第 5 章习题解答

1. 设随机变量 X 的分布未知，但已知 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，试用切比雪夫不等式估计 X 落在区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率下界。

解 由切比雪夫不等式，

$$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=P\{|X-\mu|<3\sigma\}\geq 1-\frac{D(X)}{9\sigma^2}=\frac{8}{9}=0.8889.$$

2. 设随机变量 X 的分布未知，但已知其标准差为 0.3，试用切比雪夫不等式求满足 $P\{E(X)-\varepsilon<X<E(X)+\varepsilon\}\geq 0.9$ 的最小 ε.

解 由切比雪夫不等式，

$$P\{E(X)-\varepsilon<X<E(X)+\varepsilon\}=P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\geq 0.9,$$

解得 $\varepsilon^2\geq\dfrac{0.3^2}{0.1}=0.9$，即 $\varepsilon\geq 0.9487$，故满足已知不等式的最小 ε 为 0.9487.

3. 设随机变量 X 服从参数为 4 的泊松分布，$Y\sim N(4,4)$，且 $\rho(X,Y)=0.5$，试根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X-Y|\leq 4\}$.

解 $X\sim P(4)$，因此 $E(X)=D(X)=4$。$Y\sim N(4,4)$，因此 $E(Y)=D(Y)=4$。

而 $E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0$，

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=4+4-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=4,$$

由切比雪夫不等式，$P\{|X-Y|\leq 4\}\geq 1-\dfrac{D(X-Y)}{4^2}=1-\dfrac{1}{4}=0.75.$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一列相互独立的随机变量，对每一个固定的 n，X_n 的概率分布律为

X_n	-2^n	0	2^n
p	$2^{-(2n+1)}$	$1-2^{-2n}$	$2^{-(2n+1)}$

试证：对任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right|<\varepsilon\right\}=1$.

证 由 X_n 的分布律可得 $E(X_n)=0,\ D(X_n)=1$，而 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，因此

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=0,\ D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n}<1.$$

故由切比雪夫大数定律可得 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right|<\varepsilon\right\}=1$。

5. 证明泊松大数定律：如果事件 A 在第 k 次试验中发生的概率等于 $p_k(k=1,2,\cdots,n,\cdots)$ 且各次试验是独立完成的，m 表示在 n 次试验中事件 A 发生的次数，则对任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right|<\varepsilon\right\}=1.$

证 对 $k=1,2,\cdots$，令 $X_k=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{次试验事件}A\text{发生}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则 $P\{X_k=1\}=p_k$，

$P\{X_k=0\}=1-p_k$，$E(X_k)=p_k$，$D(X_k)=p_k(1-p_k)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立。

$m=\sum_{k=1}^{n}X_k$，$E(m)=E(\sum_{k=1}^{n}X_k)=\sum_{k=1}^{n}p_k$，$D(m)=\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k)$，$E(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k$，

$D(\frac{m}{n})=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k)$。

由于 $0<p_k<1$，因此 $D(X_k)=p_k(1-p_k)\le\frac{1}{4}$，故由切比雪夫大数定律，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right|<\varepsilon\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right|<\varepsilon\right\}=1。$$

6. 随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，记 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$，试证：$(p)\ \lim\limits_{n\to\infty}\bar{X}=\mu$。

证 对 $k=1,2,\cdots$，$X_k\sim N(\mu,\sigma^2)$，$E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，所以 $E(\bar{X})=\mu,\ D(\bar{X})=\frac{1}{n}\sigma^2$. 由切比雪夫不等式，对任意正数 ε，有

$$0\le P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|\ge\varepsilon\right\}=0$，即 $(p)\ \lim\limits_{n\to\infty}\bar{X}=\mu$。

7. 设 X 是一随机变量，$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是一列随机变量，试证明：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$，则 $(p)\ \lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$。

证 由马尔可夫不等式，取 $r=2$，则

$$0 \le P\left\{ \left| X_n - X \right| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{E(X_n - X)^2}{\varepsilon^2},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{ \left| X_n - X \right| \ge \varepsilon \right\} = 0$，即 $(p)\ \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

8. 设 $X_k\,(k=1,2,\cdots,80)$ 是相互独立的随机变量且都服从参数为 $\lambda=0.03$ 的泊松分布，记 $Z=\sum\limits_{k=1}^{80} X_k$，试用中心极限定理近似计算 $P\{Z\ge 3\}$.

解 对 $k=1,2,\cdots,80$，$X_k \sim P(0.03)$，因此，$E(X_k)=0.03$，$D(X_k)=0.03$. $E(Z)=E\left(\sum\limits_{k=1}^{80} X_k\right)=2.4$，$D(Z)=2.4$. 由中心极限定理可得

$$P\{Z\ge 3\}=P\left\{\frac{Z-2.4}{\sqrt{2.4}} \ge \frac{3-2.4}{\sqrt{2.4}}\right\} \approx 1-\varPhi\left(\frac{3-2.4}{\sqrt{2.4}}\right)=1-\varPhi(0.39)=1-0.6517=0.3483$$

9. 某射手打靶，得 10 分的概率为 0.5，得 9 分的概率为 0.1，得 7 分的概率为 0.05，得 6 分的概率为 0.05. 现独立地射击 100 次，求总得分在 900 分至 930 分之间的概率.

解 记 X_k 为第 k 次打靶的得分，$k=1,2,\cdots,80$，则 $X_k \sim \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$，

$E(X_k)=9.15$，$D(X_k)=1.2275$. 记 $Y=\sum\limits_{k=1}^{100} X_k$，则 $E(Y)=915$，$D(Y)=122.75$，由中心极限定理可得

$$\begin{aligned} P\{900\le Y\le 930\} &= P\left\{\frac{900-915}{\sqrt{122.75}} \le \frac{Y-915}{\sqrt{122.75}} \le \frac{930-915}{\sqrt{122.75}}\right\} \\ &\approx \varPhi\left(\frac{15}{\sqrt{122.75}}\right)-\varPhi\left(-\frac{15}{\sqrt{122.75}}\right) \\ &= 2\varPhi(1.35)-1=2*0.9115-1=0.823 \end{aligned}$$

10. 某种电子元件的使用寿命（单位：h）服从指数分布，其平均寿命为 150h. 在一台昼夜连续工作的设备中使用了一种这种电子元件，使用过程中，当这种元件损坏时，立即换一个新的，问一年（365 天）中最少要预备多少件这种元件，才能保证够用的概率不小于 0.95.

解 设需要预备 n 件这种元件，记 X_k 为第 k 个元件的寿命，$k=1,2,\cdots,n$，则 $X_k \sim Exp(\lambda)$，

则 $E(X_k)=\dfrac{1}{\lambda}=150$，故 $\lambda=\dfrac{1}{150}$，$D(X_k)=\dfrac{1}{\lambda^2}=150^2$. 令 $Y=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$，则 $E(Y)=150n$，

$D(Y)=150^2 n$. 由中心极限定理，

$$P\{Y \geq 365 \times 12\} = P\left\{\frac{Y-150n}{\sqrt{150^2 n}} \geq \frac{365 \times 24 - 150n}{\sqrt{150^2 n}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{8760-150n}{\sqrt{150^2 n}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{150n-8760}{\sqrt{150^2 n}}\right) \geq 0.95$$

因此$\frac{150n-8760}{\sqrt{150^2 n}} \geq 1.65$，即$150n - 1.65 \times 150\sqrt{n} - 8760 \geq 0$，解得

$n \geq \left(\frac{247.5 + \sqrt{247.5^2 + 4 \times 150 \times 8760}}{2 \times 150}\right) \approx 72.4438$，故至少要预备 73 件这种元件.

11. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是独立同分布的随机变量，已知数学期望为 μ，方差为$\sigma^2 > 0$，但分布函数未知，求 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的渐近分布（即当n充分大时，$\bar{X}$ 的近似表达式）.

解 当n充分大时，$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 近似服从正态分布 $N(n\mu, n\sigma^2)$，而 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 期望 $E(\bar{X}) = \mu$，方差$D(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sigma^2$，故 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ 的渐近分布为$N(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2)$.

12. 在一家人寿保险公司里有 5000 个同一年龄的人参加人寿保险，每人每年付 12 年保险费，在一年内每个人死亡的概率为 0.0001，死亡时，其家属可从保险公司领取 2000 元。 问:
（1）保险公司一年获利不少于 20000 元的概率时多少？
（2）保险公司亏本的概率是多少？

解 用 X 表示投保的 5000 人中每年的死亡人数，则 $X \sim B(5000, 0.0001)$，且 $E(X) = 5000 \cdot 0.001 = 5, D(X) = 5000 \cdot 0.001 \cdot 0.999 = 4.995$. 用$Y$表示保险公司获利，则 $Y = 12 \times 5000 - 2000X$.

（1）$Y \geq 20000$等价于$0 \leq X \leq 20$，故

$$P\{20000 \leq Y \leq 60000\} = P\{0 \leq X \leq 20\} = P\left\{\frac{0-5}{\sqrt{4.995}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{4.995}} \leq \frac{20-5}{\sqrt{4.995}}\right\}$$

$$\approx \Phi(6.71) - \Phi(-2.24) = 0.9874$$

（2）$P\{Y < 0\} = P\{X > 30\} = P\left\{\frac{X-5}{\sqrt{4.995}} > \frac{30-5}{\sqrt{4.995}}\right\} \approx 1 - \Phi(11.19) = 0$

故保险公司亏本的概率为 0.

13. 某单位设置有一电话总机，共有 200 架电话分机. 设每个电话分机有 5%的时间要使用外线通话，假定每个分机是否使用外线是相互独立的，问总机要备多少条外线才能以 90%的概率保证每个分机要使用外线时不必等候？

解 设需要准备 n 条外线. X 表示 200 架分机中需要外线的个数，则 $X \sim B(200, 0.05)$

$E(X)=10, D(X)=9.5$.

$$P\{0 \le X \le n\} = P\left\{\frac{0-10}{\sqrt{9.5}} \le \frac{X-10}{\sqrt{9.5}} \le \frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{\sqrt{9.5}}\right) = 0.9,$$

因此 $\frac{n-10}{\sqrt{9.5}} = 1.33$，解得 $n = 14.099$，故大约需要准备 14 条外线才能满足要求。

14. 独立重复地抛掷一枚均匀硬币 10000 次，每次观察出现正面还是反面，用中心极限定理估算：在 99%的把握之下，能够保证正面出现的频率与概率的误差的绝对值控制在什么范围之内？

解 用 X 表示抛掷一枚均匀硬币 10000 次正面出现的次数,则 $X \sim B(10000, 0.5)$，

$E(X)=5000, D(X)=2500$.正面出现的频率为 $\frac{X}{10000}$，要求 δ 使 $P\left\{\left|\frac{X}{10000}-0.5\right| < \delta\right\} = 0.99$,

而 $P\left\{\left|\frac{X}{10000}-0.5\right| < \delta\right\} = P\left\{\frac{|X-5000|}{\sqrt{2500}} < \frac{10000\delta}{\sqrt{2500}}\right\} \approx \Phi(200\delta) - \Phi(-200\delta) = 2\Phi(200\delta) - 1$,

因此，$\Phi(200\delta) = 0.995$，$200\delta = 2.58$，解得 $\delta = 0.0129$.