

コンピュータビジョン

担当: 井尻 敬

5/14に更新

Contents

01. 序論 : イントロダクション
02. 特徴検出1 : テンプレートマッチング、コーナー検出、エッジ検出
03. 特徴検出2 : ハフ変換、DoG, SIFT特徴
04. 領域分割 : 領域分割とは、閾値法、領域拡張法、グラフカット法、
05. オプティカルフロー : 領域分割残り, Lucas-Kanade法
06. パターン認識基礎1 : パターン認識概論, サポートベクタマシン
07. パターン認識基礎2 : ニューラルネットワーク、深層学習
08. パターン認識基礎3 : 主成分分析, オートエンコーダ
09. 筆記試験
10. プログラミング演習 1 : PC室
11. プログラミング演習 2 : PC室
12. プログラミング演習 3 : PC室
13. プログラミング演習 4 : PC室
14. プログラミング演習 5 : PC室

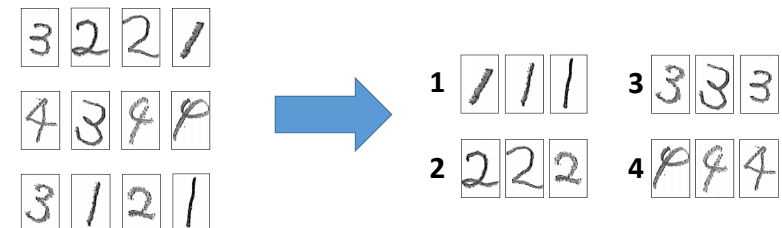
Contents

- (復習) パターン認識とは
- パーセプトロン
- ニューラルネットワーク

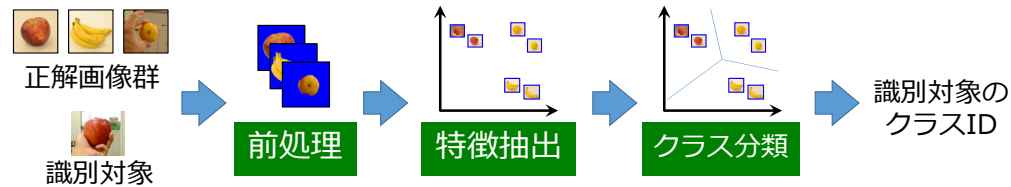
パターン認識

『データの中の規則性を自動的に見つけ出し、その規則性を使ってデータを異なるカテゴリに分類する処理』 (PRML, C.M. Bishop)

例) 手書き文字画像の認識

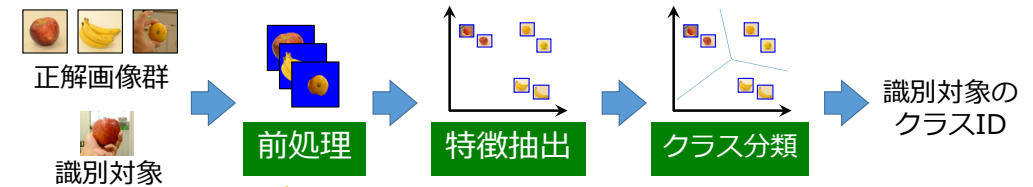


クラス分類の一般的な処理手順



7

クラス分類の一般的な処理手順



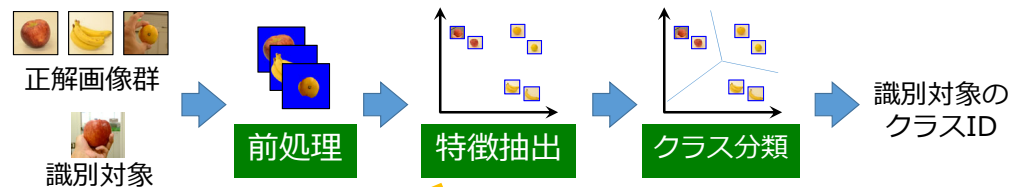
特徴抽出のための前処理

データが画像ならば…

二値化、平滑化、鮮鋭化、特徴保存平滑化、など

8

クラス分類の一般的な処理手順



入力データ群に対し、同じクラスは近く・異なるクラス遠くなるような特徴空間にデータを射影する

良い特徴空間を構築するには、知識・経験・試行錯誤が必要

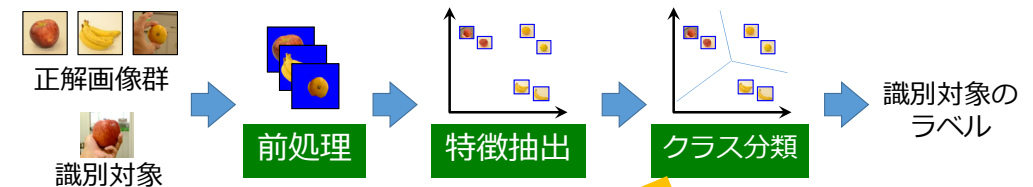
画像認識：HLAC・SIFT・HoG特徴などが有名

※最近流行りの深層学習は特徴量の設計もデータから学習する

※深層学習の発展に伴い、人がデザインした特徴量は「Hand Craftな」特徴量と呼ばれる

9

クラス分類の一般的な処理手順



正解データ群を利用して特徴空間を分割する（訓練）

識別対象を特徴空間に射影し、上記の分割結果を用いてラベルを割り振る

クラス分類の手法

K-Nearest Neighbor, ベイズ決定則, 決定木 (random forests), サポートベクタマシン
ニューラルネットワーク, etc…

10

パーセプトロン

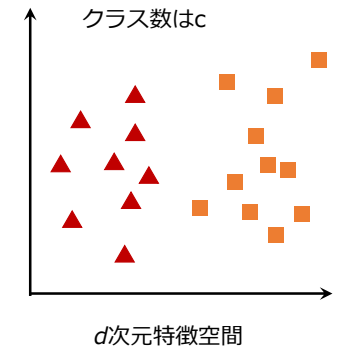
11

パーセプトロン：問題

簡単な2クラス分類問題を考える

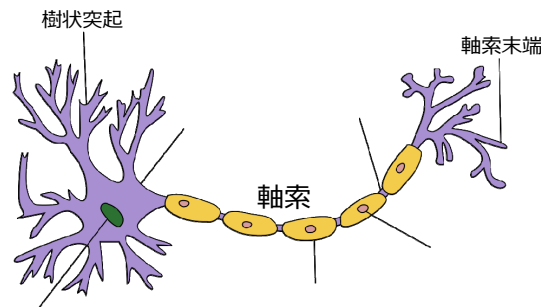
- 教師データ： (\mathbf{x}_i, b_i)
 - \mathbf{x}_i ： d 次元の特徴ベクトル
 - b_i ：教師信号

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x}_i \text{ がクラス1に属する} \\ 0 & \text{if } \mathbf{x}_i \text{ がクラス2に属する} \end{cases}$$
 - クラス数は2
 - 線形分離可能（超平面で分割可能）
- この下で特徴空間を2分割したい



12

神経細胞（ニューロン）

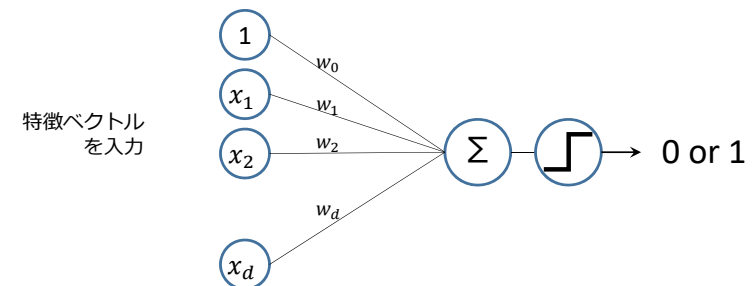


By Quasar Jarosz
[CC-BY-SA-3.0]

- 神経細胞：神経系を構成する単位
 - 樹状突起：他の細胞から信号を受け取る（複数ある）
 - 軸索末端：他の細胞へ信号を伝達する
 - 入力される電気信号の総和がある閾値を超えると、軸索を通じて次の細胞へ信号を送る（発火）
- ※ これはニューラルネットの説明のときに良く使われるだいたい簡略化した説明です。

13

パーセプトロン：ニューロンの振る舞いをモデル化



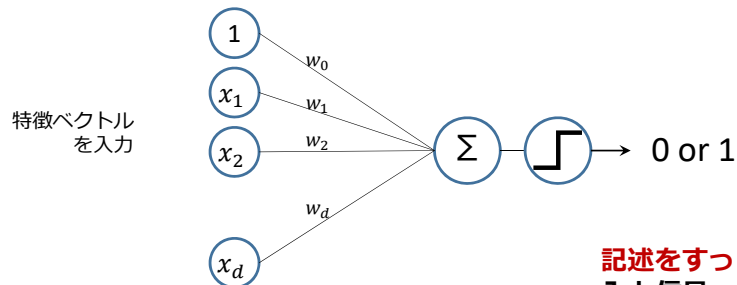
- 入力信号 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ の重み付け和を計算： $w_0 + \sum_i w_i x_i$
- 閾値処理

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_0 + \sum_i w_i x_i \geq 0 \\ 0 & \text{if } w_0 + \sum_i w_i x_i < 0 \end{cases}$$

※教科書にはバイアス項 w_0 についての記載がないのですが、ここでは『わかりやすいパターン認識』に順じてバイアス項を記載しています

14

パーセプトロン：ニューロンの振る舞いをモデル化



1. 入力信号 \mathbf{x} の重み付け和を計算： $\mathbf{w}^T \mathbf{x} = \sum_i w_i x_i$
2. 閾値処理

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \geq 0 \\ 0 & \text{if } \mathbf{w}^T \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

記述をすっきりさせました
 入力信号 $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_d)$
 重み $\mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_d)$

確認
 重み \mathbf{w} が未知です
 大量の教師データを使ってよい
 \mathbf{w} を発見します

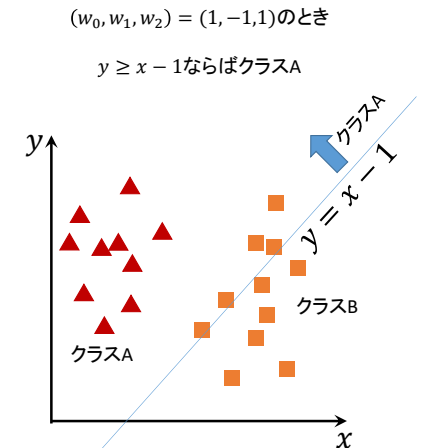
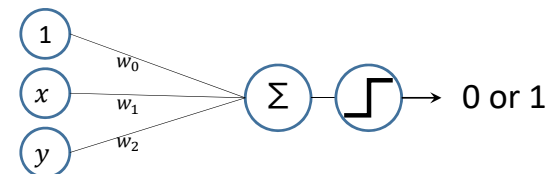
15

パーセプトロンの直感的な説明

- 特徴空間が2次元の2クラス分類を考える
- 教師データ $(\mathbf{x}_1, b_1), \dots, (\mathbf{x}_N, b_N)$
 - $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$
 - $b_i = 0$: クラスA
 - $b_i = 1$: クラスB

- 教師データから重み (w_0, w_1, w_2) を学習
- 重みを使ってクラスわけ

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_0 + w_1 x + w_2 y \geq 0 \\ 0 & \text{if } w_0 + w_1 x + w_2 y < 0 \end{cases}$$



教師データ▲■を正しく分類できていないので
 この (w_0, w_1, w_2) はだめ

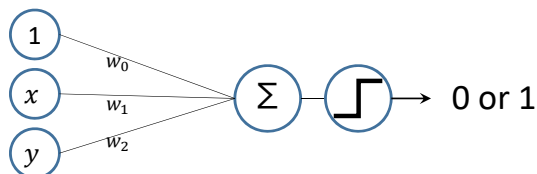
16

パーセプトロンの直感的な説明

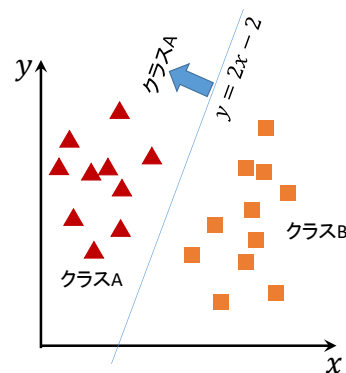
- 特徴空間が2次元の2クラス分類を考える
- 教師データ $(\mathbf{x}_1, b_1), \dots, (\mathbf{x}_N, b_N)$
 - $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$
 - $b_i = 0$: クラスA
 - $b_i = 1$: クラスB

- 教師データから重み (w_0, w_1, w_2) を学習
- 重みを使ってクラスわけ

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_0 + w_1 x + w_2 y \geq 0 \\ 0 & \text{if } w_0 + w_1 x + w_2 y < 0 \end{cases}$$



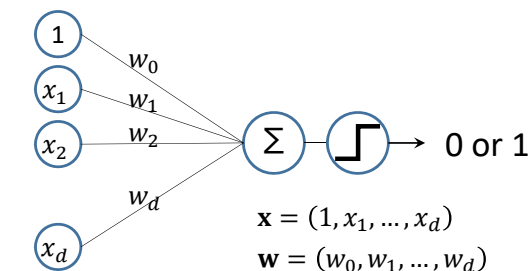
$(w_0, w_1, w_2) = (2, -2, 1)$ のとき
 $y \geq 2x - 2$ ならば クラス1



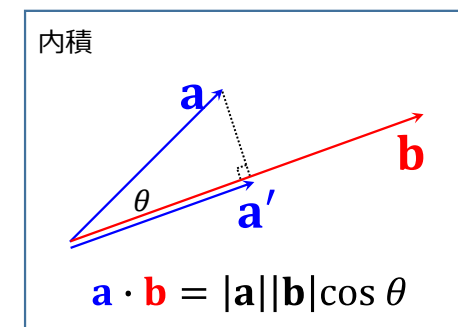
この (w_0, w_1, w_2) はよさそう
 パーセプトロンは特徴空間を超平面で
 分割する手法

17

パーセプトロンの性質



- 特徴ベクトル \mathbf{x} と重みベクトル \mathbf{w} の内積が0以上なら1を出力
- 特徴ベクトル \mathbf{x} と重みベクトル \mathbf{w} が **似ていたら** 1を出力



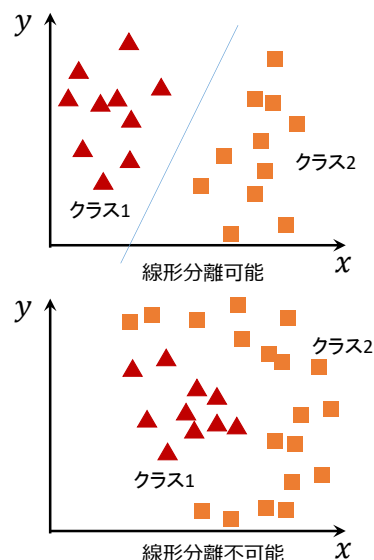
18

パーセプトロン

- 超平面で分割できないデータ群はどうするの？

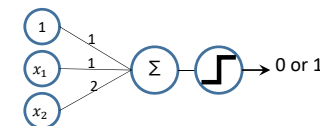
→ パーセプトロンで扱えるのは線形分離可能な問題のみ

- どうやって重みを学習するの？



練習問題

(1) 重み(1, 1, 2)の2Dデータ用単純パーセプトロン(右図)がある。2つのデータ(-2, 3)と(1, -3)を入力した際の出力をそれぞれ示せ。



(2) 単純パーセプトロンに関する説明のうち、正しいものを選択せよ

単純パーセプトロンの出力は確率値 (0~1) である

単純パーセプトロンの出力は 0 or 1 の2値である

単純パーセプトロンは、重みを正しく調整すれば全ての2クラス分類問題を正しく解ける

単純パーセプトロンは、重みをどんなに調整しても全ての2クラス分類問題を解けるわけではない

単純パーセプトロンは、OR演算(論理演算)を表現できる

単純パーセプトロンは、AND演算(論理演算)を表現できる

単純パーセプトロンは、XOR演算(論理演算)を表現できる

パーセプトロン：重みの学習

- 入力 : 教師データ (x_i, b_i)
 - $x_i \in R^d, b_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, N$
- 出力 : 教師データを正しく分割する重み w

学習アルゴリズム

- 重みベクトル適当(乱数など)に初期化 w
- 教師データ群からデータをひとつ選ぶ (x, b)
- 現在の重み w で x を識別し結果が誤っているとき
 - $w \leftarrow w + \rho x$ (クラスAに対して $w^T x < 0$ とした)
 - $w \leftarrow w - \rho x$ (クラスBに対して $w^T x \geq 0$ とした)
- 全教師データに対して2,3を繰り返す。
- 全教師データを正しく識別で来たら終了

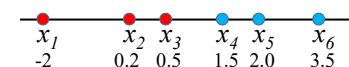
パーセプトロン：重みの学習

- 入力 : 教師データ (x_i, b_i)
 - $x_i \in R^d, b_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, N$
- 出力 : 教師データを正しく分割する重み w

学習アルゴリズム

- 重みベクトル適当(乱数など)に初期化 w
- 教師データ群からデータをひとつ選ぶ (x, b)
- 現在の重み w で x を識別し結果が誤っているとき
 - $w \leftarrow w + \rho x$ (クラスAに対して $w^T x < 0$ とした)
 - $w \leftarrow w - \rho x$ (クラスBに対して $w^T x \geq 0$ とした)
- 全教師データに対して2,3を繰り返す。
- 全教師データを正しく識別で来たら終了

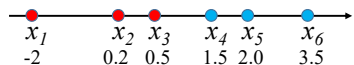
下の例を使ってこのアルゴリズムの動作を見ていきます



教師データ

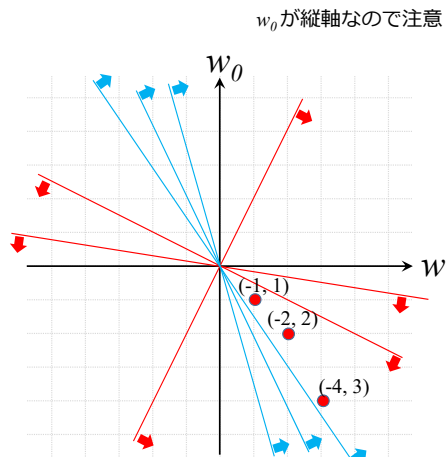
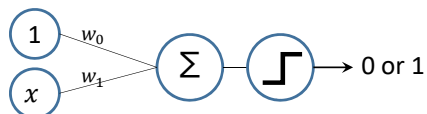
$x_1 = -2.0$, クラス2
 $x_2 = 0.2$, クラス2
 $x_3 = 0.5$, クラス2
 $x_4 = 1.5$, クラス1
 $x_5 = 2.0$, クラス1
 $x_6 = 3.5$, クラス1

パーセプトロン：重みの学習



教師データを正しく分類するための条件は

| | |
|---------------------|------------------------|
| $x_1 = -2.0$, クラスB | $w_0 - 2.0 w_1 < 0$ |
| $x_2 = 0.2$, クラスB | $w_0 + 0.2 w_1 < 0$ |
| $x_3 = 0.5$, クラスB | $w_0 + 0.5 w_1 < 0$ |
| $x_4 = 1.5$, クラスA | $w_0 + 1.5 w_1 \geq 0$ |
| $x_5 = 2.0$, クラスA | $w_0 + 2.0 w_1 \geq 0$ |
| $x_6 = 3.5$, クラスA | $w_0 + 3.5 w_1 \geq 0$ |



$(w_0, w_1) = (-1, 1), (-2, 2), (-4, 3)$
などは条件を満たす重み

1. ランダムに重みの初期値を決定
以下を全教師データが識別できるまで繰り返す
2. 教師データ群からデータをひとつ選ぶ (x, b)
3. 現在の重み w で x を識別し結果が誤っているとき

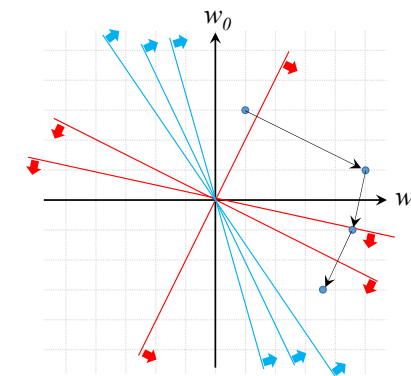
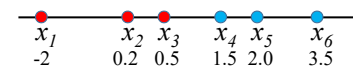
$$w \leftarrow w + \rho x \quad \text{クラスAに対して } w^T x < 0 \text{とした}$$

$$w \leftarrow w - \rho x \quad \text{クラスBに対して } w^T x \geq 0 \text{とした}$$

$\rho = 2.0$ として

1. 初期値決定 $w = (3, 1)$

| |
|---|
| $x = -2.0$ を確認 $\rightarrow 3 + 1.0 * (-2.0) > 0$ 誤 $\rightarrow w = (3, 1.0) - 2 * (1, -2.0) = (1, 5)$ |
| $x = 0.2$ を確認 $\rightarrow 1 + 5.0 * (0.2) > 0$ 誤 $\rightarrow w = (1, 5.0) - 2 * (1, 0.2) = (-1, 4.6)$ |
| $x = 0.5$ を確認 $\rightarrow -1 + 4.6 * (0.5) > 0$ 誤 $\rightarrow w = (-1, 4.6) - 2 * (1, 0.5) = (-3, 3.6)$ |
| $x = 1.5$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (1.5) > 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |
| $x = 2.0$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (2.0) > 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |
| $x = 3.5$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (3.5) > 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |
| $x = -2.0$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (-2.0) < 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |
| $x = 0.2$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (0.2) < 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |
| $x = 0.5$ を確認 $\rightarrow -3 + 3.6 * (0.5) < 0$ OK $w = (-3, 3.6)$ |



1. ランダムに重みの初期値を決定
以下を全教師データが識別できるまで繰り返す
2. 教師データ群からデータをひとつ選ぶ (x, b)
3. 現在の重み w で x を識別し結果が誤っているとき

$$w \leftarrow w + \rho x \quad \text{クラスAに対して } w^T x < 0 \text{とした}$$

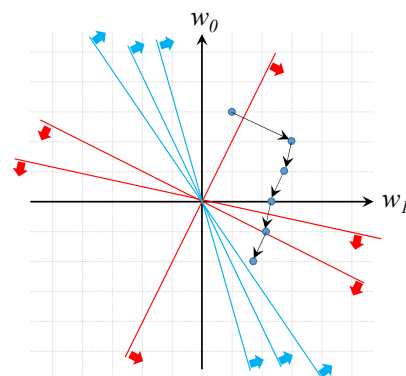
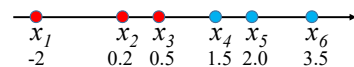
$$w \leftarrow w - \rho x \quad \text{クラスBに対して } w^T x \geq 0 \text{とした}$$

$\rho = 1.0$ として

- 初期値決定 $w = (3, 1)$

| |
|---|
| $x = -2.0$ を確認 $\rightarrow 3 + 1.0 * (-2.0) > 0 \rightarrow w = (3, 1.0) - 1 * (1, -2.0) = (2, 3)$ |
| $x = 0.2$ を確認 $\rightarrow 2 + 3.0 * (0.2) > 0 \rightarrow w = (2, 3.0) - 1 * (1, 0.2) = (1, 2.8)$ |
| $x = 0.5$ を確認 $\rightarrow 1 + 2.8 * (0.5) > 0 \rightarrow w = (1, 2.8) - 1 * (1, 0.5) = (0, 2.3)$ |
| $x = 1.5$ を確認 $\rightarrow 0 + 2.3 * (1.5) > 0$ OK $w = (0, 2.3)$ |
| $x = 2.0$ を確認 $\rightarrow 0 + 2.3 * (2.0) > 0$ OK $w = (0, 2.3)$ |
| $x = 3.5$ を確認 $\rightarrow 0 + 2.3 * (3.5) > 0$ OK $w = (0, 2.3)$ |
| $x = -2.0$ を確認 $\rightarrow 0 + 2.3 * (-2.0) < 0$ OK $w = (0, 2.3)$ |
| $x = 0.2$ を確認 $\rightarrow 0 + 2.3 * (0.2) > 0 \rightarrow w = (0, 2.3) - 1 * (1, 0.2) = (-1, 2.1)$ |
| $x = 0.5$ を確認 $\rightarrow -1 + 2.1 * (0.5) > 0 \rightarrow w = (-1, 2.1) - 1 * (1, 0.5) = (-2, 1.6)$ |

以降、全てを満たすので更新無し



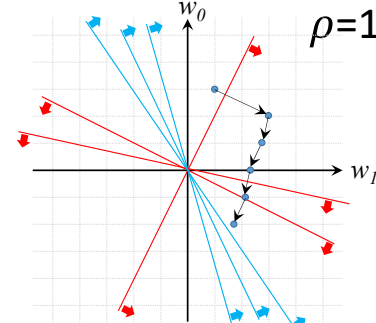
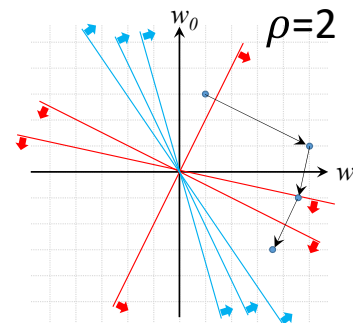
パーセプトロン：重みの学習

1. ランダムに重みの初期値を決定
以下を全教師データが識別できるまで繰り返す
2. 教師データ群からデータをひとつ選ぶ (x, b)
3. 現在の重み w で x を識別し結果が誤っているとき

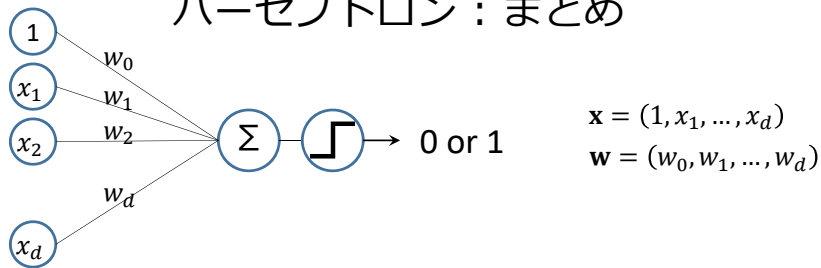
$$w \leftarrow w + \rho x \quad \text{クラスAに対して } w^T x < 0 \text{とした}$$

$$w \leftarrow w - \rho x \quad \text{クラスBに対して } w^T x \geq 0 \text{とした}$$

- ひとつずつデータをチェックし、誤識別していたら重みを更新
- 各教師データは重み空間の超平面として重みベクトルあるべき位置を示し、誤識別の際は正しい方向に重みを更新する
- ρ は更新の際の幅を示す



パーセプトロン：まとめ



パーセプトロンとはニューロンの振る舞いをモデル化した識別器

識別: 入力信号 \mathbf{x} の重付け和(内積)を計算し閾値処 $f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \geq 0 \\ 0 & \text{if } \mathbf{w}^T \mathbf{x} < 0 \end{cases}$

学習: 教師データ (\mathbf{x}_i, b_i) を順番に利用し, 重みベクトル \mathbf{w} を更新する

限界: 上記のモデルは2クラス分類 & 線形分離可能なときのみ有効

※学習過程を1Dの例を用いて解説しました. 是非2Dや3Dの例についても考えてみてください

30

ニューラルネットワークへ

- ここでは, どのような仕組みで動作するかを中心に解説します.
- 学習法の詳細は『深層学習 (岡谷 貴之)』を読むか, 『誤差逆伝播法 (back propagation)』で検索してください
- 井尻も試行錯誤してみたのですが, 九州大学内田誠一先生の講義資料がとても分かりやすく, これよりうまい説明ができそうになかったのでそちらに習って解説します
- ↓内田先生の講義資料
- <https://www.slideshare.net/SeiichiUchida/ss-71479583>

31

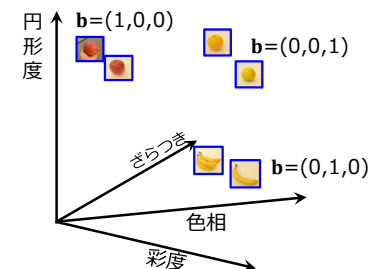
解きたい問題

- 入力: N 個の教師データ $(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}_i)$, $i = 1, \dots, N$
 - $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ は d 次元の特徴ベクトル
 - $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^c$ は c 次元の教師信号
 - c はクラス数
 - \mathbf{x}_i がクラス $k \rightarrow \mathbf{b}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ k 成分だけ1
- 出力: 関数 $g(\mathbf{x})$
 - $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^c$
 - 教師データを正しく分類できる
 - $g(\mathbf{x}_i) = (b_1, b_2, \dots, b_c)$
 - \mathbf{x}_i が k 番目のクラス $\rightarrow b_k > b_i \quad i \neq k$

例

• 果物写真の分類

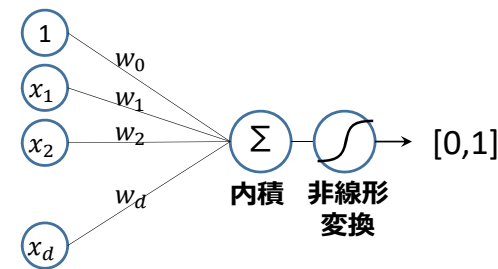
- 特徴ベクトルは4D
→ (円形度, 彩度, 色相, ざらつき)
- クラス数は3
→ (りんご, バナナ, みかん)



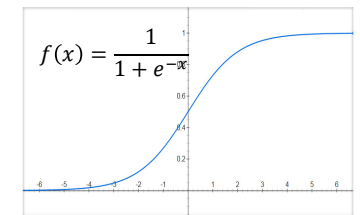
32

ニューラルネットワーク: ユニット

- ニューラルネットワークを構成する最小単位をユニット (又はニューロン) と呼ぶ
- ユニットは, 重み係数 \mathbf{w} と非線形関数 f を持つ
- 入力信号 \mathbf{x} を受け取り, 係数との内積 $\mathbf{w}^T \mathbf{x}$ を計算し, 非線形関数にかけて実数値を返す
- 入力信号 \mathbf{x} が係数 \mathbf{w} と似ていると大きな値を返す



非線形変換部分には, シグモイド関数などが利用される



シグモイド関数

※非線形変換がないとこのユニットを直列につなぐうまみは無いです.

33

練習問題

(1) 次のうち、単純パーセプトロンに関する説明として正しいものをすべて選びなさい。

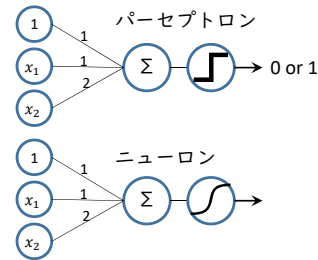
- A. 学習率 ρ が小さいほど、必ず分類性能が良くなる
- B. 学習率 ρ が大きいほど、必ず分類性能が良くなる ρ は性能に無関係
- C. 同じデータを使って学習をした場合でも初期重みによって異なる結果になることがある

(2) 重み $(1, 1, 2)$ の2Dデータ用単純パーセプトロン（右図）がある。この出力が1ならクラスA、0ならクラスBとする。教師データ $\{(-2, 3), \text{クラスB}\}$ を利用して学習を1ステップだけ行い、重みを更新せよ。ただし $\rho=1.0$ とする。

(3) 2次元ベクトルを入力とするニューロン（ユニット）があり、重みは $(1, 1, 2)$ である。また、活性化関数にはReLUが設定されている。このニューロンに $(1, -2)$ 、 $(3, -1)$ を入力した際の出力を求めよ

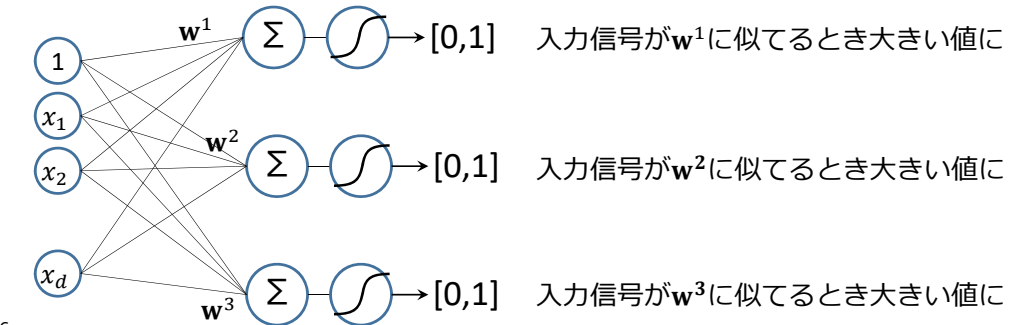
$$\text{ReLU関数 } f : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

34



ニューラルネットワーク: ユニットを並列につなぐ

- ユニットは入力信号が重みと似ているときに大きな値をかえすので…
- 複数のユニットを並列に並べたら、複数クラスを扱えるのでは？

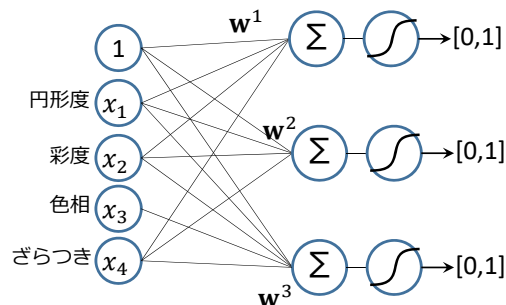


36

ニューラルネットワーク: ユニットを並列につなぐ

• 果物写真の分類を考える

- 特徴ベクトルは4D → (円形度, 彩度, 色相, ざらつき)
- クラス数は3 → (りんご, バナナ, みかん)



w^1 はりんごの写真が持つ特徴ベクトルに似せておく

w^2 はバナナの写真が持つ特徴ベクトルに似せておく

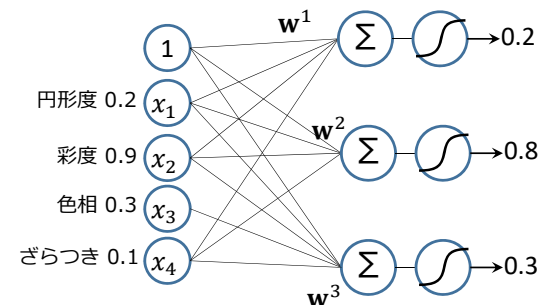
w^3 はみかんの写真が持つ特徴ベクトルに似せておく

37

ニューラルネットワーク: ユニットを並列につなぐ



- 左のバナナの写真が入力されたとき…
- (円形度, 彩度, 色相, ざらつき) = $(0.2, 0.9, 0.3, 0.1)$
- クラス数は3 → (りんご, バナナ, みかん)



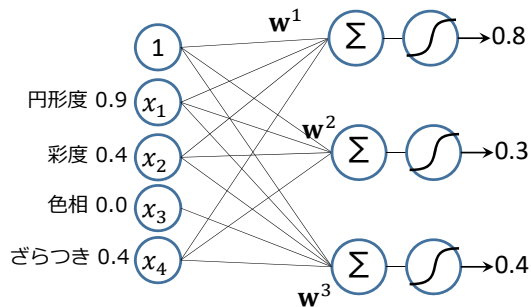
$(0.2, 0.8, 0.3)$ が出力されたのでクラス2に分類しよう

38

ニューラルネットワーク: ユニットを並列につなぐ



- 左のりんごの写真が入力されたとき…
- (円形度, 彩度, 色相, ざらつき) = (0.9, 0.4, 0.0, 0.4)
- クラス数は3→(りんご, バナナ, みかん)

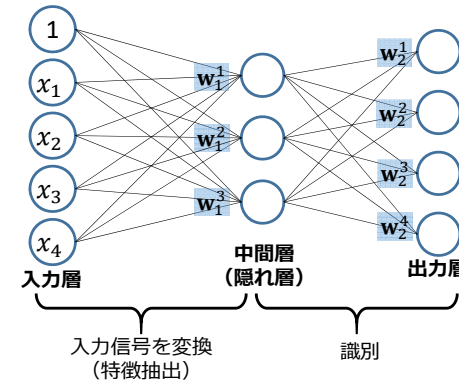


(0.8, 0.3, 0.4)が出力されたので
クラス1に分類しよう

39

ニューラルネットワーク: ユニットを直列につなぐ

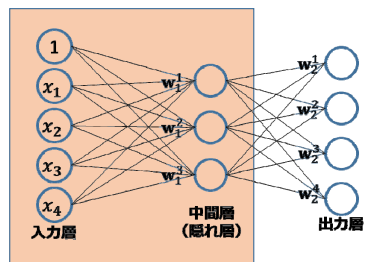
- 入力層と出力層の間に中間層をはさみこむ
 - 入力信号(特徴ベクトル)を識別しやすい形に変換してから識別する
- 線形分離不可能な問題にも対応できる



左図では非線形関数を省略 (実際は計算)
重み係数が未知変数で, これを教師データ
から学習する
→左図では $5 \times 3 + 3 \times 4 = 27$ 個の未知数

40

ニューラルネットワーク: 中間層の効果について



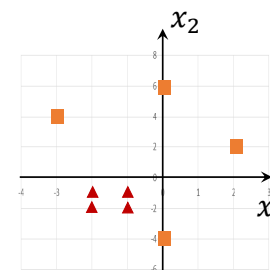
この部分にはどんな効果があるの？

各ユニットは

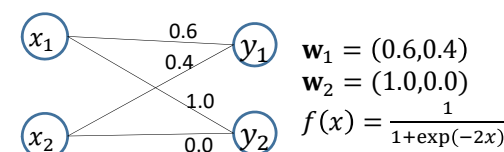
- 入力信号と重みの内積を計算し非線形変換
- 入力と重みが似ているほど大きな値を返す
- 非線形変換は大小を強調する, 大きいものはより大きく小さいものはより小さく

41

ニューラルネットワーク: 中間層の効果について

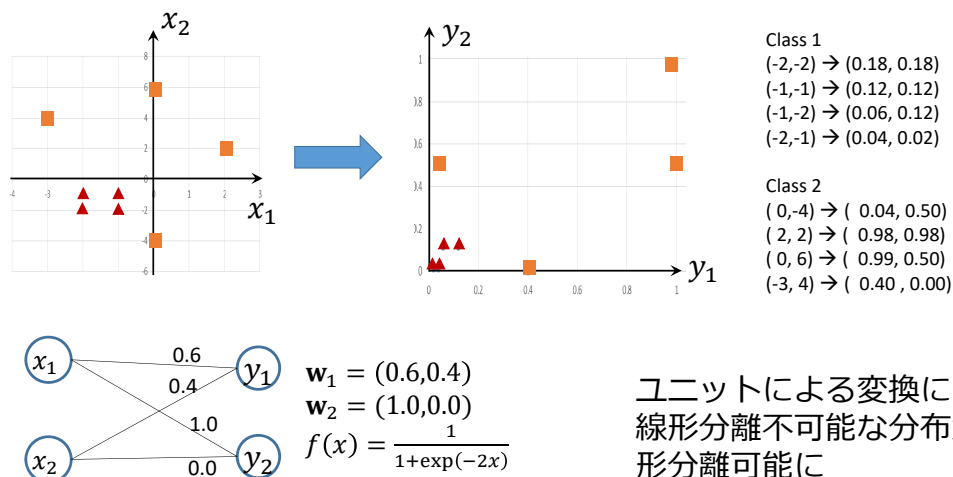


- ▲ Class 1
(-2, -2)
(-1, -1)
(-1, -2)
(-2, -1)
- Class 2
(0, -4)
(2, 2)
(0, 6)
(-3, 4)



42

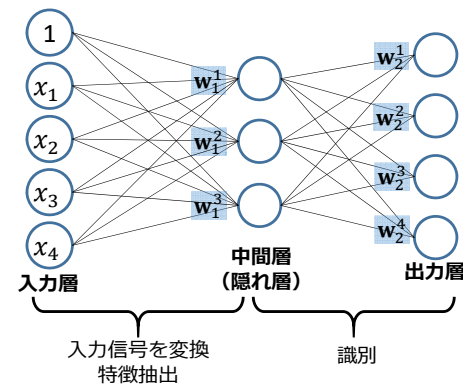
ニューラルネットワーク: 中間層の効果について



43

まとめ: ニューラルネットワーク

- 複数のユニット（ニューロン）を層状につないだネットワーク
- 入力層が特徴ベクトルを受け取り、出力層から識別結果が出力される

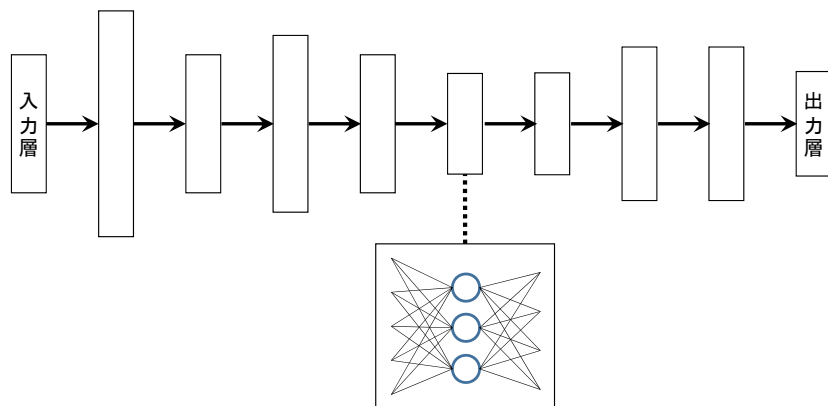


- 未知数が多いため、この学習には大量の教師データを必要とします
- 学習方法については『深層学習（岡谷先生）』『誤差逆伝播法（back propagation）で検索』してください

44

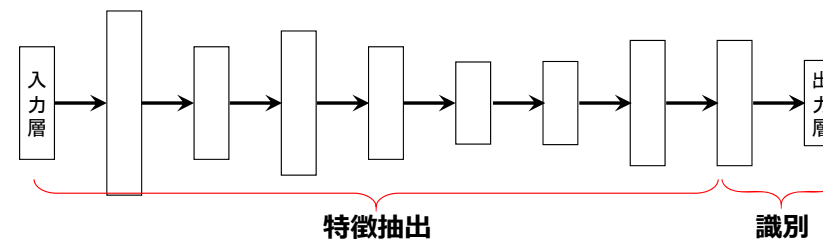
深層学習: Deep learning

- 7層 ~ 20層など、多層構造を持つニューラルネットワークを用いた学習のこと



45

深層学習の非常に簡単な説明



- 出力層の直前まで特徴抽出を繰り返し、最後の層で識別を行なう
（最近では識別だけでなく、画像や音声を生成するものもある）
- End-to-endな構造: データから特徴抽出をせず生データから出力を得る
 - 画像データから特徴を抽出せず、画像データそのものを入力層に入れる
 - つまり、深層学習は特徴抽出自体と識別方法を学習する
 - 深層学習の流行後、従来の人が設計する特徴量を“hand-craft feature”と呼ぶことも

※画像自体を出力するようなDNNも存在する

※画像畳み込みをする層を持つConvolutional Neural Networkも有名に → 研究室で学ぶことになると思います

47

誤差逆伝搬 back propagation

補足資料

代数の定義：簡単のため，入力層・中間層・出力層の3層から構成されるNNを考える

図の通り3個のユニットに特に注目する

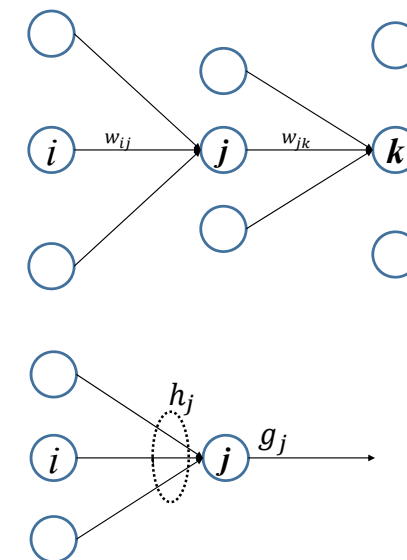
- 入力層の i 番目のユニット
- 中間層の j 番目のユニット
- 出力層の k 番目のユニット

ベクトル \mathbf{x} を入力層へ入力したときの各ユニットへの入出力を以下の通り定義する

- ユニット i への入力 : $h_i = x_i$
- ユニット j への入力 : $h_j = \sum_i w_{ij} g_i$
- ユニット k への入力 : $h_k = \sum_j w_{jk} g_j$
- ユニット i からの出力 : $g_i = x_i$
- ユニット j からの出力 : $g_j = f(h_j)$
- ユニット k からの出力 : $g_k = f(h_k)$

※ w_{ij} はユニット i とユニット j 間の重み係数

※ f は微分可能な非線形関数



補足資料

誤差逆伝播法

教師データ (\mathbf{x}, \mathbf{t}) に対するNNの出力を g_k とする。
コスト関数 J を以下の通り定義する

$$J = \frac{1}{2} \sum_k (g_k - t_k)^2$$

重みを更新し J を最小化するのが目的。
最急降下法を適用する。

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \rho \frac{\partial J}{\partial w_{ij}}$$

この $\frac{\partial J}{\partial w_{ij}}$ が誤差を利用すると綺麗に表現できる

補足資料

誤差逆伝播法 - 出力層について

$$w_{jk} \leftarrow w_{jk} - \rho \frac{\partial J}{\partial w_{jk}}$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_k (g_k - t_k)^2$$

$\frac{\partial J}{\partial w_{jk}}$ は以下の通り計算できる。

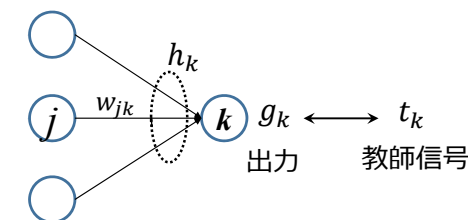
$$\frac{\partial J}{\partial w_{jk}} = \frac{\partial J}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial w_{jk}} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial w_{jk}} = \frac{\partial \sum_a w_{ak} g_a}{\partial w_{jk}} = g_j \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_k} = \epsilon_k = \frac{\partial J}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial h_k} = (g_k - t_k) f'(h_k) \quad \dots (3)$$

式(1)に(2,3)を代入すると以下が得られる

$$\frac{\partial J}{\partial w_{jk}} = \epsilon_k g_j = (g_k - t_k) f'(h_k) g_j$$



$$\epsilon_k = \frac{\partial J}{\partial g_k} = (g_k - t_k) f'(h_k)$$

補足資料
目的関数 J は Loss と呼ばれ
このスライドとは違うものもよく利用される

誤差逆伝播法 – 中間層について

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \rho \frac{\partial J}{\partial w_{ij}}$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_k (g_k - t_k)^2$$

$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}}$ は以下の通り計算できる.

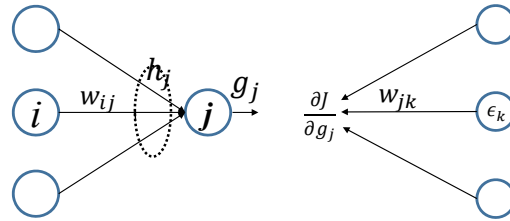
$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial h_j} \frac{\partial h_j}{\partial w_{ij}} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial \sum_a w_{aj} g_a}{\partial w_{ij}} = g_i \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_j} = \epsilon_j = \frac{\partial J}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial h_j} = (\sum_k \epsilon_k w_{jk}) f'(h_j) \quad \dots (3)$$

式(1)に(2,3)を代入すると以下が得られる

$$\frac{\partial J}{\partial w_{ij}} = \epsilon_j g_i = (\sum_k \epsilon_k w_{jk}) f'(h_j) g_i$$



$$\frac{\partial J}{\partial g_j} = \sum_k \frac{\partial J}{\partial h_k} \frac{\partial h_k}{\partial g_j} = \sum_k \epsilon_k w_{jk}$$

多変数関数の連鎖律を利用
(J は h_k の関数で, h_k は g_j の関数)

$\epsilon_k = \frac{\partial J}{\partial h_k}$ と $\frac{\partial h_k}{\partial g_j} = w_{jk}$ を利用した

補足資料

誤差逆伝播法

ひとつずつ (または一定数) 教師データ (x, t) を読み込み, 誤差を利用して逐次的に重み w_{ij} を更新する手法

1. 重みは何かしらの方法 (ランダムとか) で初期化する

2. ある教師データ (x, t) を読み込み...

2-0. データをNNに通して出力を得る

2-1. 出力層の誤差を計算

$$\text{ユニット } k \text{ の誤差は } \epsilon_k = (g_k - t_k) f'(h_k)$$

2-2. 中間層の誤差を計算

$$\text{ユニット } j \text{ の誤差は } \epsilon_j = (\sum_k w_{jk} \epsilon_k) f'(h_j)$$

2-3. 重みを以下の通り更新

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \rho \epsilon_j g_i$$

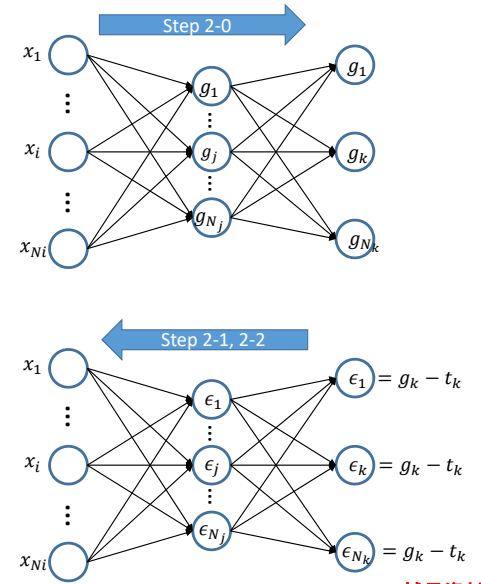
$$w_{jk} \leftarrow w_{jk} - \rho \epsilon_k g_j$$

教師データをひとつピックアップし、

2-0 前進方向に出力を計算し

2-1, 2-2 逆方向に誤差を計算し

2-3 出力と誤差を用いて重みを更新



補足資料