辞書式順序が整列順序であることの証明

原田 崇司

2016 年 4 月 13 日

1 整列順序

集合 S 上の二項関係 $\prec$ が以下の四つの性質を満たす時，二項関係 $\prec$ は集合 S 上の整列順序関係である．

1. $\forall x.\ x \in S \Rightarrow x \prec x$
2. $\forall x. \forall y.\ x \in S \Rightarrow y \in S \Rightarrow x \prec y \Rightarrow y \prec x \Rightarrow x = y$
3. $\forall x. \forall y. \forall z.\ x \in S \Rightarrow y \in S \Rightarrow z \in S \Rightarrow x \prec y \Rightarrow y \prec z \Rightarrow x \prec z$
4. $\forall A. (A \neq \emptyset \wedge A \subset S) \Rightarrow \exists u. u \in A \wedge \forall x (x \in A \Rightarrow u \prec x)$

2 辞書式順序

The Art of Computer Programming Volume1 の p.20 では，辞書式順序を下記のように定義している．

定義 2.1. Let S be well-ordered by $\prec$ and for $n > 0$ let T_n be the set of all n–tuples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ of elements x_j in S. Define $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prec (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, if there is some k, $1 \leq k \leq n$, such that $x_j = y_j$ for $1 \leq j < k$, but $x_k \prec y_k$ in S.

上記の辞書式順序 $\lhd_n$ の定義を論理式で表すと下記のようになる．

$$X \lhd_n Y \overset{\text{def}}{=} \exists k.\, k \in \mathbb{N} \wedge (1 \leq k \leq n) \wedge \Big(\forall j.\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \leq j < k) \Rightarrow x_j = y_j\Big) \wedge \Big(x_k \prec y_k\Big) \tag{1}$$

ただし，$X \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n), Y \equiv (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

3 辞書式順序 $\lhd_n$ が整列順序であることの証明

辞書式順序 $\lhd_n$ が整列順序の性質 4 つを満たすことを命題 3.1，命題 3.2，命題 3.3，命題 3.4 を示すことで示す．

命題 3.1.

$$\forall X.\ X \in T_n \Rightarrow X \lhd_n X$$

Proof.

$$\forall X.\ X \in T_n \Rightarrow X \lhd_n X \tag{2}$$

を示す．
T_n の任意の要素 X' をとる．

$$X' \lhd_n X' \tag{3}$$

を示す．

$\lhd_n$ の定義より

$$\exists k.\, k \in \mathbb{N} \land (1 \le k \le n) \land \left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < k) \Rightarrow x_j = x_j\right) \land \left(x_k \prec x_k\right) \tag{4}$$

を示せばよい．
k として n をとる．

$$\left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < n) \Rightarrow x_j = x_j\right) \land \left(x_n \prec x_n\right) \tag{5}$$

を示す．
(5) の $\land$ の左側の命題は S 上の $=$ の反射律より正しく，$\land$ の右側の命題は S 上の $\prec$ の反射律より正しいので，(3) は正しい．ここで，(3) の X' は任意だったので (2) が示された． □

命題 3.2.

$$\forall X.\, \forall Y.\ \ X \in T_n \Rightarrow Y \in T_n \Rightarrow X \lhd_n Y \Rightarrow Y \lhd_n X \Rightarrow X = Y$$

ここで，$X = Y \stackrel{\text{def}}{=} \forall i.\, i \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \le i \le n \Rightarrow x_i = y_i$[1]

Proof.

$$\forall X.\, \forall Y.\ \ X \in T_n \Rightarrow Y \in T_n \Rightarrow X \lhd_n Y \Rightarrow Y \lhd_n X \Rightarrow X = Y \tag{6}$$

を示す．
T_n の任意の要素 X', Y' をとる．

$$X' \lhd_n Y' \Rightarrow Y' \lhd_n X' \Rightarrow X' = Y' \tag{7}$$

を示す．
(7) を示すには $X' \lhd_n Y'$ と $Y' \lhd_n X'$ を仮定して $X' = Y'$ を示せば充分である．

$$X' \lhd_n Y' \quad \left(\exists k.\, k \in \mathbb{N} \land (1 \le k \le n) \land \left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < k) \Rightarrow x_j = y_j\right) \land \left(x_k \prec y_k\right)\right) \tag{8}$$

$$Y' \lhd_n X' \quad \left(\exists l.\, l \in \mathbb{N} \land (1 \le l \le n) \land \left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < l) \Rightarrow y_j = x_j\right) \land \left(y_l \prec x_l\right)\right) \tag{9}$$

を仮定する．

$$X' = Y' \tag{10}$$

を示す．
仮定 (8),(9) より，$k = l = n$？ なので

$$\left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < n) \Rightarrow y_j = x_j\right) \land \left(x_n \prec y_n \ \land\ y_n \prec x_n\right) \tag{11}$$

が成り立つ．
!! まだ $k = l = n$ の所を証明できていません．!!

$$\begin{aligned}
& \left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < n) \Rightarrow y_j = x_j\right) \land \left(x_n \prec y_n \ \land\ y_n \prec x_n\right) \\
\iff & \left(\forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j < n) \Rightarrow y_j = x_j\right) \land \left(x_n = y_n\right) \\
\iff & \ \forall j.\, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \le j \le n) \Rightarrow y_j = x_j \\
\iff & \ X = Y
\end{aligned}$$

よって，(7) が成り立つ．(7) で X' と Y' は任意であったので (6) が示された． □

[1] $X = Y$ の定義は The Art of Computer Programming 自体には載っていないので，それらしいものを勝手に定義した．