ディジタルメディア処理

担当: 井尻 敬

Contents

達成目標

- 画像・音に関するフーリエ変換の基本的な効果を説明できる
- フーリエ級数の概要を説明できる
- 周波数フィルタ処理の計算法と効果を説明できる

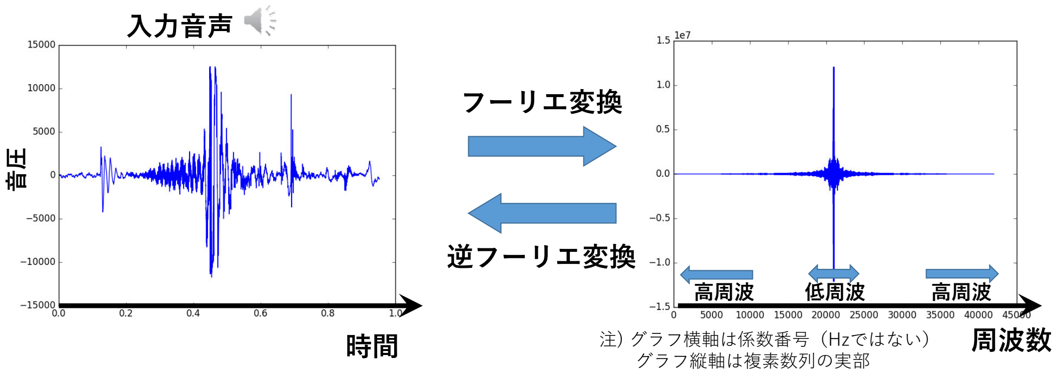
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

FourierSound.py

フーリエ変換とは（音）

時間に関する信号（横軸が時間の関数）を、
周波数に関する信号（横軸が周波数の関数）に変換する手法



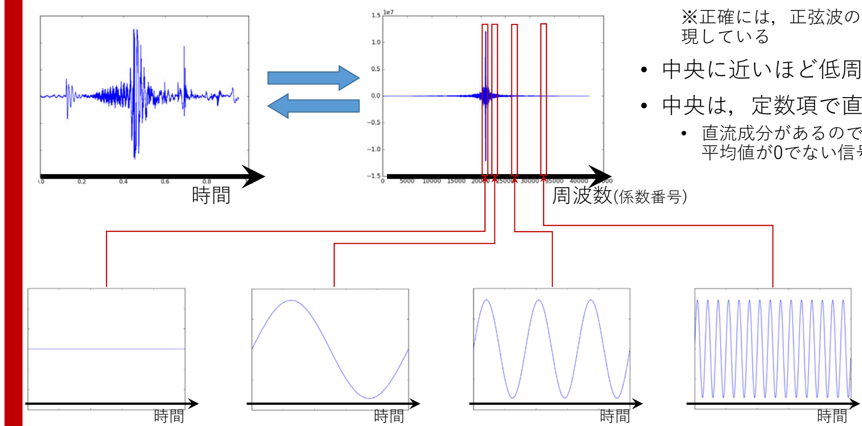
注）グラフ横軸は係数番号（Hzではない）
グラフ縦軸は複素数列の実部

※）両関数とも複素数関数となる（デジタルデータの場合は複素数列）

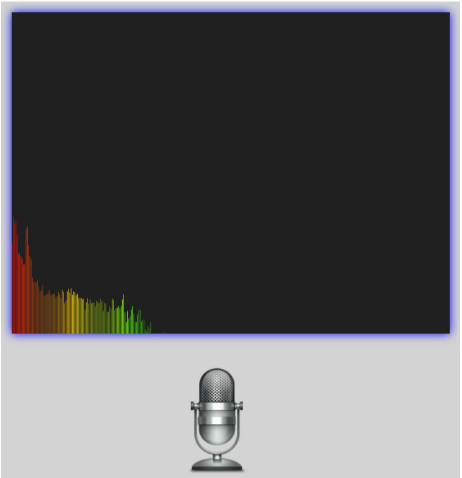
FourierSound.py

フーリエ変換とは（音）

- フーリエ変換後の信号は元信号に含まれる正弦波の量を示す
  ※正確には，正弦波の大きさと位相を複素数で表現している
- 中央に近いほど低周波，外ほどが高周波
- 中央は，定数項で直流成分と呼ばれる
  - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作れる



※下の波はイメージ
※本来はもっともっと細かいです。



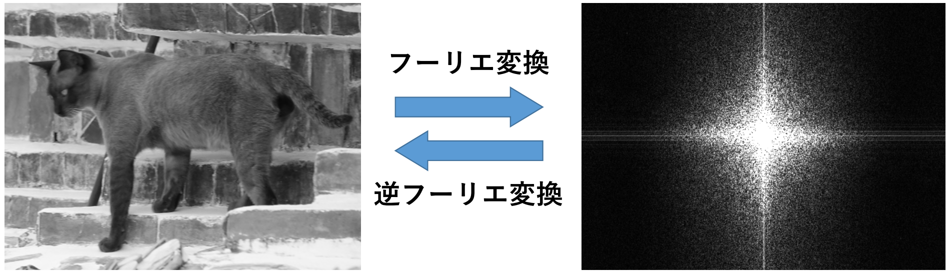
音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2Dの
フーリエ変換は高速なので
実時間解析可能

リアルタイムフーリエ変換
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

フーリエ変換とは（画像）

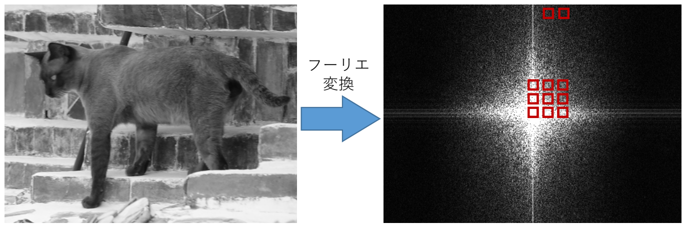
空間に関する信号（横軸が空間の関数）を、
周波数に関する信号（横軸が周波数の関数）に変換する手法

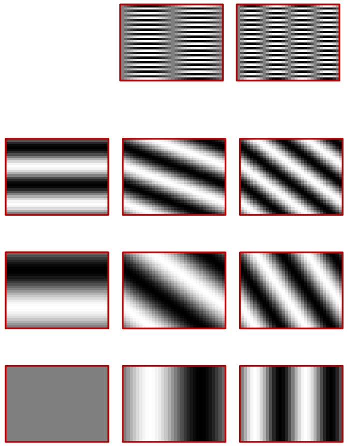


画像
(2D空間に画素が並ぶ)

周波数画像（詳細後述）
※複素数の絶対値を表示

フーリエ変換とは（画像）





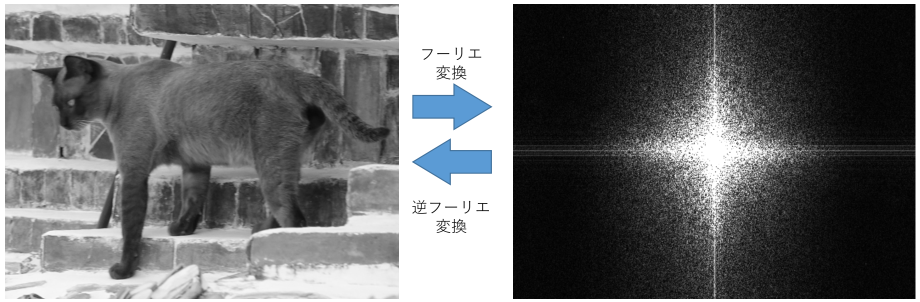
- フーリエ変換後の画像の画素は元信号に含まれる正弦波の量(正しくは大きさと位相)を示す
- 中央付近が低周波，外側が高周波
- 中央画素は，定数項（直流成分）

→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる

この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

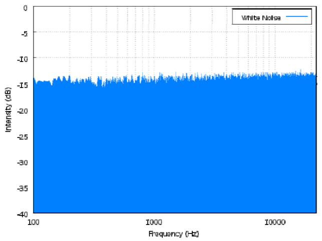
フーリエ変換とは（画像）

FourierPaint.py

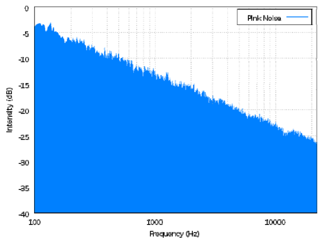


余談（ノイズ）

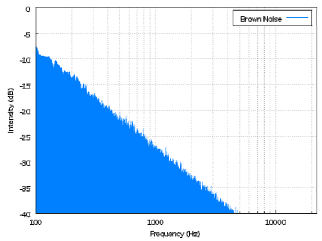
ノイズ（雑音）には，それが含む周波数の分布に応じて特定の名前が付いたものがある



ホワイトノイズ
スペクトルが一様に分布



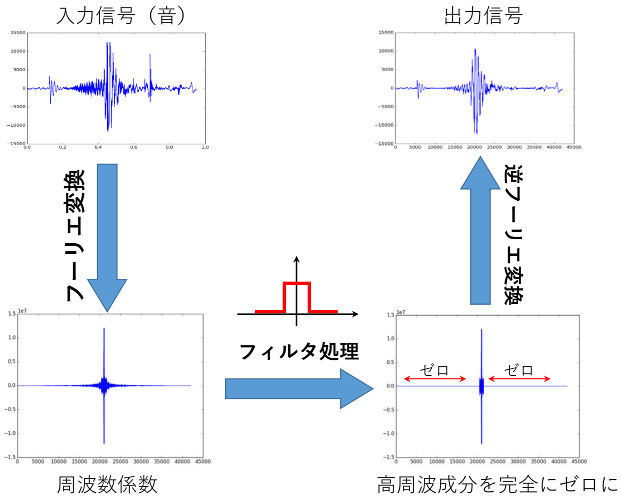
ピンクノイズ
スペクトル分布が 1/fに比例



ブラウンノイズ
スペクトル分布が $1/f^2$に比例

周波数フィルタリング（音）

FourieSound.p



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

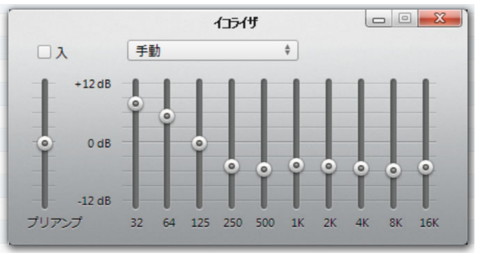
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

イコライザ

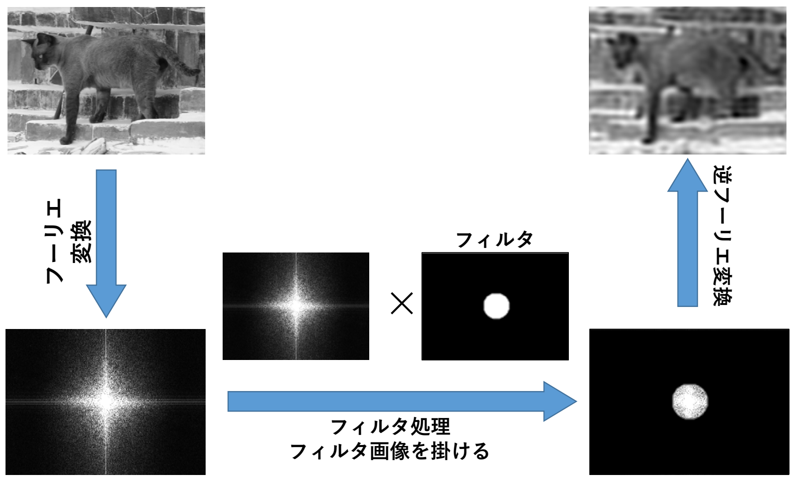
周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換



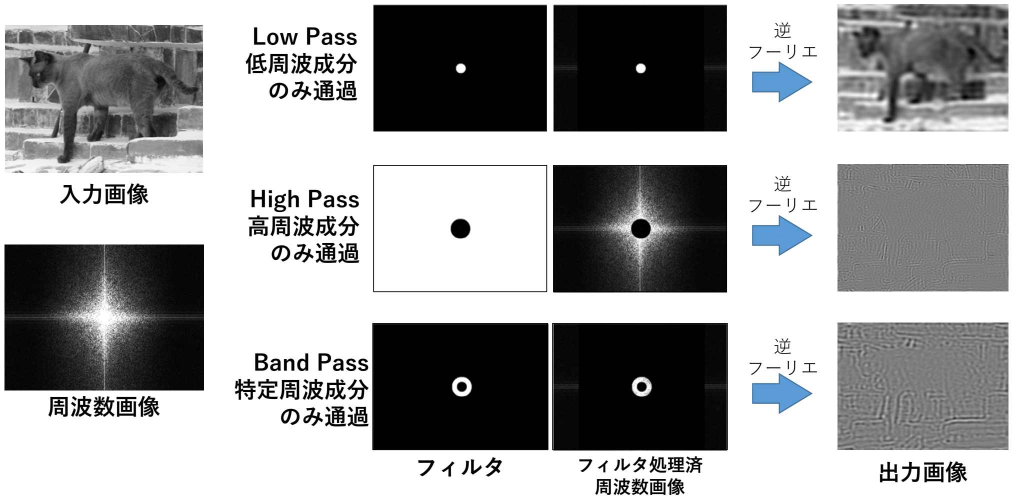
Itunesのイコライザ

周波数フィルタリング（画像）



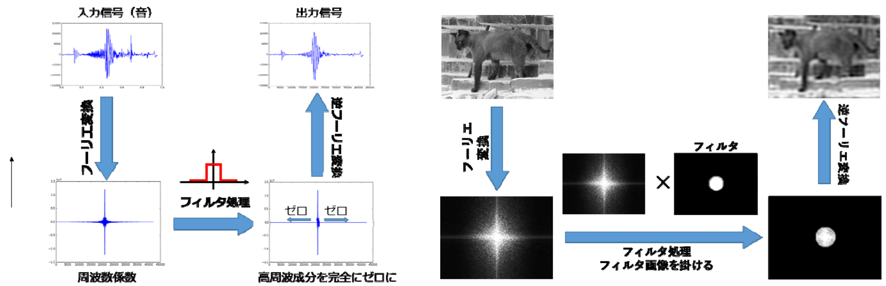
説明のためLowpassの
半径を大きく可視化
本当はもっと小さい

周波数フィルタリング（画像）



まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は，時間・空間に関する信号を周波数に関する信号に変換
- 逆フーリエ変換も定義される
- フーリエ変換を利用し周波数空間でフィルタ処理すると，周波数に特化した信号処理が可能



フーリエ級数（の簡単な解説）

注意）
本講義では，フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます．
証明と導出の詳細は，信号処理の講義をとるか「**金谷健一:これなら分かる応用数学教室**」を参照してください．

練習

三角関数を合成せよ

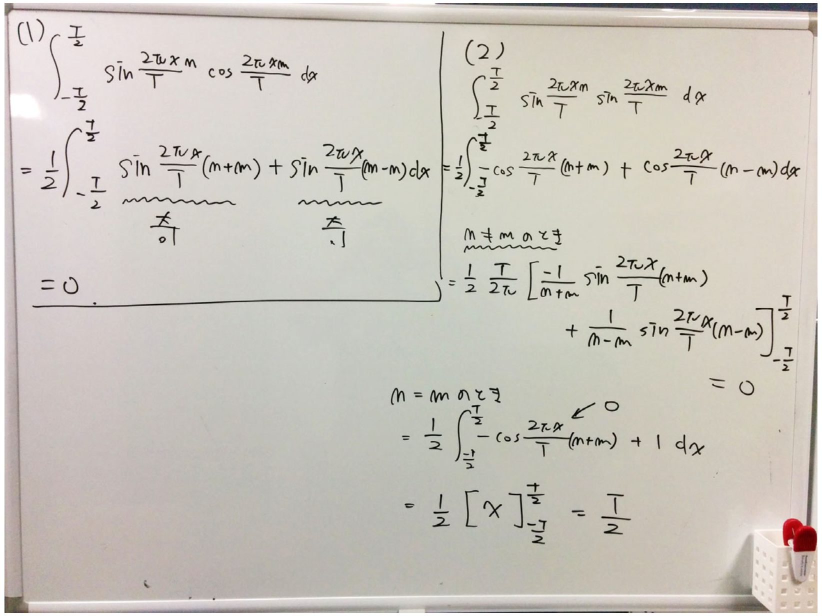
$$a\sin\theta + b\cos\theta$$

nとmを非負整数として以下を計算せよ

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2\pi n}{T}x\cos\frac{2\pi m}{T}x\,dx$$

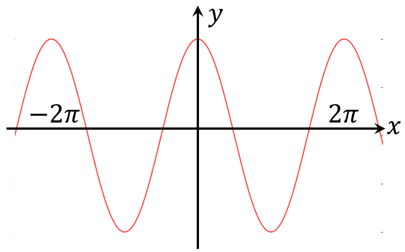
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\frac{2\pi n}{T}x\sin\frac{2\pi m}{T}x\,dx$$

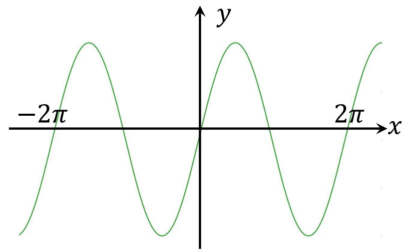
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\frac{2\pi n}{T}x\cos\frac{2\pi m}{T}x\,dx$$



三角関数

$y = \cos x$　　　$y = \sin x$

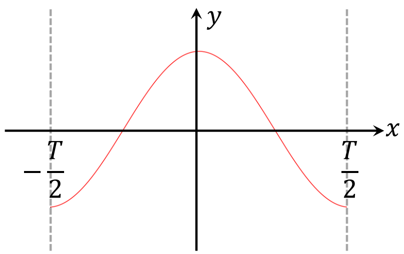


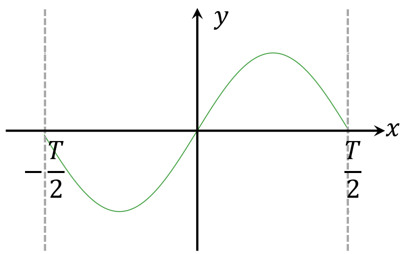


まあこれはいいですよね

三角関数

$y = \cos \frac{2\pi}{T} x = \cos \omega_0 x$　　　$y = \sin \frac{2\pi}{T} x = \sin \omega_0 x$

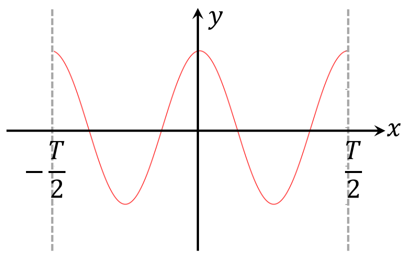


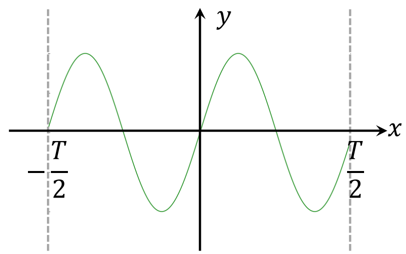


Tを周期，ω_0を基本(角)周波数と呼びます
[-T/2,T/2]でひと周期の波を取得できました

三角関数

$y = \cos 2\omega_0 x$　　　$y = \sin 2\omega_0 x$

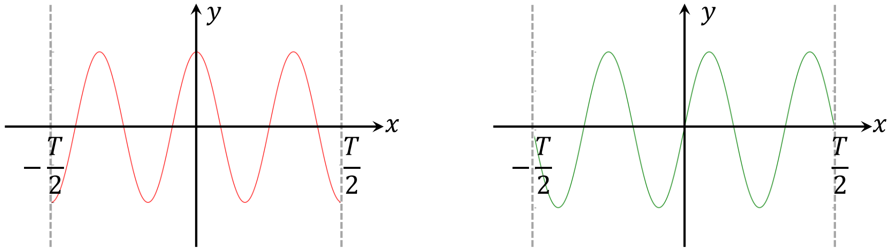




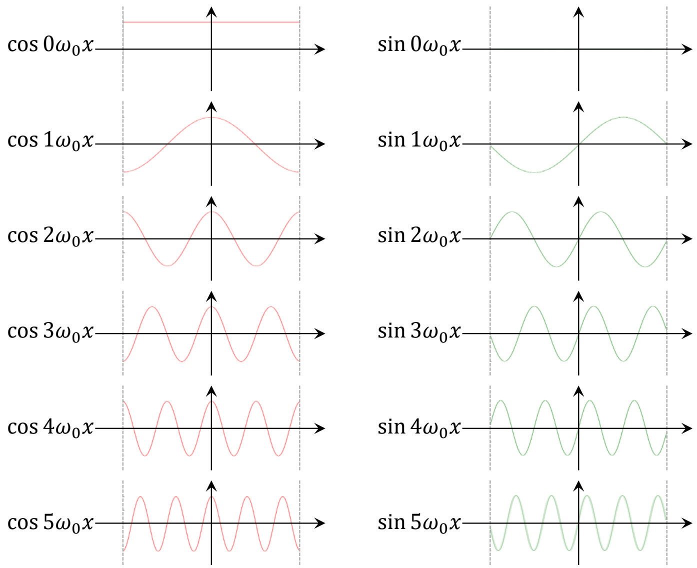
三角関数の引数を２倍すると，周波数が2倍に、周期が1/2倍になります

三角関数

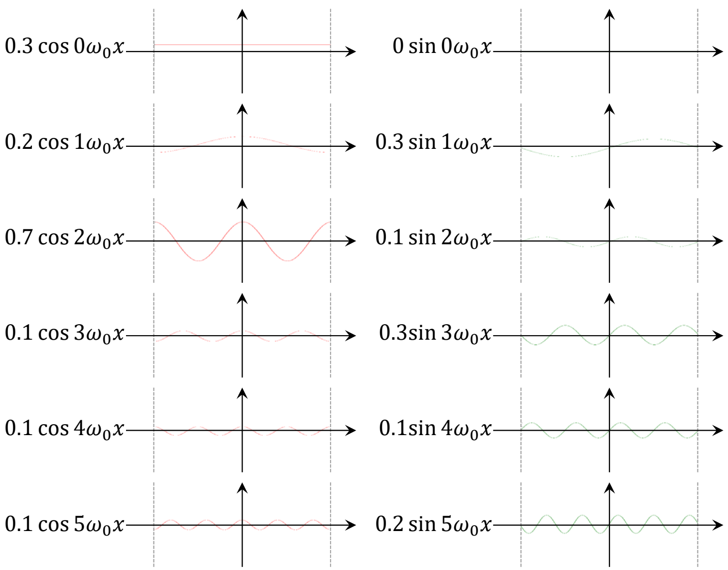
$y = \cos 3\omega_0 x$　　　$y = \sin 3\omega_0 x$



三角関数の引数を3倍すると，周波数が3倍に、周期が1/3倍になります



こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

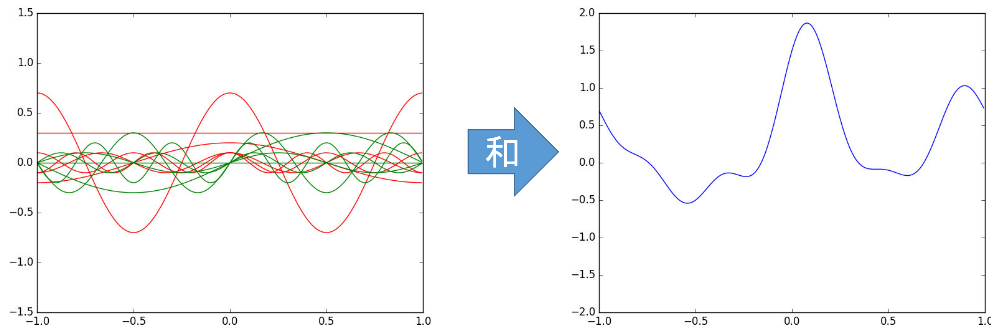


こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

それぞれを定数倍する
（今回はランダムに）

で、それを全部足し合わせてみる

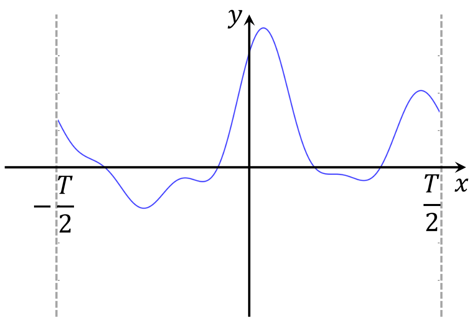
$0.3\cos 0\omega_0 x + 0.2\cos 1\omega_0 x + 0.7\cos 2\omega_0 x + 0.1\cos 3\omega_0 x + 0.1\cos 4\omega_0 x + 0.1\cos 5\omega_0 x +$
$0.0\sin 0\omega_0 x + 0.3\sin 1\omega_0 x + 0.1\sin 2\omega_0 x + 0.3\sin 3\omega_0 x + 0.1\sin 4\omega_0 x + 0.2\sin 5\omega_0 x$



フーリエ級数のとても簡単な説明

$[-T/2,T/2]$の周期関数 f は，周波数$k\omega_0$（$k=0,1,2,\cdots$）の三角関数の重ね合わせで表現できる　（**証明など詳細は信号処理の講義へ**）

周期関数を受け取ると，この周期関数から重ね合わせに必要な各関数の係数を推定できる（**どうやって？**）



$0.3\cos 0\omega_0 x$	$0.0\sin 0\omega_0 x$
$0.2\cos 1\omega_0 x$	$0.3\sin 1\omega_0 x$
$0.7\cos 2\omega_0 x$	$0.1\sin 2\omega_0 x$
$0.1\cos 3\omega_0 x$	$0.3\sin 3\omega_0 x$
$0.1\cos 4\omega_0 x$	$0.1\sin 4\omega_0 x$
$0.1\cos 5\omega_0 x$	$0.2\sin 5\omega_0 x$

『この元信号の中には，$\cos 2\omega_0 x$の成分が0.7だけ含まれている』というのが分かる

フーリエ級数のとても簡単な説明

合成後の周期関数$f(x)$を受け取ると，この合成後の波から合成前の各関数の係数を推定する **←どうやって？？**

例 $\cos 2\omega_0 x$ の係数を知りたい場合…

1) $f(x)$に$\cos 2\omega_0 x$ を掛けた関数を作る

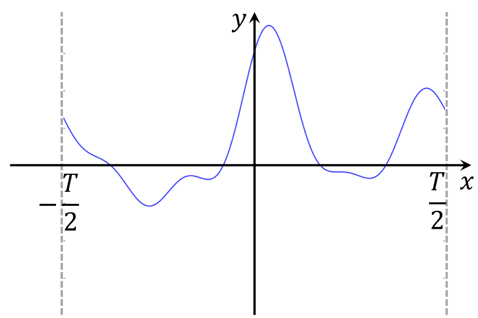
$$f(x)\cos 2\omega_0 x$$

2) 係数 $\frac{2}{T}$ もかける

$$\frac{2}{T}f(x)\cos 2\omega_0 x$$

3) これを周期分だけ積分すると係数が得られる

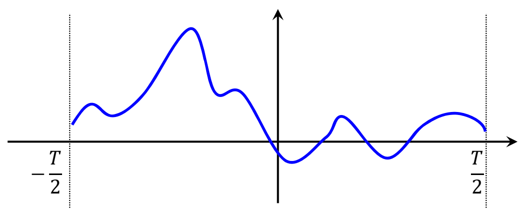
$$係数 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\ 2\omega_0 t\ dt$$



フーリエ級数

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる．



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_0\, t\ dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_0 t\ dt$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ：基本周波数

※天下り的な説明で済みません．ここではそういう事実があると知っておいてください．

※詳細な導出と証明は，信号処理の講義，または，『これなら分かる応用数学教室（金谷健一著）』を参照

フーリエ級数

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる．

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+a_1\cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

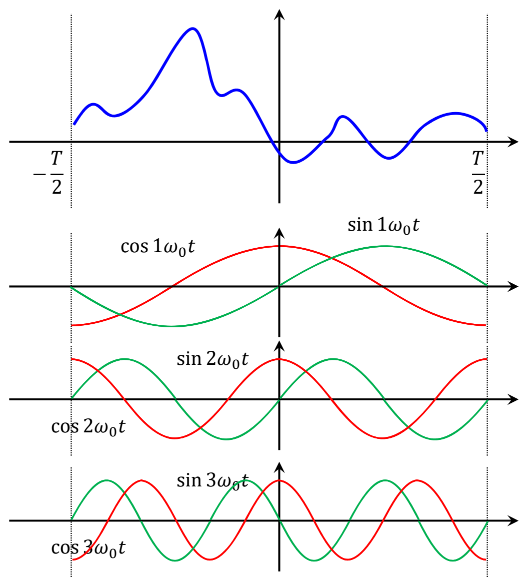
$$+a_2\cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+a_3\cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

$$+\cdots$$

基本周波数

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

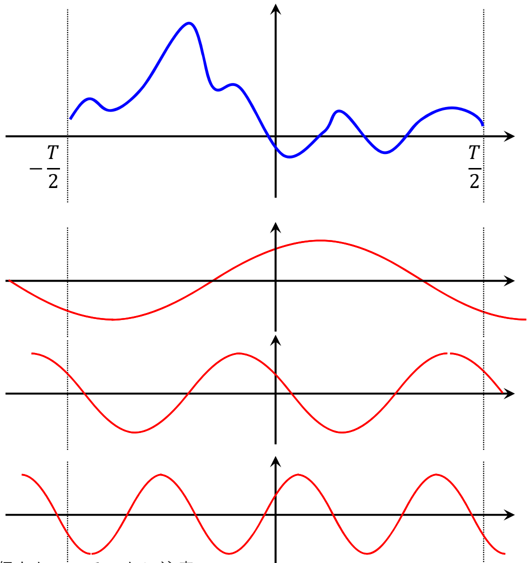


フーリエ級数

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} \\
&+ a_1' \sin(1\omega_0 t + \phi_1) \\
&+ a_2' \sin(2\omega_0 t + \phi_2) \\
&+ a_3' \sin(3\omega_0 t + \phi_3) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$



「sin　と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、
「a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

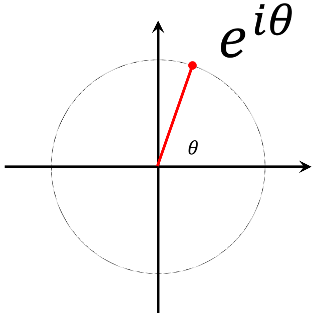
位相がずれても、$-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- **オイラーの式と複素数表現**
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

オイラーの式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

練習) 複素数の積を求めよ

- $a\,(\cos\theta + i\sin\theta) * b\,(\cos\phi + i\sin\phi\ \ )$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数の複素数表現

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、フーリエ級数で表現できる.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos k\omega_0\,t\,dt$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin k\omega_0 t\,dt$$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ ：基本周波数

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

練習: 下の式(1)-(5)より，式(6),(7)を導け

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)\quad ...(1)$$

$$a_k=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos k\omega_0\,t\,dt\quad ...(2)$$

$$b_k=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin k\omega_0 t\,dt\quad ...(3)$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\quad ...(4)$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\quad ...(5)$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}\quad ...(6)$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt\quad ...(7)$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする，

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t),\quad ...(1)$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos k\omega_0\,t\,\mathrm{d}t,\quad ...(2)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin k\omega_0 t\,\mathrm{d}t.\quad ...(3)$$

一方オイラーの式より，

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\qquad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\quad ...(4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると、

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{e^{ik\omega_0 t}+e^{-ik\omega_0 t}}{2}+b_k\frac{e^{k\omega_0 t\theta}-e^{-k\omega_0 t\theta}}{2i}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\left(e^{ik\ {}_0t}+e^{-ik\omega_0 t}\right)-ib_k\left(e^{k\omega_0 t\theta}-e^{-k\omega_0 t\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k-ib_k)e^{ik\ {}_0t}+b_k(a_k+ib_k)e^{-k\omega_0 t\theta}\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}\quad ...(5)$$

ただし，

$$C_k=\begin{cases}\frac{a_k-ib_k}{2} & k>0\\ \frac{a_0}{2} & k=0\\ \frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2} & k<0\end{cases}\quad ...(6)$$

と置いた.

また，式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると，

$$\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos k\omega_0\,t\,dt-i\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin k\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)(\cos k\omega_0\,t-i\sin k\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}\mathrm{d}t\quad ...(7)$$

$$\frac{a_{-k}+ib_{-k}}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos -k\omega_0 t\;dt+i\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin -k\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)(\cos k\omega_0\,t-i\sin k\omega_0 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}\mathrm{d}t\quad ...(8)$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-i0\omega_0 t}\mathrm{d}t\quad ...(9)$$

上記(5,6,7,8,9)より，

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}\ ,$$

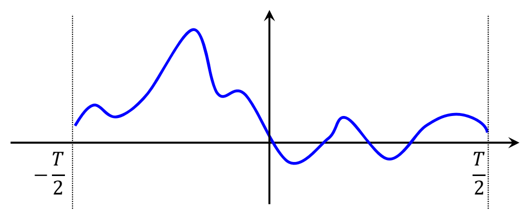
$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}\mathrm{d}t\quad ...(10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

フーリエ級数(**複素数表記**)

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.



$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}$$

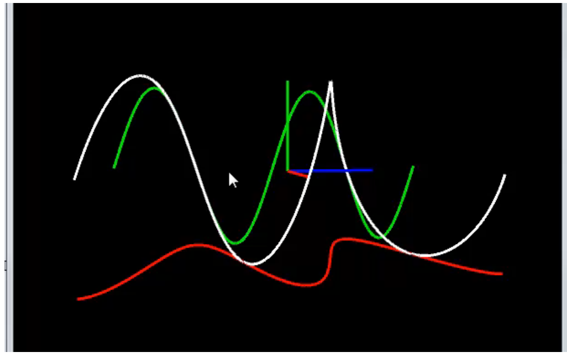
$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

この複素数表記された
正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、
$\cos k\omega_0 t$, $\sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい

フーリエ級数(複素数表記)

$e^{ik\omega_0 t}=\cos k\omega_0 t+i\sin k\omega_0 t$

この正弦波は何なのか？



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

まとめ: フーリエ級数

- フーリエ級数：周期 Tを持つ関数は下記の通り正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t),\quad a_k=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_0\, t\,dt,\quad b_k=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_0 t\,dt$$

- オイラーの式　$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$$e^{i\theta}e^{i\phi}=e^{i(\theta+\phi)},\ (e^{i\theta})^n=e^{in\theta},\ \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

- フーリエ級数（複素数表現）：

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t},\ C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

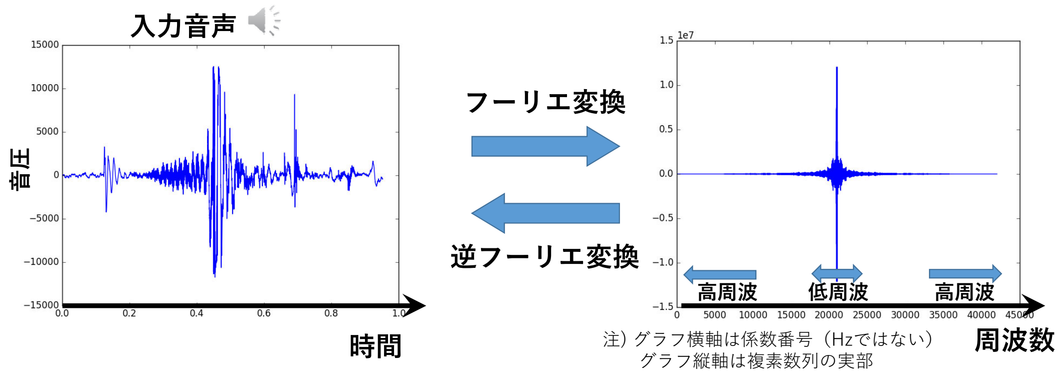
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- **離散フーリエ変換**
- 周波数フィルタリング

FourierSound.py

フーリエ変換とは（音）

時間に関する信号（横軸が時間の関数）を、
周波数に関する信号（横軸が周波数の関数）に変換する手法

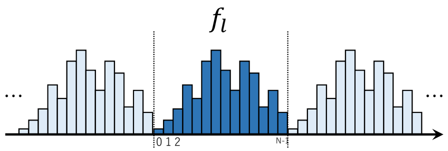


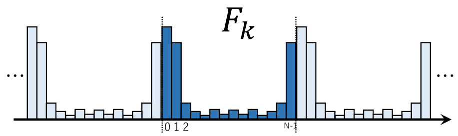
注）グラフ横軸は係数番号（Hzではない）
グラフ縦軸は複素数列の実部

※）両関数とも複素数関数となる（デジタルデータの場合は複素数列）

離散フーリエ変換（1D）

フーリエ変換 $F_k = \dfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N}}$　　逆フーリエ変換 $f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$

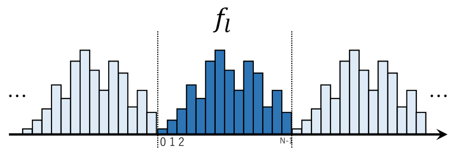


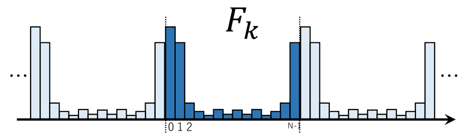


- 周期Nの離散値f_lを周期Nの離散値F_kに変換する
- f_lとF_kは複素数（**ただしf_lは実数列のことが多い**）
- f_lが実数の場合$F_k = \overline{F_{-k}}$が成り立つ（$F_{-k} = F_{N-k}$）

離散フーリエ変換（1D）

フーリエ変換 $F_k = \dfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l \left(\cos\dfrac{2\pi kl}{N} - i\sin\dfrac{2\pi kl}{N}\right)$　　逆フーリエ変換 $f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(\cos\dfrac{2\pi kl}{N} + i\sin\dfrac{2\pi kl}{N}\right)$





- 周期Nの離散値f_lを周期Nの離散値F_kに変換する
- f_lとF_kは複素数（**ただしf_lは実数列のことが多い**）
- f_lが実数の場合$F_k = \overline{F_{-k}}$が成り立つ（$F_{-k} = F_{N-k}$）

離散フーリエ変換の計算例

$F_k = \dfrac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N}}$

↑複素数とかでできて
ややこしそうだけど
ただの和分

$N = 8$ のとき

入力：$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7,$

$$F_0 = \frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right) + f_1\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right) + \cdots + f_7\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right) + f_1\left(\cos\frac{2\pi 1}{N} + i\sin\frac{2\pi 1}{N}\right) + \cdots + f_7\left(\cos\frac{2\pi 7}{N} + i\sin\frac{2\pi 7}{N}\right)\right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right) + f_1\left(\cos\frac{2\pi 2}{N} + i\sin\frac{2\pi 2}{N}\right) + \cdots + f_7\left(\cos\frac{2\pi 14}{N} + i\sin\frac{2\pi 14}{N}\right)\right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N} + i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right) + f_1\left(\cos\frac{2\pi 3}{N} + i\sin\frac{2\pi 3}{N}\right) + \cdots + f_7\left(\cos\frac{2\pi 21}{N} + i\sin\frac{2\pi 21}{N}\right)\right]$$

$$\vdots$$

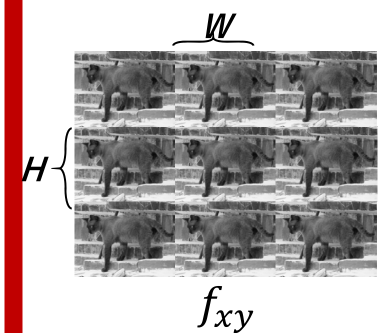
離散フーリエ変換（2D）

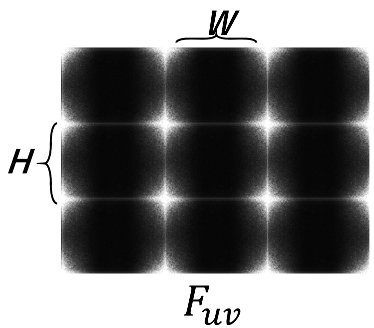
フーリエ変換：

$$F_{uv} = \frac{1}{WH}\sum_{y=0}^{H-1}\sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi xu}{W}i} e^{-\frac{2\pi yv}{H}i}$$

逆フーリエ変換：

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1}\sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi xu}{W}i} e^{\frac{2\pi yv}{H}i}$$



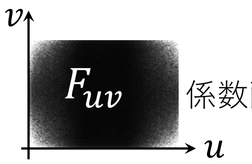


縦横方向に周期H/Wで繰り返す離散値 f_{xy}を，離散値 F_{uv}に変換

f_{xy}とF_{uv}は複素数列.

ただし，f_{xy}は画像（実数列）のことが多い

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1}\sum_{u=0}^{W-1} F_{uv}\, e^{\left(\frac{2\pi xu}{W}+\frac{2\pi yv}{H}\right)i}$$

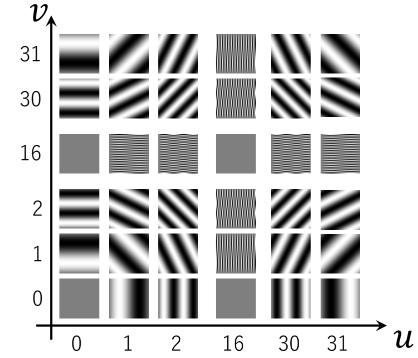


係数画像

- $F_{0,0}$は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$は，画像区間において『縦にu回・横にv回振動する正弦波画像』の係数
- $u=v=N/2$がもっとも高周波で，$u=N-1$は$u=1$の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

$W=H=32$のときの

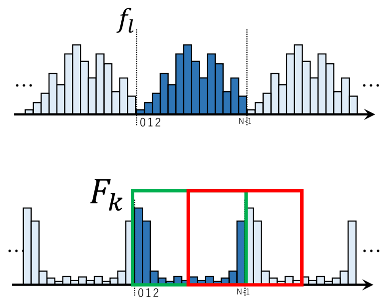
$$sin\left(\frac{2\pi xu}{W}+\frac{2\pi yv}{H}\right)$$

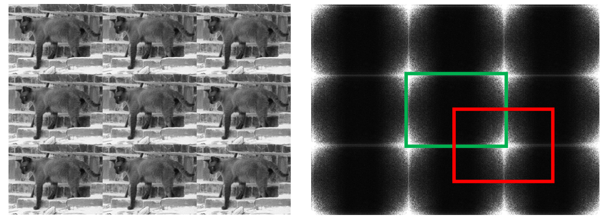


$F_{u,v}$は上の (u,v)番目の画像の係数

実際は$e^{\left(\frac{2\pi xu}{W}+\frac{2\pi yv}{H}\right)i}$は複素数画像

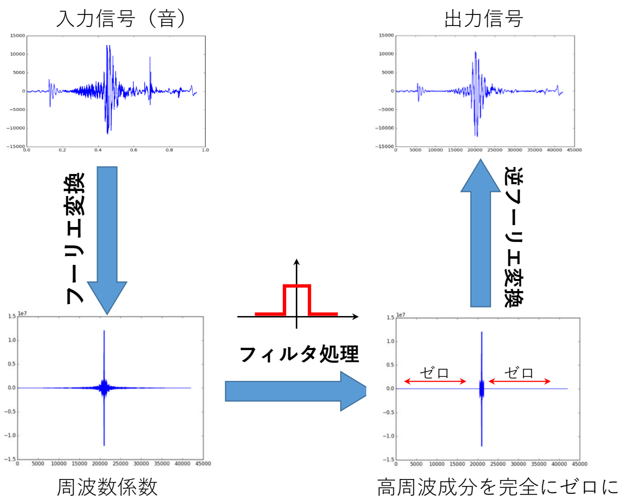
Shiftの話





- フーリエ変換を実装すると，ピークが端に来る変換結果になる
  - **上図緑四角**：これは間違いじゃない
  - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので**上図赤四角**の位置を出力することが多い
  - このshiftを行なう関数が用意されていることも → np.fft.ifftshift()

周波数フィルタリング（音）

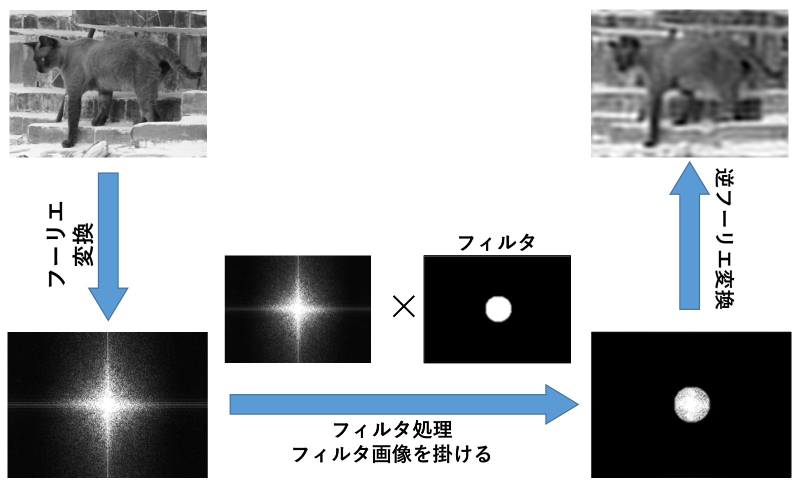


フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

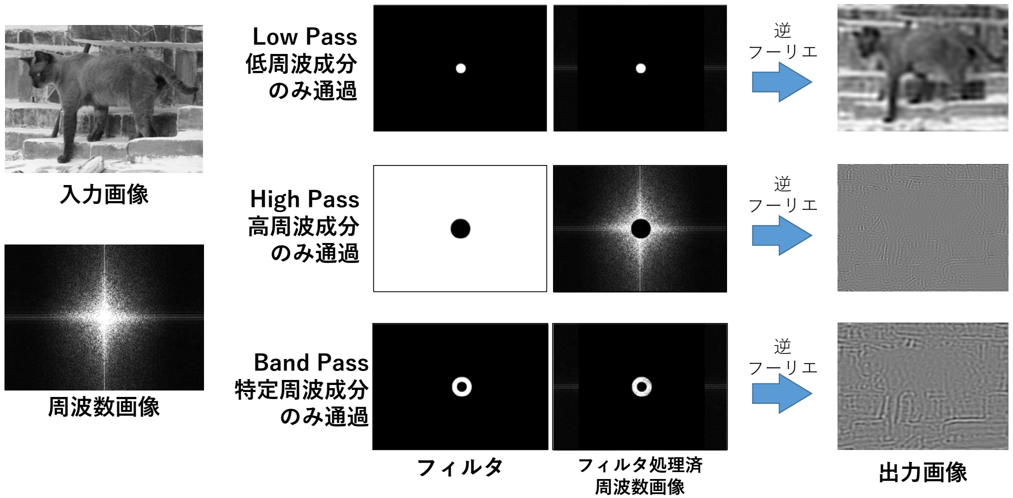
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

周波数フィルタリング（画像）



周波数フィルタリング（画像）



Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング