AIF_線形代数_授業前課題

ベクトルの概要についてまとめよ

データを複数個収めることができるように、要素を1列に並べたものをベクトルという。

ベクトルの表記方法には、1文字で表す方法と、具体的な成分(要素)を示す方法とがある。成分を具体的に示す表記方法には、次の式のように、横に成分を並べるものと、縦に並べるものがある。前者を行ベクトル(横ベクトル)、後者を列ベクトル(縦ベクトル)という。

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ベクトルの足し算、引き算は、対応する成分同士で足し算、引き算を行う。ベクトルの成分の数は次元といい、次元の異なるベクトルの足し算、引き算は計算できない。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

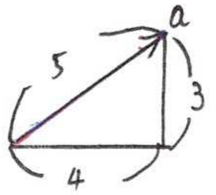
ベクトルには、足し算、引き算以外にスカラー倍という計算がある。スカラーとは、ベクトルに対して、定数、変数などの1次元の値のことを指す。スカラー倍とは、全ての成分に対し同じ値を掛ける操作のことをいう。

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times1 \\ 2\times2 \\ 2\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

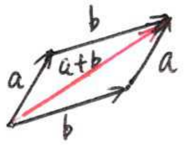
ベクトルとベクトルの内積の計算では、ベクトルの対応する成分同士を掛け算し、それらすべての和をとる。ベクトルとベクトルの内積は数(スカラー)になり、異なる次元のベクトル同士では計算できない。

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ のとき、} \langle a, b \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

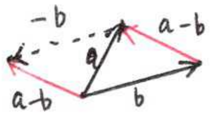
ベクトルを図示すると、分かりやすくなる。ここで、ベクトル $a=(4,3)$ と「右に4, 上に3動くこと」を対応づける。



左の図を見て分かるように、右斜め上に「5」動くという、向きと距離の2つの要素を表していることが分かる。
図中の矢印のように、向きと距離を表す矢印を有向線分という。



次に足し算について考える。左の図の左上の矢印2つが表すように、$a=(1,2)$ 動いた後、さらに $b=(3,1)$ だけ動くと、合計 $a+b=(4,3)$ 動いたことになる。あるいは、図中の a,b が作る平行四辺形の対角線が $a+b$ であるという見方もできる。



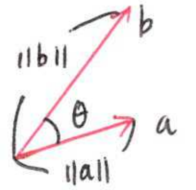
次に引き算について考えてみる。左側の三角形が表すように、$a=(1,2)$ 動いた後、さらに $-b=(-3,-1)$ だけ動くと、合計 $a-b=(-2,1)$ 動いたことになる。あるいは a,b の始点を一致させて、b の先端から a の先端に引いた矢印が $a-b$ であるという見方もできる。

・2つのベクトル a,b が直交する、つまり、成す角が $90°$ であることの定義は内積 $\langle a,b\rangle$ が 0 になることである。内積の定義と $\cos 90°=0$ であることから、$\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cos 90°=0$ と確認することができる。

[ここで、内積の定義としては、ベクトル a,b の成す角が θ のとき、

$$\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cos\theta$$

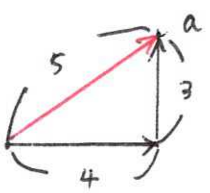
角 θ とは、2つのベクトル a,b の始点を一致させたときにできる角度のことをいう。
$\|a\|$ はベクトル a の長さ(ユークリッド距離)を表している。



(ベクトル a,b と成す角 θ)]

定義としては、　ベクトル a,b が直交する $\Longleftrightarrow \langle a,b\rangle=0$

・ベクトルは矢印で考えて図示し、向きと距離を考えたが、このようにベクトルはその向きと移動距離(ノルム)が重要である。このノルムを、成分の値からどのように求められるか考える。



左図のようにベクトル $a=(4,3)$ と「右に4,上に3動くこと」を対応づけた。右に4,上に3動くと合計7動くことになる。
これは、3次元以上でも同様に求めることができる。
このノルムの求め方をL1ノルムという。

《定義》 a のL1ノルム $=\|a\|_1=|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

一方で、スタートからゴールまでまっすぐ動く方法もある。

ベクトル $a=(4,3)$のとき、直線距離は、三平方の定理より

$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ で求められる。3次元以上でも同様に求められる。

このノルムの求め方をL2ノルムといいユークリッド距離と同じである。

《定義》 aのL2ノルム$=\|a\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

aのL2ノルムは内積を用いて、$\|a\|_2=\sqrt{\langle a,a\rangle}$ とも表される。

また、単位ベクトルとは長さ(ノルム)が1のベクトルのことである。2つのベクトルa, eがあって、eが単位ベクトル($|e|=1$)であるならば、2つのベクトルの成す角をθとおけば、$a\cdot e=|a|\cos\theta$となって、aのe方向の成分を取り出すことができる。ベクトルを分解してある特定方向の成分だけを調べるのに、単位ベクトルを用いれば内積の代数的計算に結びつけることができる。

次に、与えられた正方行列Aに対して、次の式(1)を満たすような列ベクトル$x(\neq 0)$が存在するとき、λを行列Aの固有値、xを固有ベクトルという。またEは単位行列を指す。

(右下がりの対角線上成分のみ1でその他が0であるような正方行列を単位行列 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$といい、どんな行列・ベクトルに掛けても元の行列・ベクトルから変わらないという性質がある。)

$$Ax=\lambda Ex \quad \cdots(1)$$

この式を変形すると

$$(A-\lambda E)x=0$$

(割り算の計算をするとき、割る数の逆数を用いて、掛けの計算に問題を置きかえることができる。この逆数の考え方を行列に広げたものが「逆行列」である。

《定義》 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (単位行列))

仮に$(A-\lambda E)$が逆行列$(A-\lambda E)^{-1}$を持ったとすると

$x=(A-\lambda E)^{-1}0=0$ となり、この連立方程式は自明な解$x=0$しか持たなくなる。つまり、固有ベクトル$x(\neq 0)$が存在しなくなる。したがって固有ベクトルを持つ条件は、$(A-\lambda E)$が逆行列$(A-\lambda E)^{-1}$を持たないことである。

行列の概要についてまとめる

縦横に要素を長方形に並べたものを行列という。これは同じ次元のベクトルが並べられたもの、とみることもできる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \text{1列目} & \text{2列目} & \text{3列目} & \text{4列目} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{1行目} \\ \text{2行目} \\ \text{3行目} \end{array} &
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

（3×4行列
行列の表し方）

3行2列目の成分

ベクトルの足し算、引き算で対応する成分ごとに足し引きを行ったのと同様に、行列も対応する成分ごとに足し算・引き算をする。つまり行列の和、行列の差は同じ成分同士で足し引きする。

また、$1 \times n$ 型の行列（n 次元行ベクトル）と $n \times 1$ 型（n 次元列ベクトル）の行列の次のように表される。

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ に対して、}$$

$$ab = \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$