

デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

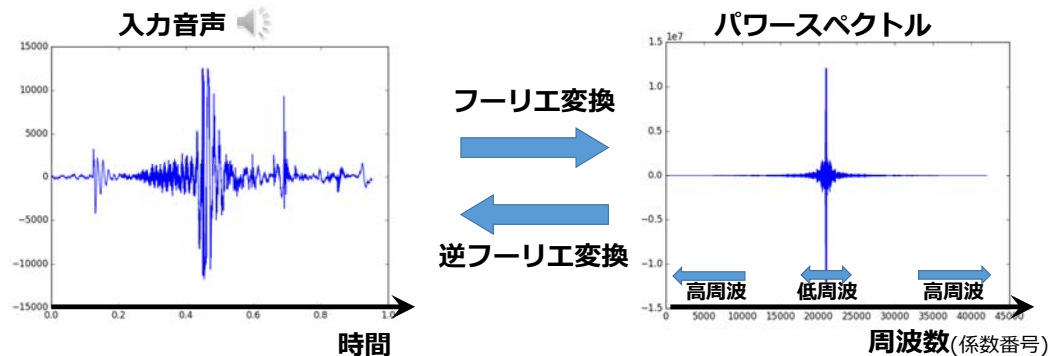
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

フーリエ変換とは（音）

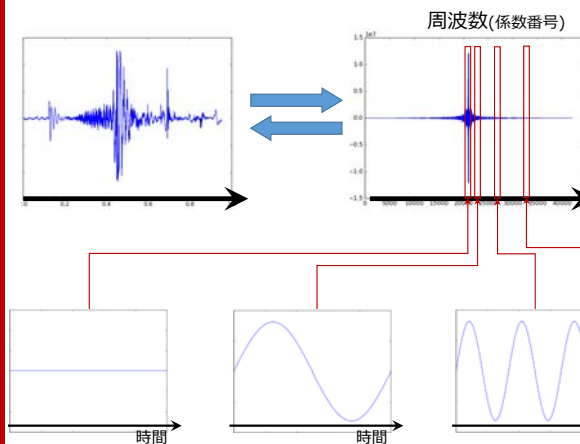
FourierSound.py (python)

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法



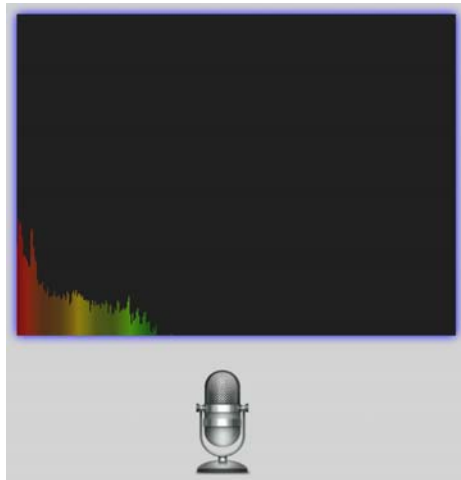
フーリエ変換とは（音）

FourierSound.py



- フーリエ変換後の関数は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央に近いほど低周波, 外ほどが高周波
- 中央（最も低周波）は、定数項で直流成分と呼ばれる
 - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作る

※下の波はイメージ
※本来はもっともっと細かいです。



音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2D
のフーリエ変換は高速なので
実時間解析可能

Spector Analyzer
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

フーリエ変換とは（画像）

- 横軸が時間/空間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

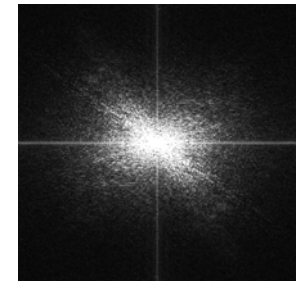


画像
(2D空間に画素が並ぶ)

フーリエ変換



逆フーリエ変換

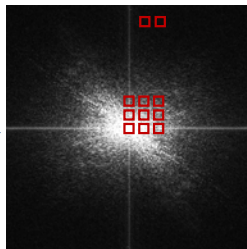


周波数画像
(画素は特定周波数の大きさを示す)

フーリエ変換とは（画像）

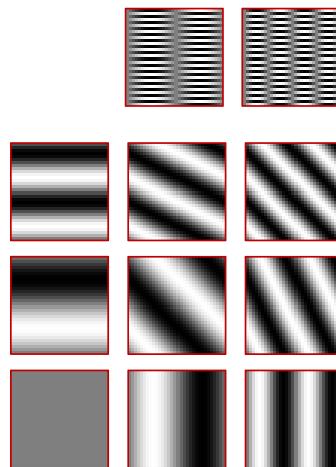


フーリエ
変換



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号
に含まれる正弦波の量を示す
- 中央付近が低周波、外側が高周波
- 中央画素は、定数項（直流成分）

→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる



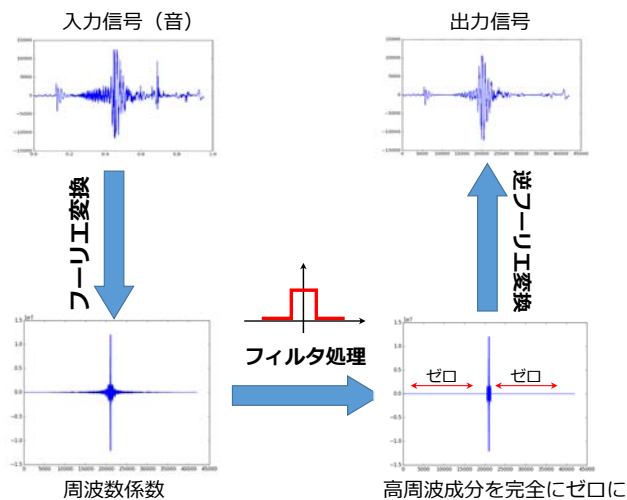
この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

フーリエ変換とは（画像）

FourierPaint.py
FourierImg.py

周波数フィルタリング（音）

FourieSound.py



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

イコライザ

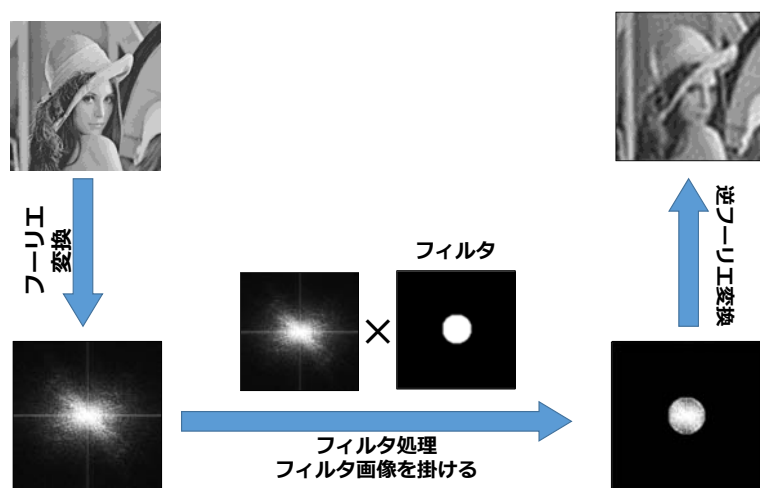
周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換



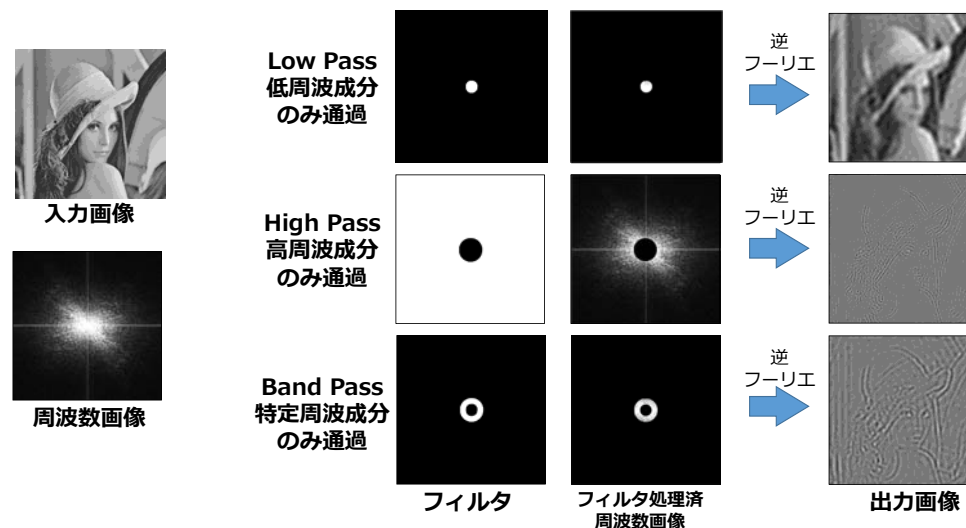
Itunesのイコライザ

周波数フィルタリング（画像）



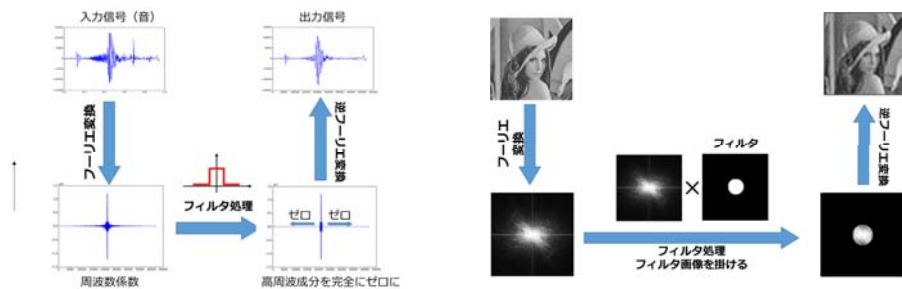
説明のためLowpassの半径を大きく可視化
本当はもっと小さい

周波数フィルタリング（画像）



まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は、横軸時間の関数を横軸周波数の関数に変換する
 - 逆フーリエ変換も定義される
 - 2次元フーリエ変換は画像へ適用できる
 - 周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



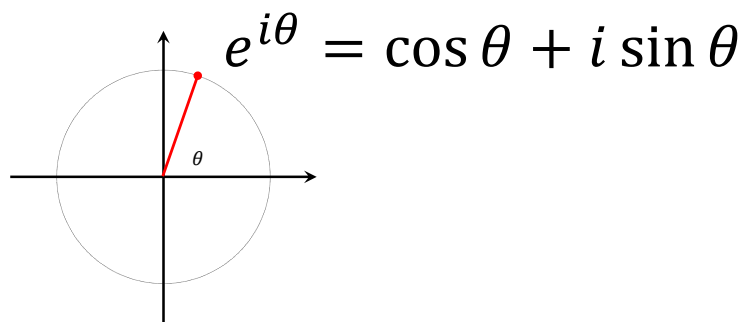
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換**
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。
証明と導出は（少しだけしか）扱いません。

詳しく知りたい人は「[金谷先生:これなら分かる応用数学教室](#)」を強くお勧めします。

オイラーの式



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

これはもうこういう表記法だと思って覚えてください

練習

三角関数を合成せよ

- $a \sin \theta + b \cos \theta$

複素数の積を求めよ

- $a (\cos \theta + i \sin \theta) * b (\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数

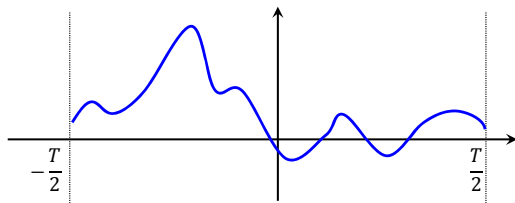
区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

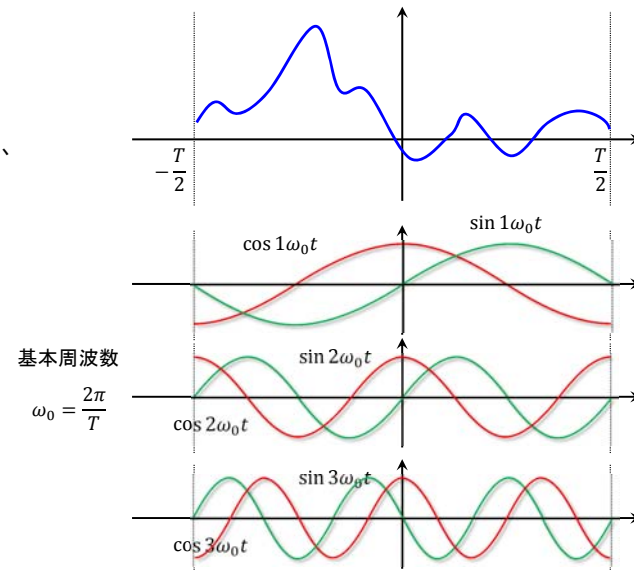
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

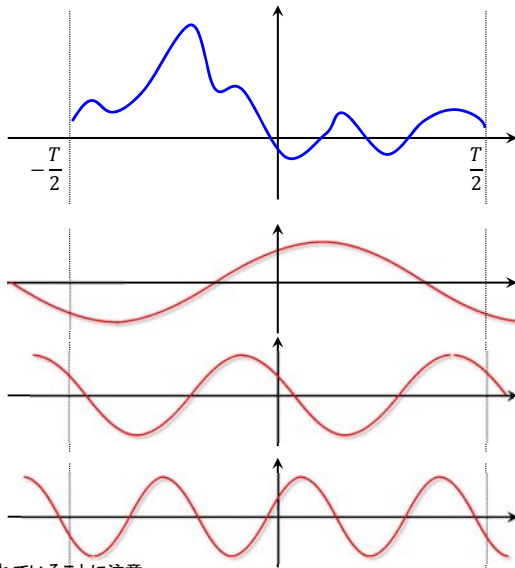
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t + \dots$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a'_1 \sin(1\omega_0 t + \phi_1) + a'_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2) + a'_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3) + \dots$$



「sin と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、
「 a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

位相がずれても、 $-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意

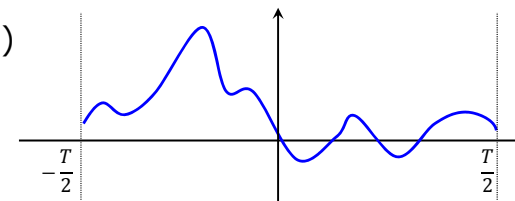
フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

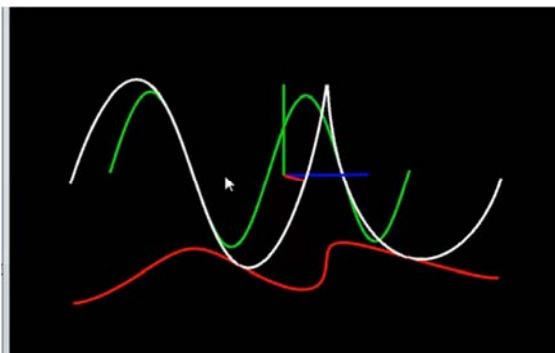
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

この複素数表記された
正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、
 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい



フーリエ級数(複素数表記)

$f(t) = e^{ik\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t$
この正弦波は何なのか？



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

<https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4>

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$

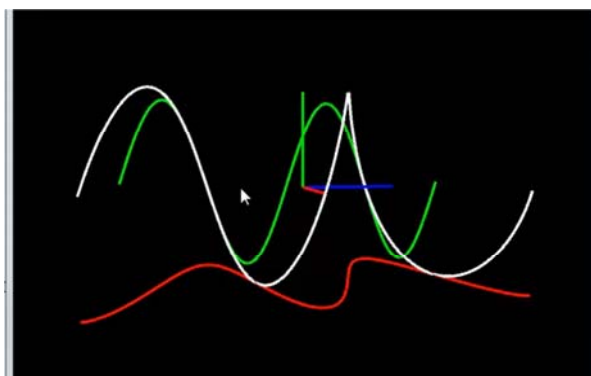
複素数の掛け算 $C e^{i\omega t}$ は
 $C = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ とすると、
 $C e^{i\omega t} = r e^{i\omega t + \phi}$ となる

つまり、 C を掛けるというのは、
 $e^{i\omega t}$ に対し位相を θ ずらして r 倍する
操作だといえる

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。

$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$



動画の後半参照 or FourieViz.pdeをprocessingで実行してみてください。

まとめ: フーリエ級数展開

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

- オイラーの式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- フーリエ級数展開: 周期 T を持つ関数は正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

- フーリエ級数展開 (複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

練習: 下の式(1)-(3)より, 式(4)(5)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \dots (3)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (4)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (5)$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt. \dots (3)$$

一方オイラーの式より,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - ib_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t})) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + b_k (a_k + ib_k) e^{-ik\omega_0 t}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (5) \end{aligned}$$

ただし,

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \dots (6)$$

と置いた.

また, 式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{a_k - ib_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (7) \end{aligned}$$

$$\frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos -k\omega_0 t \, dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin -k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (8)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} \, dt \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

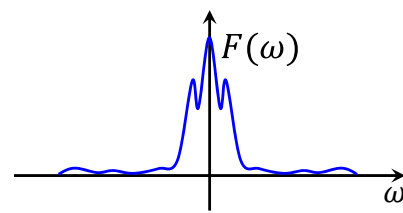
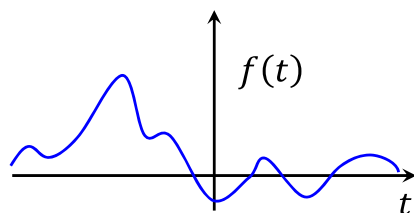
フーリエ変換とは

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$



- 時間 t の関数 $f(t)$ を、周波数 ω の関数 $F(\omega)$ に変換する
- $f(t)$ と $F(\omega)$ は複素数関数である ($f(t)$ は実数関数のことが多い)
- フーリエ級数展開において $T \rightarrow \infty$ とすると導出できる

フーリエ変換の導出 - これなら分かる応用数学教室, 金谷健一先生著 より

フーリエ変換の導出.

周期 T の関数 $f(t)$, $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ は, 以下の通りフーリエ級数に展開できる.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (1)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (2)$$

ここで, $\omega_k = k\omega_0$, $\Delta\omega = \omega_0 = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$, $C_k = \frac{F(\omega_k)}{T}$ と置くと, (1)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \Delta\omega \dots (3) \end{aligned}$$

が得られる. また, 式(2)より

$$F(\omega_k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} \, dt \dots (4)$$

が得られる. ここで周期 T を $T \rightarrow \infty$ とすると, $\Delta\omega \rightarrow 0$ であり, 式(3)(4)より下式が得られる.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \, d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \dots (5)$$

この左式を逆フーリエ変換, 右式をフーリエ変換と呼ぶ. ただし, 式(4)から式(5)の変形に以下の関係を用いた.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx$$

ただし, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ は区間 $[a, b]$ を, N 等分する点. |

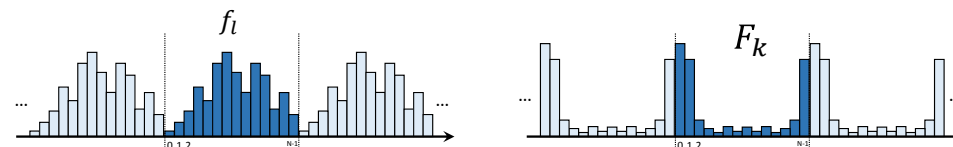
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- **離散フーリエ変換**
- **周波数フィルタリング**

離散フーリエ変換（1D）

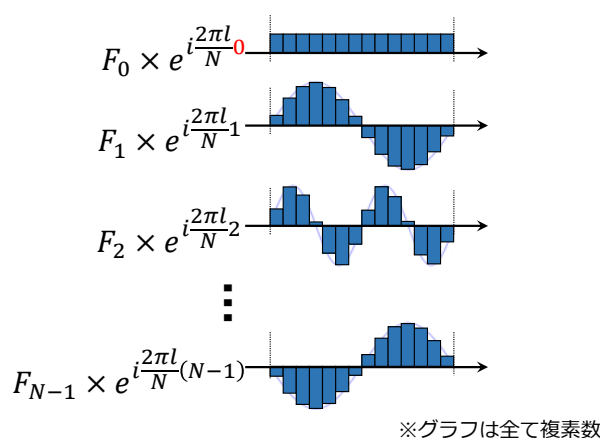
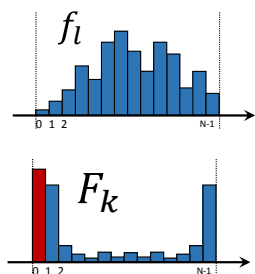
$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



- 周期Nの離散値 f_l を周期Nの離散値 F_k に変換する
- f_l と F_k は複素数（ただし f_l は実数列のことが多い）
- f_l が実数の場合 $F_k = \overline{F_{-k}}$ が成り立つ（ $F_{-k} = F_{N-k}$ ）

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



- F_0 は定数（直流成分）に対応
- F_k は $[0, N-1]$ 区間においてN回振動する正弦波に対応
- $K=N/2$ がもっとも高周波で、 $k=N-1$ は $k=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

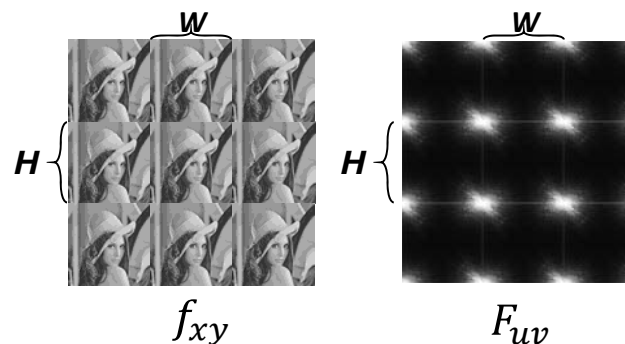
離散フーリエ変換（2D）

フーリエ変換：

$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi x u}{W}} e^{-\frac{2\pi y v}{H}}$$

逆フーリエ変換：

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi x u}{W}} e^{\frac{2\pi y v}{H}}$$

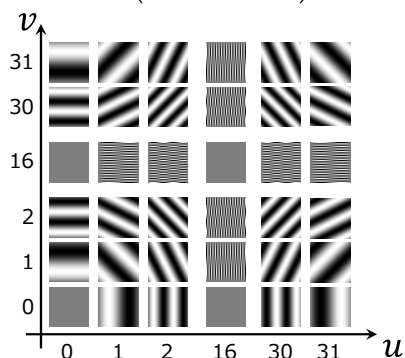


縦横方向に周期H/Wで繰り返す
離散値 f_{xy} を、離散値 F_{uv} に変換
 f_{xy} と F_{uv} は複素数列（ f_{xy} は画像-
実数列-のことが多い）

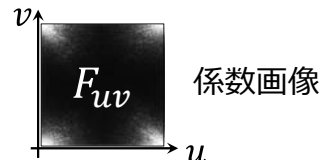


$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{i \left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H} \right)}$$

$$W=H=32 \text{ のときの } \sin \left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H} \right)$$



$F_{u,v}$ は上の (u,v) 番目の画像の係数
実際は $F_{u,v}$ は複素数画像



- $F_{0,0}$ は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$ は、画像区間において『縦に u 回・横に v 回振動する正弦波画像』の係数
- $U=v=N/2$ がもっとも高周波で、 $u=N-1$ は $u=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

離散フーリエ変換の計算例

$N = 8$ のとき

入力： $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi kl}{N}}$$

↑ 複素数とかでできて
ややこしいけど
ただの和分

$$F_0 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) \right]$$

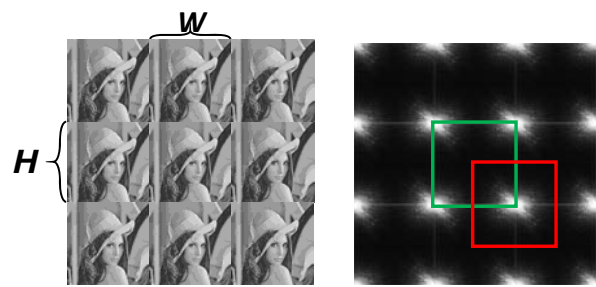
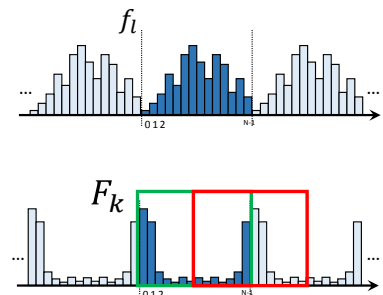
$$F_1 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 7}{8} + i \sin \frac{2\pi 7}{8} \right) \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 14}{8} + i \sin \frac{2\pi 14}{8} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 21}{8} + i \sin \frac{2\pi 21}{8} \right) \right]$$

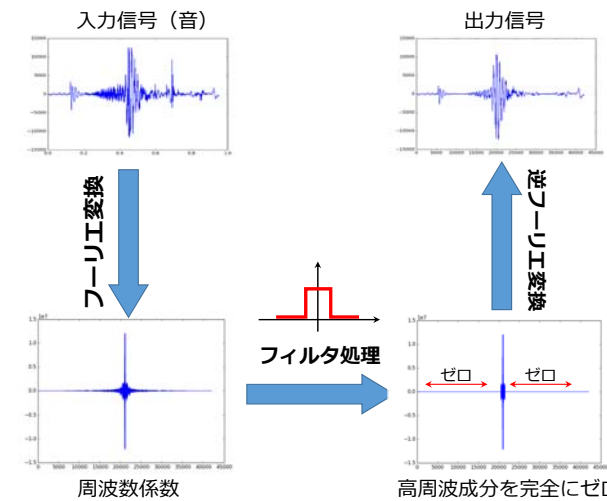
⋮

Shiftの話



- フーリエ変換を実装すると、ピークが端に来る変換結果になる
 - 上図緑四角：これは間違いじゃない
 - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので 上図赤四角の位置を出力することが多い
 - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

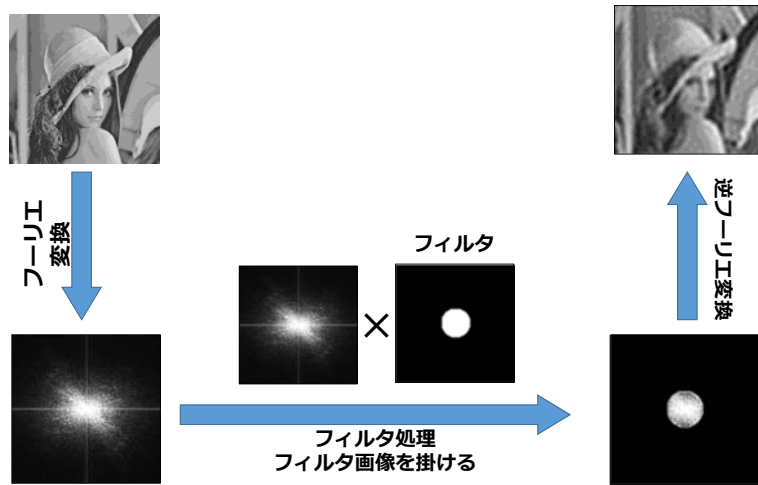
周波数フィルタリング（音）



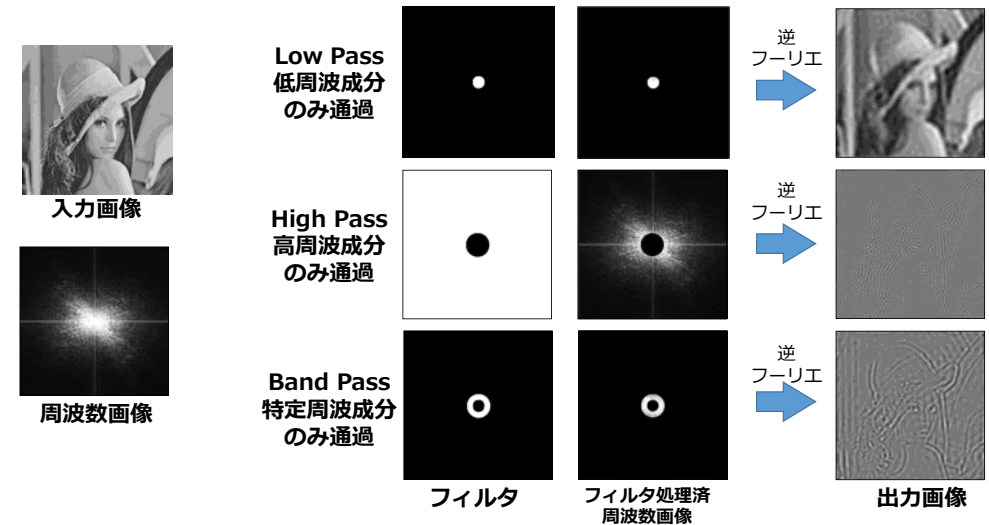
- フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる
1. フーリエ変換し
 2. 周波数空間でフィルタを掛け
 3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

周波数フィルタリング（画像）

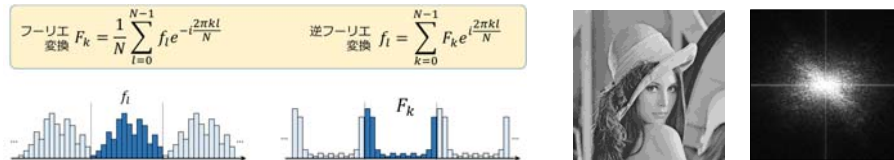


周波数フィルタリング（画像）



まとめ：離散フーリエ変換と周波数フィルタ

離散フーリエ変換（1D/2D）の実装方法を解説した



周波数空間でマスクを掛ける周波数フィルタを紹介した

