

# ディジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

## Contents : 画像領域分割

- ・画像領域分割とは
- ・閾値法
- ・領域成長法
- ・クラスタリング
- ・識別器
- ・動的輪郭モデル
- ・グラフカット法
- ・陰関数曲面再構成法

今回と次回は多様な領域分割法を  
広く浅く紹介します

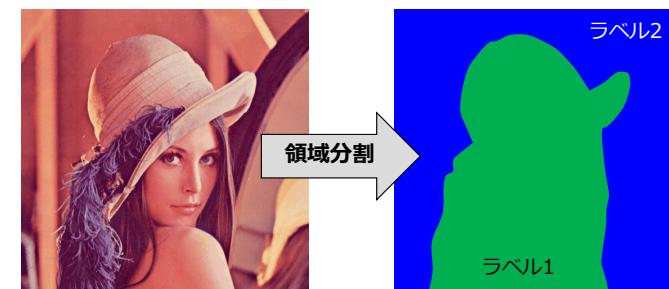
教科書10章に対応しますが  
井尻の専門分野なので教科書からは  
だいぶ外れた内容も紹介します

## Contents

- 00. 序論 : イントロダクション
- 01. 特徴検出1 : テンプレートマッチング、コーナー・エッジ検出
- 02. 特徴検出2 : DoG特徴量, SIFT特徴量, ハフ変換
- 03. 領域分割 : 領域分割とは、閾値法、領域拡張法、グラフカット法, etc
- 04. パターン認識基礎1 : パターン認識概論, サポートベクタマシン
- 05. パターン認識基礎2 : ニューラルネットワーク、深層学習
- 06. パターン認識基礎3 : 主成分分析, オートエンコーダ
- 07. プログラミング演習 1 : zoom実施 ※ 講義時間中zoomを開設, TAに自由に質問可
- 08. プログラミング演習 2 : zoom実施 ※ 提出済み課題について, 井尻に説明する時間を設ける
- 09. プログラミング演習 3 : zoom実施
- 10. プログラミング演習 4 : zoom実施
- 11. プログラミング演習 5 : zoom実施
- 12. 筆記試験

## 画像領域分割 (Image Segmentation) とは

- ・『画像領域分割』『画像領域抽出』『画像ラベリング』とも呼ばれる
- ・Vision/Graphics/Image Processing 分野において重要な研究分野
- ・デジタル画像の各画素にラベルをつける作業  
(ラベル画像を作る作業)



## Low-level と High-level segmentation

### Low-level segmentation

画像を特徴（色等）が一様な局所領域に分割する作業



例：Water shed法

### High-level segmentation

画像内の目標物の領域を切り抜く作業

※両者の境界は曖昧で両者の意味を込めて『画像領域分割』と呼ぶのが一般的



例：Graph Cut法

## Low-level と High-level segmentation

### Low-level segmentation

意味のある固まりを抽出  
画像を圧縮  
処理の高速化  
(画素は直接処理するのに小さすぎる)



例：Water shed法

### High-level segmentation

画像編集（エフェクト適用）  
コラージュ  
シミュレーション用モデルの構築(3D)

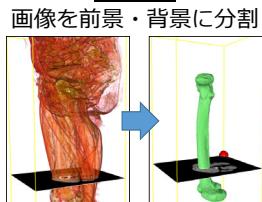


例：Graph Cut法

6

## 二値化と多値化

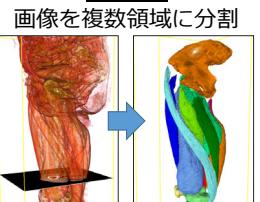
### 二値化



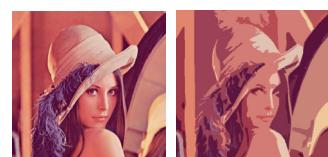
例)濃淡画像の白黒二値化



### 多値化



例) ポスタリゼーション  
(階調数を削減し特殊効果を得る)



5

## 画像領域分割法の計算法による分類

- ・**閾値法 (Thresholding)** : TThresholding.exe
- ・**領域成長法 (Region Growing)** : TRegionGrowing.exe
- ・**クラスタリング (Clustering)** : TClustering.exe
- ・**クラス分類器 (Classifier)** : ----
- ・**動的輪郭モデル (Active Contours)** : TActiveContour.exe
- ・**グラフカット法 (Graph Cut Segmentation)** : TGraphCut.exe
- ・**曲面再構成法 (Surface Reconstruction)** : ----

それぞれの手法をC++により実装しました  
各手法に対応するソフトウェアは右の.exe

7

8

## 画像領域分割法の計算法による分類

- ・**閾値法 (Thresholding)** : TThresholding.exe
- ・**領域成長法 (Region Growing)** : TRegionGrowing.exe
- ・**クラスタリング (Clustering)** : TClustering.exe
- ・**クラス分類器 (Classifier)** : -----
- ・**動的輪郭モデル (Active Contours)** : TActiveContour.exe
- ・**グラフカット法 (Graph Cut Segmentation)** : TGraphCut.exe
- ・**曲面再構成法 (Surface Reconstruction)** : -----

※ 上記の各手法が独自の研究分野を築くほど広がりを持つ

例) Otsu et. al. 1975. ヒストグラムを用いた閾値法 の引用数 24103

例) Kass et. al. 1988. Active Contourの最初の論文の引用数 20320

例) Boykov et. al. 2001. Graph Cut法の初期の論文の引用数 3681

※ Google scholar (2017年2月14日時点)

9

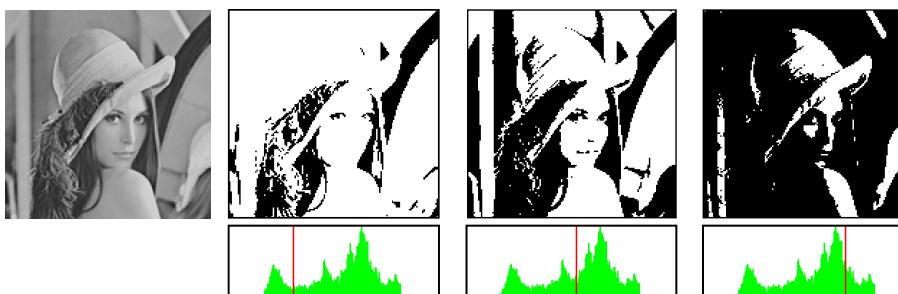
## Contents : 画像領域分割

- ・**画像領域分割とは**
- ・**閾値法**
- ・**領域成長法**
- ・**クラスタリング**
- ・**識別器**
- ・**動的輪郭モデル**
- ・**グラフカット法**
- ・**陰関数曲面再構成法**

10

## 閾値法とは

デモ : TThresholding.exe



閾値により画素に前景・背景ラベルを付ける

閾値を自動的に計算する方法が研究される

→ Pタイル法[1], 大津法[2], Sauvola法[3]…etc…

[1] CG-Arts協会. デジタル画像処理

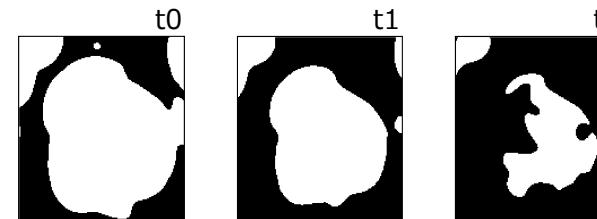
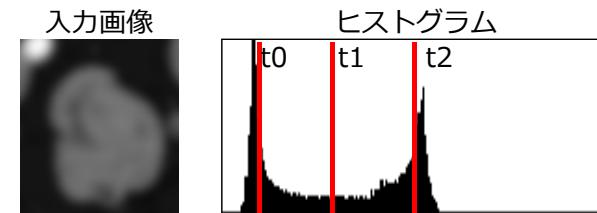
[2] Ostu N.: A threshold selection method from gray-level histograms. IEEE SMC, 9, 1979, 62-66.

[3] J. Sauvola et. al., "Adaptive document image binarization," Pattern Recognition 33(2), 225-236, 2000.

11

## 閾値法 : 大津法

デモ : TThresholding.exe



閾値をどこに置けばいい?  
二峰を真ん中で分割するのが理想

### 大津法

二峰性ヒストグラムを仮定し,  
二峰を最も良く2分割する閾値  
を自動計算する手法

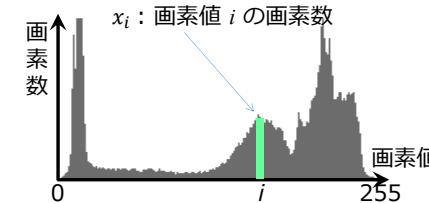
引用数20kを超える論文

12

## 閾値法：大津法

デモ : TThresholding.exe

ヒストグラムの**分離度**を定義しこれを最大化する閾値を探す



$$\omega = \sum_{i=0}^{255} x_i$$

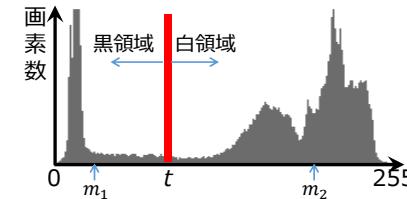
$$m = \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{255} x_i \times i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{255} x_i \times (i - m)^2$$

13

## 閾値法：大津法

ある閾値で2領域に分離したとき…



$$m_1 = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=0}^{t-1} x_i \times i$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=0}^{t-1} x_i \times (i - m_1)^2$$

全体	黒領域	白領域	
画素数	$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$
平均	$m$	$m_1$	$m_2$
分散	$\sigma^2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$

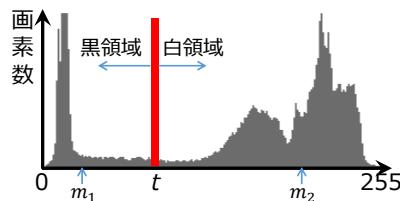
$$m_2 = \frac{1}{\omega_2} \sum_{i=t}^{255} x_i \times i$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{\omega_2} \sum_{i=t}^{255} x_i \times (i - m_2)^2$$

14

## 閾値法：大津法

ある閾値tで2領域に分離したとき…



### クラス内分散

$$\sigma_w^2 = \frac{\omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_2^2}{\omega_1 + \omega_2}$$

2領域の分散の平均値  
小さい方が良い分割

全体	黒領域	白領域	
画素数	$\omega$	$\omega_1$	$\omega_2$
平均	$m$	$m_1$	$m_2$
分散	$\sigma^2$	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$

### クラス間分散

$$\sigma_b^2 = \frac{\omega_1(m_1 - m)^2 + \omega_2(m_2 - m)^2}{\omega_1 + \omega_2}$$

2領域の平均値の距離  
大きい方が良い分割

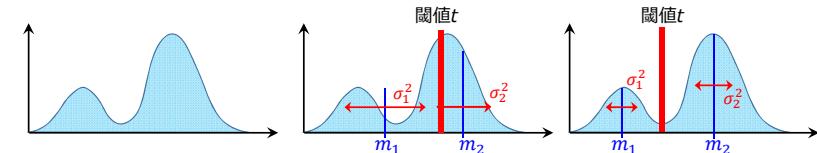
15

## 閾値法：大津法

$$\text{分離度} = \frac{\text{クラス間分散}}{\text{クラス内分散}} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_w^2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{\omega_1(m_1 - m)^2 + \omega_2(m_2 - m)^2}{\omega_1 + \omega_2}$$

$$\sigma_w^2 = \frac{\omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_2^2}{\omega_1 + \omega_2}$$



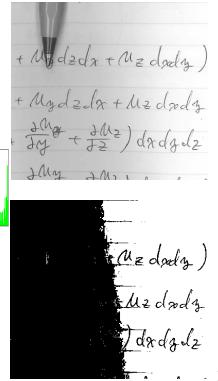
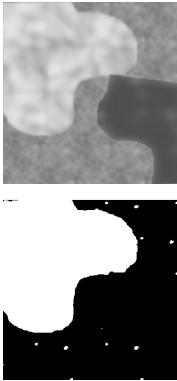
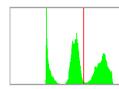
### 大津法

- 1) 入力画像のヒストグラムを構築
- 2) 閾値tを 1 から 254まで動かし **分離度**を計算
- 3) 分離度が最大になる閾値  $t_{max}$  で画像を分割

16

## 閾値法：大津法

双峰性の高いヒストグラムを持つ画像には強い（そうでない画像には使えない）  
グラデーションに弱い

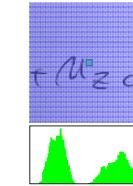


17

## 閾値法：Adaptive thresholding

画素( $i,j$ )

$$+ M_{y2} d_{x2} + \mu_{z2} d_{y2}) \\ + M_{y2} d_{z2} + \mu_{z2} d_{y2} \\ (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) d_x d_y d_z \\ \downarrow M_{y2} \rightarrow M_{y2}$$



各画素 $x_{ij}$ 周囲の局所窓を考える  
窓内のヒストグラムからその画素  
用の閾値 $t_{ij}$ を計算

$$+ M_{y2} d_{x2} + \mu_{z2} d_{y2}) \\ + M_{y2} d_{z2} + \mu_{z2} d_{y2} \\ (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) d_x d_y d_z \\ \downarrow M_{y2} \rightarrow M_{y2}$$

大津法：局所窓のヒスト  
グラムから大津法を計算

$$+ M_{y2} d_{x2} + \mu_{z2} d_{y2}) \\ + M_{y2} d_{z2} + \mu_{z2} d_{y2} \\ (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) d_x d_y d_z \\ \downarrow M_{y2} \rightarrow M_{y2}$$

Sauvola法：局所窓の平均値と分散 $\sigma^2$   
から閾値 $t$ を計算

$$t_{ij} = m_{ij} \left( 1 + k \left( \frac{\sigma_{ij}}{R} - 1 \right) \right)$$

$t_{ij}$  : 画素 $i,j$ の閾値  
 $m_{ij}$  : 窓内の平均  
 $\sigma_{ij}^2$  : 窓内の分散  
 $R$  : 最大標準偏差 (= 128)  
 $k$  : パラメータ (= 0.2)

18

## まとめ：閾値法

### 大津法



$$\text{分離度} = \frac{\text{クラス間分散}}{\text{クラス内分散}} = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_w^2}$$

### Adaptive thresholding

画素( $i,j$ )

$$+ M_{y2} d_{x2} + \mu_{z2} d_{y2}) \\ + M_{y2} d_{z2} + \mu_{z2} d_{y2} \\ (\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) d_x d_y d_z \\ \downarrow M_{y2} \rightarrow M_{y2}$$

局所窓の情報を利用して閾値計算  
大津法 や Sauvola法

閾値により画素に前景ラベル・背景ラベルを付ける

閾値を自動計算する手法（Pタイル法, 大津法, Sauvola法）を紹介した

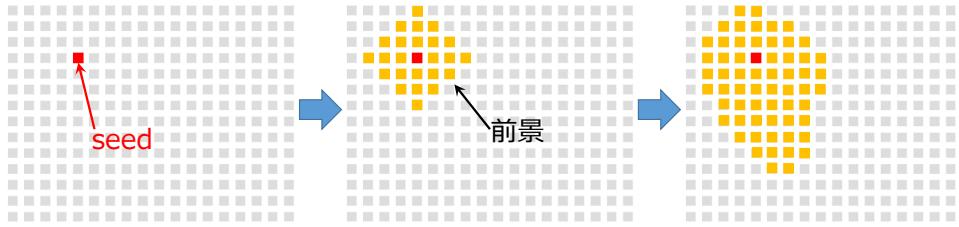
19

## Contents : 画像領域分割

- 画像領域分割とは
- 閾値法
- 領域成長法
- クラスタリング
- 識別器
- 動的輪郭モデル
- グラフカット法
- 陰関数曲面再構成法

20

## 領域成長法の概要



- Seed画素から領域を徐々に成長させる  
(Seedは手で与えるか自動生成する)
- 局所的な規則に従って成長を止める
- Seed配置・成長規則について多くの研究がされている

Adams R. et. al.: Seeded region growing, *IEEE PAMI* 16, 641-647, 1994.

Roerdink J.B.T.M., et. al.: The Watershed Transform: Definitions, Algorithms and Parallelization Strategies, 2000.

## 領域成長法: 二値化



### 領域成長法(二値化)

入力：複数のseed画素

1. Seed画素を前景領域に追加
2. 前景領域に隣接する画素 $x$ のうち  
次式を満たすもの前景領域に追加  
 $|c(seed) - c(x)| < r$  \*
3. 成長が止まるまで(2)を繰り返す

$c(seed)$  : seedの画素値

$c(x)$  : 画素 $x$ の画素値

$r$  : パラメータ

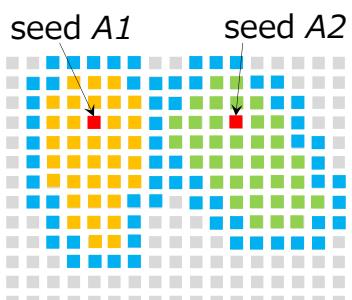
\*条件には様々なものが考えられる

22

## 領域成長法: 多値化

■ Seed ■ 領域境界画素 T

■ 領域  $A_1$  ■ 領域  $A_2$



### Seeded Region Growing

入力: 領域ID( $A_1, \dots, A_n$ )の付いたSeed

1. 各Seedを領域 $A_1, \dots, A_n$ の要素とする
2. 境界画素 $x$ とその隣接領域 $A_i$ のうち、  
次式が最小となる $x$ を $A_i$ に追加  
 $\delta(x) = |c(x) - c(A_i)|$
3. 全画素を追加するまで(2)を繰り返す

$c(x)$ :  $x$ の色

$c(A_i)$ :  $x$ が隣接する領域 $A_i$ の平均色

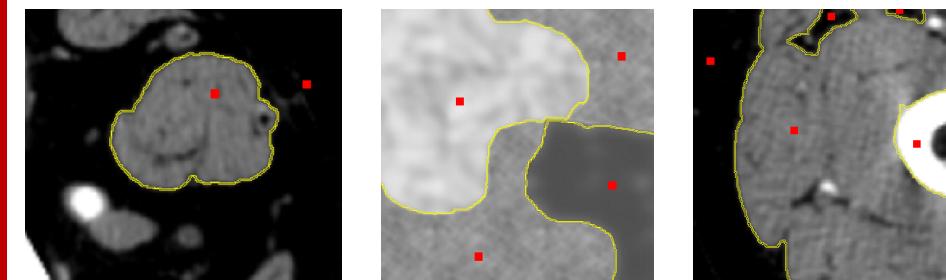
\*2.において $x$ が複数領域に隣接する場合は境界ラベル(-1など)をつける

[Adams et. al. 1993]

## 領域成長法の特徴

デモ : TRegionGrowing.exe

一様な画素値を持つ領域の分割に適する  
ぼけた境界では成長が止まりにくい

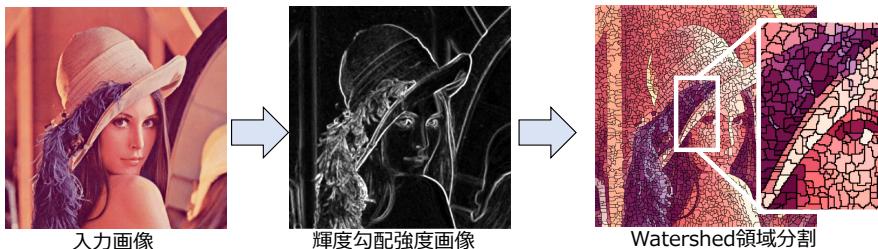


画像のCTデータは理研・画像情報処理研究チームより

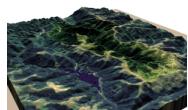
24

## 領域成長法: Watershed Algorithm

[Roerdink J.B.T.M., et. al.: 2000.]



勾配強度を高さと見なすと、勾配強度画像を地形と見なせる  
この地形の分水界を境界とする領域分割法

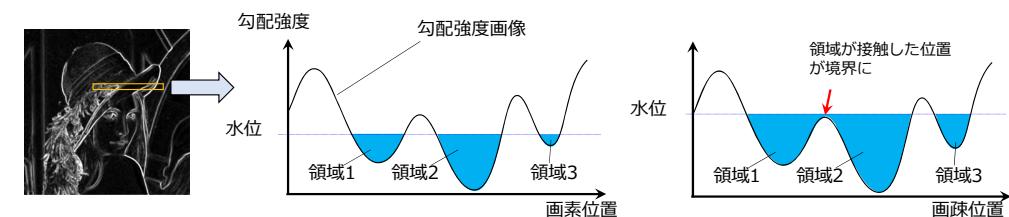


Watershed : 地形学における『分水界』を表す用語:  
ある地形のある点に落ちた雨がどこに溜まるかを考える隣接しながら  
も溜まる先が異なる2点間を領域の境界に  
左図は wikipedia より (Public Domain)

25

## 領域成長法: Watershed Algorithm

[Roerdink J.B.T.M., et. al.: 2000.]

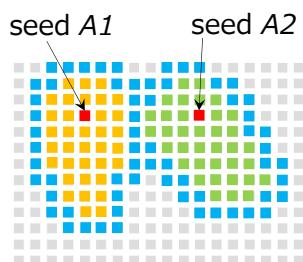


勾配強度を高さと考え水を下から満たしていく  
徐々に水位を上げ隣接領域が接した部分を境界とする  
領域成長法の言葉で言うと…

- 勾配強度の全ての局部最小点にSeedを配置
- 全領域を同時に成長させ、異なる領域が接した部分を境界にする

26

## 領域成長法: まとめ



- 局所的な規則に従って領域を成長させる手法
- Seed配置・成長規則に関する研究がなされている
- 単純な二値化 / Seeded Region Growing(多値化)/Watershed法』を紹介

Adams R. et. al.: Seeded region growing, IEEE PAMI 16, 641-647, 1994.

Roerdink J.B.T.M., et. al.: The Watershed Transform: Definitions, Algorithms and Parallelization Strategies, 2000.

27

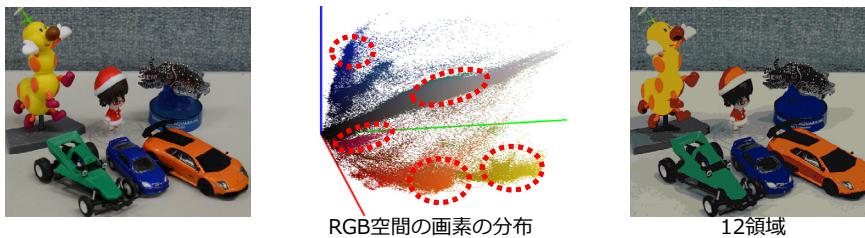
## Contents : 画像領域分割

- 画像領域分割とは
- 閾値法
- 領域成長法
- クラスタリング
- 識別器
- 動的輪郭モデル
- グラフカット法
- 陰関数曲面再構成法

後半に詳しく解説する（予定）

28

## クラスタリングによる領域分割



画素を**特徴空間**に配置し、特徴空間内で**密集する画素集合（クラスタ）**を発見し分割する

**特徴空間**：色空間, Bilateral空間, テクスチャ空間, etc…

**有名な手法**：K-mean法[1], Mean shift法[2], Normalized Cut法[3], etc…

[1] 高木幹雄ら, 新編画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 2004.

[2] Comaniciu D. et. al.: Mean shift: A robust approach toward feature space analysis, *IEEE PAMI*, 24, 5(2002), 603-619.

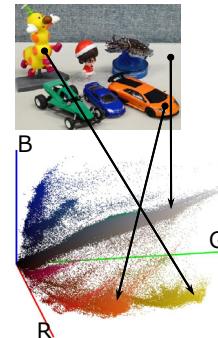
[3] Shi J. et. al.: Normalized cuts and image segmentation. *IEEE PAMI*, 22, 8(2002), 888-905.

## 特徴空間とは

特徴空間：画像の局所的な特徴が張る空間のこと

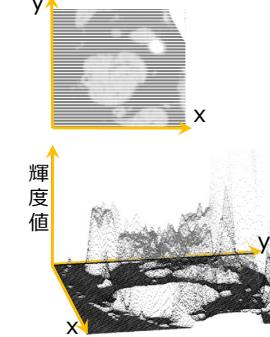
### RGB空間

$$p_i \rightarrow (R_i \ G_i \ B_i)^T$$



### Bilateral空間

$$p_i \rightarrow (p_{i,x} \ p_{i,y} \ I_i)^T$$



### Bilateral空間 (Color)

$$p_i \rightarrow (p_{i,x} \ p_{i,y} \ R_i \ G_i \ B_i)^T$$

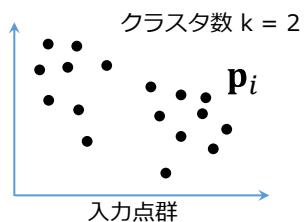
※  $R_i \cdot G_i \cdot B_i \cdot I_i$  は画素  $p_i$  の R・G・B・輝度値

他にも…  
テクスチャ特徴/HOG  
/SIFT/HLAC/CHLAC/等

29

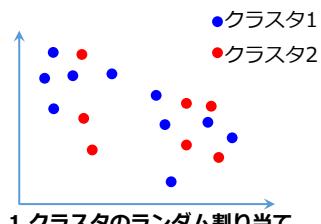
30

## k-means clustering (k-平均法)

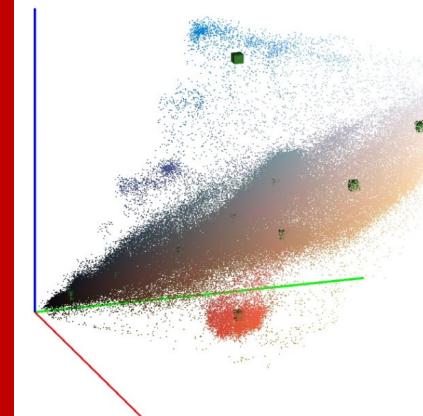


入力：特徴空間の点群  $p_i$ , クラスタ数  $k$

1. 各点  $p_i$  にクラスタIDをランダムに割り当てる
2. クラスタ中心  $C_j$  をクラスタの重心に移動
3. 各点  $p_i$  を中心  $C_j$  が最も近いクラスタに割り当てる
4. 変化がなくなるまで 2,3 を繰り返す



## k-means clustering (k-平均法)



### ◆利点

- アルゴリズムが単純で実装が楽
- サイズの小さなクラスタ分割が行える

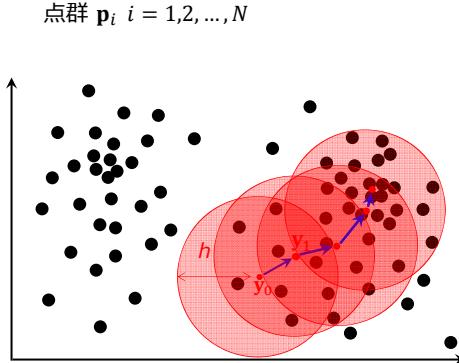
### ◆欠点

- 初期割り当てに結果が依存
- 多様なクラスタ形状を扱えない
- クラスタ数  $k$  が既知の必要あり

31

32

## Mean-Shift Clustering (平均シフト法)



### Mean Shift Procedure (MSP)

点  $y_0$  付近の点群密度の局所最大点を発見

入力 : 点群  $\mathbf{p}_i$ , 初期点  $y_0$ , バンド幅  $h$

1.  $\mathbf{y}_{k+1} \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^N g_i \mathbf{p}_i}{\sum_{i=1}^N g_i}$        $g_i = \begin{cases} 1 & \|\mathbf{p}_i - \mathbf{y}_k\| \leq h \\ 0 & \|\mathbf{p}_i - \mathbf{y}_k\| > h \end{cases}$
2.  $\|\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k\| <$  閾値まで 1 を繰り返す

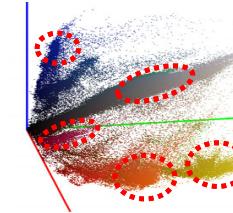
### Mean Shift Clustering

**方法1.** 各画素位置  $\mathbf{p}_i$  から MSP を行い、近い点に収束した画素を同一クラスタにする

**方法2.** 特徴空間内に格子状に配置した点群  $\mathbf{x}_i$  に MSP 行う。同じ点に収束するカーネルが通った画素を同一クラスタにする

33

## クラスタリングによる領域分割：まとめ



RGB空間の画素の分布

12領域

画素を特徴空間に射影し、その特徴空間内で密度の濃い部分を同一領域として分割する

- 特徴空間の選択とクラスタの発見法が大切
- 教師無し（正解データセット無し）学習の一種
- k-平均法, Mean Shift 法を紹介した

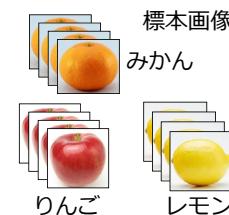
34

## Contents : 画像領域分割

- 画像領域分割とは
- 閾値法
- 領域成長法
- クラスタリング
- 識別器
- 動的輪郭モデル
- グラフカット法
- 陰関数曲面再構成法

SKIP

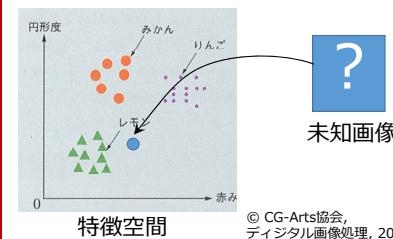
後半に詳しく解説する（予定）<sup>35</sup>



## 識別器による領域分割

ラベル付けされた標本画像（教師データ）から分類法則を学習し、未知画像にラベル付け

1. 教師データを特徴空間に射影する
2. 特徴空間を教師データに基づき分割
3. 未知画像を特徴空間に射影し、事前に生成した特徴空間の分割に基づき未知画像のラベルを決定



未知画像

© CG-Arts協会,  
ディジタル画像処理, 2004

36

## Contents : 画像領域分割

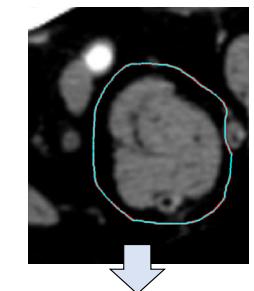
- ・画像領域分割とは
- ・閾値法
- ・領域成長法
- ・クラスタリング
- ・識別器
- ・動的輪郭モデル
- ・グラフカット法
- ・陰関数曲面再構成法

37

## 動的輪郭法 (Active Contours)

領域境界を徐々に変形する手法

- ・境界形状を滑らかに
- ・境界が画像のエッジを通るよう



画像のCTデータは理研・画像情報処理研究チームより

38

2手法に分類できる

- ・境界を陽的に表現する手法 : **Snakes**法
- ・境界を陰的に表現する手法 : **Level Set**法

## Snakes法のコスト関数

**前提1.** 曲線はパラメータ表現される  $\mathbf{v}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, s \in [0,1]$

**前提2.** 曲線のエネルギー

$$E(\mathbf{v}(s)) = \alpha E_{len} + \beta E_{curv} + \gamma E_{img}$$

弧長に対応する項 (長い → 大)

$$E_{len} = \int_0^1 \left\| \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \right\|^2 ds$$

画像(勾配強度)に対応する項

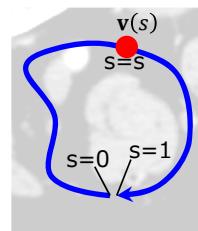
$$E_{img} = - \int_0^1 \|\nabla(G \otimes I(\mathbf{v}(s)))\| ds$$

[画像  
ガウスフィルタ(ぼかす)  
勾配強度を計算]

曲率に対応する項 (ガタガタ → 大)

$$E_{curv} = \int_0^1 \left\| \frac{d^2\mathbf{v}(s)}{ds^2} \right\|^2 ds$$

問題  $E$  を最小化する曲線  $\mathbf{v}(s)$  を探す  
(動的計画法 / 貪欲法など)



39

## Snakes法のコスト関数

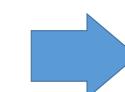
最適化計算のため折れ線近似する

$$\mathbf{v}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}, s \in [0,1]$$

$$E_{len} = \int_0^1 \left\| \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \right\|^2 ds$$

$$E_{curv} = \int_0^1 \left\| \frac{d^2\mathbf{v}(s)}{ds^2} \right\|^2 ds$$

$$E_{img} = - \int_0^1 \|\nabla(G \otimes I(\mathbf{v}(s)))\| ds$$



$$\begin{aligned} E_{len} &\simeq \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1})^2 \\ E_{curv} &\simeq \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_{i-1} - 2\mathbf{v}_i)^2 \\ E_{img} &\simeq - \sum_{i=1}^N \|\nabla I(\mathbf{v}_i)\| \end{aligned}$$

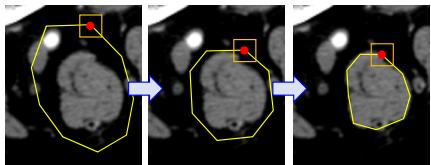
※左式は連結部分  
 $\mathbf{v}_i$  と  $\mathbf{v}_i$  を考慮してないでの注意 (見やすくなるためごしました)

※  $\nabla I$  は勾配強度画像

40

## Snakes法の最適化

- 色々な最適化法が考えられるがここでは貪欲法を紹介

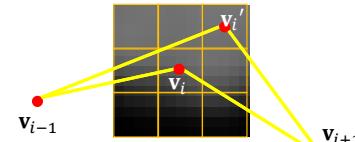


頂点 $v_i$ が寄与するエネルギー

$$E = \frac{\alpha}{2}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1})^2 + \frac{\alpha}{2}(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^2 \quad (\textcolor{red}{E_{len}})$$

$$+ \beta (\mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{v}_{i-1} - 2\mathbf{v}_i)^2 \quad (\textcolor{blue}{E_{curv}})$$

$$- \gamma I'(\mathbf{v}_i) \quad (\textcolor{blue}{E_{img}})$$



- 1-1  $v_i$ を近傍画素中心に移動してみる  
1-2 局所エネルギー最小の画素に移動

※この手法だと接線方向に頂点が動いてしまいます

### Snakes (貪欲法)

入力：画像と初期曲線（折れ線）

- 頂点をひとつずつ訪問する
- 頂点 $v_i$ に訪問中、局所コストが最小となる近傍画素へ $v_i$ を移動する
- 頂点の移動量が閾値以下になるまで、又は、決められた回数、(1)を繰り返す

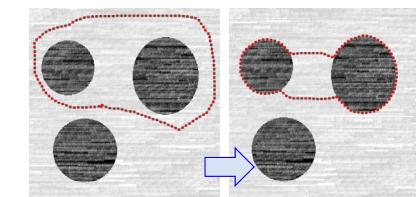
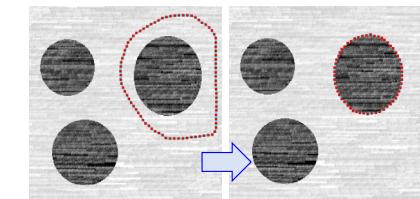
## Snakes法の特徴

### 利点

- ノイズに強い領域分割が可能
- 高速かつ実装が簡単

### 欠点

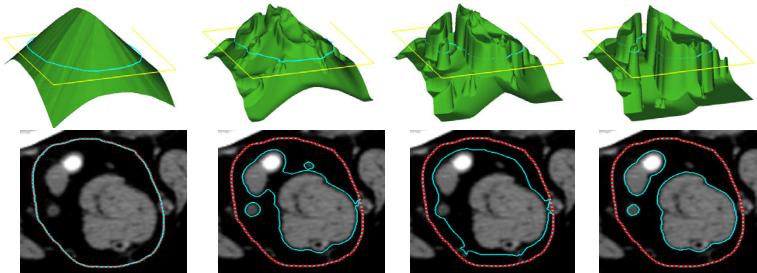
- パラメータに強く依存
- 初期輪郭線に強く依存
- トポロジー変化が困難



## Level set法

TActiveContour.exe

- 曲線を符号付きスカラー場（内挿関数）のゼロセットで表現
- スカラー場の初期値は初期境界からの距離場を利用
- スカラー場を変化させることで曲線を間接的に変形する
- トポロジー変化に対応できる



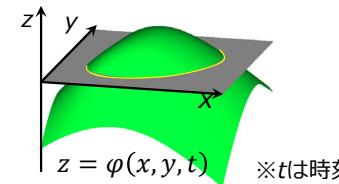
43

補足資料

## Level set法

**前提1.** 境界曲線を内挿関数  $\varphi(x, y, t)$  のゼロセットで表現

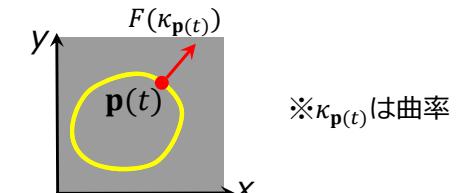
曲線：  $\varphi(p_x(t), p_y(t), t) = 0$



**課題：**収束するまで曲線を変形する

※ 実際に変化させるのは  $\varphi(x, y, t)$

※ 移動速度  $F(\kappa_{p(t)})$  をうまく指定すると、輪郭の進展が境界で止まる



44

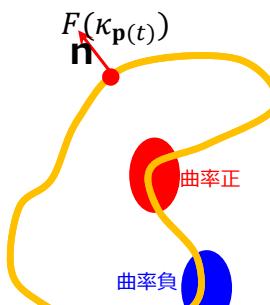
## 速度 $F$ を曲率 $\kappa_{p(t)}$ の関数にする理由

曲線の凸部・凹部で挙動を変化できる

例) 凹部は外へ、凸部は内へ向かって移動

曲がり具合に応じて挙動を変化できる

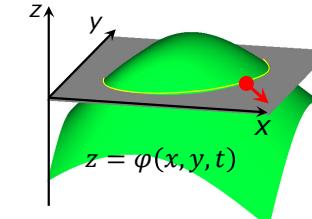
例) 曲がり具合が大きいところは速く移動



※曲率の正負は  
曲線の向き・定義に依存

45

## Level Set法



### 問題の前提

点 $p$ が曲線上に乗る  $\varphi(p_x(t), p_y(t), t) = 0$

点 $p$ は法線 $n$ 方向に  
速度 $F$ で移動  $\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) \mathbf{n}$

法線 $n$ は $\varphi$ の勾配  $\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{||\nabla \varphi||}$

内挿関数 $\varphi$ の時間進展に  
関する方程式を導く

整理する  $\frac{\partial \varphi(p_x(t), p_y(t), t)}{\partial t} = -F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) ||\nabla \varphi||$  ※この式は曲線上で成立  
※変形の詳細は付録へ

全体に拡張  $\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = -F(\kappa) ||\nabla \varphi||$  ※ $\kappa$ は内挿関数 $\varphi$ の曲率

位置 $(x, y)$ と時刻 $t$ について離散化  $\frac{\varphi(i, j, t+1) - \varphi(i, j, t)}{h} = -F(\kappa_{i,j}) ||\nabla \varphi(i, j, t)||$  ※ $i, j$ は画素位置  
※ $h$ は微小時刻

46

### 補足資料

- 1. 初期曲線から初期スカラー場  $\varphi(i, j, 0)$  を構築

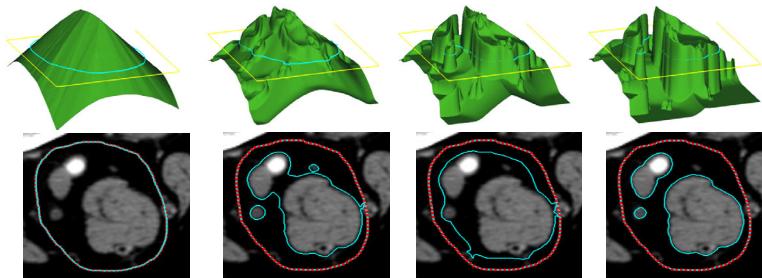
( $i, j$ は画素位置,  $\varphi(i, j, 0)$ は初期曲線からの距離場)

- 2. 変化が十分小さくなるまで時刻 $t$ を進め $\varphi$ を更新

$$\frac{\varphi(i, j, t+1) - \varphi(i, j, t)}{h} = -\frac{a - b\kappa_{i,j}}{1 + \|\nabla(G \otimes I(i, j))\|} ||\nabla \varphi||$$

$a, b$ はパラメータ  
 $\kappa_{i,j} > a/b$ なら正方向に進む  
エッジ部分では変化が遅い

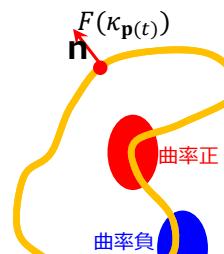
- 3.  $\varphi(i, j, t) = 0$  である画素を境界として出力する



47

## 曲率の定義

### 曲線上の定義

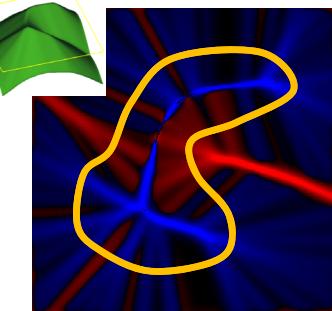


$$\varphi(p_x(t), p_y(t), t) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) \mathbf{n}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{||\nabla \varphi||}$$

### 内挿関数(空間全体)へ拡張



$$\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = -F(\kappa) ||\nabla \varphi||$$

$$\kappa = \nabla \left( \frac{\nabla \varphi}{||\nabla \varphi||} \right) : \text{内挿関数の曲率}$$

48

## Level set法の特徴

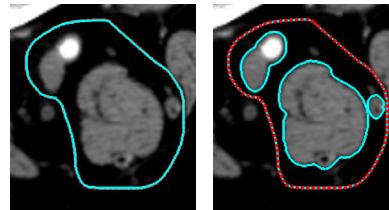
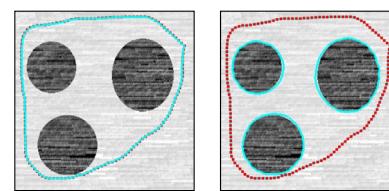
輪郭線をスカラー場のゼロセットで表現し、  
スカラー場を変更することで輪郭線を動かす

### 利点

- ・ノイズに対し堅固・高速
- ・トポロジー変化に対応

### 欠点

- ・速度 $F(\kappa_{p(t)})$ の適切な選択が難しい
- ・パラメータ調節が大変



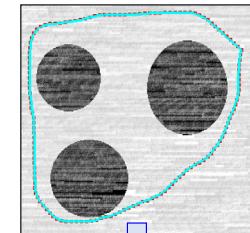
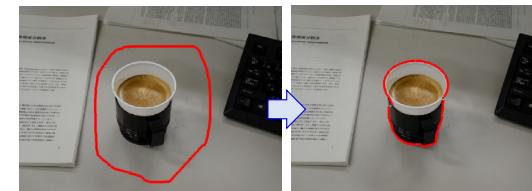
49

## まとめ: 動的輪郭モデル

境界曲線を『形状が滑らかになるように』『画像のエッジを通る様に』変形する手法

- ・境界を陽的に表現する : **Snakes** 法
- ・境界を陰的に表現する : **Level Set** 法

変形モデル(速度の定義)・最適解の計算法・高次元化など、関連研究が多い



50

## Contents : 画像領域分割

- ・画像領域分割とは
- ・閾値法
- ・領域成長法
- ・クラスタリング
- ・識別器
- ・動的輪郭モデル
- ・グラフカット法
- ・陰関数曲面再構成法

## グラフカット領域分割

### 前傾制約 背景制約



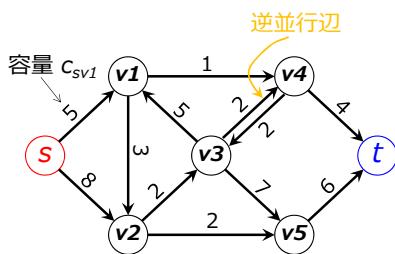
前景・背景に属する画素を適当に入力すると、これを制約に画像を二値化二値化をエネルギー最小化問題として定式化し、フローネットワークの最小カットにより最適解を計算する

臓器などの塊状領域に対してはかなり強力な領域分割法

51

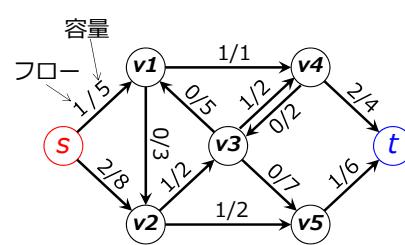
52

## 準備：フローネットワーク



### フローネットワーク

- 容量付き有向グラフ  $G = (V, E)$
- 頂点集合  $V$  と辺集合  $E$  から成る
- 辺  $(p, q)$  は容量  $c_{pq} > 0$  を持つ
- 始点  $s$  と終点  $t$  を含む



### フロー

- 各辺には容量を超えない範囲でフローが流れる
- ある頂点  $v$  について、流入するフローと流出するフローは等しい
- 総流量**：始点から出るフローの総和
- 最大フロー**：ネットワークに流せる最大の総流量

53

## 準備：フローネットワーク

### カット:

頂点を『 $s$ を含む部分集合  $S$ 』と  
『 $t$ を含む部分集合  $T$ 』に分割する

### カットセット:

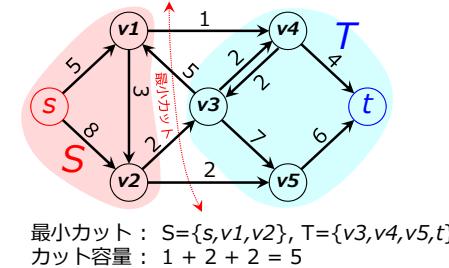
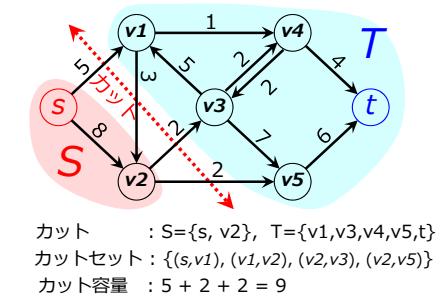
部分集合  $S$  と  $T$  の間をつなぐ辺の集合

### カットの容量:

カットセットのうち  $S \rightarrow T$  方向の辺の  
容量総和（逆向きの辺は無視する）

### 最小カット

容量が最小となるカット



54

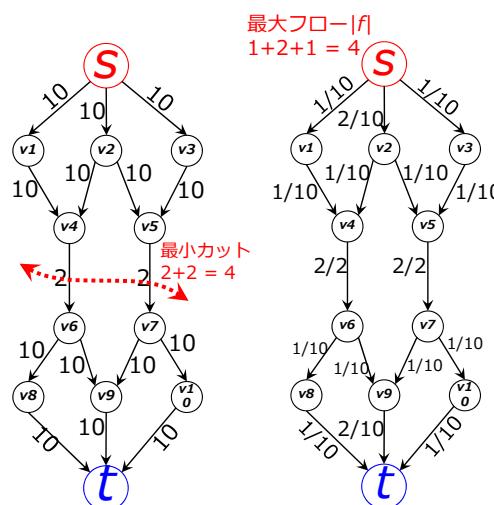
## 準備：フローネットワーク

### 最大フロー最小カットの定理

任意のフローネットワークにおいて、  
その最大フローと最小カットは等しい  
最大フローはネットワークの一一番細い  
部分(最小カット)によって決定される

※ 最大フローが流れているとき、始点  $s$  から不飽和辺のみを使って到達できる頂点群を  $S$  とし、 $T = V - S$  とすると、 $S - T$  は最小カットをなす

※ 最大フロー・最小カットの探索には様々なアルゴリズムが存在し、比較的高速に“解ける”ことを知っておいてください

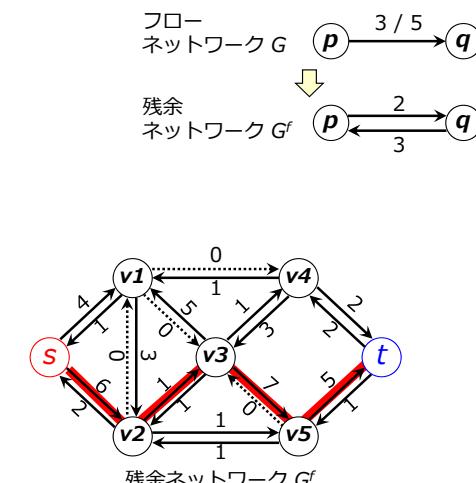
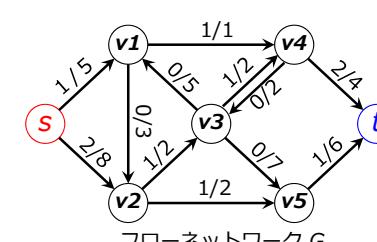


55

## 最大フローアルゴリズム

**残余ネットワーク  $G^f$** とは、フローネットワーク  $G$  にフローが流れているとき、フローの可変範囲を表すネットワークのこと

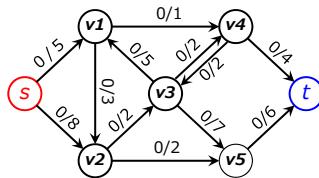
**増加可能経路**とは、残余ネットワーク内の  $s \rightarrow t$  経路のこと



補足資料

56

## 最大フローアルゴリズム

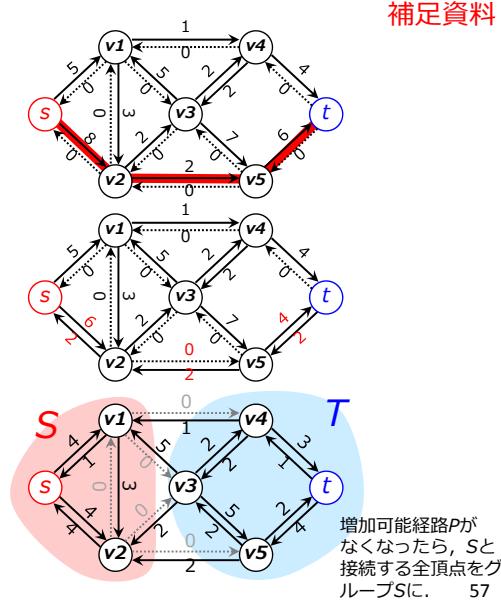


### 最大フローアルゴリズム（単純なもの）

入力：フローネットワークG

出力：最大フローと最小カット

1. フローを0で初期化
2. 残余ネットワークを構築
3. 増加可能経路Pが無くなるまで下を繰り返す
  - 3-1) 増加可能経路 Pの探索
  - 3-2) 経路Pに沿ってフロー追加



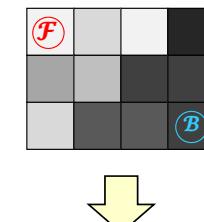
補足資料

## グラフカット領域分割：コスト関数

入力：画像、制約画素集合（前景F・背景B）

出力：以下を満たす二値化

- 制約画素pは必ず制約を満たす
- 非制約画素pは、その特徴（色など）が前景画素Fに近ければ前景に、Bに近ければ背景になる
- 境界は特徴の異なる画素間を通る

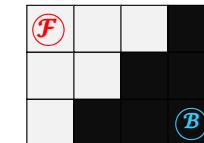


$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

$\Omega$  : 全画素集合

$\mathcal{N}$  : 近傍画素集合

$L_p$  : 画素  $p \in \Omega$  につくラベル値 {fore, back} のどちらか



## グラフカット領域分割：コスト関数

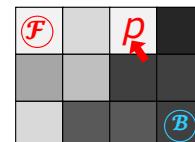
$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

$\Omega$  : 全画素集合  
 $\mathcal{N}$  : 近傍画素集合  
 $L_p$  : ラベル値 {fore, back}

$E_1(L_p)$  : 『データ項』 画素pのラベル付の不正確さに反応する項

画素pが前景制約画素に似ているなら…

$$E_1(L_p = \text{fore}) \leftarrow \text{小}  
E_1(L_p = \text{back}) \leftarrow \text{大}$$



定義は論文によつて色々  
右は一例

$$E_1(L_p = \text{fore}) = \begin{cases} 0 & p \in \mathcal{F} \\ \infty & p \in \mathcal{B} \\ t_p^{\text{fore}} & \text{other} \end{cases}$$

$$E_1(L_p = \text{back}) = \begin{cases} \infty & p \in \mathcal{F} \\ 0 & p \in \mathcal{B} \\ t_p^{\text{back}} & \text{other} \end{cases}$$

$$t_p^{\text{fore}} = \frac{d_p^{\mathcal{F}}}{d_p^{\mathcal{F}} + d_p^{\mathcal{B}}}, t_p^{\text{back}} = \frac{d_p^{\mathcal{B}}}{d_p^{\mathcal{F}} + d_p^{\mathcal{B}}}$$

$$d_p^{\mathcal{F}} = \min_{k \in \mathcal{F}} ||\mathbf{c}_p - \mathbf{c}_k|| \quad \text{※} \mathbf{c}_p \text{は画素 } p \text{ の画素値}\\ d_p^{\mathcal{B}} = \min_{k \in \mathcal{B}} ||\mathbf{c}_p - \mathbf{c}_k|| \quad \text{※} t_p^{\text{fore}} \text{ は画素 } p \text{ の色が前景画素に似るほど小さくなるよう指定する}$$

59

## グラフカット領域分割：コスト関数

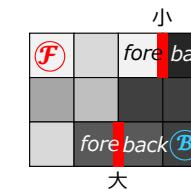
$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

$\Omega$  : 全画素集合  
 $\mathcal{N}$  : 近傍画素集合  
 $L_p$  : ラベル値 {fore, back}

$E_2(L_p, L_q)$  : 『平滑化項』 隣り合う画素が似た特徴（色）を持つときは、なるべく同じラベルをつける

☆隣接画素  $p, q$  に同じラベルをつける  
 $\rightarrow E_2 = 0$

☆隣接画素  $p, q$  に違うラベルをつける  
 $p, q$  が似た色を持つ  $\rightarrow E_2$  は大  
 $p, q$  が遠い色を持つ  $\rightarrow E_2$  は小



$$E_2(L_p, L_q) = \begin{cases} 0 & L_p = L_q \\ \frac{1}{1+||\mathbf{c}_p - \mathbf{c}_q||} & \text{other} \end{cases} \quad \mathbf{c}_p \text{ は画素 } p \text{ の画素値}$$

58

60

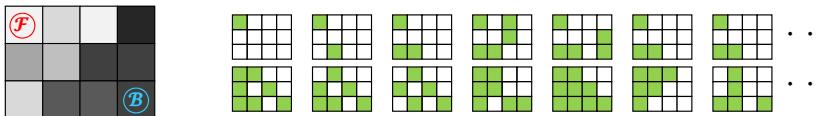
## グラフカット領域分割：コスト関数

$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

$\Omega$  : 全画素集合  
 $\mathcal{N}$  : 近傍画素集合  
 $L_p$  : ラベル値 {fore, back}

この問題は解くのが難しい

- ・局所最小解が多い
- ・全通り検索する？ さすがに組み合わせが多く (3×4画像でも  $2^{12} = 4096$ 通り)



『この問題の大域最小化解は、フローネットワークの最小カットにより高速に求められる』 [Boykov Y., Jolly M-P. MICCAI, 276-286, 2000.]

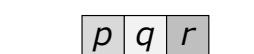
※ $L_p$ が二状態をとる場合（二値化）に限る

※グラフカット発見以前はやきなまし法（ランダムウォーク）で解いていた

61

## グラフカットを用いた最適化

入力画像(3画素)



$E_1(L_p = \text{back})$

$E_1(L_p = \text{fore})$

$E_2(L_p, L_q)$

$E_2(L_q, L_r)$

$E_2(L_p, L_r)$

$E_1(L_p = \text{fore})$

$E_1(L_p = \text{back})$

$E_1(L_q = \text{fore})$

$E_1(L_q = \text{back})$

$E_1(L_r = \text{fore})$

$E_1(L_r = \text{back})$

$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

画像からフローネットワークを構築

- ・頂点  $V$  : 全画素, 始点  $s$ , 終点  $t$
- ・辺  $E$  : 右図

フローネットワークをカットし

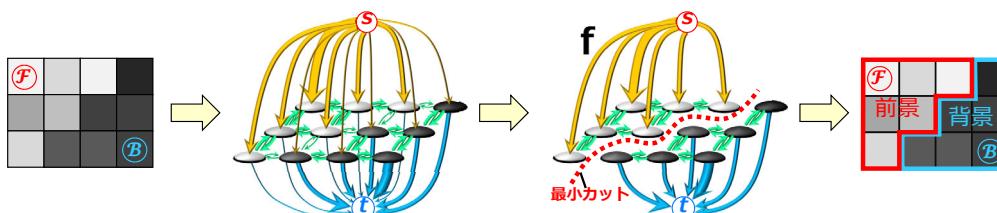
- ・ $s$  に連結する画素にラベル  $fore$  をつける
- ・ $t$  に連結する画素にラベル  $back$  をつける

→ カット容量がコストに対応する

→ 最小カットを求めればコスト最小化できる

62

## グラフカットを用いた最適化



### 1) 画像からフローネットワークを構築

- ・頂点 : 全画素, 始点  $s$ , 終点  $t$
- ・辺  $E$  : 図の通り
- ・辺の容量 : コスト関数を利用

### 2) ネットワークの最小カットを計算

- ・ $s$  に連結する画素にラベル  $fore$  をつける
- ・ $t$  に連結する画素にラベル  $back$  をつける

カットされた辺の容量がコスト関数に対応  
 → 最小カット容量がコスト関数に対応する

63

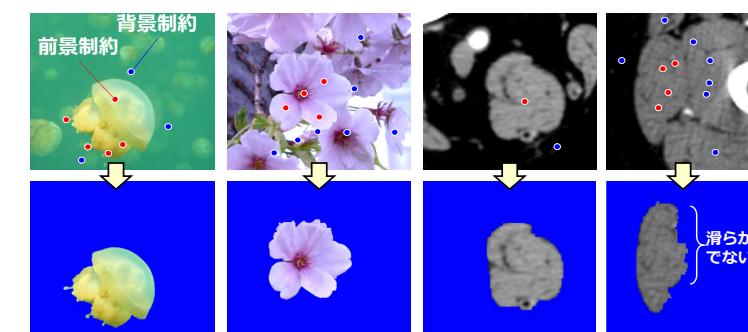
## グラフカット領域分割

### 利点

- 高速・高精度
- 高次元化が容易
- UIと相性がよい

### 欠点

- 境界が不明瞭な領域には利用し難い
- 血管・筋膜等、細い・薄い形状には不向き



右2枚の画像は  
 理研画像処理研究チーム  
 より

64

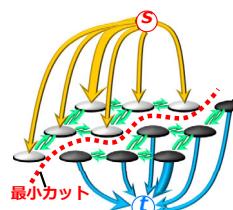
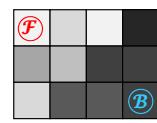
# グラフカット領域分割

$$\operatorname{argmin}_{\{L_p | p \in \Omega\}} \sum_{p \in \Omega} E_1(L_p) + \lambda \times \sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} E_2(L_p, L_q)$$

$\Omega$  : 全画素集合

$\mathcal{N}$  : 隣接画素集合

$L_p$ : 画素  $p$  に付けるラベル値 {fore, back}



画像二値化をエネルギー最小化問題として定式化し、フローネットワークの最小カットにより最適解を計算する

境界が明瞭な領域の分割にはかなり良い結果を出力できる

生体画像の領域分割に向く

## Contents : 画像領域分割

- ・画像領域分割とは
- ・閾値法
- ・領域成長法
- ・クラスタリング
- ・識別器
- ・動的輪郭モデル
- ・グラフカット法
- ・陰関数曲面再構成法

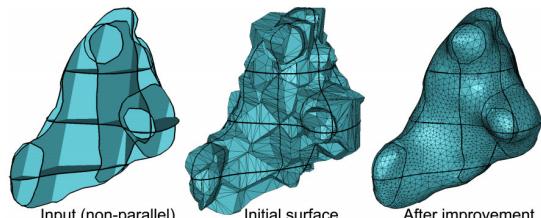
65

66

# 曲面再構成法による領域分割

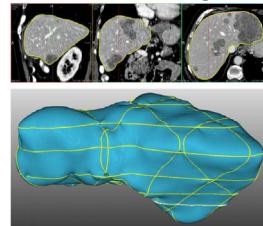
- ・形状モデリングのための曲面再構成法を転用
- ・輪郭線制約から三次元境界曲面を生成する

直接的曲面再構成法 [Lie et. al. 2008]



図は論文[Lie et. al. 2008]より

陰関数曲面再構成 [Heckel et. al. 2011]



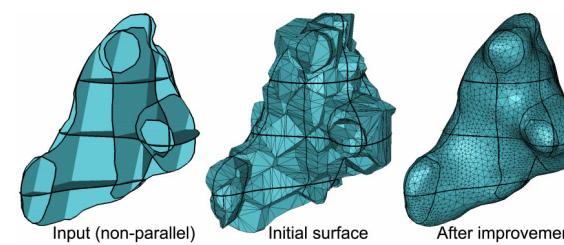
図は論文[Heckel et. al. 2011]より

Heckel F, et. al. : Interactive 3D medical image segmentation with energy-minimizing implicit function. VCBM 35, 2(2011),275–287.  
Liu L. et. al. : Surface reconstruction from non-parallel curve networks. CGF 27, 2(2008), 155–163.

67

# 直接（陽的）曲面再構成による領域分割

図は[Liu L. et. al. : Surface reconstruction from non-parallel curve networks. CGF 27, 2(2008), 155–163.]より



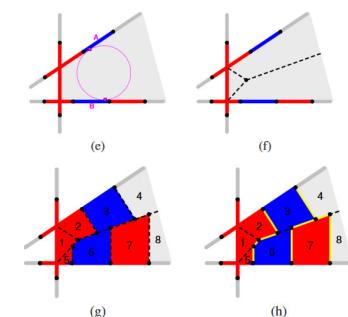
入力：平面に乗った複数の閉曲線

出力：閉曲線を通り、かつ、滑らかな形状を持つメッシュ（境界面）

手法：i) 制約平面の各ペアに対して中立面生成

ii) 閉曲線の作る領域を中立面に射影することで三次元空間を分割し初期メッシュ生成

iii) 初期メッシュを平滑化する

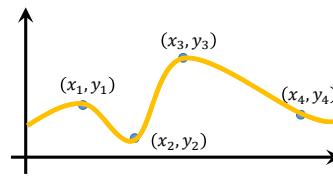


68

## 準備：放射基底関数補間法 1次元

### 補間法

入力： $N$ 点  $x_i$  における値  $y_i, i=1,2\cdots N$   
問題： $f(x_i) = y_i$  を満たす関数  $f$  を求める



### 放射基底関数補間法

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(|x - x_i|) + ax + b$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i = 0$$

$\varphi(t) = t^3$  : カーネル

$f(x_i) = y_i$  を代入し未知数  $\alpha_i, a, b$  を求める。

$$N=4\text{ならば}\cdots \text{ 未知数は}4+2\text{個}$$

$$f(x) = \alpha_1|x - x_1|^3 + \alpha_2|x - x_2|^3 + \alpha_3|x - x_3|^3 + \alpha_4|x - x_4|^3 + ax + b$$

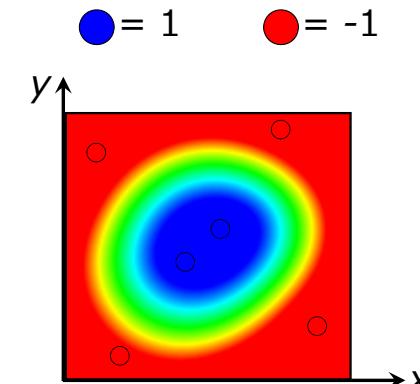
制約は  $4+2$  個  $\rightarrow$  これを解いて  $\alpha_i, a, b$  を決定  
 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2,$   
 $f(x_3) = y_3, f(x_4) = y_4,$   
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$   
 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$

69

## 準備：放射基底関数補間法 $d$ 次元

### 補間法

入力： $N$ 点  $\mathbf{x}_i \in R^d$  における値  $y_i$   
問題： $f(\mathbf{x}_i) = y_i$  を満たす関数  $f$  を求める



### 放射基底関数補間法

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$$

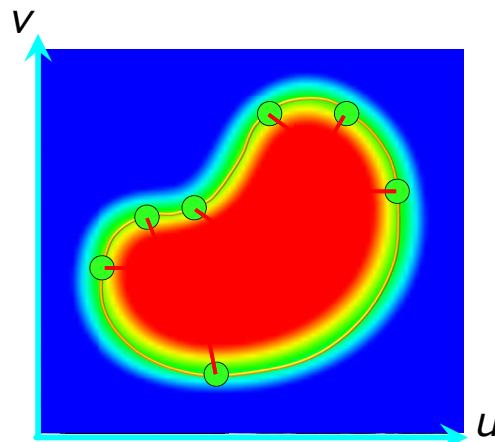
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{x}_i = 0$$

$\varphi(t) = t^3$  : tri-harmonic カーネル

$f(\mathbf{x}_i) = y_i$  を代入し未知数  $\alpha_i, \mathbf{a}, b$  を求める。

70

## 曲面再構成法：陰関数曲面再構成 [Turk and O'Brien 02]

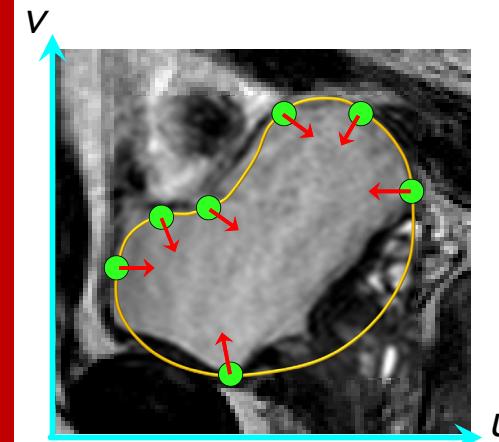


図は[Ijiri et al. EUROGRAPHICS 2013]より

1. 境界の通る点・法線を指定
2. uv空間にスカラー場  $f$  を構築  
 $f(\mathbf{x}) = 0, \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$
3. スカラー場のゼロセットを抽出

71

## 陰関数曲面再構成による領域分割

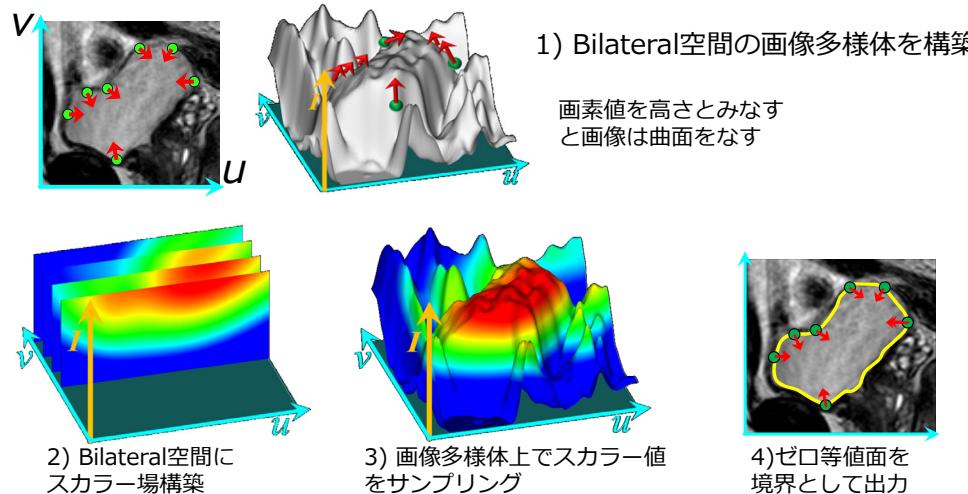


図の出典[Ijiri et al. EUROGRAPHICS 2013]

- 問題：画像のエッジを追従しない**  
→動的輪郭モデルで境界を動かす  
[Aliroteh M et. al. 2007]  
→Bilateral空間への拡張  
[Ijiri et al 2013]

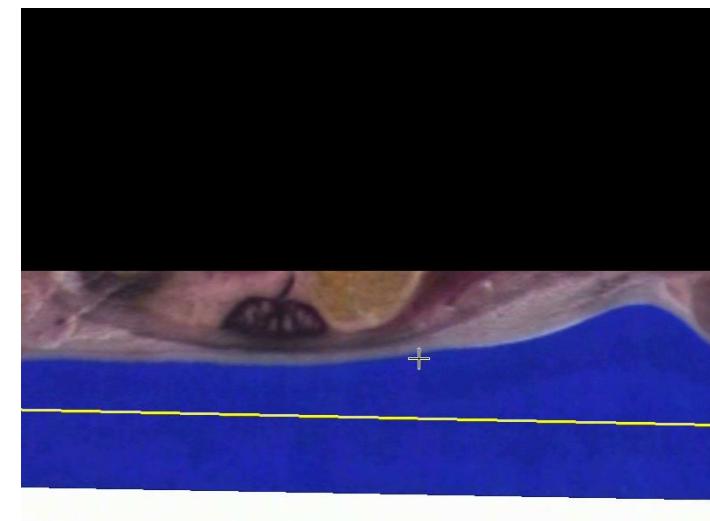
72

## 陰関数曲面再構成による領域分割 [Ijiri et al 2013]



73

## 陰関数曲面再構成による領域分割 [Ijiri et al 2013]



74

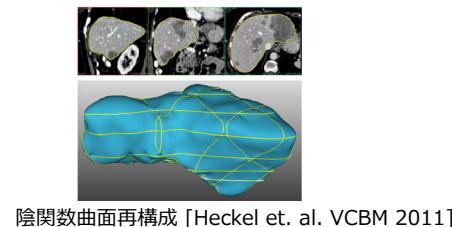
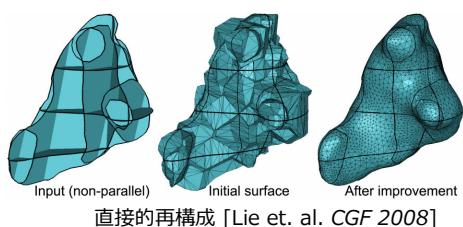
## まとめ：曲面再構成法を応用した領域分割

形状モデリングのための技術を3次元領域分割へ転用

輪郭線制約から三次元境界曲面を生成する

**直接的曲面再構成**：輪郭線頂点を直接つなぎ境界面を構築

**陰関数曲面再構成**：輪郭線から滑らかなスカラー場を構築しそのゼロ等値面を出力



TURK G., O'BRIEN J. F.: Modelling with implicit surfaces that interpolate. ACM TOG 21, 4(2002), 855–873.  
 Heckel F., et. al. : Interactive 3D medical image segmentation with energy-minimizing implicit function. VCBM 35, 2(2011),275–287.  
 Liu L. et. al. : Surface reconstruction from non-parallel curve networks. CGF 27, 2(2008), 155–163.  
 Takashi Ijiri, et. al. Bilateral Hermite Radial Basis Functions for Contour-based Volume Segmentation. CGF, 2013.

75

## まとめ：画像領域分割

- 任意の画像（写真, CT, MRI, 顕微鏡）、任意の関心領域(人物、臓器、腫瘍、細胞内小器官)に対し良い結果を出せる『オールマイティ』な領域分割法は未だ実現されていない
- ユーザは、対象に応じて手法を注意深く選択することが大切(選択肢が多くあることを知っておくだけでも)
- 高度情報処理演習（後期）で領域分割を取り扱うかも

76

## 付録1) Level set法の式変形

$$\varphi(p_x(t), p_y(t), t) = 0 \quad \dots(1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t)}{\partial t} = F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) \mathbf{n} \quad \dots(2)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{||\nabla \varphi||} \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(p_x(t), p_y(t), t)}{\partial t} &= -F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) \nabla \varphi \cdot \frac{\nabla \varphi}{||\nabla \varphi||} \\ &= -F(\kappa_{\mathbf{p}(t)}) ||\nabla \varphi|| \end{aligned}$$

複数変数のchain rule  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$  より  
(1)の両辺をtで微分すると

$$\varphi(x, y, t) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) \cdot \left(\frac{x_t}{y_t}\right)$$

$$(1) \text{は } x=p_x, y=p_y \text{ で } \frac{\partial \varphi(p_x(t), p_y(t), t)}{\partial t} = -\nabla \varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \dots(4)$$

井戻が納得いかずはまった点

$\varphi(p_x, p_y, t)=0$ の両辺を微分したら

$\varphi_t + \frac{\partial \varphi}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_y} \frac{\partial p_y}{\partial t} = 0$ じゃないの?

$\frac{\partial \varphi}{\partial p_x}$ を $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ に書き換えていいの?

答え→良い

$\frac{\partial \varphi}{\partial p_x}$ は関数 $\varphi(p_x, p_y, t)$ の $p_x$ のみを変数と考えて微分すると言うこと

これって結局、 $\varphi(x, y, t)$ の $x$ のみ変数と考えて微分して、 $x = p_x$ を代入するのと同じ事

例...

$\varphi(x, y, t) = \sin x + \cos y + t$  を $x$ で微分する  
 $\varphi(p_x, p_y, t) = \sin p_x + \cos p_y + t$  を $p_x$ で微分する

77

## 付録2) Upwind scheme (風上法) 1/3

$$\text{一次移流方程式を考える: } \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \dots(1)$$

一次移流方程式の理論解は:  $\varphi(x, t) = f(x - ct)$ ,  $f$ は任意の関数



同じ波形が $x$ 軸正方向に速度 $c$ で移動するだけ

一次移流方程式を差分法で離散化して解く!

$$\text{時間微分は前進差分(Foreward in time): } \frac{\partial \varphi(i, t)}{\partial t} = \frac{\varphi(i, n+1) - \varphi(i, n)}{\Delta t}$$

$$\text{位置微分は中心差分(Centroid Difference in Space): } \frac{\partial \varphi(i, t)}{\partial x} = \frac{\varphi(i+1, n) - \varphi(i-1, n)}{2\Delta x}$$

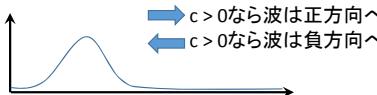
これを(1)に代入すれば $\varphi(i, t)$ から $\varphi(i, t+1)$ を計算できる

この手法はFTCS法とも呼ばれる。実装すれば分かるが非常に不安定 → 風上法

78

## 付録2) Upwind scheme (風上法) 2/3

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \dots(1)$$



風上法: 上流の計算点を利用して位置微分を離散化

$$\frac{\partial \varphi(i, t)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\varphi(i, n) - \varphi(i-1, n)}{\Delta x} & c > 0 \\ \frac{\varphi(i+1, n) - \varphi(i, n)}{\Delta x} & c < 0 \end{cases}$$

FTCSよりも計算が安定  
拡散の効果が出てしまう

風上法を使うと(1)を次の通り離散化できる

$$\frac{\varphi(i, n+1) - \varphi(i, n)}{\Delta t} + c^+ \frac{\varphi(i, n) - \varphi(i-1, n)}{\Delta x} + c^- \frac{\varphi(i+1, n) - \varphi(i, n)}{\Delta x} = 0$$

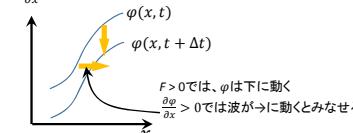
$$c^+ = \max(c, 0), \quad c^- = \min(c, 0)$$

79

## 付録2) Upwind scheme をLevel Set法に適用 3/3

$$\frac{\varphi(i, j, t+1) - \varphi(i, j, t)}{h} = -F_{ij} ||\nabla \varphi|| \quad F_{ij} = \frac{a - b \kappa_{i,j}}{1 + \|\nabla(G \otimes I(i, j))\|} \quad i, j: \text{画素位置}, t: \text{時刻}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0, c > 0$  一次元 $\varphi(x, t)$ で考えると...



波の進行方向を考えると...

$F > 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0$ なら、波は右方向へ $\rightarrow D_x^-$ を利用

$F > 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0$ なら、波は左方向へ $\rightarrow D_x^+$ を利用

$F < 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0$ なら、波は左方向へ $\rightarrow D_x^+$ を利用

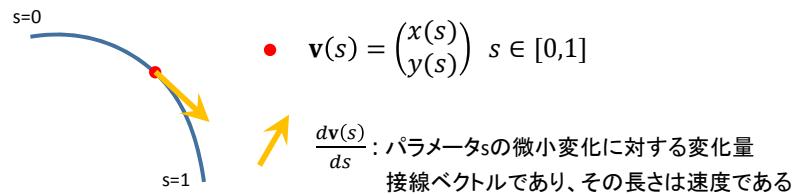
$F < 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0$ なら、波は右方向へ $\rightarrow D_x^-$ を利用  
Y方向も同様

まとめると以下の通り

$$\begin{aligned} D_x^+ &= \frac{\varphi(i+1, j, t) - \varphi(i, j, t)}{\Delta x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} > 0 \\ D_x^- &= \frac{\varphi(i, j, t) - \varphi(i-1, j, t)}{\Delta x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0 \\ D_y^+ &= \frac{\varphi(i, j+1, t) - \varphi(i, j, t)}{\Delta y} & \\ D_y^- &= \frac{\varphi(i, j, t) - \varphi(i, j-1, t)}{\Delta y} & \\ \nabla^+ &= ||\max(D_x^+, -D_x^-, 0)^2 + \max(D_y^-, -D_y^+, 0)^2||^{1/2} \leftarrow F_{ij} \text{が正の時利用} \\ \nabla^- &= ||\max(D_x^+, -D_x^-, 0)^2 + \max(D_y^+, -D_y^-, 0)^2||^{1/2} \leftarrow F_{ij} \text{が負の時利用} \\ \varphi(i, j, t+1) &= \varphi(i, j, t) - h \max(F_{ij}, 0) \nabla^+ - h \min(F_{ij}, 0) \nabla^- \end{aligned}$$

80

### 付録3) パラーメタ表現された空間曲線の1階微分



速度を積分したら弧長(距離)が得られる

$$s=0\text{から}s=a\text{までの弧長} \quad \int_0^a \left\| \frac{dv(s)}{ds} \right\| ds = \int_0^a \sqrt{\left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2} ds$$