AIT_線形代数_授業前課題

ベクトルの概要についてまとめよ

データを複数個収めることができるように、要素を1列に並べたものをベクトルという。

ベクトルの表記方法には、1文字で表す方法と、具体的な成分(要素)を示す方法とがある。成分を具体的に示す表記方法には、次の式のように、横に成分を並べるものと、縦に並べるものがある。前者を行ベクトル(横ベクトル)、後者を列ベクトル(縦ベクトル)という。

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ベクトルの足し算、引き算は、対応する成分同士で足し算、引き算を行う。ベクトルの成分の数は次元といい、次元の異なるベクトルの足し算、引き算は計算できない。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

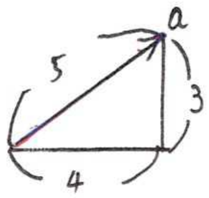
ベクトルには、足し算、引き算以外にスカラー倍という計算がある。スカラーとは、ベクトルに対して、定数、変数などの1次元の値のことを指す。スカラー倍とは、全ての成分に対し同じ値を掛ける操作のことをいう。

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 \\ 2\times 2 \\ 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

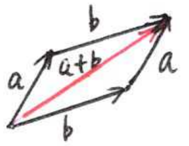
ベクトルとベクトルの内積の計算では、ベクトルの対応する成分同士を掛け算し、それらすべての和をとる。ベクトルとベクトルの内積は数(スカラー)になり、異なる次元のベクトル同士では計算できない。

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{のとき、} \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

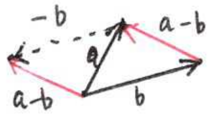
ベクトルを図示すると、分かりやすくなる。ここで、ベクトル $a = (4, 3)$ と「右に4, 上に3動くこと」を対応づける。



左の図を見て分かるように、右斜め上に「5」動くという、向きと距離の2つの要素を表していることが分かる。
図中の矢印のように、向きと距離を表す矢印を有向線分という。



次に足し算について考える。左の図の左上の矢印2つが表すように、$a=(1,2)$ 動いた後、さらに $b=(3,1)$ だけ動くと、合計 $a+b=(4,3)$ 動いたことになる。あるいは、図中の a,b が作る平行四辺形の対角線が $a+b$ であるという見方もできる。



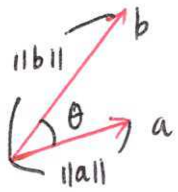
次に引き算について考えてみる。左側の三角形が表すように、$a=(1,2)$ 動いた後、さらに $-b=(-3,-1)$ だけ動くと、合計 $a-b=(-2,1)$ 動いたことになる。あるいは a,b の始点を一致させて、b の先端から a の先端に引いた矢印が $a-b$ であるという見方もできる。

・2つのベクトル a,b が直交する、つまり、成す角が90°であることの定義は内積 $\langle a,b\rangle$ が0になることである。内積の定義と $\cos 90°=0$ であることから、
$\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cos 90°=0$ と確認することができる。

[ここで、内積の定義としては、ベクトル a,b の成す角が θ のとき、

$$\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cos\theta$$

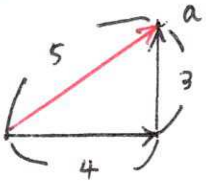
角 θ とは、2つのベクトル a,b の始点を一致させたときにできる角度のことをいう。
$\|a\|$ はベクトル a の長さ(ユークリッド距離)を表している。



(ベクトル a,b と成す角 θ)]

定義としては、 ベクトル a,b が直交する $\Longleftrightarrow \langle a,b\rangle=0$

・ベクトルは矢印で考えて図示し、向きと距離を考えたが、このようにベクトルはその向きと移動距離(ノルム)が重要である。このノルムを、成分の値からどのように求められるか考える。



左図のようにベクトル $a=(4,3)$ と「右に4,上に3動くこと」を対応づけた。右に4,上に3動くと合計7動くことになる。
これは、3次元以上でも同様に求めることができる。
このノルムの求め方をL1ノルムという。

《定義》 a のL1ノルム $=\|a\|_1=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

一方で、スタートからゴールまでまっすぐ動く方法もある。

ベクトル $a=(4,3)$ のとき、直線距離は、三平方の定理より

$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ で求められる。3次元以上でも同様に求められる。

このノルムの求め方をL2ノルムといいユークリッド距離と同じである。

《定義》 a のL2ノルム $=\|a\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

a のL2ノルムは内積を用いて、$\|a\|_2=\sqrt{\langle a,a\rangle}$ とも表される。

また、単位ベクトルとは長さ(ノルム)が1のベクトルのことである。2つのベクトル a, e があって、e が単位ベクトル($|e|=1$)であるならば、2つのベクトルの成す角を θ とおけば、$a\cdot e=|a|\cos\theta$ となって、a の e 方向の成分を取り出すことができる。ベクトルを分解してある特定方向の成分だけを調べるのに、単位ベクトルを用いれば内積の代数的計算に結びつけることができる。

次に、与えられた正方行列 A に対して、次の式(1)を満たすような列ベクトル $x(\neq 0)$ が存在するとき、λ を行列 A の固有値、x を固有ベクトルという。また E は単位行列を指す。

（右下がりの対角線上成分のみ1でその他が0であるような正方行列を単位行列 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ といい、どんな行列・ベクトルに掛けても元の行列・ベクトルから変化しないという性質がある。）

$$Ax=\lambda Ex \quad \cdots(1)$$

この式を変形すると

$$(A-\lambda E)x=0$$

（割り算の計算をするとき、割る数の逆数を用いて、掛けの計算に問題を置きかえることができる。この逆数の考え方を行列に広げたものが「逆行列」である。

《定義》 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (単位行列)）

仮に $(A-\lambda E)$ が逆行列 $(A-\lambda E)^{-1}$ を持ったとすると

$x=(A-\lambda E)^{-1}0=0$ となり、この連立方程式は自明な解 $x=0$ しか持たなくなる。つまり、固有ベクトル $x(\neq 0)$ が存在しなくなる。したがって固有ベクトルを持つ条件は、$(A-\lambda E)$ が逆行列 $(A-\lambda E)^{-1}$ を持たないことである。

行列の概要についてまとめる

縦横に要素を長方形に並べたものを行列という。これは同じ次元のベクトルが並べられたもの、とみることもできる。

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \text{1列目} & \text{2列目} & \text{3列目} & \text{4列目} \\
\hline
\text{1行目} & 3 & 4 & 0 & 10 \\
\text{2行目} & 0 & 1 & 0 & -3 \\
\text{3行目} & -1 & 1 & 9 & 0
\end{array}
$$

（3×4行列 行列の表し方）

3行2列目の成分

ベクトルの足し算、引き算で対応する成分ごとに足し引きを行ったのと同様に、行列も対応する成分ごとに足し算・引き算をする。つまり行列の和、行列の差は同じ成分同士で足し引きする。

また、$1\times n$ 型の行列（n 次元行ベクトル）と $n\times 1$ 型（n 次元列ベクトル）の行列の次のように表される。

$$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n),\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{に対して、}$$

$$ab=\langle a,b\rangle = a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

一般に、$m\times n$ 型の行列と $n\times l$ 型の行列の積は、n 次元行ベクトルと n 次元列ベクトルの内積を $m\times l$ 個用いて、$m\times l$ 型の行列で表される。

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B=(b_1, b_2, \cdots, b_l)=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \text{に対し、}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_l)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, b_l \rangle \\ \langle a_2, b_2 \rangle & \langle a_2, b_2 \rangle & \ddots & \langle a_2, b_l \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m, b_1 \rangle & \langle a_m, b_2 \rangle & \cdots & \langle a_m, b_l \rangle \end{pmatrix}$$

ABの第p行q列成分は、$\langle a_p, b_q \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{pi} b_{iq}$

$$= a_{p1} b_{1q} + a_{p2} b_{2q} + \cdots + a_{pn} b_{nq}$$

・割り算に似た概念として逆行列がある。

行列Aとその逆行列A^{-1}の積が単位行列Eになるように、逆行列A^{-1}を定義すると、

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E$$

（ここで、Eは単位行列を指す。単位行列とは、右下がりの対角線上成分のみ1でその他が0であるような正方行列をいう。
2×2型正方行列の場合、$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$で表せる。
どんな行列・ベクトルに掛けても、元の行列・ベクトルから変化しないという性質がある。）

行列A, A^{-1}の積が定義できるためには、まず、これらが正方行列（行数と列数が等しいような行列）である必要がある。また、正方行列であっても、行列Aの行列式が0であった場合、逆行列は存在しない。

行列式はdet Aまたは$|A|$と表される。2×2行列、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の行列式は次の式で計算される。

$$|A| = \det A = ad - bc$$

また、n次正方行列Aについて、

$$AB = BA = E \text{（単位行列）}$$

となるn次正方行列Bが存在するとき、Aは正則行列という。

したがって、$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$で、$|A| = ad - bc \neq 0$のとき、Aは正則行列である。
$|A| = ad - bc = 0$のとき、Aは正則行列ではない。

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

のように、右下に向かう斜め45°の対角線に関して対称となっている成分が等しい行列のことを対称行列という。

一般に、行列Aに対して、斜め45°の対角線に関して対称な成分を入れ替えてできる行列のことを転置行列といい、${}^tA$と表す。

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ であれば、${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Aが対称行列である条件は　$A = {}^tA$　となる。

・線形変換とは、数学的にはベクトルに行列を掛けてベクトルを作る関数のことを指す。ベクトル空間からベクトル空間へ、ベクトルの特徴を保ったまま変換する変換手法ともいえる。

数式的には、写像fで、n次元ベクトル空間R^nの1つの要素を決めたとき、ベクトル空間R^mのただ1つの要素が決まるとする。これを

$f : R^n \longrightarrow R^m$　と表す。この写像fが次の条件を満たすとき、fを線形写像または1次写像という。

R^nに含まれる任意のベクトル$\vec{x}$、$\vec{y}$と任意の実数kに対して、

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$
$$f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$$

とくに、$n = m$のとき、移す前も後も同じR^nで、R^nの中でのベクトルの様態が変換するわけだから、線形変換または1次変換という。

すなわち、移った先の成分が、移す前の成分の1次式で表されているとき、線形写像になる。その係数を順に取り出して並べたものを表現行列という。

ここで、線形空間を構成するものの基準として、標準基底eがある。標準基底とは、x軸、y軸、z軸のように、「座標系」を定めるようなベクトルの組み(集合)のことをいう。例えば

$$e_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

線形変換 f は、標準基底 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ の行き先 $f(\vec{e_1})$、$f(\vec{e_2})$ によって決定される。

$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$、$f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ であれば、その表現行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ が表現行列 A を持つ f によって移る先を、$\vec{y}$ とすると、

$$f : R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\vec{x} \longrightarrow \vec{y} = A\vec{x}$$

次に R^2 から R^2 への線形変換 f はどのように表されるか考える。

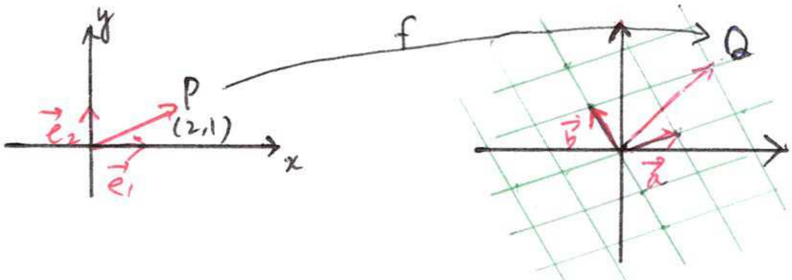
$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると、P の座標は (x, y)

この線形変換 f で、P が移る先を Q とする。

このとき、Q は基底 $\vec{a}, \vec{b}$ が張る斜交座標上の (x, y) が表す点になる。

つまり、この線形変換 f は、標準基底で $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$ と表される点 P を基底 $\vec{a}, \vec{b}$ で $\overrightarrow{OQ} = x\vec{a} + y\vec{b}$ と表される点 Q に移す変換。

あるいは、標準基底による直交座標で (x, y) と表される点 P を $\vec{a}, \vec{b}$ が張る斜交座標で (x, y) と表される点 Q に移す変換といえる。



斜交座標で $(2, 1)$

標準基底での R^n 上の線形変換 f の表現行列を A とする。

標準基底 $\{\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}\}$ を、基底 $\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}\}$ に取替えるとする。

取替え行列を $P = (\vec{a_1} \cdots \vec{a_n})$ とおくと、基底 $\{\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}\}$ を座標系とした新座標での線形変換 f の表現行列は、

$$\underline{P^{-1}AP}$$

線形変換 f をなるべく簡潔に表現できるような取替え行列 P を取ることができないかを考える。そのためには P をうまく使って、$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにする。

対角行列は、正方行列の右下に向かう対角線にだけ成分が並ぶ行列。対角成分以外は0になる。

$$\text{対角行列}\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{pmatrix}$$

行列 A が与えられたとき、$P^{-1}AP$ が対角行列になるような基底の取替え行列 P、すなわち基底を探していくことにする。

R^2 上の線形変換 f の表現行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ を例にする。

R^2 の $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と実数 λ で、

$$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$$

を満たすものを求めることとする。ここで、λ は固有値、$\vec{p}$ は固有ベクトルという。すなわちベクトルを線形変換したとき、定数倍となるようなベクトルを固有ベクトルと呼ぶ。固有値、固有ベクトルは、行列を特徴づける量、指標である。

上の問題を解くと、

$$\begin{cases} \text{固有値 2 のときの固有ベクトルは} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \text{固有値 5 のときの固有ベクトルは} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{となる。} \end{cases}$$

線形変換 f の表現行列 A を固有ベクトルを基底にに表すと、その表現行列は対角行列になる。このとき対角成分には固有値が並ぶ。

行列の対角化の手順としては、

① 固有値、固有ベクトルを求める。

$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$, $\vec{p}\neq\vec{0}$ を満たす λ, $\vec{p}$ を求める。

→ λ と $\vec{p}$, μ と $\vec{q}$ の2組が求まったとする

② 取替え行列 P を用いて、A を対角化する。

$P=(\vec{p}\ \vec{q})$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

・次に、対称行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するという性質を持つ。この性質があるため、対称行列では、固有ベクトルをもとにに、正規直交な基底を作ることができる。

ここで正規直交基底とは、大きさ1の基底ベクトルが、互いに直交している基底のこと。正規直交基底では、内積や大きさの計算が標準基底と同じような成分計算でできるというメリットがある。

対称行列 A で表される f が、新しい正規直交基底をとることによって、表現行列を対角化できるということは、データを取り扱う上で大きなメリットがある。固有ベクトルを単位化することで正規直交基底を作るというメリットがあるが、もう1つのメリットとに計算の簡易化がある。

例えば、Q という基底の取替え行列の場合、表現行列が $Q^{-1}AQ$ となる。このとき、Q^{-1} を計算するには、Q の転置行列をとればよい。

つまり、Q が正規直交基底を並べて作った行列のとき、

$Q^{-1}={}^{t}Q$ が成りたつ。

正規直交な基底を並べて作った行列を直交行列という。

・正方行列 A に対して、次の式を満たすような列ベクトル $x(\neq 0)$ が存在する。

$$Ax=\lambda Ex \quad \left(\begin{array}{l}\lambda:\text{行列}A\text{の固有値}\\ x:\quad〃\ \text{固有ベクトル}\\ E:\text{単位行列}\end{array}\right)$$

とき、λ を固有値、x を固有ベクトルという。

変形すると、$(A-\lambda E)x=0$

仮に $(A-\lambda E)$ が逆行列 $(A-\lambda E)^{-1}$ を持ったとすると、

$$x=(A-\lambda E)^{-1}0=0$$

となり、固有ベクトル $x(\neq 0)$ が存在しなくなる。

したがって、固有ベクトルを持つ条件は、$(A-\lambda E)$ が逆行列を持たないこと、

つまり次式を満たすことである。

$$\det(A-\lambda E)=0 \quad (\det \text{は行列式})$$

※通常 固有値は複数個ある

この λ の方程式を行列 A の固有方程式という。

A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$、対応する固有ベクトルを $x_1, \cdots, x_n$ とする。

行列にまとめて表記すると

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}, \quad X = (x_1 \cdots x_n)$$

固有値、固有ベクトルの定義より

$$A(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$AX = X\Lambda$$

X に逆行列が存在すると仮定し、両辺に X^{-1} を掛けると、

$$X^{-1}AX = \Lambda \quad \cdots ①$$

となり、通常 対角化という。右辺は固有値を対角成分に並べたもの。

つまり、行列 A はその固有ベクトルを求めさえすれば、単に固有値を対角成分に並べただけの行列に変形することができる。

対称行列の固有ベクトルは互いに直交する。したがって、それを並べている行列 X は直交行列である。従って対称行列 A に関しては

$$X^T AX = \Lambda$$

で対角化を達成できる。

① を変形すると、 $A = X\Lambda X^{-1}$ と表せ、行列 A の固有値分解という。固有値分解は、連立微分方程式の解に利用される。

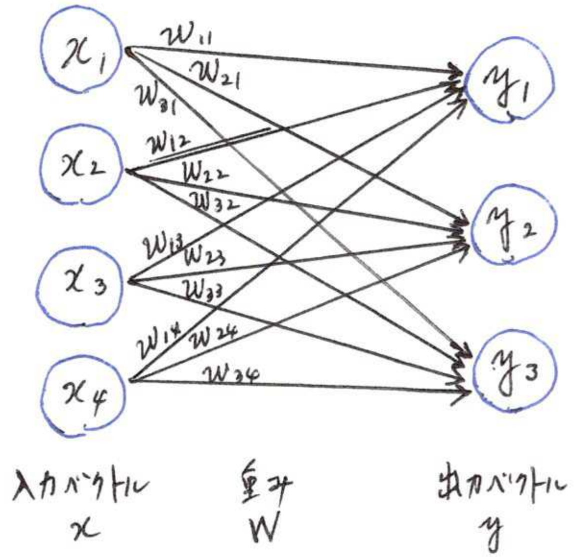
線形代数の機械学習、深層学習の使用についてまとめ

・コンピュータが言語を取り扱うために、単語をベクトル化するWord2Vecという概念がある。Word2Vecでは、単語一つ一つを1列に並べたベクトルに変換する。ベクトルに変換すると、例えば「王様」－「男性」＋「女性」＝「女王」といった演算を行うことが可能になる。Word2Vecは、様々な機械学習アルゴリズムと組み合わせて使われる。Web上には、Wikipediaのデータを用いて学習したWord2Vecやfasttextの学習済みモデルなどが無料で公開されており、こうしたモデルを使うことで気軽に言葉のベクトル化やベクトル表現を用いた計算ができる。

・L1ノルム（マンハッタン距離）とL2ノルム（ユークリッド距離）は、線形回帰モデルで正則化項として使われる。人工知能では、データセットを訓練データとテストデータに分けて学習を行う。訓練データを用いてモデルを作り、テストデータを使ってそのモデルの正しさを測定する。このとき、モデルの係数の絶対値または2乗値が大きくなってしまうと、訓練データのモデルに適合しすぎて、テストデータのモデルの当てはまりが悪くなる、過学習と呼ばれる現象が発生する。過学習を避けるために、線形回帰モデルで正則化項を付けることで、係数の絶対値または2乗値が大きくならないような罰則となる。正則化項がついた式を定義し、その式の誤差を最小化するような係数を求めることで、過学習を避けたモデル式を導出することができる。

・人工知能で注目されているアルゴリズムの一つ「ニューラルネットワーク」の計算の基本は、パラメータと重みの掛け算を足し合わせることによって行う。このパラメータと重みによる掛け算は、線形変換と見なすことができる。

実際のニューラルネットワークの例と線形変換の関係を下図に示した。この図では単純化するためにバイアスが考慮されていないが、バイアスがある場合も同様である。



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{pmatrix}$$

$$\underline{y = Wx}$$

線形変換

・人工知能アルゴリズムの中で、教師なし学習といわれる分野の一つである主成分分析という手法があり、これは複数次元あるデータをまとめて扱いやすくするため、2次元や3次元などに圧縮する手法である。データが最もバラツキを持つような軸を考えるとき、式変換を行うと固有値、固有ベクトル問題を解くことに帰着される。また、このときに固有値は説明度合いを示す値になる。各固有ベクトル(主成分)に対応する固有値をその固有値の総和で割ったものを寄与率という。

例題1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルを持つ条件としての式は、$\det(A - \lambda E) = 0$ で表される。

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(3-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda)+2\times2\times4+4\times2\times2$$
$$-(3-\lambda)\times2\times2-2\times2\times(3-\lambda)-4\times(-\lambda)\times4$$
$$=-\lambda(3-\lambda)^2+16+16-4(3-\lambda)-4(3-\lambda)+16\lambda$$
$$=-\lambda(3-\lambda)^2-8(3-\lambda)+16\lambda+32$$
$$=-\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8$$
$$=(\lambda+1)^2(-\lambda+8)$$

よって $\det(A-\lambda E)=0$ を満たす $\lambda=-1,8$

これより、固有値は $-1,8$ となる

それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求める

$\lambda=-1$ のとき、

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}$$

ここで、$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と入れて、

$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ を満たす式は、

$$A\vec{p}=\lambda E\vec{p}$$

$(A-\lambda E)\vec{p}=\vec{0}$ と表せるため、

$$\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x+2y+4z\\2x+y+2z\\4x+2y+4z\end{pmatrix}$$

これが $\vec{0}$ に等しいときの x,y,z を求めるので、

$$2x+y+2z=0$$

$x=s,\ z=t$ とおくと、

$$y=-2s-2t$$

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ （s,t は任意の実数）

$\lambda=8$ のとき、

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5x+2y+4z\\2x-8y+2z\\4x+2y-5z\end{pmatrix}$

これが $\vec{0}$ に等しいときの x, y, z を求めるので、

$$\begin{cases}-5x+2y+4z=0\\2x-8y+2z=0\\4x+2y-5z=0\end{cases}$$

$y=k$ とおくと、$x=z=2k$

よって $(x, y, z)=(2k, k, 2k)$ （kは任意の実数）

したがって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

例題2

$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$ ；固有値と固有ベクトルを求める

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-3\\1&1&-2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&-3\\1&1&-2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda)-(1-\lambda)(-3)$$

$$=(1-\lambda)(4-\lambda^2)-3(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

よって 固有値 $\lambda=-1, 1$

$\lambda=-1$ のとき、

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&-3\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

よって、

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x + 3y - 3z \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

$$2x = 0$$

$$x + 3y - 3z = 0$$

$$x + y - z = 0$$

$y = z = k$ とおくと、$(x, y, z) = (0, k, k)$

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ のとき、

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

よって、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x + y - 3z \\ x + y - 3z \end{pmatrix}$

$$x + y - 3z = 0$$

$$x = -y + 3z$$

$y = s,\ z = t$ とおくと、

$$x = -s + 3t$$

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

※ $\lambda = 1$ が2重解であるが、一次独立な2本の固有ベクトルを選ぶことができる。すなわちAは対角可能である。

以上より、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ とおくと、1, 2列が $\lambda=1$, 3列目が $\lambda=-1$ の

固有ベクトルであり、なおかつ Pは正則。したがって A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

として対角化される。

対角行列の例題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda) - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda) - 2\}$$

$$= (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)$$

よって、固有値 $\lambda = 1, 2, 4$

<u>$\lambda = 1$のとき、</u>

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ よって、 $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+y \\ -x+z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$x = -y = z$, よって $(x, y, z) = (k, -k, k)$

よって、固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$ のとき、

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{よって、} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \quad \rightarrow \quad y = z \\ x = 0 \end{cases}$$

よって $(x, y, z) = (0, k, k)$

固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 4$ のとき、

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ x - 2y \\ -x - 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - 2y = 0 \\ -x - 2z = 0 \end{cases}$$

$x = 2y \quad , \quad y = -z$

$y = k$ とおくと、

$(x, y, z) = (2k, k, -k)$

固有ベクトルは、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有ベクトルを単位化すると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{単位化}} \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{単位化}} \frac{1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{単位化}} \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ここで $B^t A B$ が対角行列とは対角化のことであるので

$B^t = B^{-1}$ ならば B は求める直交行列である。

したがって 取替え行列 B は直交行列となり、$\frac{1}{\sqrt{6}}$ でくくると、

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$