求 $P(A\cup B\cup C)$；判断 A 与 C 是否独立？说明理由.

2. 设 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.4, & -1<x<0,\\ cx, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求(1) c 的值；(2) X 的分布函数.

3. 设随机变量 X 服从均值为 2 的指数分布，求(1) X 的方差；(2) $P(X<3|X>1)$.

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，同服从均值为 2 的泊松分布，求：
   (1) $P\{X+Y=2\}$；　　　　(2) $P\{\min(X,Y)=1\}$.

5. 设总体 $X\sim N(\theta,\theta^2)$， $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本， $\bar{X}, S^2$ 分别是其样本均值和样本方差，a, b 是实数，设 $T(a,b)=a\bar{X}^2+bS^2$，求：(1) $T(a,b)$ 是 θ^2 的无偏估计量的充要条件；　　(2) $T(0,1)$的方差.

二. (10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间(0, 2)上的均匀分布， $Y\sim B(2, 0.5)$，令 $Z=XY$，求：(1) Z 的数学期望与方差；(2) Z 的分布函数.

三. (8 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, 1<x<3,\\ 0, \quad \text{其他}.\end{cases}$，对 X 独立重复观察 396 次，观察值为 $X_1,\cdots,X_{396}$，记 $Y=X_1+\cdots+X_{396}$. 试由中心极限定理，求 $P\{Y<880\}$的近似值.

四. (12 分) 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(2-xy), & 0<x<2,-1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$.

(1) 求 $P(X+Y>1)$；(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；

(3) 判断 X 与$|Y|$是否独立？说明理由.

五. (10 分) 设(X,Y)服从二维正态分布，$X \sim N(2,4)$，$Y \sim N(1,9)$，X与Y的相关系数为ρ．(1) 若$\rho=0$，求$P(2X>Y-2)$，问a取何值时，$aX+Y$与$X-2Y$独立？(2) 若$\rho=0.5$，求$2X-Y$的概率密度.

六.(10 分)设总体X的分布律为$P(X=0)=(1-\theta)^2$，$P(X=1)=2\theta(1-\theta)$，$P(X=2)=\frac{2}{3}\theta^2$，$P(X=3)=\frac{1}{3}\theta^2$，未知参数 $0<\theta<1$，从总体中抽取容量为 25 的简单随机样本，观测到“0”, “1”, “2”, “3”出现的次数分别为 3，13，7，2，分别求θ的矩估计值和最大似然估计值.

七.(10 分)设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, 0<x\le\theta, \\ 0, \quad 其他.\end{cases}$，未知参数$\theta>0$．$X_1,\cdots,X_n$为来自$X$的样本，$\bar{X}$是样本均值. (1) 判断$\frac{9}{4}\bar{X}^2$是否为$\theta^2$的无偏估计量，说明理由；(2) 判断$\frac{9}{4}\bar{X}^2$是否为$\theta^2$的相合(一致)估计量，说明理由.

八. (10 分) 设一工厂生产的某种型号无缝钢管的内径$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，从某日生产的钢管中随机抽出 9 根，测得内径(单位：cm)的样本均值为 53.84，样本标准差为 1.32. (1) 在显著水平 0.05 下检验$H_0:\sigma^2=1, H_1:\sigma^2>1$．(2) 求$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间. (保留两位小数)

期末考试模拟题（八）2022.6

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设$X\sim N(-1,\sigma^2)$且$P(-3<X<-1)=0.4$，则$P(X\geq 1)=$（　　）.

（A） 0.1　　（B） 0.2　　（C） 0.3　　（D）0.4

2. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，即$X\sim Exp(2)$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中随机事件$\{X>1/2\}$ 出现的次数，则$P(Y=2)=$（　　）.

（A）$e^{-2}(1-e^{-1})$　　（B）$3e^{-1}(1-e^{-2})$

（C）$3e^{-2}(1-e^{-1})$　　（D）$e^{-1}(1-e^{-2})$

3. 设随机变量Z的分布函数为$F(z)=\begin{cases}1-e^{-3z}-e^{-4z}+e^{-7z}, & z\geq 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，则$E(Z)=$（　　）.

（A）$\frac{7}{12}$　　（B）$\frac{37}{84}$　　（C）$-\frac{7}{12}$　　（D）$-\frac{37}{84}$

4. 设随机变量X的期望、方差都存在，并且$E(X)=7$，$D(X)=4$. 随机变量X_1,X_2,X_3相互独立、都与 X 有相同的分布，下面说法正确的是（　　）.

（A）$D(X_1+X_2)=D(2X)=4D(X)=16$　　（B）$D(X_1+X_2)=2D(X)=8$

（C）$P(X_1=X_2=X_3)=0$　　（D）$X_1=X_2=X_3$

5. 在假设检验中，不拒绝原假设意味着（　　）.

（A）原假设肯定是正确的　　（B）原假设肯定是错误的

（C）没有证据证明原假设是正确的　　（D）没有充分证据证明原假设是错误的

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 设事件A,B,C满足$B\subset A$，$B\subset C$，$P(A)=0.8,P(AC)=0.6,P(A-B)=0.5$，则$P(A\bar{B}C)=$____________.

7. 设连续型随机变量X的分布函数为$F_X(x)$, $Y=2X^2+1$，则 Y 的分布函数$F_Y(y)=$____________________.

8. 设 1 小时内进入某图书馆的读者人数服从 Poisson 分布，已知 1 小时内无人进入该图书馆的概率为 0.01，则 1 小时内至少有 2 个读者进入该图书馆的概率为______________.

9. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots)$相互独立且同分布的随机变量序列，其概率密度为$f(x)=\begin{cases}5e^{-5x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$. $n\to+\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 以概率收敛于____________.

10. 设两个总体X与Y相互独立且具有相同的分布$N(1,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_5)$分别为来自这两个总体的简单样本，$\overline{X}$、$\overline{Y}$分别为两个样本均值，

$S_1^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$，$S_2^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}\left(Y_k-\overline{Y}\right)^2$，则统计量 $\frac{5(\bar{X}-\bar{Y})^2}{S_1^2+S_2^2}$ 服从的分布为 ________________.

三、计算与证明（本大题共 8 小题，共 70 分）

11.（10 分）某企业流水线生产的产品按 100 件装箱，该企业出厂的检验标准是从每箱产品中抽取 10 件进行检验，若没发现不合格产品就通过检验，否则开箱逐个检验. 据统计每箱产品中的次品数不超过 4 件，每箱产品中有 i 件次品的概率如下表所示

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

（1）请帮检验部门估计每箱产品的通过率;

（2）假设按照这个检验方法某箱产品通过了检验，该箱产品中依然有 2 件次品的概率有多大?

12.（10 分） 设二维随机变量$(X,\ Y)$的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

令$Z=2X-Y$，（1）求Z的分布函数，（2）求$P(Y<1/2\,|X<1/2)$.

13.（8 分） 设随机变量X的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

而且当随机变量$X=x(x>0)$条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}e^{-(y-x)}, & y>x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）求条件概率$P(Y>2|X=1)$;　　（2）求$P(X+Y<2)$.

14.(6 分) 设总体的二阶矩存在，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自该总体的简单随机样本，$\bar{X}$为样本均值，令$Y=X_i-\bar{X}$，$Z=X_j-\bar{X}$, 求 Y 与 Z 的相关系数.

15.（10 分）据调查某社区 400 个家庭中，每个家庭购买车辆数为 0，1，2 的概率如下表

0	1	2
0.05	0.8	0.15

请利用中心极限定理近似计算:

(1)假设各个家庭购买的车辆数相互独立,求购买的车辆数超过 450 部的概率,

（2）求购买 1 部车的家庭数不多于 340 的概率.

（$\Phi(2.5)=0.9938,\ \Phi(1.15)=0.8749$）

16.（10 分）设总体X的概率密度$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中$\theta>0$为未知参数，从总体中抽取简单样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$.

（1）求θ 的矩估计量$\hat{\theta}_1$ ，并判断是否为无偏估计量；

（2）求θ 的最大似然估计量$\hat{\theta}_2$.

17.（10 分）假设某型号彩色显像管的寿命服从正态分布,并且已知标准差$\sigma=40$小时。从这批显像管中随机抽取 100 只，算得其平均寿命为 10000 小时，试求

(1)显像管平均寿命 μ 的置信度为 0.99 的置信区间；

(2)若显像管的平均寿命不小于 10100 小时被认为合格，试在显著性水平$\alpha=0.005$下检验这批显像管是否合格？（$\Phi(2.576)=0.995$, $\Phi(2.33)=0.99$）

18.（6 分）设总体 X 的分布函数为$F(x)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体 X 的简单随机样本，$X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$. 证明：

（1）当$x\le y$时，$P\{X_{(1)}>x，X_{(n)}\le y\}=\big(F(y)-F(x)\big)^n$.

（2）随机变量$\big(X_{(1)},X_{(n)}\big)$的分布函数为

$$G(x，y)=\begin{cases}F^n(y)-\big(F(y)-F(x)\big)^n, & x\le y\\ F^n(y), & x>y\end{cases}.$$

期末考试模拟题（九）2023.2

一、单项选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1、某人每次射击命中目标的概率为 p，他独立地进行了四次射击，至少命中一次的概率是 $\frac{80}{81}$，则概率 p 为（　　）。

A. $\frac{8}{81}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

2、在某港口，甲船每天在 8 点到 9 点间的任意时刻到达，而乙船在 7:30 到 8:30 间的任意时刻到达，则事件“两船到达时间相差不超过 20 分钟”的概率为（　　）。

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$

3、某人决定将一笔钱投资于房产、股票和期货之一，他选择这三种投资渠道的概率依次为 0.5，0.25 和 0.25。据有关信息显示，现阶段投资这三种渠道获利的概率分别为 0.875，0.75 和 0.875，则他投资获利的概率为（　　）。

A. $\frac{27}{32}$　　B. $\frac{5}{32}$　　C. $\frac{5}{16}$　　D. $\frac{11}{16}$

4、设随机变量 $X \sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P(2<X<4)=0.3$，则概率 $P(X\le 0)$ 为（　　）。

A. 0.3　　B. 0.2　　C. 0.7　　D. 0.5

5、设随机变量 X 服从期望为 2 的指数分布，则 $P\{X>3\,|\,X>1\}=$（　　）。

A. e^{-1}　　B. e^{-2}　　C. $\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$　　D. e^{-4}

6、设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$，则 $P\{Y\le X\}=$（　　）。

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

7、随机变量 X 和 Y 相互独立，X 服从正态分布 $N(0,1)$，Y 服从正态分布 $N(1,2)$，则随机变量 $X-2Y$ 服从的分布是（　　）。

A. $N(-2,-3)$　　B. $N(-2,5)$　　C. $N(-2,8)$　　D. $N(-2,9)$

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 2 的指数分布，Y 服从区间 $(1,3)$ 内的均匀分布，则方差 $D(2X-Y)$ 为（　　）。

A. 2　　B. $\frac{7}{6}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

9、若随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，$X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，

则当$n \to \infty$时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$依概率收敛于（　　）。

A．2　　　B．4　　　C．6　　　D．8

10、设总体$X \sim N(2, 3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n\ (n>1)$为来自$X$的样本，$\overline{X}$和$S^2$分别表示样本均值和样本方差, 则下面结果正确的是（　　）。

A. $\frac{\overline{X}-2}{3} \sim N(0,1)$　　　B. $\frac{(n-1)S^2}{9} \sim \chi^2(n-1)$

C. $\frac{nS^2}{9} \sim \chi^2(n)$　　　D. $\frac{\overline{X}-2}{S/\sqrt{n}} \sim t(n)$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、已知$P(\overline{A})=0.3,\ P(B)=0.4,\ P(A\overline{B})=0.5,$ 则$P(B-(A\cup\overline{B}))=$________。

2、设X在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内服从均匀分布，则$Y=\tan X$的概率密度$f(y)=$_____。

3、若随机变量X_1, X_2相互独立且分别服从参数为λ_1, λ_2的泊松分布, 若

$P\{X_1+X_2>0\}=1-e^{-1}$，则X_1+X_2的分布律为_______________。

4、设两个随机变量X,Y，$E(X)=-2$，$E(Y)=4$，$D(X)=4$，$D(Y)=9$，$\rho(X,Y)=-0.5$
则$E\left(3X^2-2XY+Y^2-3\right)=$_________。

5、设总体$X \sim N(\mu, 3^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$为取自总体的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，要使$E(\overline{X}-\mu)^2 \le 0.1$成立，则样本容量$n$至少应取_________。

三、（12 分）设随机变量X与Y相互独立，且都服从分布$B(1,p)$, $0<p<1$。令

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数}\\ 0, & X+Y\text{为奇数}\end{cases}。$$

（1）求Z的分布律;

（2）求(X,Z) 的分布律, 并判断p取何值时X与Z独立?

四、（12 分）某生产线一次加工产品的合格率为0.5，不合格品立即再加工，再加工的合格率仍为0.5，剩下的为废品。已知：合格品每件可获利 80 元，再加工费用为 20 元，而废品每件总亏损 20 元。

（1）为保证每天总利润的期望不低于 5 万元，问他们至少要加工多少件产品？

（2）如果想每天利润多于 5 万的概率大于0.977，利用中心极限定理估计至少要加工多少件？（$\Phi(2.0)=0.977$，$\Phi(x)$表示标准正态分布的分布函数）

五、（**12 分**）若总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}, & x\ge\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，其中 θ，λ 是参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本。（1）若 θ 已知，求参数 λ 的矩估计量；

（2）若 λ 已知，求参数 θ 的最大似然估计量。

六、（**9分**）设 $X_1,X_2,\cdots,X_6$ 是来自正态总体 $N(0,4)$ 的样本。令

$$Y=aX_1^2+b(2X_2-X_3)^2+c(3X_4-2X_5-X_6)^2,$$

（1）若 $Y\sim\chi^2(3)$，求常数 a,b,c；

（2）证明随机变量 $Z=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\dfrac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}$ 服从自由度为 1 的 t 分布。

七、（**10 分**）某作物的产量近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现发现新的种子，取 25 块样板田做实验，发现平均亩产为 1864 公斤，样本标准差为 50 公斤。

（1）求方差 σ^2 的置信度为 0.95 的双侧置信区间。

（2）此新种子的平均亩产量是不是以显著性水平 $\alpha=0.05$ 显著大于 1800 公斤？

参考数据： $u_{0.05}=1.65,\ u_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(25)=1.708,\ t_{0.05}(24)=1.711$，$t_{0.025}(25)=2.060,\ t_{0.025}(24)=2.064$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646,\ \chi^2_{0.975}(25)=13.120$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652,\ \chi^2_{0.95}(25)=14.611$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364,\ \chi^2_{0.975}(24)=12.401$，$\chi^2_{0.05}(24)=36.415,\ \chi^2_{0.95}(24)=13.848$.

西安交通大学考试题

成绩	

课　程　概率论与数理统计 (A卷)

学　　院 ________________　　考试日期　2023 年　6 月 24 日

专业班号 ________________

姓　　名 ________________　　学　号 ______________　　期中 ☐ 期末 √

注：$\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数。

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $P(A)=0.4,\ P(\overline{A}\cup B)=0.7$ 则 $P(\overline{B}|A)=$（　　）。

A．0.25　　B．0.5　　C．0.75　　D．$\frac{4}{7}$

2. 设 X,Y 独立同分布，$P\{X=-1\}=P\{X=1\}=0.5$，下列各式成立的是（　　）。

A. $P\{X=Y\}=1$　　B. $P\{X=Y\}=0.5$

C. $P\{XY=1\}=0.25$　　D. $P\{X+Y=0\}=0.25$

3. 设 $X\sim U(0,2)$，$Y\sim P(3)$，且 X,Y 相互独立，则 $D(3X-Y-2)=$（　　）。

A．0　　B．2　　C．4　　D．6

4. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 1，$Z=X+Y$，X 与 Z 的相关系数为（　　）。

A．1　　B．0　　C．$\frac{1}{2}$　　D．-1

5. 设总体 $X\sim N(12,4)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自 X 的样本，$X_{(n)}$ 是样本的极大值，则 $P\{X_{(n)}>16\}=$（　　）。

A. $\left[\Phi(1)\right]^n$　　B. $1-\left[\Phi(1)\right]^n$　　C. $\left[\Phi(2)\right]^n$　　D. $1-\left[\Phi(2)\right]^n$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 袋中有 10 个红球和 5 个白球，每次从袋中任取一球，无放回地取两次，则取出的两球是同色的概率为________。

2. 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则 $Y=e^X$ 的概率密度为________。

3. 设随机变量 $X\sim U(1,4)$，现对 X 进行独立重复观测三次，则至少有两次观测值小于 3 的概率为_______。

4. 设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，则 $E\left(|X-1|\right)=$ _______。

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$是来自总体$N(0,4)$的样本，则统计量$\dfrac{4(X_1^2+X_2^2)}{\sum\limits_{i=3}^{10}X_i^2}$服从________分布。

（请写出分布类型及自由度）

三、（10 分）某人要购买一部手机，现等可能地从甲、乙两种型号中选择购买。已知甲型号手机出厂是合格品的概率为 0.95，乙型号手机出厂是合格品的概率为 0.99。

（1）购买的手机是合格品的概率是多少？

（2）若购买的手机不是合格品，则该手机是甲型号的概率是多少？

四、（14 分）设随机向量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\,|\,0<x<y,0<y<1\}$上的均匀分布。

求：（1）X与Y是否相互独立？为什么？ （2）$f_{X|Y}(x|y)$； （3）$P\left\{X>\dfrac{1}{4}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}$.

五、（10 分）设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim U(0,2)$，$Y\sim Exp(1)$。求：

（1）$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度； （2）$P\{X\geq Y\}$.

六、（8 分）对一物体的长度（单位：cm），进行重复测量，用这些测量值的平均值作为长度真值的估计值。假设各测量值是独立同分布的随机变量，其期望是长度真值d，方差是4。试用中心极限定理估计，至少需要重复测量多少次才能使得平均值与真值的差的绝对值小于 0.5 的概率不小于 0.95？（$\Phi(1.65)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$）

七、（10 分）设X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中$\theta>0$未知，

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自X的样本，求（1）θ的矩估计量；（2）θ的最大似然估计量。

八、（10 分）某公司生产一种电动工具，公司在新型号的产品中使用了一种新材料，为了考察新型号产品的使用寿命（单位：h）是否比老型号有提高，从老型号产品中随机抽取 8 台，测得平均使用寿命$\bar{x}=1010$，样本标准差$s_1=60$；从新型号产品中抽取 10 台，测得平均使用寿命$\bar{y}=1090$，样本标准差$s_2=54$。假定新、老产品的使用寿命均服从正态分布，且方差相等。

（1）新型号产品的使用寿命是否比老型号有显著提高$(\alpha=0.05)$？

（2）求新型号产品的平均使用寿命的置信度为0.95的双侧置信区间。

九、（8 分）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本。（1）若$T=C\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$是$\sigma^2$的无偏估计量，求常数$C$。（2）$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$是$\sigma^2$的相合估计量吗？请说明理由。

参考数据：$u_{0.05}=1.65,\ u_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(16)=1.7459$，$t_{0.025}(16)=2.1199$，

$t_{0.05}(9)=1.8331$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，$t_{0.05}(7)=1.8946$，$t_{0.025}(7)=2.3646$

概率统计期末考试模拟题（五）答案

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）　D　B　D　C　A

二、填空题　6. 0.5　7. 0.4；0.1；0.5　8. 3/8

9. 95/104　10. $t(9)$

三、判断题　X　X　X　√　√

四、16.设 X_i 为第 i 个数四舍五入产生的误差，则 $X_i \sim U(-0.5,0.5)$，$i=1,2,\cdots,n$ 相互独立。

误差总和为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$， $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=0, D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{n}{12}$，

$$P\{|\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i| \le 10\}=P\{-\frac{10}{\sqrt{n/12}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n/12}} \le \frac{10}{\sqrt{n/12}}\}$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1 \ge 0.95 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{n/12}} \ge 1.96$$

解得 $n \le 312$ 故最多能有 312 个这样的数相加。

17. $f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x-\lambda_2 z}, & x>0, z>x\\ 0,其他\end{cases}$

$$f_Z(z)=f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x-\lambda_2 z}dx=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}), & z>0\end{cases}$$

（2）指数分布不具有可加性，

泊松分布、正态分布具有可加性。

18. （1）$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1$，解得 $c=\frac{1}{4}$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}dy, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{|y|}^{2}\frac{1}{4}dx, & |y|<2\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}(2-|y|), & |y|<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

（3）显然，在面积非 0 的区域 $D=\{(x,y)\,||y|<x, 0<x<2\}$ 上，有

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不相互独立。

又因为 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy=\int_{-2}^{2} y\cdot\frac{1}{4}(2-|y|)dy=0$

$$E(XY)=\iint_{R^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{-x}^{x}\frac{1}{4}xydy=0$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，因此 X 与 Y 不相关。

19. 因女生身高 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，故 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

$$P\{\chi_{0.975}{}^2(n-1)\le\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\le\chi_{0.025}{}^2(n-1)\}=0.95$$

解得 σ^2 的置信区间为：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}\right)$

代入数据得置信区间为 $\left(\dfrac{8\times4.2^2}{17.535},\dfrac{8\times4.2^2}{2.180}\right)$ 即 $(8.048,64.734)$.

20. 设样本观测值为 $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$

似然函数 $L(x_i,\sigma)=\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\sigma}}x_1x_2\cdots x_n$，

$$\ln L(x_i,\sigma)=-n\ln\sigma+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\sigma}$$

$$\frac{\partial\ln L(x_i,\sigma)}{\partial\sigma}=\frac{-n}{\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2\sigma^2}=0,$$

$\sigma=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，所求极大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

21. 设中毒患者的脉搏次数 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， H_0：$\mu=\mu_0=72$，H_1：$\mu\ne\mu_0=72$

当 H_0 成立时，$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

H_0 的拒绝域为 $W=\{\ |t|>t_{\alpha/2}(\text{n-1})\ \}$

其中 $\alpha=0.05,n=9,\overline{x}=66.4,s=5.92$ 代入

$$|t|=\left|\frac{66.4-72}{5.92/\sqrt{9}}\right|\approx2.838>t_{0.025}(8)=2.306$$

故拒绝 H_0，认为中毒患者与正常人的平均脉搏有显著差异。

概率统计期末考试模拟题（六）答案

一.（每题 3 分）

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{3}{5}$ 3. = 4. 0.25 5. $e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ 6. $\frac{2S\cdot}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

7. $\frac{1}{3}$ 8. $\frac{13}{16}$ 9. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, y>0\\ 0, \quad y\le 0\end{cases}$ 10. $e^{-2}-e^{-4}$

二.（8 分）解：设事件 M={男人}，S={色盲患者}，题意有 $P(M)=P(\bar{M})=0.5$-

$P(M|S)=\frac{P(S|M)P(M)}{P(S|M)P(M)+P(S|\bar{M})P(\bar{M})}=\frac{0.05\times0.5}{0.05\times0.5+0.0025\times0.5}=\frac{20}{21}$（$=0.9524$）

三．（8 分）解： $X_1\sim B(1,0.8)$, $EX_1=0.8$, $D(X_1)=0.16$

$X_2\sim B(1,0.1)$, $EX_2=0.1$, $D(X_2)=0.09$-- -2 分 $X_1X_2\sim B(1,0)$, $E[X_1X_2]=0$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2]=-0.08$$

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}=-\frac{0.08}{\sqrt{0.16\times0.09}}=-\frac{2}{3}$$

四.（14 分）解：（1）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$ ，$0<x\le1$时，$f_X(x)=\int_0^x xdy=x^2$,

$1<x\le2$时，$f_X(x)=\int_{x-1}^1 xdy=2x-x^2$, x属于其他情况时，$f_X(x)=0$.

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$ ，$0<y\le1$时，$f_Y(y)=\int_y^{y+1}xdx=\frac{2y+1}{2}$,

y属于其他情况时，$f_Y(y)=0$.

（2） $EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x^3dx+\int_1^2x(2x-x^2)dx=\frac{7}{6}$,

$EY=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1y(y+\frac{1}{2})dy=\frac{7}{12}$,

$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dy\int_y^{y+1}x^2ydy=\frac{3}{4}$,

$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{5}{72}$.

（3） $y\in(0,1)$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2x}{2y+1}, & x\in(y,y+1)\\ 0, 其他\end{cases}$

五.（10 分） 解： $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-y}; & 0<x<4, y>0\\ 0; & 其他\end{cases}$

$F_Z(z)=P(X+2Y\le z)=\int\int_{\{x+2y\le z\}}f(x,y)dxdy$,

- $z\le0$时，$F_Z(z)=0$;

$0<z\leq 4$时，$F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{4}e^{-y}dy=\frac{1}{4}(z-2+2e^{-\frac{z}{2}})$,

$z>4$时，$F_Z(z)=\int_0^4 dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}\frac{1}{4}e^{-y}dy=1-\frac{1}{2}[e^2-1]e^{-\frac{z}{2}}$,

六.（10 分）解　由题意，建立假设H_0：$\sigma^2=0.0004\ \leftrightarrow\ H_1:\sigma^2\neq 0.0004$.

当H_0成立时，统计量$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{0.0004}\sim\chi^2(n-1)$,

拒绝域为$W=\{\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)或\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$

$n=15,\chi^2_{0.975}(14)=5.629,\chi^2_{0.025}(14)=26.119$,

计算$\chi^2=\dfrac{14\times 0.025^2}{0.0004}=21.875\in(5.629,26.119)$，不在拒绝域中，因此接受原假设，即认为该批轴料的椭圆度的方差和规定的无明显差别。

七.（10 分）解：X_i表示木柱短于 3 米，则$X_1,X_2,...,X_{100}$独立同分布且$X_i\sim B(1,0.2)$，

$E[X_i]=0.2,Var(X_i)=0.16$,----2 分，100 根中短于 3 米的根数为$\sum_{i=1}^{100}X_i$，　因此

$$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 30\}=P\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-E(\sum_{i=1}^{100}X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{100}X_i)}}\geq\frac{30-E(\sum_{i=1}^{100}X_i)}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{100}X_i)}}\}\quad =P(\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-20}{4}\geq\frac{30-20}{4})$$

$$\approx 1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062$$

八.（10 分）解：$EX=\theta\int_0^1 xdx+(1-\theta)\int_1^2 xdx=\frac{3-2\theta}{2}$,

令$\frac{3-2\hat\theta}{2}=\bar X$, 得到$\theta$的矩估计为$\hat\theta_M=\frac{3-2\bar X}{2}$

似然函数$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(X_i)=\theta^N(1-\theta)^{n-N}$ ---1 分，

$lnL(\theta)=Nln(\theta)+(n-N)ln(1-\theta)$，$\frac{\partial lnL}{\partial\theta}(\theta)=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}$,

令$\frac{\partial lnL}{\partial\theta}(\theta)=0$, 得到$\hat\theta_L=\frac{N}{n}$. -----3 分

由于$P(X\leq 1)=\theta$, 随机变量N服从二项分布，$N\sim B(n,\theta)$.

因此$EN=\theta n$,

推出$E\hat\theta_L=\theta$. 最大似然估计是θ的无偏估计。

期末考试模拟题（七）答案 2022.2

备用数据：$\Phi(\cdot)$:标准正态分布函数，$t_\alpha(n)$ 和 $\chi^2_\alpha(n)$：相应分布的上侧α 分位数.

$\Phi(1)=0.841, \Phi(1.645)=0.95, \Phi(1.96)=0.975, \Phi(2)=0.977$；

$t_{0.025}(8)=2.306,\ t_{0.05}(8)=1.860;\quad \chi^2_{0.05}(8)=15.507,\ \chi^2_{0.95}(8)=2.733.$

一、完成下列各题 （每小题 6 分，共 30 分）

1. 设 A, B, C 为三个随机事件，已知 A 发生时 B 必然发生，B 与 C 互不相容，且 $P(A)=0.2, P(B)=0.4, P(C)=0.3$, 求 $P(A\cup B\cup C)$；判断 A 与 C 是否独立？说明理由.

解：$P(A\cup B\cup C)= P(B\cup C)= P(B)+PC)=0.7$， $P(AC)=0\neq P(A)P(C)$, 所以 A 与 C 不独立.

2. 设 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}0.4, & -1<x<0,\\ c\,x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求(1) c 的值；(2) X 的分布函数.

解：(1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0.4+\dfrac{1}{2}c$， $c=1.2$.

(2) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4(x+1), & -1\le x<0,\\ 0.4+0.6x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

3. 设随机变量 X 服从均值为 2 的指数分布，求(1) X 的方差；(2) $P(X<3|X>1)$.

解：(1) $X\sim Exp(\lambda),\ \lambda=0.5, Var(X)=1/\lambda^2=4$

(2) $P(X<3|X>1)= P(X<2)=1-e^{-1}$.

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，同服从均值为 2 的泊松分布，求：

(1) $P\{X+Y=2\}$；　　(2) $P\{\min(X,Y)=1\}$.

解： (1) $X+Y\sim P(4)$, $P(X+Y=2)=8e^{-4}$；

(2) $P(\min(X,Y)=1)= P(X=1,Y\ge 1)+ P(X>1,Y=1)=4e^{-2}(1-2e^{-2})$

5. 设总体 $X\sim N(\theta,\theta^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自 X 的简单随机样本，$\bar{X}, S^2$ 分别是其样本均值和样本方差，a, b 是实数，设 $T(a,b)=a\bar{X}^2+bS^2$，求：(1) $T(a,b)$ 是 θ^2 的无偏估计量的充要条件；　　(2) $T(0,1)$的方差.

解： (1) $E(T(a,b))=E(a\bar{X}^2+bS^2)=a(\theta^2+\dfrac{1}{n}\theta^2)+b\theta^2=\theta^2, \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{n}a+b=1,$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\theta^2} \sim \chi^2(n-1), Var[\frac{(n-1)S^2}{\theta^2}] = 2(n-1), \Rightarrow Var(T(0,1)) = Var(S^2) = \frac{2}{n-1}\theta^4$

二. (10 分) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从区间(0, 2)上的均匀分布， $Y \sim B(2, 0.5)$, 令 $Z = XY$，求：(1) Z 的数学期望与方差；(2) Z 的分布函数.

解： (1) $E(X)=1, \mathrm{Var}(X)=1/3, E(X^2)=4/3; E(Y)=1, \mathrm{Var}(Y)=1/2, E(Y^2)=3/2$，

所以 $E(Z)= E(X)E(Y)=1$, $\mathrm{Var}(Z)= E(X^2) E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=1$；

(2) X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$

Y 的分布律 $P(Y=0)=1/4$, $P(Y=1)=1/2$, $P(Y=2)=1/4$.

$F_Z(z) = P(XY \le z) = P(Y=0)P(0 \le z) + P(Y=1)P(X \le z) + P(Y=2)P(2X \le z)$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{4+5z}{16}, & 0 \le z < 2, \\ \frac{12+z}{16}, & 2 \le z < 4, \\ 1, & z \ge 4. \end{cases}$$

三. (8 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ ，对 X 独立重复观察 396 次，观察值为 $X_1, \cdots, X_{396}$，记 $Y = X_1 + \cdots + X_{396}$. 试由中心极限定理，求 $P\{Y < 880\}$ 的近似值.

解：$E(X) = \int_1^3 \frac{x^2}{4} dx = \frac{13}{6}, E(X^2) = \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = 5, Var(X) = \frac{11}{36}$.

根据中心极限定理，$Y = X_1 + \ldots + X_{396} \overset{\text{近似}}{\sim} N(858, 121)$.

$P(Y \le 880) \approx \Phi(\frac{880-858}{11}) = \Phi(2) = 0.977$.

四. (12 分) 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2-xy), & 0 < x < 2, -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$.

(1) 求 $P(X+Y>1)$；(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$；

(3) 判断 X 与$|Y|$是否独立？说明理由.

解：（1） $P(X+Y>1)=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_{1-x}^1 \frac{2-xy}{8}dy=\frac{5}{12}$，

(2) Y 的边际密度函数 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^2 \frac{2-xy}{8}dx=\frac{2-y}{4}, -1<y<1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$

当 $-1<y<1$ 时， $f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{2-xy}{2(2-y)}, 0<x<2,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$；

(3) 计算得，对一切的 x,y， $P(X\le x,|Y|\le y)=P(X\le x)P(|Y|\le y)$ 成立，所以 X 与 $|Y|$ 相互独立.

其中当 $0<x<2, 0<y<1$ 时， $P(X\le x,|Y|\le y)=\int_0^x du\int_{-y}^y \frac{2-uv}{8}dv=\frac{xy}{2}$，

$P(X\le x)=\int_0^x du\int_{-1}^1 \frac{2-uv}{8}dv=\frac{x}{2}, P(|Y|\le y)=\int_0^2 du\int_{-y}^y \frac{2-uv}{8}dv=y$.

五. (10 分) 设(X,Y)服从二维正态分布， $X\sim N(2,4)$，$Y\sim N(1,9)$，X 与 Y 的相关系数为 ρ． (1) 若 $\rho=0$，求 $P(2X>Y-2)$，问 a 取何值时，$aX+Y$ 与 $X-2Y$ 独立？(2) 若 $\rho=0.5$，求 $2X-Y$ 的概率密度.

解： (X, Y)服从正态分布，且 $X\sim N(2, 4)$，$Y\sim N(1, 9)$，

(1) $\rho=0$，X 与 Y 相互独立，所以 $2X-Y+2\sim N(5, 25)$,

$P(2X>Y-2)=P(2X-Y+2>0)=\Phi(1)=0.841$，

$aX+Y$ 与 $X-2Y$ 独立的充要条件是 $aX+Y$ 与 $X-2Y$ 不相关，即 $\mathrm{Cov}(aX+Y, X-2Y)=4a-18=0$,得 $a=9/2$；

(2) $\rho=0.5$，$E(X)=3$, $\mathrm{Var}(2X-Y)=4\times4+9-4\times3=13$, $2X-Y\sim N(3,13)$,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{26\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{26}}, -\infty<x<\infty$$

六.(10 分) 设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=(1-\theta)^2$， $P(X=1)=2\theta(1-\theta)$， $P(X=2)=\frac{2}{3}\theta^2$， $P(X=3)=\frac{1}{3}\theta^2$，未知参数 0<$\theta$<1, 从总体中抽取容量为 25 的简单随机样本，观测到“0”, “1”, “2”, “3”出现的次数分别为 3，13，7，2，分别求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解: 矩估计：$\mu_1=E(X)=\frac{\theta^2}{3}+2\theta$，$\frac{1}{3}\hat\theta^2+2\hat\theta=\bar X$，$\bar x=\frac{33}{25}$，解得矩估计值为 $\hat\theta=0.6$.

最大似然估计：似然函数 $L(\theta)=[(1-\theta)^2]^3[2\theta(1-\theta)]^{13}[\frac{2}{3}\theta^2]^7[\frac{1}{3}\theta^2]^2=c\theta^{31}(1-\theta)^{19}$

$\ln L(\theta)=\ln c+31\cdot\ln\theta+19\ln(1-\theta),\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{31}{\theta}-\dfrac{19}{1-\theta}=0.\Rightarrow\hat{\theta}=0.62$

七.(10 分)设总体 X 的概率密度 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2},0<x\le\theta,\\ 0,\quad 其他.\end{cases}$，未知参数 $\theta>0$.

$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，$\bar{X}$ 是样本均值. (1) 判断 $\dfrac{9}{4}\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，说明理由；(2) 判断 $\dfrac{9}{4}\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的相合(一致)估计量，说明理由.

解：(1) $E(\bar{X})=E(X)=\int_0^\theta\dfrac{2x^2}{\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\theta,\quad Var(\bar{X})>0$，

$E(\dfrac{9}{4}\bar{X}^2)=\dfrac{9}{4}\{Var(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2\}=\dfrac{9}{4}Var(\bar{X})+\theta^2>\theta^2$，

即 $\dfrac{9}{4}\bar{X}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量。

(2) 根据辛钦大数定律，当 $n\to+\infty$ 时，$\bar{X}\xrightarrow{P}E(X)=\dfrac{2}{3}\theta$，由依概率收敛的性质，当 $n\to+\infty$ 时，$\dfrac{9}{4}\bar{X}^2\xrightarrow{P}\dfrac{9}{4}(\dfrac{2}{3}\theta)^2=\theta^2$，所以 $\dfrac{9}{4}\bar{X}^2$ 是 θ^2 的相合(一致)估计量.

八. (10 分) 设一工厂生产的某种型号无缝钢管的内径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从某日生产的钢管中随机抽出 9 根，测得内径(单位：cm)的样本均值为 53.84，样本标准差为 1.32. (1) 在显著水平 0.05 下检验 $H_0:\sigma^2=1, H_1:\sigma^2>1$. (2) 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间. (保留两位小数)

解：(1) 检验 $H_0:\sigma^2=1, H_1:\sigma^2>1$，检验统计量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，拒绝域为

$\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(8)$，

计算得 $\chi^2=13.9392$，而 $\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，未落在拒绝域内，所以不拒绝原假设.

(2) μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{9}}t_{0.025}(8))$，计算得 (52.83, 54.85)。

期末考试模拟题（八）答案 2022.6

一、A　　C　　B　　B　　D

二、1. 0.3　　2. $F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-F_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)$　　3. $1-0.01(1+2ln10)$ 或 0.9439

4. $\frac{2}{25}$　　5. $F(1,8)$

三、11. 设A表示“按照检验标准任取一箱产品能够通过检验”，B_i表示“箱中有i件次品”，

$i=0,1,2,3,4$. 则$P(A|B_i)=\frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}}, i=0,1,2,3,4$.

(1) 由全概率公式， $P(\mathrm{A})=\sum_{\mathrm{i}=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)\approx 0.814$;

(2) 由贝叶斯公式，$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(\mathrm{A})}\approx 0.397$.

12. （1）$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)=\iint_{2x-y\le z}f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ z-\frac{z^2}{4}, & 0<z<2;\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

（2）$P(Y\le\frac{1}{2}|X\le\frac{1}{2})=\frac{P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2})}{P(X\le\frac{1}{2})}=\frac{\iint_{x\le\frac{1}{2},y\le\frac{1}{2}}f(x,y)dxdy}{\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx}=\frac{3}{4}$

（注：此小题比较简单，因为是均匀分布，可不积分直接算出答案）

13. （1）$f_{Y|X}(y|x=1)=\begin{cases}e^{-(y-1)}, & y>1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$P(Y>2|X=1)=\int_2^{+\infty}e^{-(y-1)}dy=e^{-1}$

（2）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2e^{-(x+y)}, & x>0,y>x;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$P(X+Y<2)=\int_0^1dx\int_x^{2-x}2e^{-(x+y)}dy=1-3e^{-2}$$

14. $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，假设总体的方差为$D(X)$，则$D(X_i)=D(X)$, $D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}$,

$$cov(Y,Z)=cov(X_i-\bar{X},X_j-\bar{X})=\begin{cases}\frac{n-1}{n}D(X), & i=j\\ -\frac{1}{n}D(X), & i\ne j\end{cases}$$

$D(Y)=D(Z)=\frac{n-1}{n}D(X)$ ，　$\rho=\frac{cov(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\begin{cases}1, & i=j\\ -\frac{1}{n-1}, & i\ne j\end{cases}\cdots$

15. （1）设 X_k为第k个家庭购买的车辆数, $k=1,2,\cdots,400$，则$E(X_k)=1.1, D(X_k)=0.19$.

设X为 400 个家庭购买的车辆数，则 $X=\sum_{k=1}^{400}X_k\sim\mathrm{N}(400\times1.1,400\times0.19)$ (近似)，

$P(X \geq 450) \approx 1-\Phi\left(\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400\times 0.19}}\right) = 1-\Phi(1.1471) = 0.1251.$

（2） 设Y为 400 个家庭购买一部车的家庭数，则 $Y\sim B(400,0.8)$.

$$Y\sim N(400\times 0.8, 400\times 0.8\times 0.2)\ (近似)$$

$P(X \leq 340) \approx \Phi\left(\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right) = \Phi(2.5) = 0.9938.$

16.（1）$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\cdot\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx = \theta\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = 2\theta$

令 $\bar{X} = E(X)$，所以矩估计量 $\hat{\theta}_1 = \frac{\bar{X}}{2}$,

由于 $E(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) = \frac{1}{2}E(X) = \theta$ ，所以无偏.⋯

(2) $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i}{\theta}}) = (\prod_{i=1}^{n}x_i)\theta^{-2n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$, $lnL(\theta) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right) - 2n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i$,

令 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = 0$, 得 $-\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i = 0$,解得极大似然估计量为$\hat{\theta}_2 = \frac{\bar{X}}{2}$.

17. (1)设X表示彩色显像管的寿命，由题设$X\sim N(\mu, 40^2)$, 方差已知$\sigma^2 = 40^2$，对均值 μ的估计为$\left(\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= \left(10000-2.576\times\frac{40}{\sqrt{100}}, 10000+2.576\times\frac{40}{\sqrt{100}}\right) = (9989.70, 10010.3)$

（2）$H_0: \mu \geq 10100$，$H_1: \mu < 10100$ ，（6 分） 检验统计量 $U = \frac{\bar{X}-10100}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

拒绝域为 $\{U \leq -u_\alpha\} = \{U \leq -u_{0.005}\} = \{U \leq -2.576\}$

检验统计量的样本值$u = \frac{\bar{x}-10100}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10000-10100}{40/\sqrt{100}} = -25 < -2.576$

拒绝原假设，认为生产的彩色显像管不合格.

18.（1）$P\{X_{(1)} > x，X_{(n)} \leq y\} = P(x < X_1 \leq y, x < X_2 \leq y, \cdots, x < X_n \leq y)$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(x < X_i \leq y) = \left(F(y)-F(x)\right)^n$$

（2）当$x \leq y$时, $\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$的分布函数

$$G(x，y) = P\left(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\right) = P\left(X_{(n)} \leq y\right) - P\left(\{X_{(1)} > x\} \cap \{X_{(n)} \leq y\}\right)$$
$$= P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leq y) - P\left(\{X_{(1)} > x\} \cap \{X_{(n)} \leq y\}\right)$$
$$= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_n \leq y) - P\left(\{X_{(1)} > x\} \cap \{X_{(n)} \leq y\}\right)$$
$$= F^n(y) - \left(F(y)-F(x)\right)^n$$

当$x > y$时, $P\left(\{X_{(1)} > x\} \cap \{X_{(n)} \leq y\}\right) = 0$

$$G(x，y) = P\left(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\right) = P\left(X_{(n)} \leq y\right) - P\left(\{X_{(1)} > x\} \cap \{X_{(n)} \leq y\}\right)$$
$$= P\left(X_{(n)} \leq y\right) = F^n(y)$$

所以 $G(x，y) = \begin{cases} F^n(y) - \left(F(y)-F(x)\right)^n, x \leq y; \\ F^n(y), \quad x > y. \end{cases}$

期末考试模拟题（九）答案 2023.2

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1、D　2、B　3、A　4、B　5、A　6、C　7、D　8、D　9、C　10、B

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、0.2　2、$f(y)=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)},-\infty<y<+\infty$　3、$\dfrac{1}{k!}e^{-1}$，$k=0,1,2,\cdots\cdots$

4、68　5、90

三、（12分）（1）由于X 与Y相互独立, 故Z 的分布律；

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=2p(1-p)$$

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=p^2+(1-p)^2$$

（2）$(X，Z)$的分布律

X \ Z	0	1	
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$	$1-p$
1	$p(1-p)$	p^2	p
	$2p(1-p)$	$p^2+(1-p)^2$	

当 $p=0.5$时，X与Z独立。

四、（12 分）（1）设至少要加工n件产品, 设X_i为加工第i件产品的利润，则X_i的分布为

X_i	80	60	-20
P	0.5	0.25	0.25

$E(X_i)=50$, 每天总利润的期望$E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=50n\ge 50000$，$n\ge 1000$，$n$至少为 1000.

（2）仍设至少要加工n件产品，$D(X_i)=1700$，$D(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=1700n$.由中心极限定理,

得$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-50n}{\sqrt{1700n}}\sim N(0,\ 1)$（近似）.

$$P(\sum_{i=1}^{n}X_i\ge 50000)=P(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-50n}{\sqrt{1700n}}\ge\frac{50000-50n}{\sqrt{1700n}})>0.977,$$

$\Phi\left(\dfrac{50n-50000}{\sqrt{1700n}}\right)>0.977$．查表，即 $\dfrac{50n-50000}{\sqrt{1700n}}\geq 2$，得 $n=1054$。

五、（12 分）（1）$EX=\int_{\theta}^{+\infty} x\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}(x-\theta)}dx=\lambda+\theta$，$\hat{\lambda}=\bar{X}-\theta$.

（2）似然函数 $L(\lambda,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)} & x_1,x_2,\cdots,x_n>\theta \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n>\theta$，得 θ 的最大似然估计为 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}=x_{(1)}$，$\theta=X_{(1)}$.

六、（9 分）（1）$Y\sim\chi^2(3)$，则 $\sqrt{a}X_1,\ \sqrt{b}(2X_2-X_3),\ \sqrt{c}(3X_4-2X_5-X_6)\sim N(0,\ 1)$，
故 $D\left(\sqrt{a}X_1\right)=4a=1, D\left(\sqrt{b}(2X_2-X_3)\right)=20b=1, D\left(\sqrt{c}(3X_4-2X_5-X_6)\right)=56c=1,$

由此得 $a=\dfrac{1}{4}, b=\dfrac{1}{20}, c=\dfrac{1}{56}$.

（2）$\dfrac{1}{\sqrt{12}}(X_1+X_2+X_3)\sim N(0,1),\ \dfrac{1}{8}(X_5-X_6)^2\sim\chi^2(1)$，且他们相互独立，故

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{X_1+X_2+X_3}{|X_5-X_6|}\sim t(1).$$

七、（10 分）（1）σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$。

$n=25, s=50, \alpha=0.05,\ \chi^2_{0.025}(24)=39.364,\ \chi^2_{0.975}(24)=12.401$，

方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为（1524.235，4838.32）.

（2）设 $H_0:\mu=1800, H_1:\mu>1800$

取检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-1800}{S}\sqrt{n}$，在 H_0 为真时 $T\sim t(n-1)$.

$n=25, s=50, \alpha=0.05$，及 $t_\alpha(24)=1.711$，给出拒绝域：$t\geq 1.711$．$\bar{x}=1864$，
$t=6.4\geq 1.711$．所以拒绝 H_0，认为此新种子的亩产量显著大于 1800 公斤.

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：概率论与数理统计(A卷) 课时：48 考试时间：2023 年 6 月 24 日

一、 1、C 2、B 3、D 4、A 5、D

二、1、$\dfrac{11}{21}$ 2、$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ 3、$\dfrac{20}{27}$ 4、$2\mathrm{e}^{-1}$ 5、$F(2,8)$

三、(10分) $A=\{$购买甲型号手机$\}$，$B=\{$购买乙型号手机$\}$，$C=\{$购买的是合格品$\}$，则

$P(A)=P(B)=0.5$，$P(C|A)=0.95$, $P(C|B)=0.99$.

（1） $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=0.5\cdot 0.95+0.5\cdot 0.99=0.97$. （5分）

（2） $P(\bar{C})=1-P(C)=0.03$，$P(\bar{C}|A)=0.05$，$P(A|\bar{C})=\dfrac{P(A)P(\bar{C}|A)}{P(\bar{C})}=\dfrac{0.5\cdot 0.05}{0.03}=\dfrac{5}{6}$ （10分）

四、(14 分)(1) $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，(2 分)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 2dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{（4 分）}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 2dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\text{（6 分）}$$

在$0<x<y<1$上，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以X，Y不独立.（8 分）

（2）当$0<y<1$时，$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，（11 分）

（3） $f_{X|Y}\left(x\middle|\dfrac{1}{2}\right)=\begin{cases}2, & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$， $P\left\{X>\dfrac{1}{4}\middle|Y=\dfrac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}f_{X|Y}\left(x\middle|\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}2\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.（14 分）

五、(10 分)(1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$， $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ (2 分)

$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度 $f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(yz)f_Y(y)|y|\mathrm{d}y$.(4 分)

当$z\le 0$时，$f(z)=0$；当$z>0$时，$f(z)=\int_0^{\frac{2}{z}}\dfrac{1}{2}y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}-(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-\frac{2}{z}}$. （7 分）

或 令 $Z=\dfrac{X}{Y}$， $W=Y$， 则 (Z,W) 的概率密度为

$$f_{(Z,W)}(z,w)=f_X(zw)f_Y(w)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}\right|=\frac{1}{2}e^{-w}w,\quad w>0,0\le zw\le 2 \quad （4 分）$$

$Z=\dfrac{X}{Y}$ 的边缘概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(Z,W)}(z,w)\,\mathrm{dw}=\int_0^{\frac{2}{z}}\frac{1}{2}e^{-w}w\,\mathrm{dw}=\frac{1}{2}-(\frac{1}{z}+\frac{1}{2})\mathrm{e}^{-\frac{2}{z}},\quad z>0 \quad （7 分）$$

（2） $P\{X\ge Y\}=\iint\limits_{x\ge y}f_X(x)f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-2})$. (10 分)

六、**（8 分）**设需测量 n 次，记 X_i 为第 i 次测量值，则 $E(X_i)=d$，$D(X_i)=4$. （2 分）

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=d,D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{4}{n}. \quad （3 分）$$

$$P\left\{-0.5\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-d\le 0.5\right\}=P\left\{-\frac{0.5n}{2\sqrt{n}}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-nd}{2\sqrt{n}}\le\frac{0.5n}{2\sqrt{n}}\right\}\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-1\ge 0.95 \quad （7 分）$$

$\dfrac{\sqrt{n}}{4}\ge 1.96$，解得 $n\ge 61.47$，故应测量 62 次。 （8 分）

七、**（10 分）（1）** $E(X)=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$， $\dfrac{\sqrt{\hat{\theta}}}{\sqrt{\hat{\theta}}+1}=\bar{X}$，解得 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$. （5 分）

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$， （7 分）

在 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$ 时， $\ln L(\theta)=\dfrac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$ （8分）

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0， \quad （9分）$$

得 $\theta=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^{-2}$， $\theta=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^{-2}$. （10分）

八、（**10 分**）（1）设老产品服从$N(\mu_1,\sigma^2)$，新产品服从$N(\mu_2,\sigma^2)$.

检验假设$H_0:\mu_1=\mu_2,H_1:\mu_1<\mu_2$或$H_0:\mu_1\ge\mu_2,H_1:\mu_1<\mu_2$，（1 分）

检验统计量$T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\overset{\mu_1=\mu_2}{\sim}t(n_1+n_2-2)$，$S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$，（2 分）

拒绝域为$t\le -t_\alpha(n_1+n_2-2)$，（3 分）

$n_1=8,n_2=10,s_1=60,s_2=54,\alpha=0.05$， $t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_\alpha(16)=1.7459$， $t=-2.9743$，（4 分）

落入拒绝域中，拒绝H_0，即认为新型号产品的使用寿命比老型号有显著提高。（5 分）

若$H_0:\mu_1\le\mu_2,H_1:\mu_1>\mu_2$，拒绝域为$t\ge t_\alpha(n_1+n_2-2)$，应接受$H_0$。

（2）枢轴量$T=\dfrac{\bar{Y}-\mu_2}{S_2/\sqrt{n}}\sim t(n_2-1)$，（7 分）$\mu_2$的置信度为0.95的双侧置信区间为

$\left(\bar{Y}-\dfrac{S_2}{\sqrt{n_2}}t_{\alpha/2}(n_2-1),\bar{Y}+\dfrac{S_2}{\sqrt{n_2}}t_{\alpha/2}(n_2-1)\right)$，（9 分）得置信区间（1051.37，1128.63）.（10 分）

九、（**8 分**）（1）$E(T)=C\cdot\sum_{i=1}^{n-1}E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2=(n-1)C\cdot E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2$ （2 分）

而 $E\left(X_{i+1}-X_i\right)^2=D\left(X_{i+1}-X_i\right)+\left[E\left(X_{i+1}-X_i\right)\right]^2=2\sigma^2$ （3 分）

由$(n-1)C\cdot 2\sigma^2=\sigma^2$，解得$C=\dfrac{1}{2(n-1)}$. （4 分）

（2）$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以$E(S^2)=\sigma^2$，$D(S^2)=\dfrac{2}{n-1}\sigma^4$，由切比雪夫大不等式，

$0\le P\left\{\left|S^2-\sigma^2\right|\ge\varepsilon^2\right\}\le\dfrac{D(S^2)}{\varepsilon^2}=\dfrac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}$，故$S^2$是$\sigma^2$的相合估计量。（8 分）

或，$\lim\limits_{n\to\infty}E(S^2-\sigma^2)^2=\lim\limits_{n\to\infty}DS^2=0$，所以$S^2$是$\sigma^2$的均方相合估计量，也是相合估计量。

或，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\dfrac{n}{n-1}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\bar{X}^2\right)$

$\xrightarrow{P}1\cdot(\mu^2+\sigma^2-\mu^2)=\sigma^2$。