第10章
算法优化策略

动态规划加速原理

货物储运问题

在一个铁路沿线顺序存放着n堆装满货物的集装箱。货物储运公司要将集装箱有次序地集中成一堆。规定每次只能选相邻的2堆集装箱合并成新的一堆，所需的运输费用与新的一堆中集装箱数成正比。 给定各堆的集装箱数，试制定一个运输方案，使总运输费用最少。

货物储运问题

设合并a[i:j]，1≤i≤j≤n，所需的最少费用为m[i,j]，则原问题的最优值为m[1，n]。由最优子结构性质可知，

$$m[i,j]=\begin{cases}0 & i=j\\ \min\limits_{i<k\le j}\{m[i,k-1]+m[k,j]+\sum_{t=i}^{j}a[t]\} & i<j\end{cases}$$

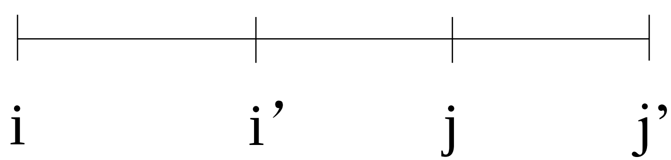
根据递归式，按通常方法可设计计算m(i,j)的$O(n^3)$动态规划算法。

四边形不等式

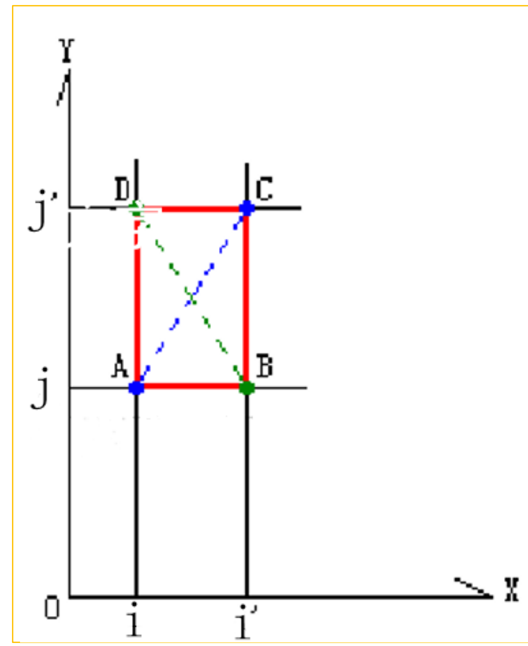
货物储运问题的动态规划递归式是下面更一般的递归计算式的特殊情形

$$m[i,j]=\begin{cases}0 & i=j\\ w(i,j)+\min\limits_{i<k\le j}\{m[i,k-1]+m[k,j]\} & i<j\end{cases}$$

对于 i ≤ i’≤ j ≤ j’,



当函数w(i,j)满足

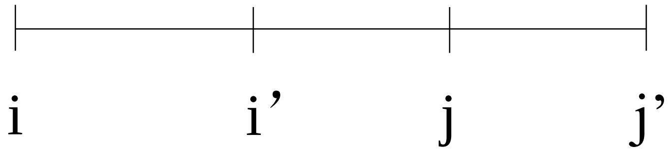


$$w(i,j)+w(i',j')\le w(i',j)+w(i,j')$$

时称w满足四边形不等式。

四边形不等式

对于 $i \le i' \le j \le j'$,

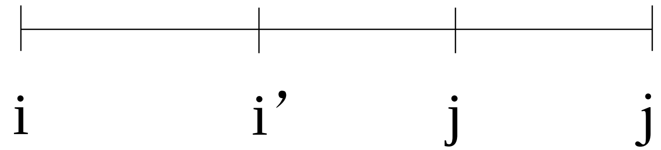


当函数w(i,j)满足 $w(i',j) \le w(i,j')$ 时，称W关于区间包含关系单调

对于满足四边形不等式的单调函数w，可推知由递归式定义的函数m(i,j)也满足四边形不等式，即

$$m(i,j) + m(i',j') \le m(i',j) + m(i,j')$$

四边形不等式



对于满足四边形不等式的单调函数$w(i,j)$，证明$m(i,j)$也满足四边形不等式。

证明：对四边形不等式中的长度$l=j'-i$用数学归纳法。

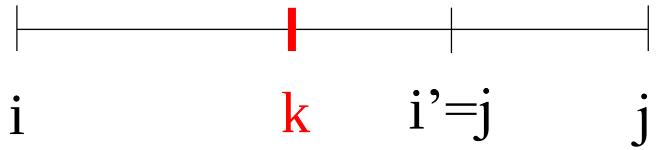
当$i=i'$时，$m(i, j)+m(i', j') = m(i', j)+m(i, j')$

同理$j=j'$时，也成立。从而可知，$l\le 1$时，$i=i'$或$j=j'$，m满足。

下面分两种情形进行证明:

1. $i<i' =j<j'$
2. $i<i' <j<j'$

四边形不等式



1. $i<i'=j<j'$

$m(i', j) = 0$,从而 $m(i, j)+m(i', j') \le m(i', j)+m(i, j')$简化为

$m(i, j)+m(j, j') \le m(i, j')$ **式(a)**

$i<i'=j<j'$时，$j'-i\ge 2$ 。假设$l<j'-i$时，(a)成立。

设$k=\max\{t|m(i,j')=m(i,t-1)+m(t,j')+w(i,j')\}$，再分$k\le j$和$k>j$两种情形。

1） $k\le j$，由k定义知$m(i,j')=w(i,j')+m(i,k-1)+m(k,j')$，从而有

$m(i,j)+m(j,j') \le w(i,j)+m(i,k-1)+m(k,j)+m(j,j')$ 由m(i,j)定义

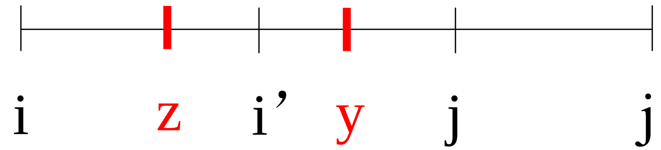
$\le w(i,j') + m(i,k-1)+m(k,j)+m(j,j')$ 绿色由w单调性

$\le w(i,j') + m(i,k-1)+m(k,j')$ 紫色由假设$l<j'-i$时(a)成立

$= m(i,j')$ 由k定义

2）$k>j$时，同理可证。

四边形不等式



2. $i<i'<j<j'$

$m(i,j)+m(i',j')\le m(i',j)+m(i,j')$ **式(b)**。已证$j'-i<3$时，(b)式成立。

$i<i'<j<j'$时，$j'-i\ge 3$，假设$l<j'-i$时，(b)成立。

设$y=\max\{t|m(i',j)=m(i',t-1)+m(t,j)+w(i',j)\}$

$z=\max\{t|m(i,j')=m(i,t-1)+m(t,j')+w(i,j')\}$

再分$z\le y$和$z>y$两种情形。

1） $z\le y$ 时，$z\le y\le j$且$i<z$。从而有

$m(i,j)+m(i',j')$

$\le w(i,j)+m(i,z-1)+m(z,j)+w(i',j')+m(i',y-1)+m(y,j')$ 由m定义

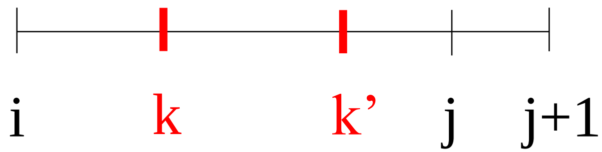
$\le w(i,j')+w(i',j)+m(i',y-1)+m(i,z-1)+m(z,j)+m(y,j')$ 由w四边形不等式

$\le \underline{w(i,j')+}w(i',j)+m(i',y-1)+\underline{m(i,z-1)}+m(y,j)+\underline{m(z,j')}$ 由假设$l<j'-i$时(b)成立

$=\underline{m(i,j')}+m(i',j)$ 由y、z定义

2） $z>y$时，同理可证。

四边形不等式



综上，m(i,j)满足四边形不等式 $m(i,j)+m(i',j')\le m(i',j)+m(i,j')$。

定义 $s(i,j)=\max\{k \mid m(i,j)=m(i,k-1)+m(k,j)+w(i,j)\}$

由m(i,j)的四边形不等式可推出s(i,j)的单调性，即

$$s(i,j)\le s(i,j+1)\le s(i+1,j+1),\ i\le j$$

证明：当i=j时，$s(i,i)\le s(i,i+1)\le s(i+1,i+1)$显然成立。

当i<j时，记(i,j)在k断开时的费用为 $m_k(i,j) = m(i,k-1)+m(k,j)+w(i,j)$。

设k’是(i,j)的最优断开点，则对 $i<k\le k'\le j$，有 $m_{k'}(i,j)\le m_k(i,j)$。

m(k,j+1)满足四边形不等式，有

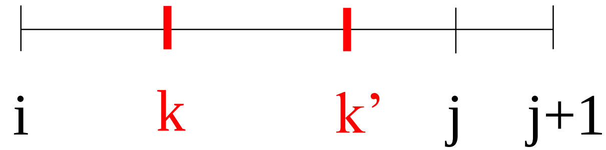
$$m(k,j)+m(k',j+1)\leqslant m(k',j)+m(k,j+1)$$ 在左右两侧添加相同的彩色项

$$\Rightarrow\quad w(i,j)+m(i,k-1)+m(k,j)+w(i,j+1)+m(i,k'-1)+m(k',j+1)$$

$$\leqslant w(i,j)+m(i,k'-1)+m(k',j)+w(i,j+1)+m(i,k-1)+m(k,j+1)$$

$$\Rightarrow\quad m_k(i,j)+m_{k'}(i,j+1)\leqslant m_{k'}(i,j)+m_k(i,j+1)$$

四边形不等式



对 $i<k\leq k'\leq j$，有 $m_{k'}(i,j)\leq m_k(i,j)$。

之前已证 $m_k(i,j) + m_{k'}(i,j+1) \leq m_{k'}(i,j) + m_k(i,j+1)$

$$\Rightarrow \quad m_{k'}(i,j+1) - m_k(i,j+1) \leq m_{k'}(i,j) - m_k(i,j) \leq 0$$

得 $m_{k'}(i,j+1) \leq m_k(i,j+1)$

因此，(i，j+1)的最优断开点必在k’的右侧，即 $s(i,j)\leq s(i,j+1)$。

同理可证 $s(i,j+1)\leq s(i+1,j+1)$。

综上，当w是满足四边形不等式的单调函数时s(i,j)单调，从而有

$$\min_{i<k\leq j}\{m(i,k-1)+m(k,j)\} = \min_{s(i,j-1)\leq k\leq s(i+1,j)}\{m(i,k-1)+m(k,j)\}$$

改进后的算法复杂度为 $O(n^2)$。