

# デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

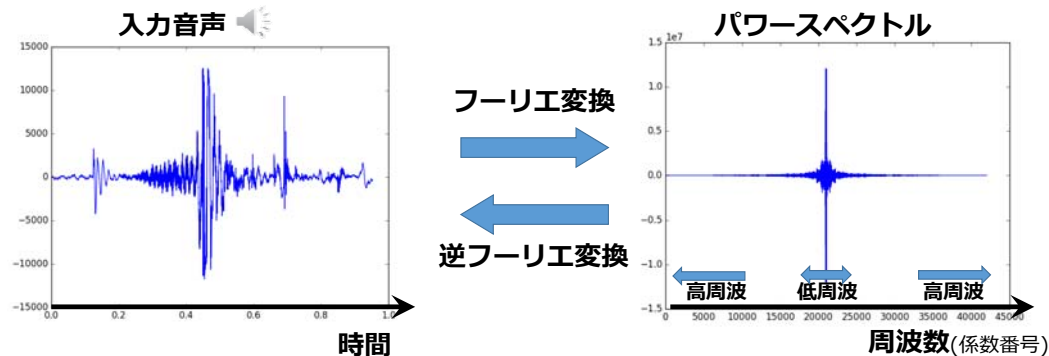
## Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

## フーリエ変換とは（音）

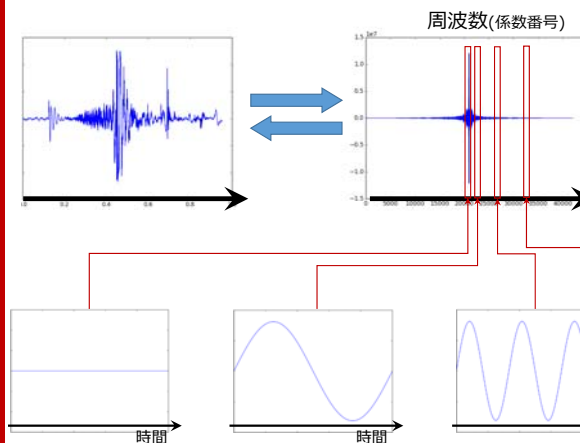
FourierSound.py

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法



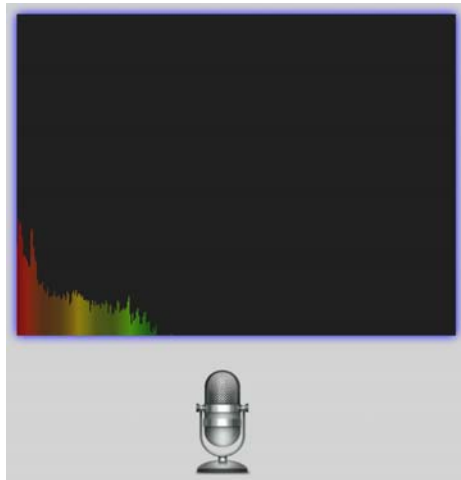
## フーリエ変換とは（音）

FourierSound.py



- フーリエ変換後の関数は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央に近いほど低周波，外ほどが高周波
- 中央（最も低周波）は，定数項で直流成分と呼ばれる
  - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作る

※下の波はイメージ  
※本来はもっともっと細かいです。



## 音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2D  
のフーリエ変換は高速なので  
実時間解析可能

Spector Analyzer  
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

## フーリエ変換とは（画像）

- 横軸が時間/空間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

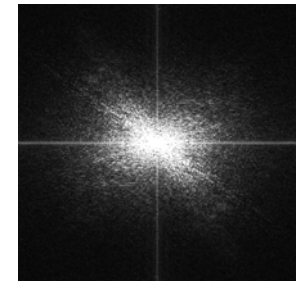


画像  
(2D空間に画素が並ぶ)

フーリエ変換



逆フーリエ変換

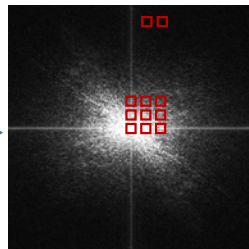


周波数画像  
(画素は特定周波数の大きさを示す)

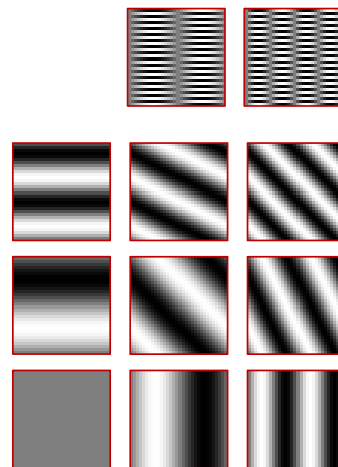
## フーリエ変換とは（画像）



フーリエ  
変換



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号  
に含まれる正弦波の量を示す
- 中央付近が低周波、外側が高周波
- 中央画素は、定数項（直流成分）



この図はイメージです  
本来は現画像と同サイズで  
もっと細かいです

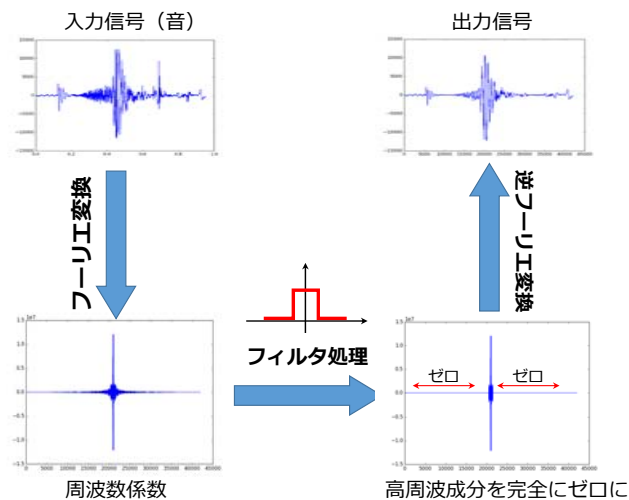
→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる

## フーリエ変換とは（画像）

FourierPaint.py  
FourierImg.py

## 周波数フィルタリング（音）

FourieSound.py



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

## 周波数フィルタリング（音）

### イコライザ

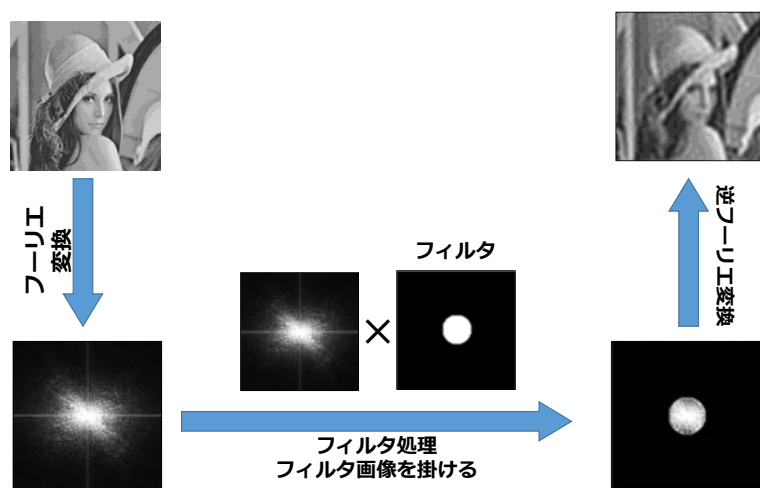
周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換



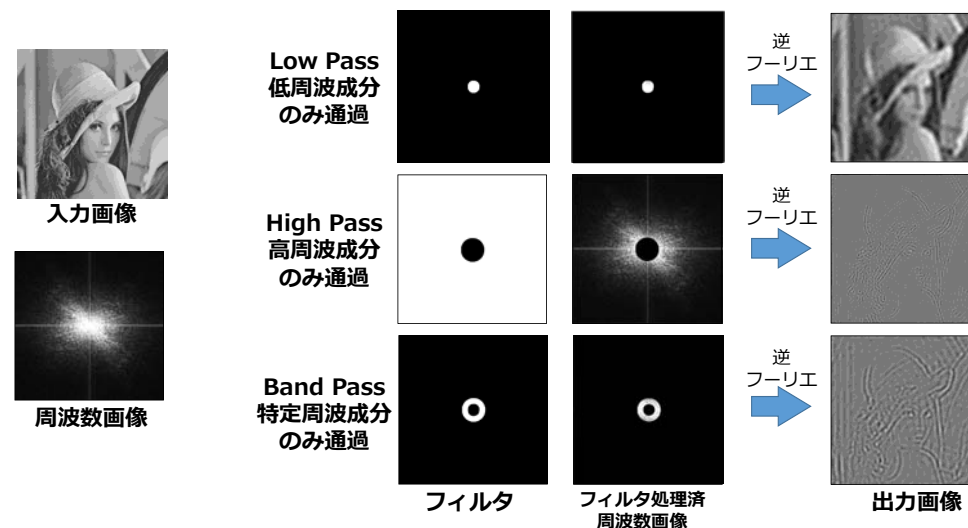
Itunesのイコライザ

## 周波数フィルタリング（画像）



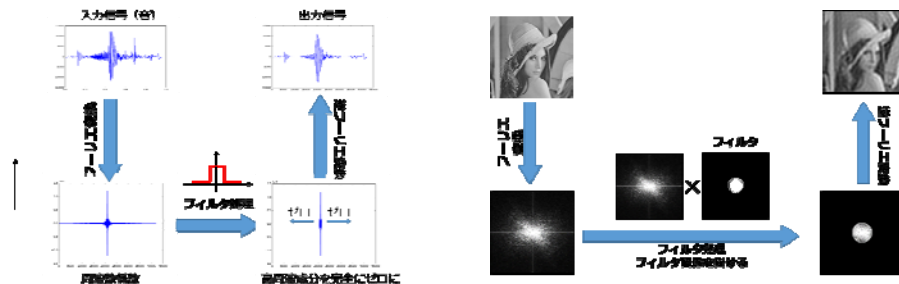
説明のためLowpassの半径を大きく可視化  
本当はもっと小さい

## 周波数フィルタリング（画像）



## まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は、横軸時間の関数を横軸周波数の関数に変換する
  - 逆フーリエ変換も定義される
  - 2次元フーリエ変換は画像へ適用できる
  - 周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



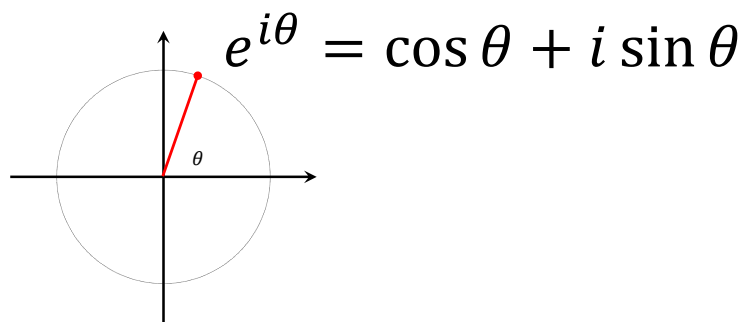
## Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換**
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。  
証明と導出は（少しだけしか）扱いません。

詳しく知りたい人は「[金谷先生:これなら分かる応用数学教室](#)」を強くお勧めします。

## オイラーの式



$e^{i\theta}$  はガウス平面における単位円に乗る

これはもうこういう表記法だと思って覚えてください

### 練習

三角関数を合成せよ

- $a \sin \theta + b \cos \theta$

複素数の積を求めよ

- $a (\cos \theta + i \sin \theta) * b (\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

# フーリエ級数

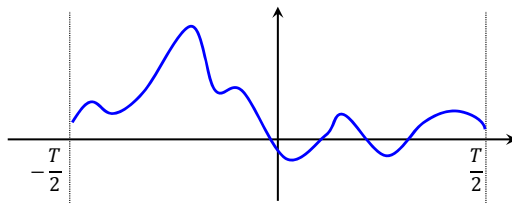
区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$



# フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

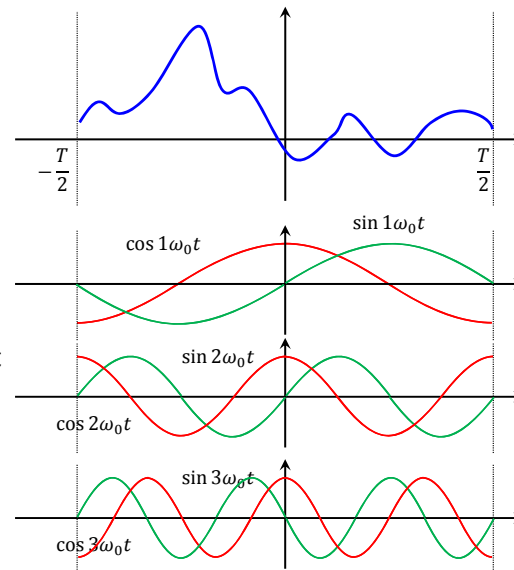
$$+ a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+ a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

$$+ \dots$$

基本周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



# フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a'_1 \sin(1\omega_0 t + \phi_1)$$

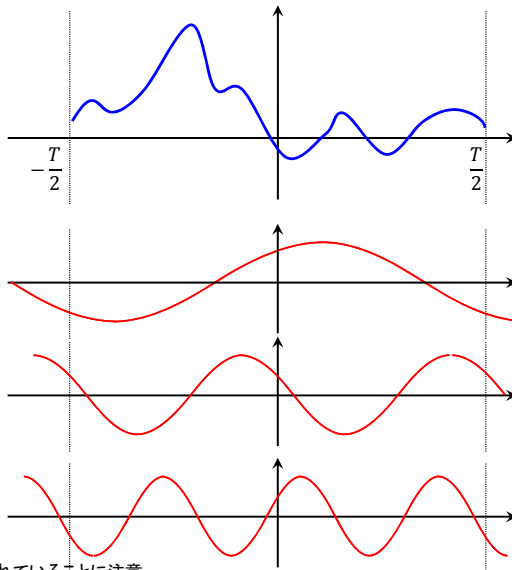
$$+ a'_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$$

$$+ a'_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$$

$$+ \dots$$

「sin と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、  
「 $a_k$  と  $b_k$  で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

位相がずれても、 $-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意



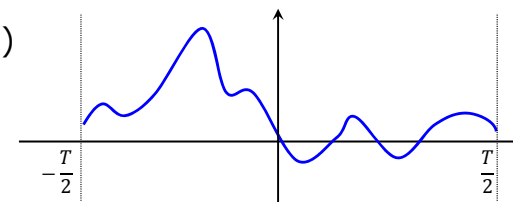
# フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

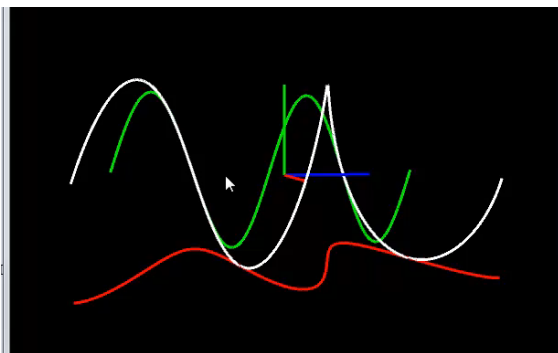
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

この複素数表記された  
正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、  
 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$  に比べてイメージしにくい



## フーリエ級数(複素数表記)

$f(t) = e^{ik\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t$   
この正弦波は何なのか？



赤が実軸  
緑が虚軸  
青が時間軸

<https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4>

## フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。

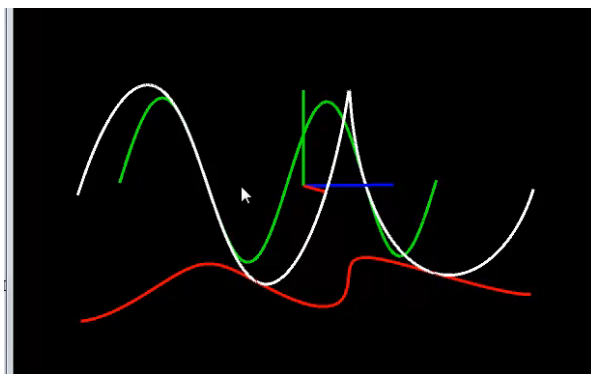
$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$

複素数の掛け算  $C e^{i\omega t}$  は  
 $C = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  とすると、  
 $C e^{i\omega t} = r e^{i\omega t + \phi}$  となる

つまり、 $C$ を掛けるというのは、  
 $e^{i\omega t}$ に対し位相を $\theta$ ずらして $r$ 倍する  
操作だといえる

## フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、  
フーリエ級数で表現できる。



動画の後半参照 or FourieViz.pdeをprocessingで実行してみてください。

$$\begin{aligned} f(t) = & C_0 \\ & + C_1 e^{i1\omega_0 t} - C_{-1} e^{-i1\omega_0 t} \\ & + C_2 e^{i2\omega_0 t} - C_{-2} e^{-i2\omega_0 t} \\ & + C_3 e^{i3\omega_0 t} - C_{-3} e^{-i3\omega_0 t} \\ & + \dots \end{aligned}$$

## まとめ: フーリエ級数展開

※今回は導出と証明を省きました  
詳しく知りたい人は教科書参照

• オイラーの式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

• フーリエ級数展開: 周期 $T$ を持つ関数は正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

• フーリエ級数展開 (複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

練習: 下の式(1)-(3)より, 式(4)(5)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \dots (3)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (4)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (5)$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt. \dots (3)$$

一方オイラーの式より,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - ib_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t})) \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + b_k (a_k + ib_k) e^{-ik\omega_0 t}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (5) \end{aligned}$$

ただし,

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \dots (6)$$

と置いた.

また, 式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{a_k - ib_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (7) \end{aligned}$$

$$\frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos -k\omega_0 t \, dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin -k\omega_0 t \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (8) \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} \, dt \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

## フーリエ変換とは

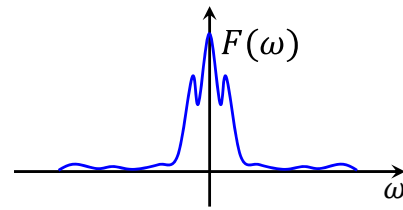
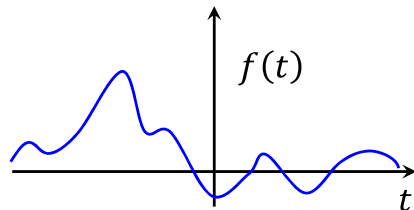
※古い資料は1/2piが抜けてた、注意！！！！

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$



- 時間 $t$ の関数  $f(t)$  を、周波数 $\omega$ の関数 $F(\omega)$ に変換する
- $f(t)$ と $F(\omega)$ は複素数関数である ( $f(t)$ は実数関数のことが多い)
- フーリエ級数展開において  $T \rightarrow \infty$  とすると導出できる

フーリエ変換には, 少し異なる複数の定義が存在する

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

フーリエ変換:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} \, dt$$

逆フーリエ変換:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i2\pi\omega t} \, d\omega$$

## フーリエ変換の導出 - これなら分かる応用数学教室, 金谷健一先生著 より

フーリエ変換の導出.

周期  $T$  の関数  $f(t), t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  は, 以下の通りフーリエ級数に展開できる.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \quad \dots (1)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad \dots (2)$$

ここで,  $\omega_k = k\omega_0$ ,  $\Delta\omega = \omega_0 = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$ ,  $C_k = \frac{F(\omega_k)}{T}$  と置くと, (1)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} \Delta\omega \quad \dots (3) \end{aligned}$$

が得られる. また, 式(2)より

$$F(\omega_k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad \dots (4)$$

が得られる. ここで周期  $T$  を  $T \rightarrow \infty$  とすると,  $\Delta\omega \rightarrow 0$  であり, 式(3)(4)より下式が得られる.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_k) e^{i\omega_k t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots (5)$$

この左式を逆フーリエ変換, 右式をフーリエ変換と呼ぶ. ただし, 式(4)から式(5)の変形に以下の関係を用いた.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

ただし,  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$  は区間  $[a, b]$  を,  $N$  等分する点. |

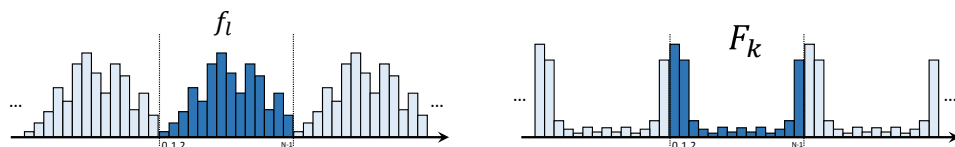
## Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

## 離散フーリエ変換 (1D)

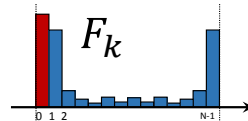
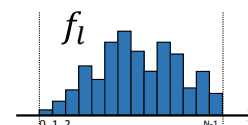
$$\text{フーリエ変換} \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換} \quad f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



- 周期  $N$  の離散値  $f_l$  を周期  $N$  の離散値  $F_k$  に変換する
- $f_l$  と  $F_k$  は複素数 (ただし  $f_l$  は実数列のことが多い)
- $f_l$  が実数の場合  $F_k = \overline{F_{-k}}$  が成り立つ ( $F_{-k} = F_{N-k}$ )

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



$$\begin{aligned} F_0 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 0} & \text{---} \\ F_1 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 1} & \text{---} \\ F_2 \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot 2} & \text{---} \\ & \vdots \\ F_{N-1} \times e^{i \frac{2\pi l}{N} \cdot (N-1)} & \text{---} \end{aligned}$$

※グラフは全て複素数

- $F_0$  は定数 (直流成分) に対応
- $F_k$  は  $[0, N-1]$  区間において  $N$  回振動する正弦波に対応
- $K=N/2$  がもっとも高周波で,  $k=N-1$  は  $k=1$  の正弦波と同じ周波数 (位相は逆)



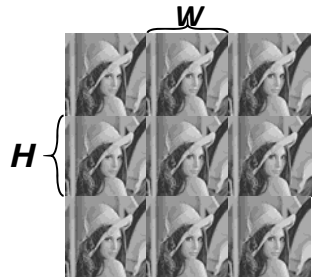
## 離散フーリエ変換（2D）

フーリエ変換：

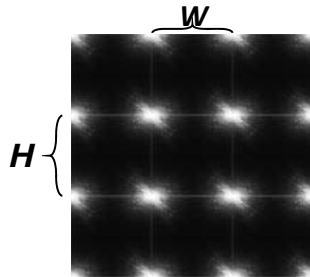
$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi xu}{W}} e^{-\frac{2\pi yv}{H}}$$

逆フーリエ変換：

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi xu}{W}} e^{\frac{2\pi yv}{H}}$$



$f_{xy}$

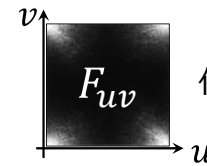


$F_{uv}$

縦横方向に周期H/Wで繰り返す  
離散値  $f_{xy}$  を、離散値  $F_{uv}$  に変換  
 $f_{xy}$  と  $F_{uv}$  は複素数列（ $f_{xy}$  は画像-  
実数列-のことが多い）



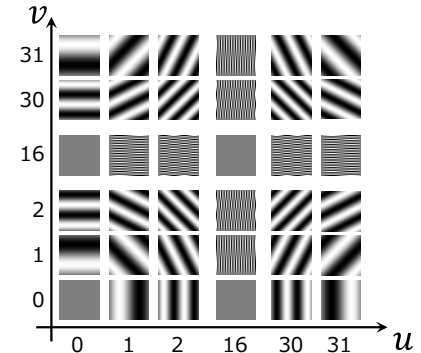
$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)i}$$



係数画像

- $F_{0,0}$  は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$  は、画像区間において『縦に  $u$  回・横に  $v$  回振動する正弦波画像』の係数
- $U=V=N/2$  がもっとも高周波で、 $u=N-1$  は  $u=1$  の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

$$W=H=32 \text{ のときの } \sin\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)$$



$F_{u,v}$  は上の  $(u,v)$  番目の画像の係数  
実際は  $F_{u,v}$  は複素数画像

## 離散フーリエ変換の計算例

$N = 8$  のとき

入力： $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

↑複素数とかできて  
ややこしそうだけど  
ただの和分

$$F_0 = \frac{1}{8} \left[ f_0 \left( \cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + f_1 \left( \cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + \dots + f_7 \left( \cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) \right]$$

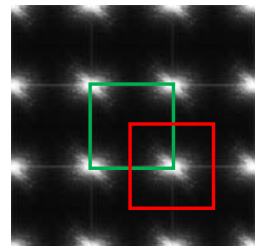
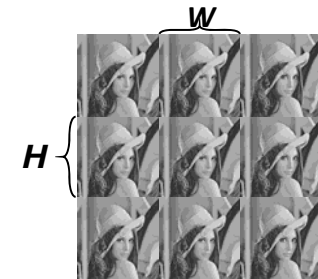
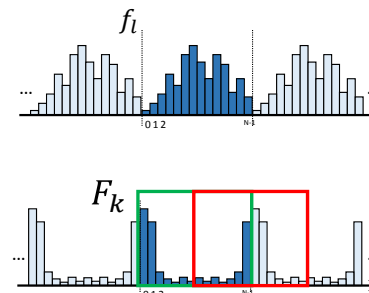
$$F_1 = \frac{1}{8} \left[ f_0 \left( \cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + f_1 \left( \cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + \dots + f_7 \left( \cos \frac{2\pi 7}{8} + i \sin \frac{2\pi 7}{8} \right) \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \left[ f_0 \left( \cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + f_1 \left( \cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + \dots + f_7 \left( \cos \frac{2\pi 14}{8} + i \sin \frac{2\pi 14}{8} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left[ f_0 \left( \cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + f_1 \left( \cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + \dots + f_7 \left( \cos \frac{2\pi 21}{8} + i \sin \frac{2\pi 21}{8} \right) \right]$$

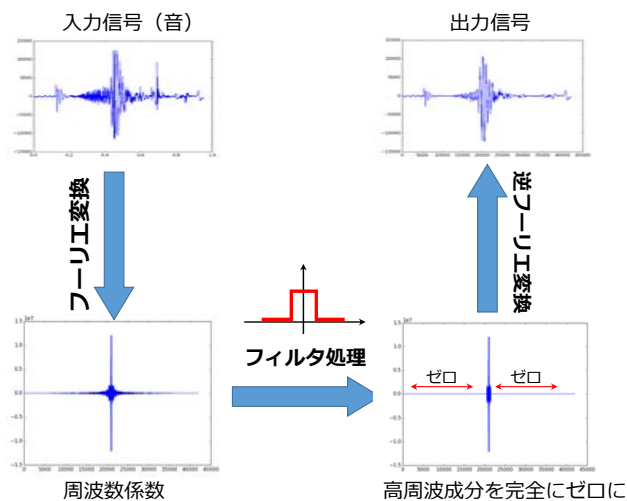
⋮

## Shiftの話



- フーリエ変換を実装すると、ピークが端に来る変換結果になる
  - 上図緑四角：これは間違いじゃない
  - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので 上図赤四角の位置を出力することが多い
  - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

## 周波数フィルタリング（音）

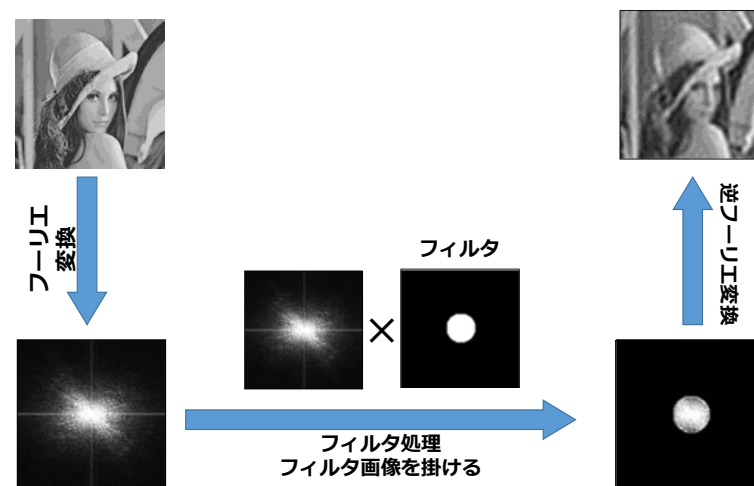


フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

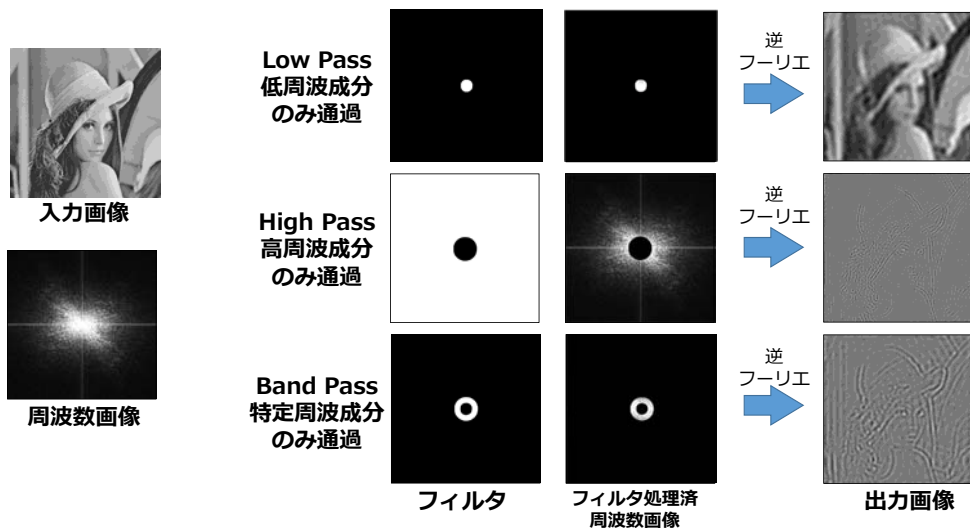
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

## 周波数フィルタリング（画像）



## 周波数フィルタリング（画像）

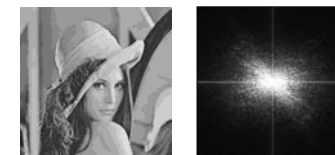
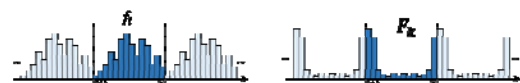


## まとめ：離散フーリエ変換と周波数フィルタ

離散フーリエ変換（1D/2D）の実装方法を解説した

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



周波数空間でマスクを掛ける周波数フィルタを紹介した

