

# デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

## デジタルメディア処理2、2017（前期）

4/13 デジタル画像とは : イントロダクション  
4/20 フィルタ処理1 : 画素ごとの濃淡変換、線形フィルタ、非線形フィルタ  
4/27 フィルタ処理2 : フーリエ変換、ローパスフィルタ、ハイパスフィルタ  
5/11 画像の幾何変換1 : (フーリエ級数展開の復習) アフィン変換  
5/18 画像の幾何変換2 : 画像の補間、イメージモザイク  
5/25 画像領域分割 : 領域拡張法、動的輪郭モデル、グラフカット法、  
6/01 前半のまとめ (約30分)と中間試験 (約70分)  
6/08 特徴検出1 : テンプレートマッチング、コーナー・エッジ検出  
6/15 特徴検出2 : DoG特徴量、SIFT特徴量、ハフ変換  
6/22 画像認識1 : パターン認識概論、サポートベクタマシン  
6/29 画像認識2 : ニューラルネットワーク、深層学習  
7/06 画像処理演習 : ImageJを使った画像処理  
7/13 画像処理演習 : Pythonプログラミング  
7/20 後半のまとめ (約30分)と期末試験 (約70分)

### 前回講義に関する質問等

- フーリエ変換
  - 知ってたので特になんとも 若干名
  - 理解できた 若干名
  - わからなかったので不安になった 多数  
→ 説明し直し (すみません。。。)
- 数式周りの詳細を教えてください  
→ 『これなら分かる応用数学教室 金谷健一』を参照してください  
本日以降はなるべく解説します
- 結局教科書はいるの？  
なくても重要部分を学べるように資料を用意しますが、どうしても扱えない部分もあるので知識を広げたい場合には是非。(良い本なのでコスパは良いです)
- お詫び : 前回のアンケート、無記名設定にしたらコメントをくれた人が誰かわからなくなりました。先週分については漏れなく全員に加点します。(1点だけなので正直大した差は出ないのですが。)

### Contents

- 行列とベクトルの復習
- 線形変換 (拡大・縮小 / 回転 / 鏡映 / せん断 / 合成)
- アフィン変換 (平行移動 / 同次座標系)

## 表記について

- スカラー変数はイタリック体 :  $a, b, c$
- ベクトルは小文字ボード体 :  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
- 行列は大文字ボード体 :  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$
- $\mathcal{R}$  を利用して次元を明確に :  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$
- 右肩  $T$  は転置を表す :  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{a}^T = (x \ y)$   
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

CG分野の論文ではよく見かける表記ですが、どの分野もこれというわけではないですので注意してください。

## 線形代数の復習(1)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  のとき以下の計算をせよ

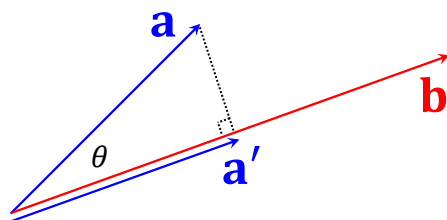
(1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

(2)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

(3)  $\|\mathbf{a}\|$

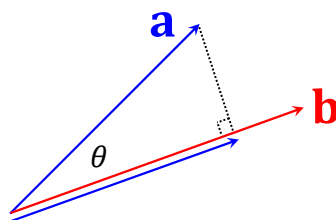
## 内積の意味

$|\mathbf{b}| = 1$  のとき



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  をベクトル  $\mathbf{b}$  に射影し  
両者の長さを掛け合わせたもの

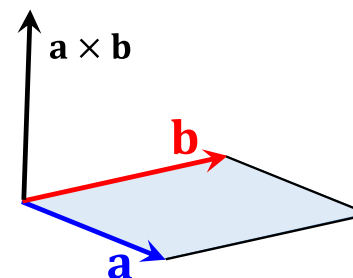


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cos \theta$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  をベクトル  $\mathbf{b}$  に射影した長さ

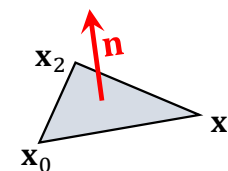
## 外積の意味

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に直交するベクトルを返す  
長さはベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が作る平行四辺形の面積

よくある応用：  
三角形ポリゴンの法線・面積計算



$$\text{法線: } \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}$$

$$\text{面積: } S = \frac{1}{2} |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|$$

## 線形代数の復習(2)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  のとき以下の計算をせよ

- (1)  $\mathbf{A}\mathbf{a}$
- (2)  $\mathbf{a}^T \mathbf{A}$
- (3)  $\mathbf{AB}$
- (4)  $\mathbf{A}$  の行列式  $|\mathbf{A}|$  を求めよ

## 線形代数の復習(3)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ

## 線形代数の復習(4)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  を対角化せよ

## 線形代数の復習(5)

• 行列の対角化は、様々なところで利用する大切な概念

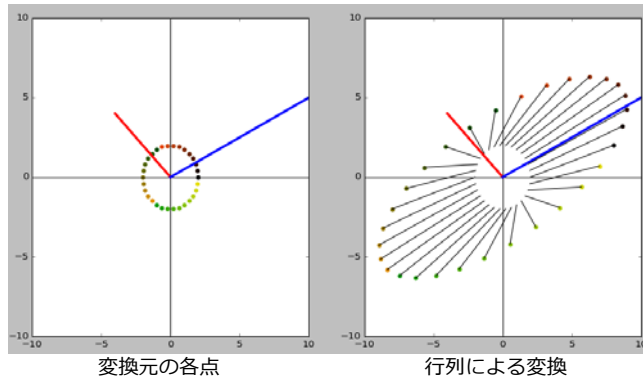
- ベキ乗の高速計算  $\mathbf{A}^{30}$
- 極分解の  $\sqrt{\mathbf{A}}$

• 行列はいつも対角化できるわけではない

- 『 $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  が  $n$ 本の線形独立な固有ベクトルを持つとき,  $\mathbf{A}$ は対角化可能』:  $\mathbf{A}$ の持つ  $n$ 個の固有値がすべて異なれば,  $n$ 本の線形独立な固有ベクトルが存在するので対角化可能.
- 固有値が重複する (固有多項式が重解を持つ) 場合に, 対角化できないことがある.

例) 行列  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  を対角化せよ

## 固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

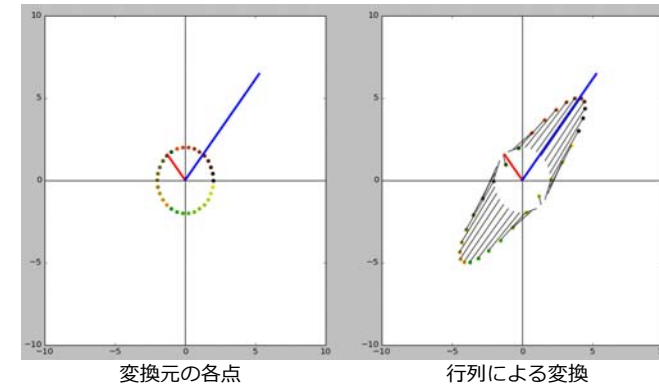
固有値・固有ベクトル

$$2, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る  
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない（一致するのは特殊な場合）  
**固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る**

## 固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

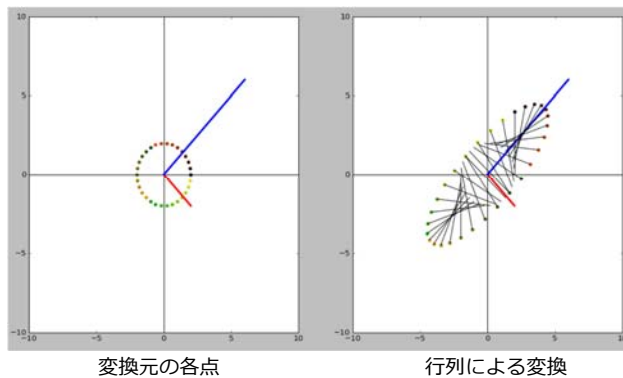
固有値・固有ベクトル

$$\frac{-\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る  
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない（一致するのは特殊な場合）  
**固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る**

## 固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

$$-1, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

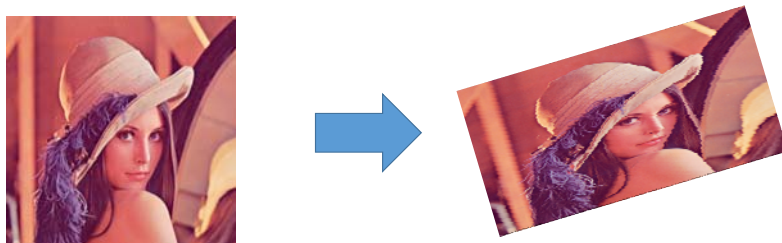
固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る  
**対称行列の固有ベクトルは互いに直行する**  
**対称行列**による変換では、**楕円の主軸と固有ベクトルが一致**  
固有値が負なので固有ベクトルに対して鏡面変換が起こっている

## まとめ：ベクトルと行列の復習

- 画像処理（とCG）に頻出する行列・ベクトル演算の基礎を復習した
  - 行列とベクトルの積
  - 内積・外積
  - 逆行列
  - 固有値・固有ベクトル
  - 対角化

今日復習した内容は色々な分野で頻繁に出てくるので**覚えて**ください

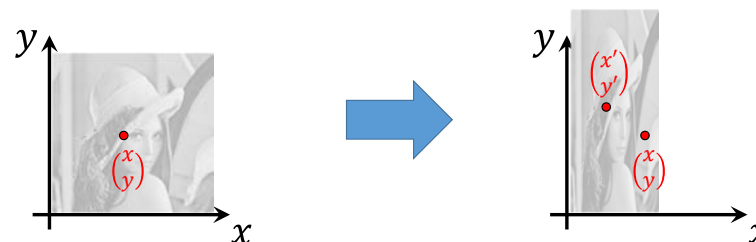
## 画像の線形変換



- 行列の積により画像を変形する線形変換を紹介する
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の**合成**も行なえる

## 線形変換

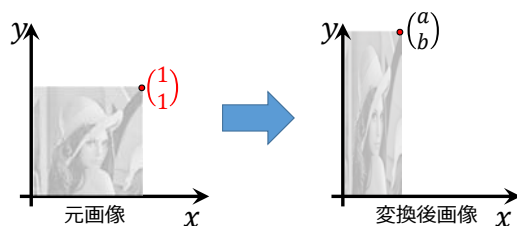
- 画像は2次元座標系に配置されているとする
  - 教科書に合わせて左下を原点とする
  - 環境(Windowsとか)によっては左上が原点のことも多い
- 空間内の全ての点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をかけ、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変形する
  - つまり2次元空間全体が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により歪められる



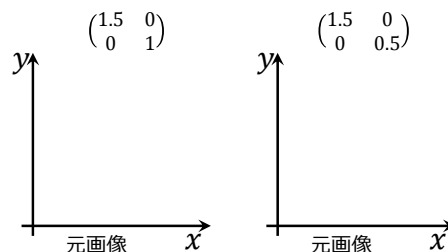
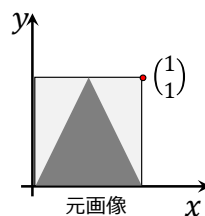
## 拡大縮小

X軸方向に $s_x$ 倍, y軸方向に $s_y$ 倍する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



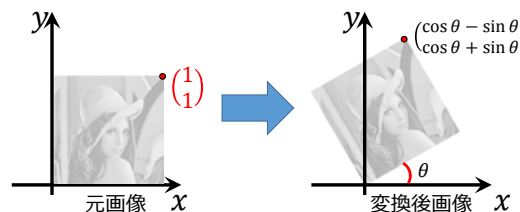
練) 変換結果を図示し  
点(1,1)の移動後の座標を示せ



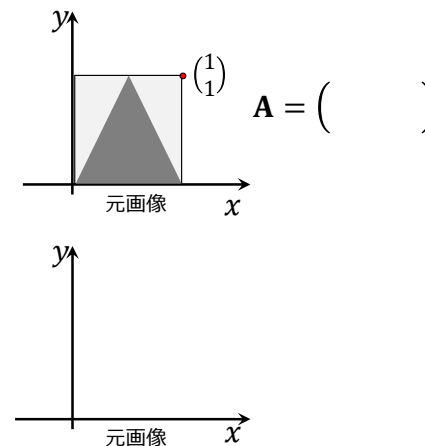
## 回転

原点を中心に角度 $\theta$ だけ回転する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



練)  $\theta = \pi/6$  の回転行列 $\mathbf{A}$ を示せ  
 $\mathbf{A}$ により下画像の変換結果を図示せよ  
また, 点(1,1)の移動後の座標を示せ

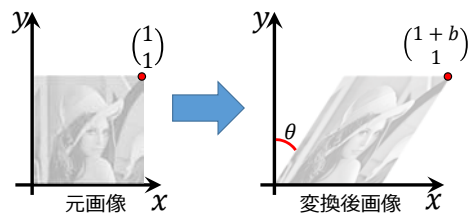


## せん断 (スキュー)

X軸方向に角度 $\theta$ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

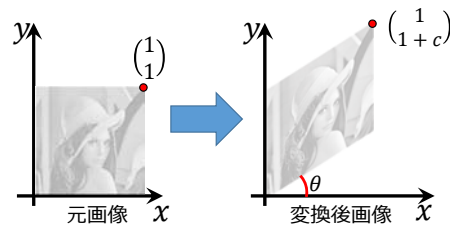
ただし  $b = \tan \theta$



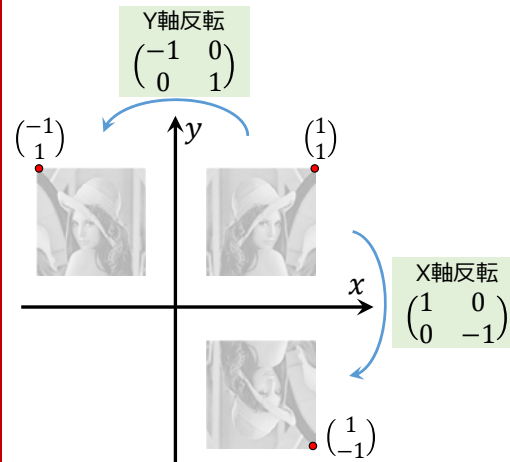
Y軸方向に角度 $\theta$ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

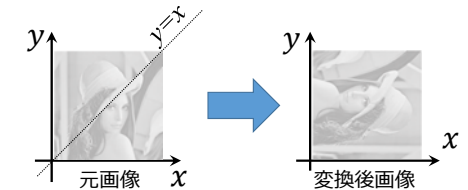
ただし  $c = \tan \theta$



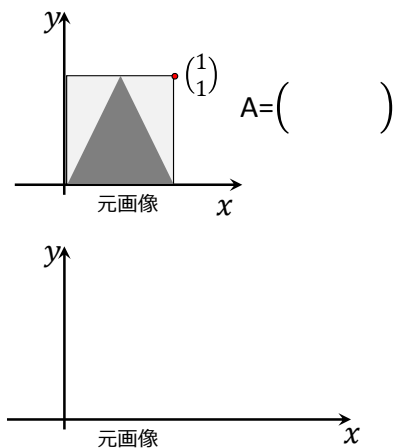
## 鏡映: 直線に対して反転する変換



$$y=x \text{ を軸に反転} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- 練習
- $\theta = \pi/4$  のx軸方向せん断変換 $\mathbf{A}$ を示せ
  - $\mathbf{A}$ による下画像の変換結果を図示せよ
  - $\mathbf{A}$ による点 $(1, 1)$ の移動後の座標を示せ



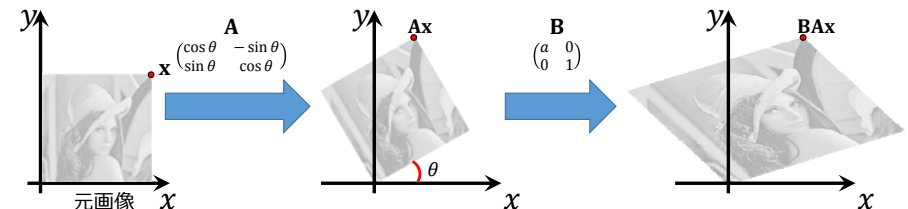
- $\theta = \pi$ の回転変換行列を示せ
- Y軸に対して鏡映変換し、さらにX軸に対して鏡映変換する変換をひとつの行列で示せ

## 線形変換：合成

2つ以上の変換を続けて行う状況を考える

- 例1)  $\theta$ 回転し、さらにx軸方向に  $a$  倍に拡大
- 例2) x軸方向に45度せん断し、さらに45度回転

→ 複数の連続した変換はひとつの線形変換で表現できる



この2ステップの変換は、 $\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ というひとつの線形変換とみなせる

ちょっと蛇足ですが。。

- 角度  $\theta + \phi$  回転する回転行列は  $\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}$  と定義される
- 一方  $\theta$  回転してから  $\phi$  回転しても同じことなので,

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

この右辺を整理すると

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}$$

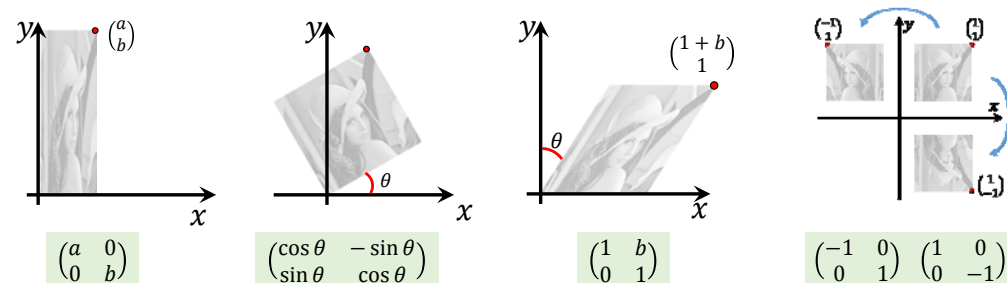
となり

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

が現れる (もう覚えなくていい)

## 画像の線形変換：まとめ



- 行列の積により様々な変換が行える
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の合成も行なえる

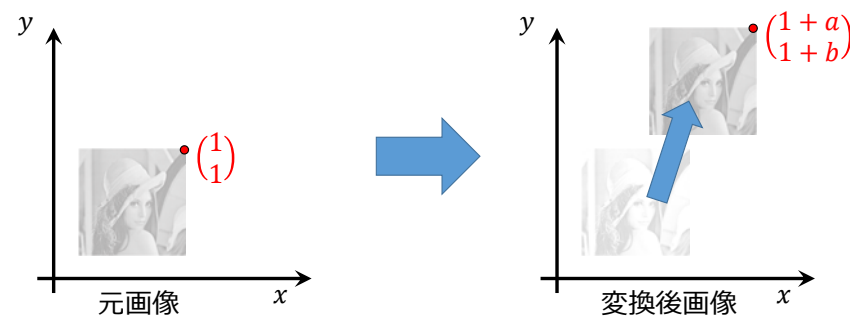
## Affine変換と同次座標系

### 平行移動

(X,Y)方向に $(a, b)$ だけ平行移動する変換

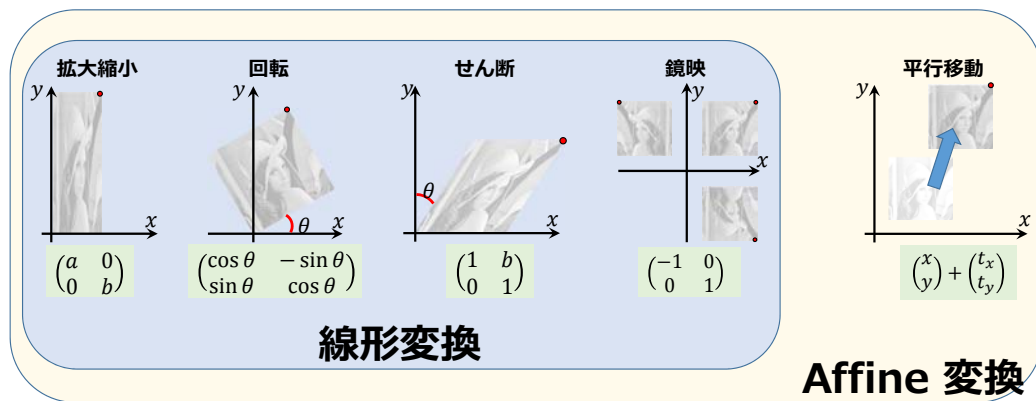
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

※これは行列の積ではないので  
線形変換ではない



## Affine 変換

- 平行移動と線形変換により得られる変換のこと
- 英語発音は「アファイン」だけど、アフィンと読む人も多い



## 同次座標系表現

2次元座標  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を 3次元ベクトル  $\begin{pmatrix} wx \\ wy \\ w \end{pmatrix}$  と表記する方法

同じ2次元座標を表す同次座標を同値であると言い、式では『 $\sim$ 』記号で表す

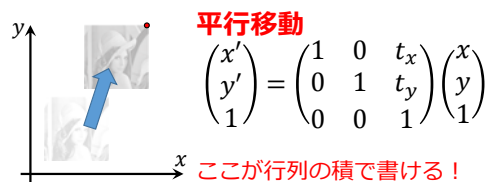
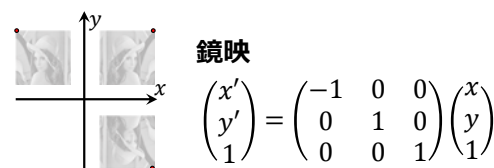
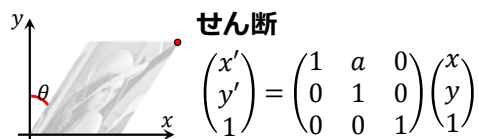
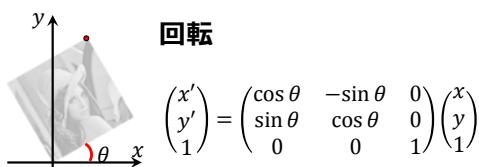
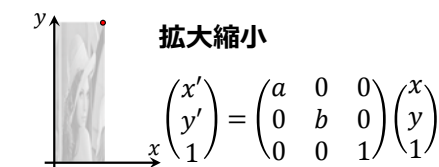
例) 2次元座標  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  は、同次座標で  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  や  $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$  や  $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$  と表せる

例) 同次座標  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$  は同値である、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$

とりあえず  $w = 1$  の場合を考える

2次元座標  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は、同次座標では  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  と表記できる

## アフィン変換の 同次座標表現



## 同時座標表現の利点

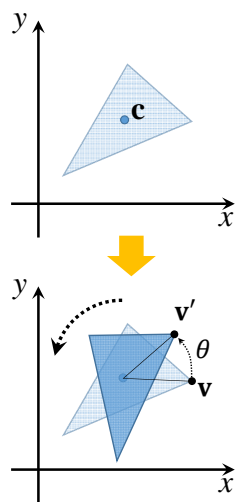
平行移動を行列の積で表せる

つまりアフィン変換を行列の積の形で表現できる

拡大縮小	回転	せん断	鏡映	平行移動
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



## 同時座標表現の利点



例: 重心 $(c_x, c_y)$ を中心に反時計回りに $\theta$ 回転

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

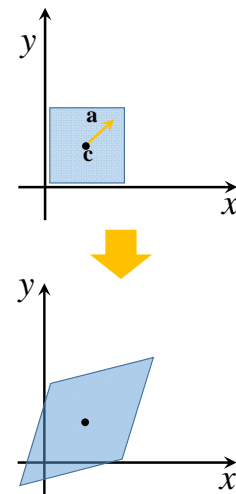
$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(c)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-c)\mathbf{v} \quad \leftarrow \text{順番に変換行列を掛ける}$$

変換すべてが行列の形で書けるので

- **変換の順序が分かりやすい**
- **変換行列の積を一つの行列として前計算可能:  $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$**

## 同時座標表現の利点: もう少し複雑な例



例) 重心 $(c_x, c_y)$ を固定して軸 $\mathbf{a}$ 方向に  $s$ 倍

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos-\theta & -\sin-\theta \\ \sin-\theta & \cos-\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(c)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{S}(s,1)\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{T}(-c)\mathbf{v}$$

$$\mathbf{T}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\theta$ は $\mathbf{a}$ と $x$ 軸の成す角

変換すべてが行列の形で書けるので

- **変換の順序が分かりやすい**
- **変換行列の積を一つの行列として前計算可能:  $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$**

## まとめ: アフィン変換と同次座標系

平行移動と線形変換 (回転・拡大など行列積による変換) で可能な変換を**アフィン変換**と呼ぶ

二次元空間の点  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は**同次座標系**で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる

同次座標系表現における基本的な変換行列は以下の通り

拡大 Scaling	回転 Rotation	せん断 Skew	鏡映 Reflectance	平行移動 Translation
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 射影変換

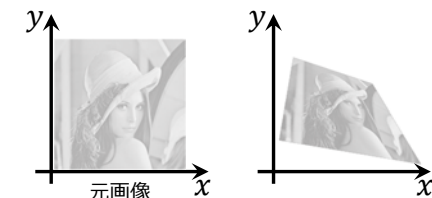
- 同次座標系表現した, affine変換の基本変換は, 左下2要素は0, 右下は1
- これらを合成しても, 左下の2要素は0, 右下は1のまま

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{合成} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 同次座標系表現において, より一般的な下の形の変換を**射影変換**と呼ぶ

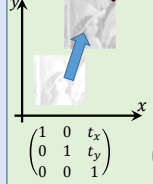
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

射影変換では, 第三要素が1でなくなる可能性がある, この式は『=』でなく『同値~』を使って表現される

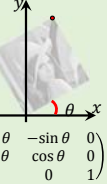


## 変換の名称と包含関係

平行移動



回転



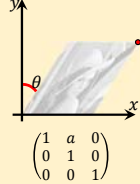
拡大縮小



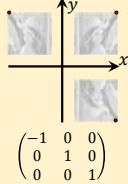
ユークリッド変換  
剛体変換

相似変換  
(x軸y軸の拡大率が等しいときのみ)

せん断



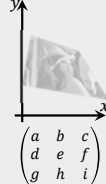
鏡映



Affine変換

直線性を持つ  
平行性を持つ

射影変換



射影変換

直線性を持つ  
平行性なし