

デジタルメディア処理1

担当: 井尻 敬

1

スケジュール

09/25	イントロダクション1 : デジタル画像とは, 量子化と標本化, Dynamic Range
10/02	イントロダクション2 : デジタルカメラ, 人間の視覚, 表色系
10/09	画像処理演習0 : python入門 (PC教室 : 課題締め切り 11/13 23:59)
10/16	フィルタ処理1 : トーンカーブ, 線形フィルタ
10/23	フィルタ処理2 : 非線形フィルタ, ハーフトーニング
10/30	フィルタ処理3 : 離散フーリエ変換と周波数フィルタリング
11/13	画像処理演習1 : フィルタ処理 (PC教室 : 課題締め切り 12/08 23:59)
11/20	画像処理演習2 : フィルタ処理 (PC教室 : 課題締め切り 12/08 23:59)
12/27	画像処理演習3 : フィルタ処理 (PC教室 : 課題締め切り 12/08 23:59)
12/04	画像処理演習4 : フィルタ処理 (PC教室 : 課題締め切り 12/08 23:59)
12/11	画像の幾何変換 1 : アフライン変換と画像補間
12/18	ConvolutionとDe-convolution (進度に合わせて変更する可能性有り)
01/08	画像圧縮 (進度に合わせて変更する可能性有り)
01/15	後半のまとめと期末試験

画像圧縮

到達目標

- 平均情報量（エントロピー）について正しく説明できる
- 以下の画像圧縮技術について正しく説明できる
 - ハフマン符号化
 - 離散コサイン変換

Contents

- 平均情報量（エントロピー）とは
- エントロピー符号化 : ハフマン符号化, 算術符号化*
- 2値画像の符号化 : ランレングス符号, チェイン符号化*
- 変換符号化 : 離散コサイン変換, jpeg圧縮

※この分類は教科書由来, *印は今回は割愛する

情報量のはなし

ある事象を確認した時（ある事実が分かった時）
得られた情報量（情報の多さ・大きさみたいなもの）を定義したい

4

情報量とは

トランプを一枚引いて、カードを言い当てたら1000円もらえるゲームをしている。
今、ディーラーが一枚のカードを引いて、スペードの2である事を確認した。

あなたが予測を言う前に、ディーラーが次の情報のうちどれかを教えてくれるなら
どれがほしいですか？なぜですか？

情報A) カードのスイツ（模様）はスペードです

情報B) カードは数字は偶数です

情報C) カードの数字は3以下です

5

情報量とは

トランプを一枚引いて、カードを言い当てたら1000円もらえるゲームをしている。
今、ディーラーが一枚のカードを引いて、スペードの2である事を確認した。

それぞれの事象が起こる確率は

情報A) カードはスペードです **13/52**

情報B) カードは数字は偶数です **24/52**

情報C) カードの数字は3以下です **12/52**

**最も対象を絞れる
のは情報C**

起こる確率の低い事象に出会うことは、起こる確率の高い事象に出会う
ことに比べて得られる情報量が多そう

そのように『**情報量**』を定義したいな！

6

情報量とは

情報Cをもらった後に、情報Aももらえたとしたら。。。。

- 情報A) カードのスペードです → **13/52**
- 情報C) カードの数字は3以下です → **12/52**

事象Aと事象Cが同時に起こる確率は以下の通り

$$P(A \cap C) = \mathbf{3/52}$$

→ 情報が増えてより絞り込みやすくなった

新たに情報を得ると情報量が増える

情報量の増加（足し算）も扱えるように『**情報量**』を定義したいな！

7

情報量とは

以下の2点を満たすように定義する

- 起こる確率の低い事象を確認することは、起こる確率の高い事象を確認する
ことに比べて情報量が大い
- 複数の事象を確認した場合の情報量増加を表現できる

※『事象を確認した』という表現が分かり難ければ、『事実が分かった』と
言い換えてもOK

情報量: ある事象Aが起こる確率を $P(A)$ として、その事象が起きたことを知らされたときに受け取る情報量 $I(A)$ は、以下の通り定義される。単位はbit.

$$I(A) = \log_2 \frac{1}{P(A)} = -\log_2 P(A)$$

8

情報量とは（練習）

トランプを一枚引いて、カードを言い当てたら1000円もらえるゲームをしている。
今、ディーラーが一枚のカードを引いて確認し、以下の事象が起きた事実を教えてくれる際、あなたが受け取る情報量を示せ

事象A) カードのスペードです

事象B) カードは数字は偶数です

事象C) カードの数字は3以下です

※起こる確率の低い事象ほどそれを確認した時の情報量は大きくなる

9

平均情報量(エントロピー)

事象の集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ があり、各事象の生起確率を $P(A_i)$ とする。各事象は互いに排反 ($P(A_i \cap A_j) = 0$) であり、生起確率の総和は1とする。

この事象の集合の情報量の期待値は**平均情報量（エントロピー）**とよばれ、以下の通り計算できる

$$I(A) = \sum_i -P(A_i) \log_2 P(A_i)$$

10

例題1) ある地域Aの元旦の天気の情報率分布は以下のとおりである。
この事象系の平均情報量を求めよ

事象	生起確率
晴れ	0.25
曇り	0.25
雨	0.25
雪	0.25

$$\left(-\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right) 4 = 2.0 \text{ [bit]}$$

例題2) ある地域Aの元旦の天気の情報率分布は以下のとおりである。
この事象系の平均情報量を求めよ

事象	生起確率
晴れ	0.99
曇り	0.01
雨	0.0
雪	0.0

$$(-0.99 \log_2 0.99 - 0.01 \log_2 0.01 - 0 - 0) = 0.08079 \text{ [bit]}$$

※ $0 \log_2 0 = 0$

確率分布が偏った事象系では、何が起きるかは予測しやすい（地域Bはどうせ晴れる）ため、その系から得られる情報量は少ない→ **エントロピーは小さい**

確率分布が均等な事象系では、事象を確認した時の情報量は多い
→ **エントロピー大**

11

もう少し例を…

- コイントスをして表・裏を言い当てたら1000円もらえるゲームをしている。ある**男X**が、コイントス直後にこっそり表か裏を教えてくださいとってきた。
- 1~100の数字が出るルーレットの出目を当てたら1000円もらえるゲームをしている。ある**男Y**が、ルーレットの出目をこっそり教えてくださいとってきた。
- コイントスの表裏の出現確率は等しく、ルーレットの数の出現確率も等しい
- 男Xと男Yどちらの教えてくれる情報量が大きい？

12

- コイントスをして表・裏を言い当てたら1000円もらえるゲームをしている。ある男Xが、コイントス直後にこっそり表か裏を教えてくださいんてきた。

男Xの平均情報量: $\left(-\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2}\right) 2 = 1.0 \text{ [bit]}$

- 1~100の数字が出るルーレットの出目を当てたら1000円もらえるゲームをしている。ある男Yが、ルーレットの出目をこっそり教えてくださいんてきた。

男Yの平均情報量: $\left(-\frac{1}{100}\log_2 \frac{1}{100}\right) 100 = 6.64 \text{ [bit]}$

男Yの持つ平均情報量のほうが大きい
こんな感じで知りたい情報を教えてもらえるという設定にすると
納得しやすい (かも)

13

まとめ: エントロピー

事象の集合 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ があり, 各事象の生起確率を $P(A_i)$ とする. 各事象は互いに排反 ($P(A_i \cap A_j) = 0$) であり, 生起確率の総和は1とする.

この事象の集合の情報量の期待値は**平均情報量 (エントロピー)**とよばれ, 以下の通り計算できる

$$I(A) = \sum_i -P(A_i) \log_2 P(A_i)$$

説明の参考にしたweb page : <https://logics-of-blue.com/information-theory-basic/>

14

エントロピー符号化

15

エントロピー符号化

- データに含まれるシンボルに対し, その出現確率に基づき異なる長さの符号 (ビット列) を割り当てる事でデータの圧縮を行なう手法

16

エントロピー符号化

- データに含まれるシンボルに対し、その出現確率に基づき異なる長さの符号（ビット列）を割り当てる事でデータの圧縮を行なう手法
 - シンボル：画像なら画素値、数値列なら数字
 - 元のデータを完全に復元できる可逆圧縮
 - ハフマン符号化、算術符号化などが知られる

シンボル	2進数表現	出現確率	ハフマン符号
0	000	0.04	01100
1	001	0.08	111
2	010	0.12	110
3	011	0.25	10
4	100	0.28	00
5	101	0.14	010
6	110	0.06	0111
7	111	0.03	01101

… ある数値列がある
“…334421…”
通常の2進数表現では、18bit必用
“…011011100100010001…”
出現確率を利用し、長さの異なる符号を割り当てると、14bitで表現可能
“…10100000110111…”

エントロピー符号化

シンボル	2進数表現	出現確率	ハフマン符号
0	000	0.04	01100
1	001	0.08	111
2	010	0.12	110
3	011	0.25	10
4	100	0.28	00
5	101	0.14	010
6	110	0.06	0111
7	111	0.03	01101

この数列のエントロピーは？
 $-0.04 \log(0.04) - 0.08 \log(0.08) - \dots = 2.651 \text{ [bit]}$
2進数表現時の平均符号長は？
 $0.04 \times 3.0 + 0.08 \times 3.0 + \dots = 3.0 \text{ bit}$
ハフマン符号表現時の平均符号長は？
 $0.04 \times 5.0 + 0.08 \times 3.0 + \dots = 2.67 \text{ bit}$

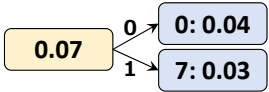
データ（画像、文字列、数値列）を符号化した際の平均符号長の下限は、データの平均情報量（エントロピー）で与えられる

ハフマン符号化

ハフマン符号化

- 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 出現確率の大きなほうに符号0、小さなほうに符号1を割り当てる。
- 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し、その出現確率は2つの和とする
- ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

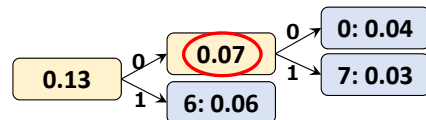
シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04	?????
1	0.08	?????
2	0.12	?????
3	0.25	?????
4	0.28	?????
5	0.14	?????
6	0.06	?????
7	0.03	?????



ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08	?????
2	0.12	?????
3	0.25	?????
4	0.28	?????
5	0.14	?????
6	0.06	?????
7	0.03 済	?????

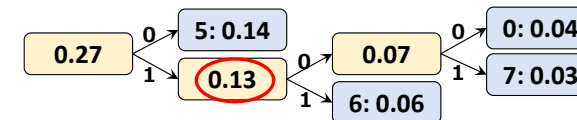


21

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08	?????
2	0.12	?????
3	0.25	?????
4	0.28	?????
5	0.14	?????
6	0.06 済	?????
7	0.03 済	?????

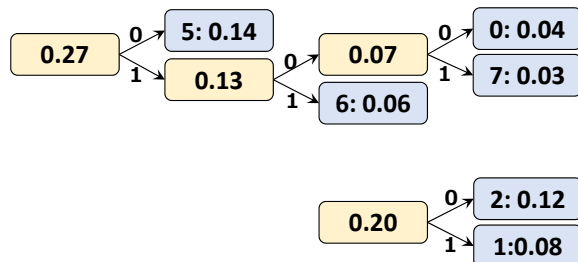


22

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08	?????
2	0.12	?????
3	0.25	?????
4	0.28	?????
5	0.14 済	?????
6	0.06 済	?????
7	0.03 済	?????

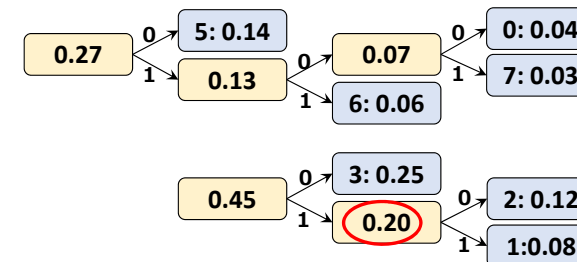


23

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08 済	?????
2	0.12 済	?????
3	0.25	?????
4	0.28	?????
5	0.14 済	?????
6	0.06 済	?????
7	0.03 済	?????

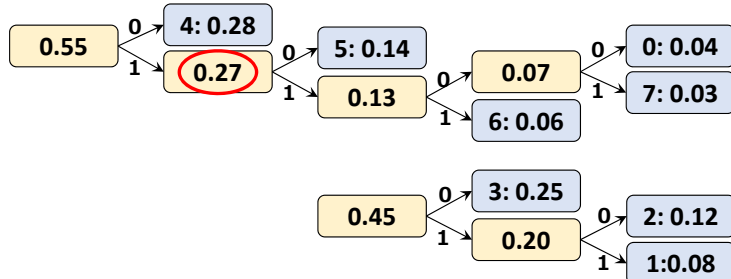


24

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08 済	?????
2	0.12 済	?????
3	0.25 済	?????
4	0.28	?????
5	0.14 済	?????
6	0.06 済	?????
7	0.03 済	?????

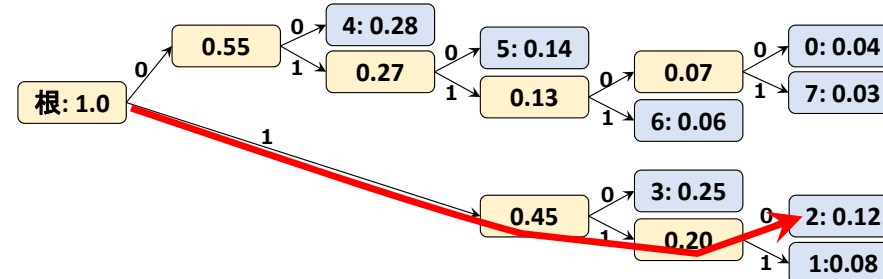


25

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04 済	?????
1	0.08 済	?????
2	0.12 済	110
3	0.25 済	?????
4	0.28 済	?????
5	0.14 済	?????
6	0.06 済	?????
7	0.03 済	?????

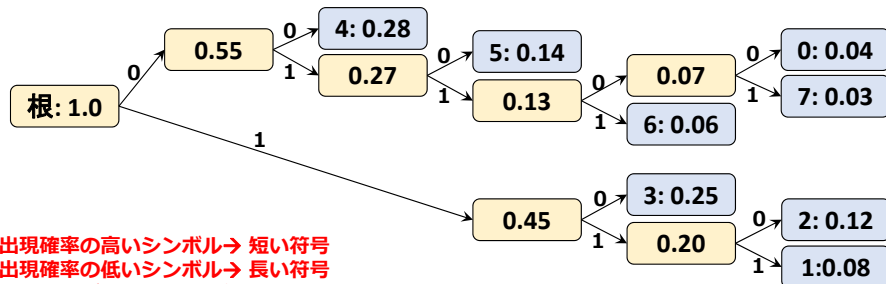


26

ハフマン符号化

- 1) 出現頻度の最も低い2つのシンボルを選択
- 2) 出現確率の大きなほうに符号0, 小さなほうに符号1を割り当てる.
- 3) 二つのシンボルを子とするシンボルを生成し, その出現確率は2つの和とする
- 4) ひとつの木にまとまるまで1~3を繰り返す
- 5) 根から葉まで辿った符号列をシンボルの符合とする

シンボル	出現確率	ハフマン符号
0	0.04	01100
1	0.08	111
2	0.12	110
3	0.25	10
4	0.28	00
5	0.14	010
6	0.06	0111
7	0.03	01101

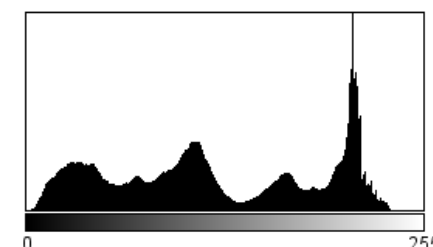


出現確率の高いシンボル→ 短い符号
出現確率の低いシンボル→ 長い符号
あるシンボルの符号は, 他の符号の接頭語になっていないため区切り情報不要

27

画像にハフマン符号を適用する

- 入力を 8bit グレースケール画像とする
→ 画素値は 0,1,2,...,255の値を持つ
- ヒストグラムを計算し, 頻度値の総和が1.0になるように正規化
$$\sum_{n=0}^{255} p(n) = 1.0$$
 ただし, $p(n)$ は画素値 n の頻度 (出現確率)
- ハフマン符号化アルゴリズムで, 画素値0,1,2,..., 255を符号化する



28

ランレングス符号化

29

ランレングス符号化

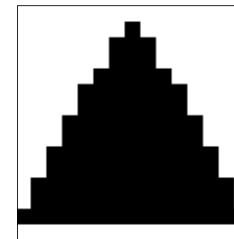
- データ中をシンボルとその連続する長さで符号化する手法

元データ: AAAAAAABBBBAAAAACCCCCCCCCC : 1byte * 24 = 24 byte

符号化 : A7, B4, A4, C9 : 2byte * 4 = 8 byte

※シンボルは1 byte (char)で表現し, 連続数も1 byte (uchar)で表現した

- 色数の少ない画像 (e.g. 2値画像) では, 同じ画素値が連続するのでランレングス符号化により効率的な圧縮が期待できる



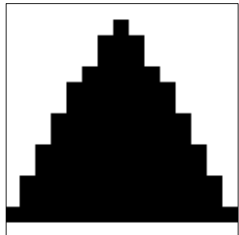
```
111111111111111111111111
111111111001111111111111
111111111000111111111111
111111111000011111111111
111111000000011111111111
111110000000001111111111
111100000000000111111111
111000000000000011111111
110000000000000001111111
100000000000000000111111
100000000000000000011111
100000000000000000001111
100000000000000000000111
100000000000000000000011
100000000000000000000001
100000000000000000000000
111111111111111111111111
```



1:22, 0:1, 1:13, 0:3, 1:12, 0:3, 1:11,
0:5, 1:9, 0:7, 1:8, 0:7, 1:7, 0:9, 1:6,
0:9, 1:5, 0:11, 1:4, 0:11, 1:3, 0:13,
1:2, 0:13, 1:1, 0:15, 1:15,

30

ランレングス符号化



```
111111111111111111111111
111111111001111111111111
111111111000111111111111
111111111000011111111111
111111000000011111111111
111110000000001111111111
111100000000000111111111
111000000000000011111111
110000000000000001111111
100000000000000000111111
100000000000000000011111
100000000000000000001111
100000000000000000000111
100000000000000000000011
100000000000000000000001
100000000000000000000000
111111111111111111111111
```



1:22, 0:1, 1:13, 0:3, 1:12, 0:3, 1:11,
0:5, 1:9, 0:7, 1:8, 0:7, 1:7, 0:9, 1:6,
0:9, 1:5, 0:11, 1:4, 0:11, 1:3, 0:13,
1:2, 0:13, 1:1, 0:15, 1:15,

データサイズは

- シンボルひとつ当たり 1bit
 - シンボル数 225
- 1*225 = 225 bit

データサイズは…

- シンボルひとつ当たり 1bit
 - 連続長 5 bit
- 6 bit * 27 = 138 bit

※連続長を5bitとすると最大32までの連続列を扱える

31

練習: ランレングス符号化を実装してみよう

input : 引数 arg は, シンボル”0,1,2,...,9”の列

output: 出力は, (シンボル, 連続数)というタプルの配列

def runlength_coding (arg) :

output = []

TODO

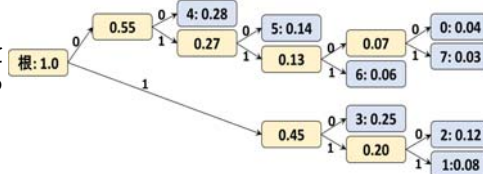
return output

32

まとめ

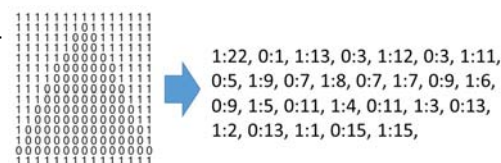
- ハフマン符号化

- 出現確率の高いシンボルに短い符号を割り当てることで平均符号長を下げる
- 可逆圧縮
- エントロピー符号化の一種



- ランレングス符号化

- シンボルと連続数を記録する事でデータの圧縮を目指す
- 可逆圧縮
- 同じシンボルが連続するデータ（2値画像など）の圧縮に強い



離散コサイン変換 (1D)

N 個の数列 f_l ($l = 0, \dots, N - 1$)について

このスライドの例は…
 コサイン変換DCT-II
 逆コサイン変換DCT-III
 定数倍には異なる定義あり

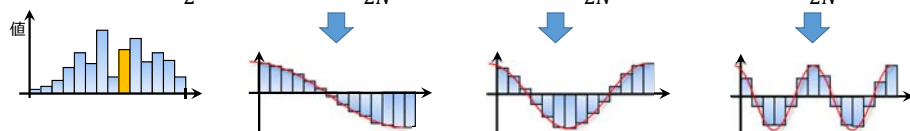
コサイン変換：

$$F_k = \sum_{l=0}^{N-1} f_l \cos \frac{\pi}{N} k \left(l + \frac{1}{2} \right)$$

逆コサイン変換：

$$f_l = \left(\frac{2}{N}\right) \left(\frac{F_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} F_k \cos \frac{\pi}{N} k \left(l + \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$f_l = \frac{F_0}{2} + F_1 \times \cos \frac{1\pi(2l+1)}{2N} + F_2 \times \cos \frac{2\pi(2l+1)}{2N} + F_3 \times \cos \frac{3\pi(2l+1)}{2N} + \dots$$



f_l は $\cos \theta$ の重ね合わせで表現される

F_k は重ね合わせの"重み"を表す

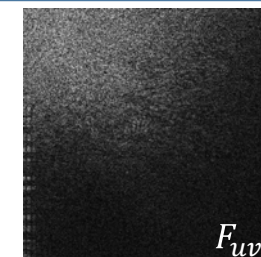
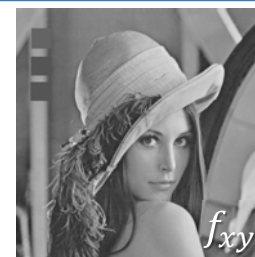
離散コサイン変換 (2D)

2D数列 f_{xy} ($x=0,\dots,W-1, y=0,\dots,H-1$) について...

- ※係数の異なる定義有り
- ※この定義は全スライドを縦横方向にかけること得られる
- ※ $a_i = \frac{1}{2} \ (i = 0), 1 \ (others)$

$$\text{コサイン変換: } F_{uv} = \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} \cos \frac{\pi}{W} u \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{H} v \left(y + \frac{1}{2} \right)$$

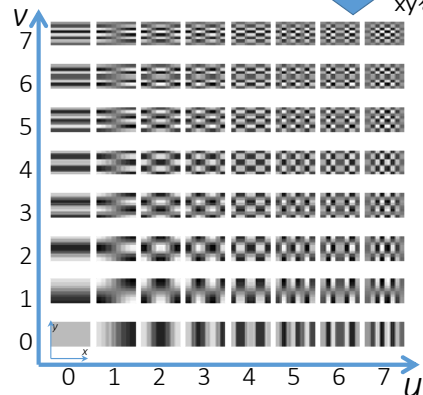
$$\text{逆コサイン変換: } f_{xy} = \frac{4}{WH} \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} a_u a_v F_{uv} \cos \frac{\pi}{W} u \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{H} v \left(y + \frac{1}{2} \right)$$



離散コサイン変換 (2D)

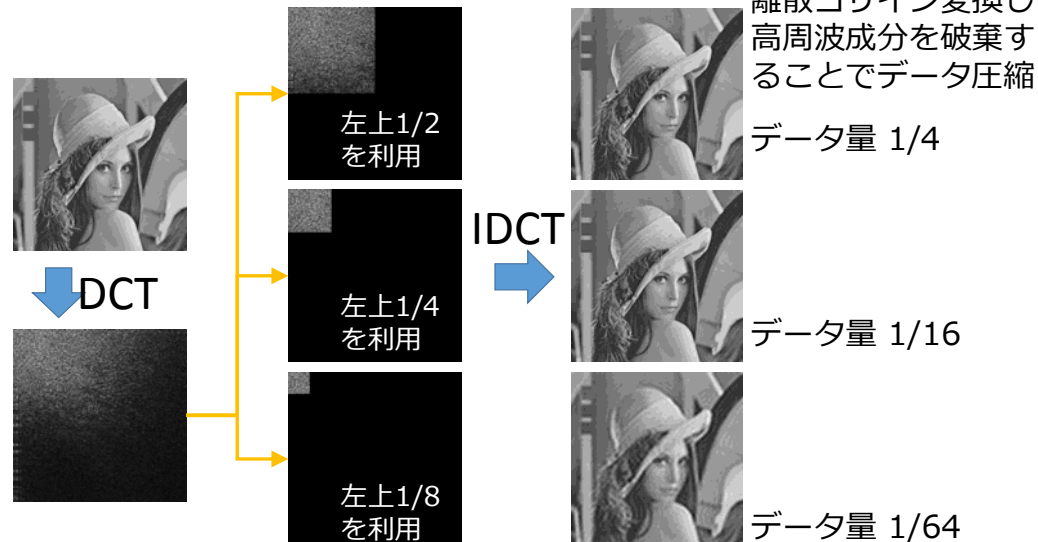
$$f_{xy} = \frac{4}{WH} \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} a_u a_v F_{uv} \cos \frac{\pi}{W} u \left(x + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{H} v \left(y + \frac{1}{2} \right)$$

↓
u, vを固定、
xyを動かして画像を作成



- 任意の画像を周波数の異なる基底画像の線形和で表現できる
- 離散コサイン変換 (フーリエ変換) とは基底画像の重みを計算する作業
- 左図は $W = 8, H = 8$ の基底画像
→ 任意の 8×8 画像は左図の基底画像の重ね合わせで表現可

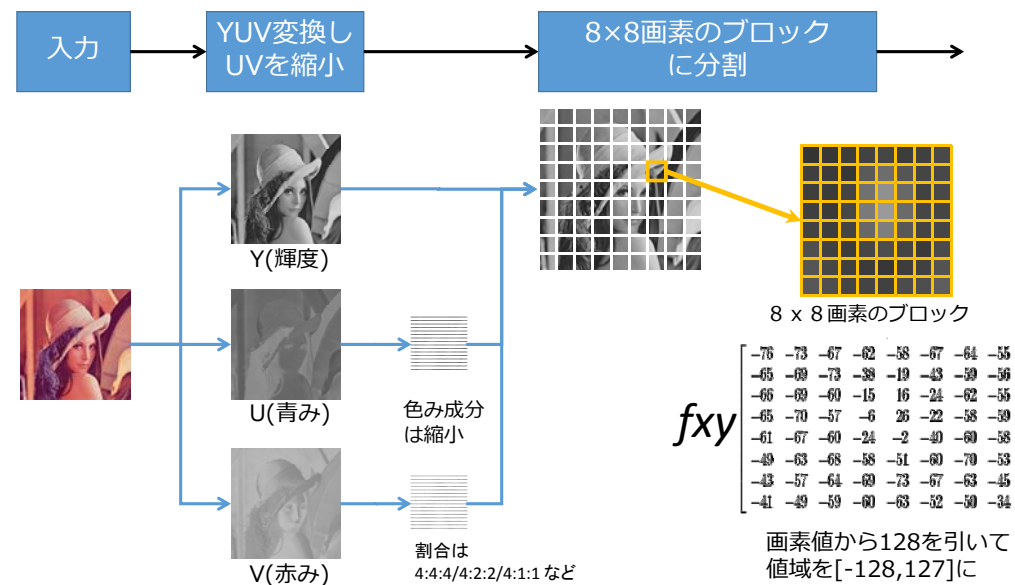
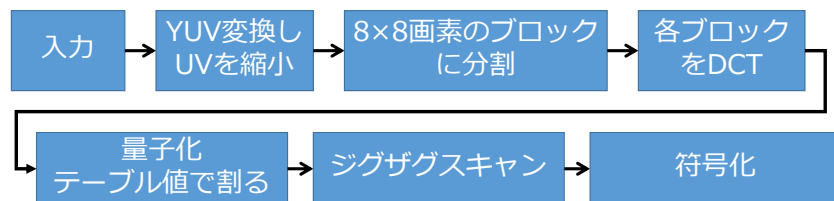
離散コサイン変換 による画像圧縮



JPEG 圧縮の概要

- 2次元風景画像などと相性が良く、写真の圧縮に広く利用されている
- **非可逆圧縮**の手法で**離散コサイン変換**を利用

手法の概略



各ブロック
をDCT変換

量子化
テーブル値で割る

ジグザグスキャン

符号化

各ブロックにおいて取得された64文字を符号化する
この部分は**可逆圧縮**

- 直流成分について
 - 直前のブロックの直流成分との差分を記録
 - これをハフマン符号化
- その他（交流）成分について
 - 『**(RUNLENGTH, SIZE)(符号)**』の形で記載
 - RUNLENGTH(4bit)は連続したゼロの数
 - SIZE(4bit)は、ゼロでない数字の表現に必要なビット数
 - 符号は、ゼロでない数字のハフマン符号

-26,-3,0,-3,-2,-6,2,-4,1,-3,1,1,5,1,2,
-1,1,-1,2,0,0,0,0,-1,-1,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0 (64 byte)

$(0, 2)(-3); (1, 2)(-3); (0, 1)(-2); (0, 2)(-6); (0, 1)(2);$
 $(0, 1)(-4); (0, 1)(1); (0, 2)(-3); (0, 1)(1); (0, 1)(1);$
 $(0, 2)(5); (0, 1)(1); (0, 1)(2); (0, 1)(-1); (0, 1)(1);$
 $(0, 1)(-1); (0, 1)(2); (5, 1)(-1); (0, 1)(-1); (0, 0);$

(RUNLENGTH,SIZE)に20byte, 符号に24bit = 23 byte

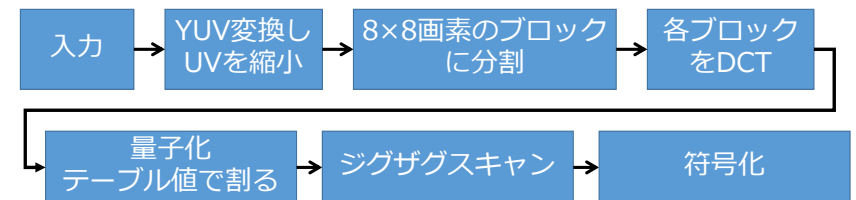
41

- 8x8のブロックごとに非可逆圧縮を書けているので、ブロック境界が見えるようなノイズが乗ります



43

- 画像を輝度値画像とカラー画像に分離し、カラー画像を縮小
- 画像を8x8画素のブロックに分割し、DCT変換後後、量子化
- 量子化されたDCT係数は、run-length符号化+ Huffman符号化により変換される



問) どの部分が不可逆性に寄与していますか？

問) どこを調整すれば圧縮率や画像の精度を調整できそうですか？

44