

デジタルメディア処理1

担当: 井尻 敬

デジタルメディア処理1、2017（後期）

09/26 イントロダクション1：デジタル画像とは，量子化と標本化，Dynamic Range

10/03 イントロダクション2：デジタルカメラ，人間の視覚，表色系

10/10 フィルタ処理1：トーンカーブ，線形フィルタ

10/17 フィルタ処理2：非線形フィルタ，ハーフトーニング

10/24 フィルタ処理3：離散フーリエ変換と周波数フィルタリング

11/07 前半のまとめと中間試験

11/14 画像処理演習：python入門 (演習室)

11/21 画像処理演習：フィルタ処理 (演習室)

11/28 画像処理演習：フィルタ処理 (演習室)

12/05 画像処理演習：フィルタ処理 (演習室)

12/12 画像の幾何変換 1：アファイン変換

12/19 画像の幾何変換 2：画像の補間

01/16 画像復元：ConvolutionとDe-convolution（変更する可能性有り）

01/23 後半のまとめと期末試験

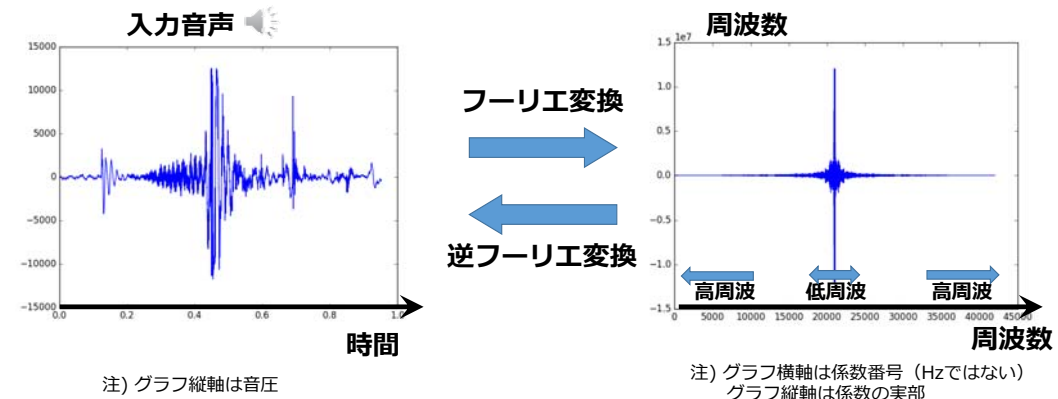
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

フーリエ変換とは（音）

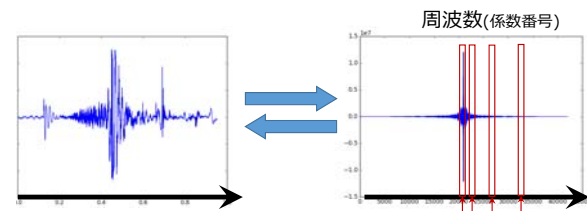
FourierSound.py

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

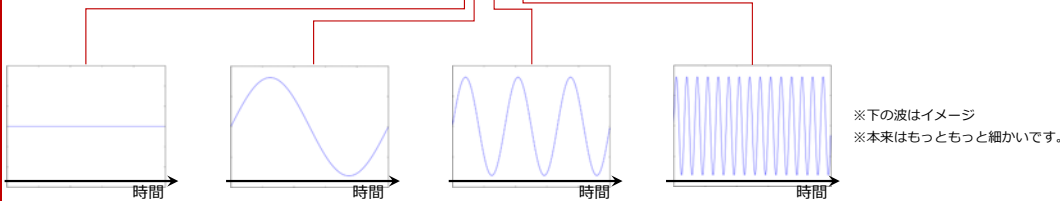


フーリエ変換とは（音）

FourierSound.py



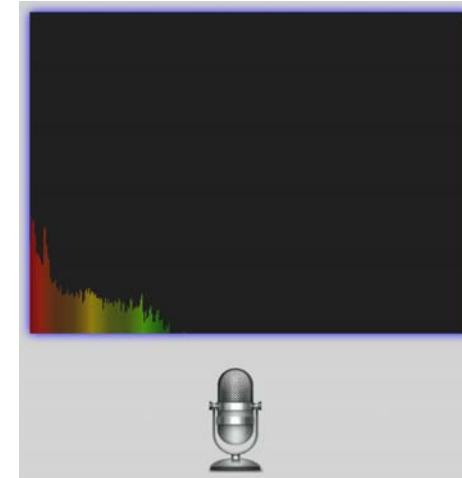
- フーリエ変換後の関数は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央に近いほど低周波, 外ほどが高周波
- 中央（最も低周波）は, 定数項で直流成分と呼ばれる
 - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作れる



音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2D
のフーリエ変換は高速なので
実時間解析可能

Spector Analyzer
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大



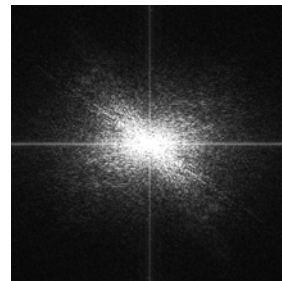
フーリエ変換とは（画像）

- 横軸が時間/空間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法



画像
(2D空間に画素が並ぶ)

フーリエ変換
逆フーリエ変換

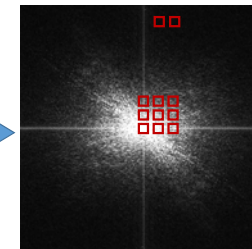


周波数画像
(画素は特定周波数の大きさを示す)

フーリエ変換とは（画像）

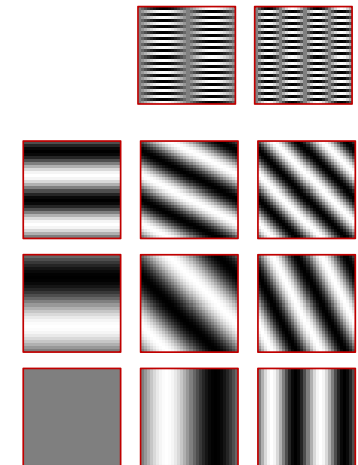


フーリエ
変換



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央付近が低周波, 外側が高周波
- 中央画素は, 定数項（直流成分）

→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる



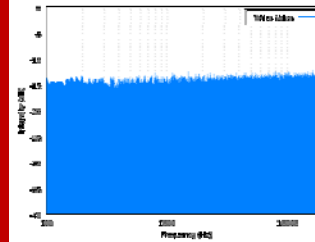
この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

フーリエ変換とは（画像）

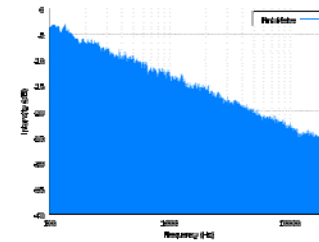
FourierPaint.py
FourierImg.py

余談（ノイズ）

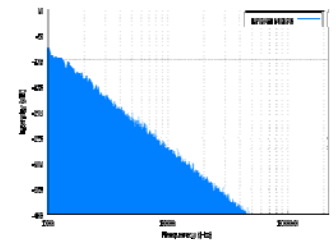
ノイズ（雑音）には、それが含む周波数の分布に応じて特定の名前が付いたものがある



ホワイトノイズ
スペクトルが一様に分布



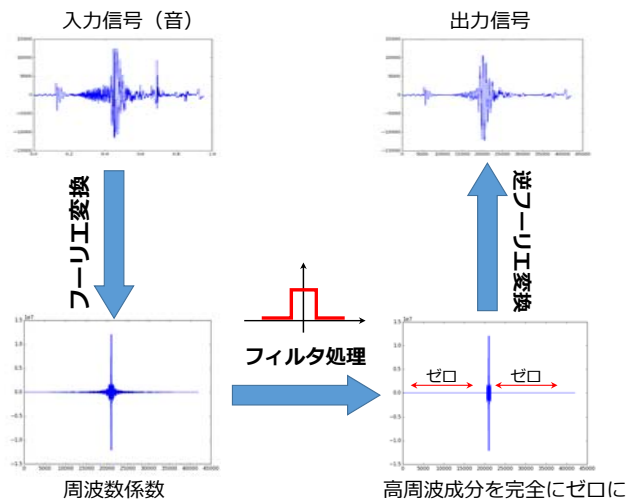
ピンクノイズ
スペクトル分布が $1/f$ に比例



ブラウンノイズ
スペクトル分布が $1/f^2$ に比例

周波数フィルタリング（音）

FourieSound.py



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

イコライザ

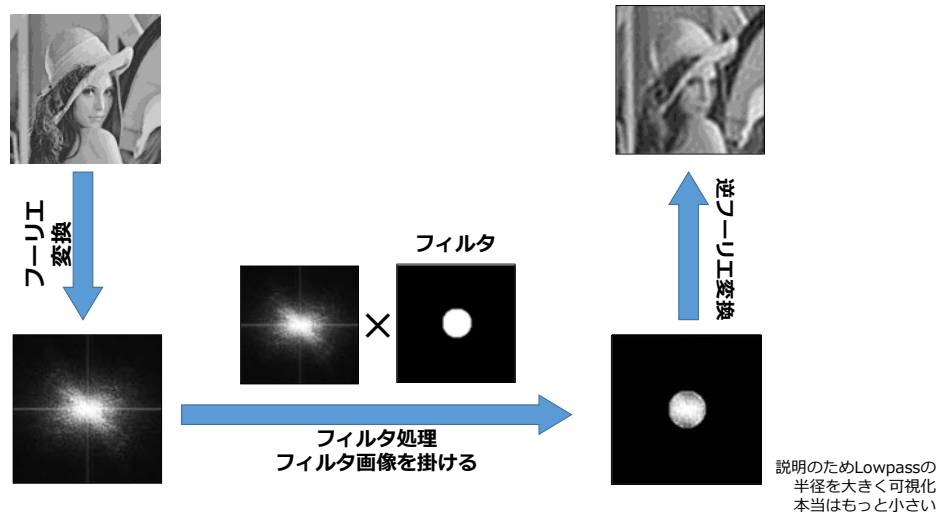
周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

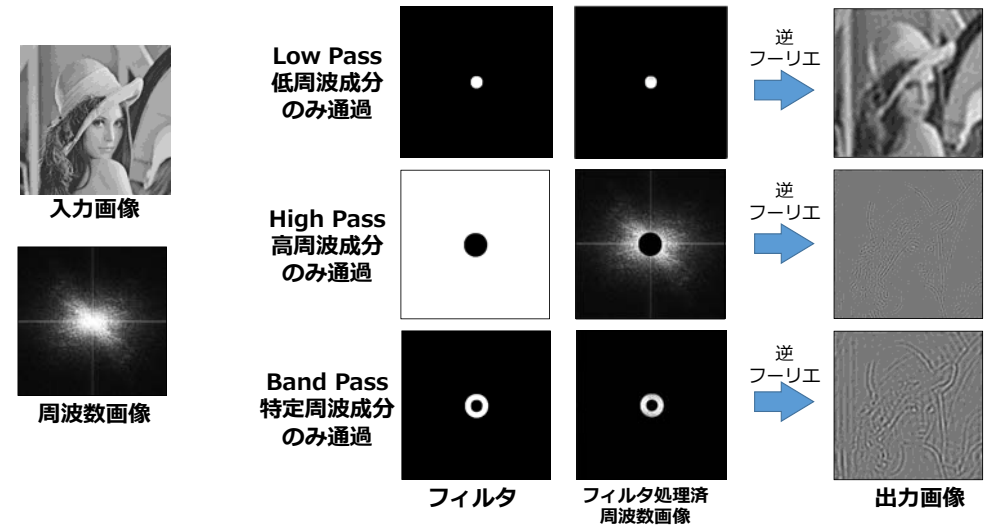


Itunesのイコライザ

周波数フィルタリング（画像）

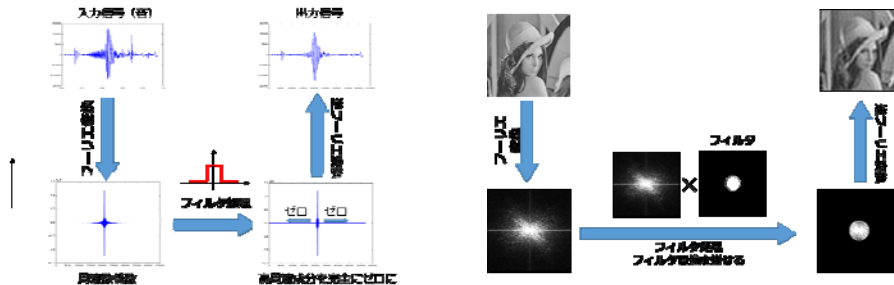


周波数フィルタリング（画像）



まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は、横軸時間の関数を横軸周波数の関数に変換する
 - 逆フーリエ変換も定義される
 - 2次元フーリエ変換は画像へ適用できる
 - 周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



フーリエ級数展開（の簡単な説明）

注意)

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。
証明と導出nの詳細は、信号処理の講義をとるか「金谷健一:これなら分かる
応用数学教室」を参照してください。

練習

三角関数を合成せよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

n と m を非負整数として以下を計算せよ

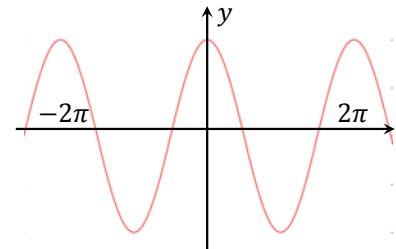
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T} x \cos \frac{2\pi l}{T} x dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi k}{T} x \sin \frac{2\pi l}{T} x dx$$

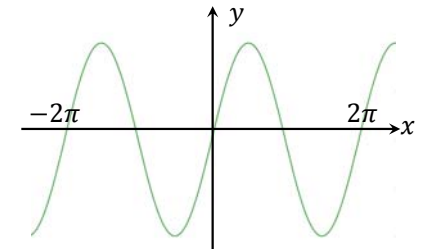
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi k}{T} x \cos \frac{2\pi l}{T} x dx$$

三角関数

$$y = \cos x$$



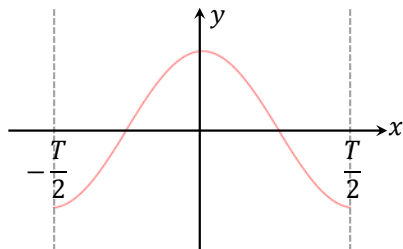
$$y = \sin x$$



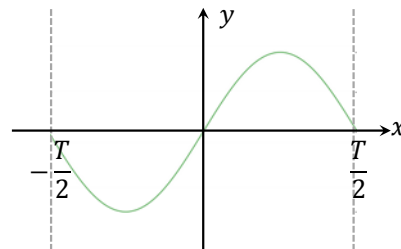
まあこれはいいですね

三角関数

$$y = \cos \frac{2\pi}{T} x = \cos \omega_0 x$$



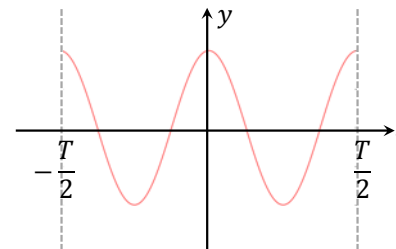
$$y = \sin \frac{2\pi}{T} x = \sin \omega_0 x$$



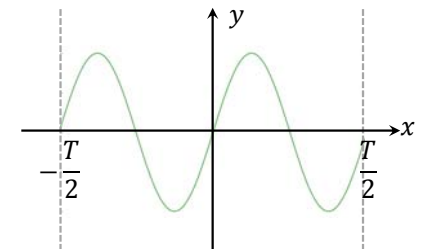
T を周期, ω_0 を基本(角)周波数と呼びます
[- $T/2$, $T/2$]でひと周期の波を取得できました

三角関数

$$y = \cos 2\omega_0 x$$



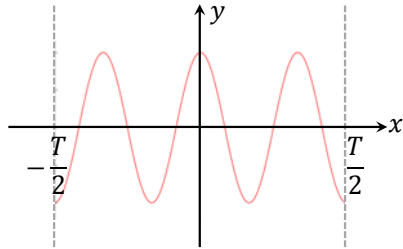
$$y = \sin 2\omega_0 x$$



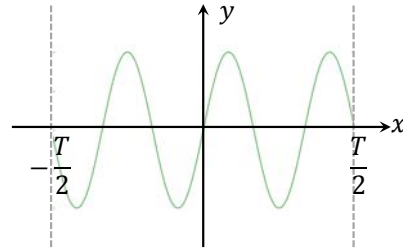
三角関数の引数を2倍すると, 周波数が2倍に、周期が1/2倍になります

三角関数

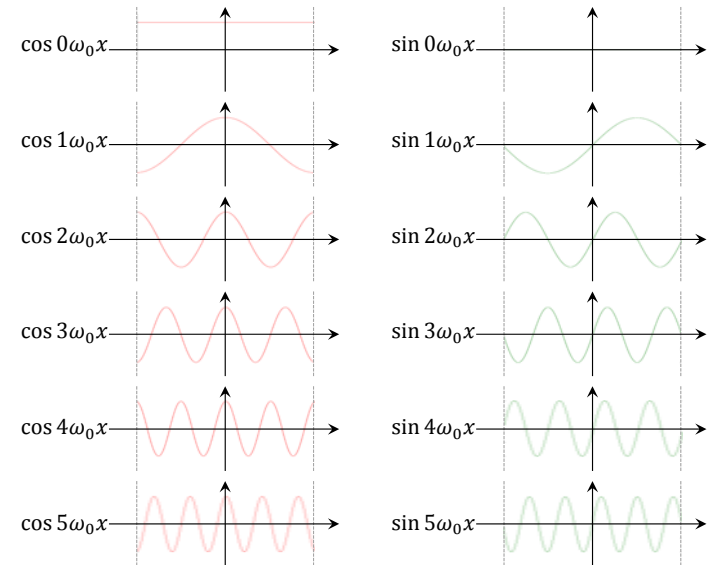
$$y = \cos 3\omega_0 x$$



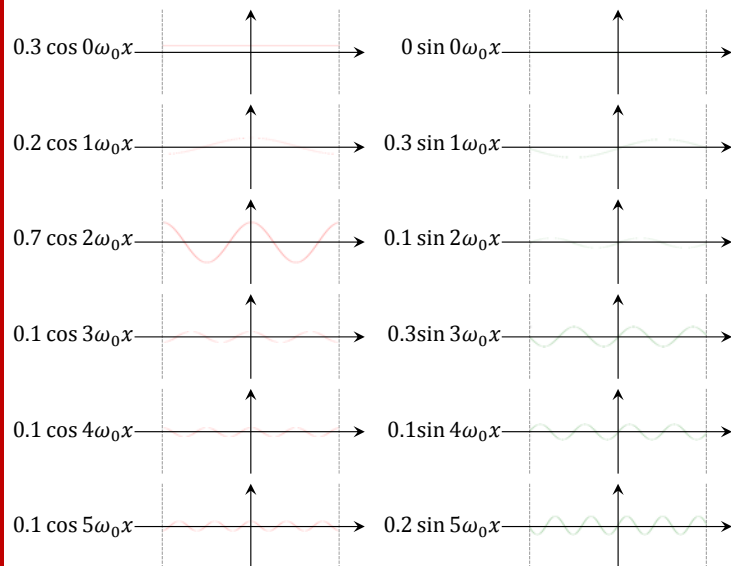
$$y = \sin 3\omega_0 x$$



三角関数の引数を3倍すると、周波数が3倍に、周期が1/3倍になります



こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

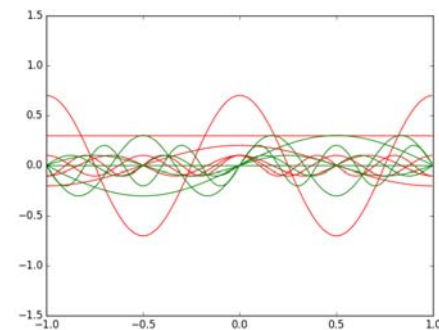


こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

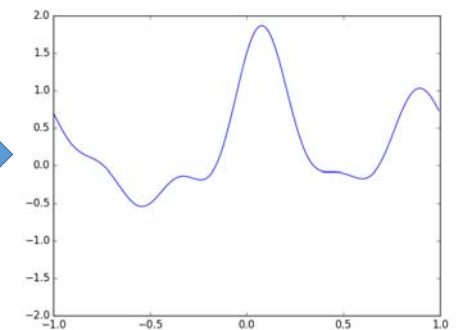
それぞれを定数倍する
(今回はランダムに)

で、それを全部足し合わせてみる

$$0.3 \cos 0\omega_0 x + 0.2 \cos 1\omega_0 x + 0.7 \cos 2\omega_0 x + 0.1 \cos 3\omega_0 x + 0.1 \cos 4\omega_0 x + 0.1 \cos 5\omega_0 x + 0.0 \sin 0\omega_0 x + 0.3 \sin 1\omega_0 x + 0.1 \sin 2\omega_0 x + 0.3 \sin 3\omega_0 x + 0.1 \sin 4\omega_0 x + 0.2 \sin 5\omega_0 x$$

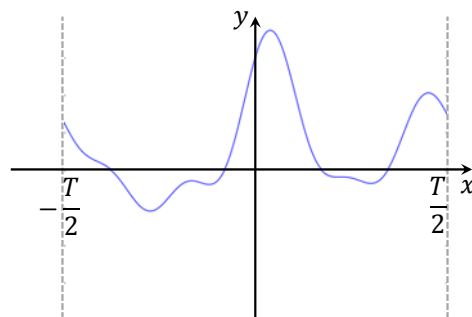


和



フーリエ級数展開のとても簡単な説明

- (1) $[-T/2, T/2]$ の周期関数は、周期は T/k (k は正整数) の三角関数の重ね合わせに分解できる
- (2) 合成後の周期関数を受け取ると、この合成後の波から合成前の各関数の係数を推定できる



0.3 $\cos 0\omega_0 x$	0.0 $\sin 0\omega_0 x$
0.2 $\cos 1\omega_0 x$	0.3 $\sin 1\omega_0 x$
0.7 $\cos 2\omega_0 x$	0.1 $\sin 2\omega_0 x$
0.1 $\cos 3\omega_0 x$	0.3 $\sin 3\omega_0 x$
0.1 $\cos 4\omega_0 x$	0.1 $\sin 4\omega_0 x$
0.1 $\cos 5\omega_0 x$	0.2 $\sin 5\omega_0 x$

『この元信号の中には、 $\cos 2\omega_0 x$ の成分が 0.7 だけ含まれている』というのが分かる

フーリエ級数展開のとても簡単な説明

- (2) 合成後の周期関数 $f(x)$ を受け取ると、この合成後の波から合成前の各関数の係数を推定する ← どうやって??

例 $\cos 2\omega_0 x$ の係数を知りたい場合...

- 1) $f(x)$ に $\cos 2\omega_0 x$ を掛けた関数を作る

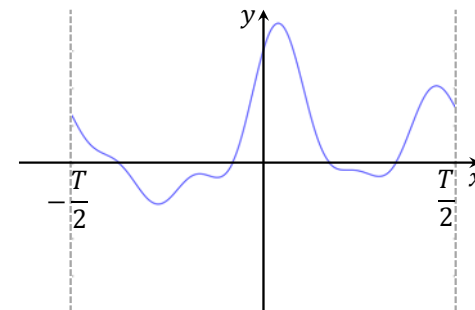
$$f(x) \cos 2\omega_0 x$$

- 2) 係数 $\frac{2}{T}$ もかける

$$\frac{2}{T} f(x) \cos 2\omega_0 x$$

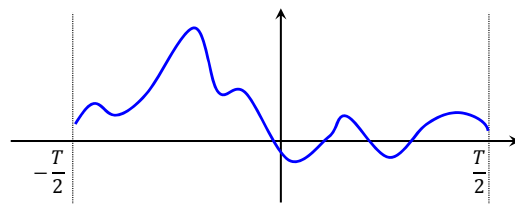
- 3) これを周期分だけ積分すると係数が得られる

$$\text{係数} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos 2\omega_0 t \, dt$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$

※天下り的な説明で済みません。ここではそういう事実があると知っておいてください。

※詳細な導出と証明は、信号処理の講義、または、『これなら分かる応用数学教室（金谷健一著）』を参照

フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。

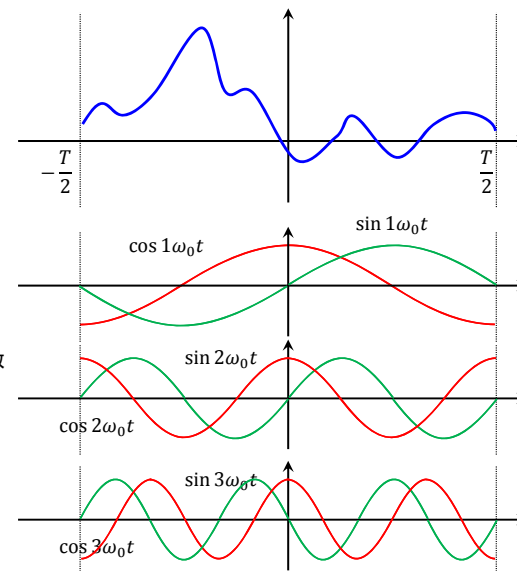
$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

$$+ a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+ a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

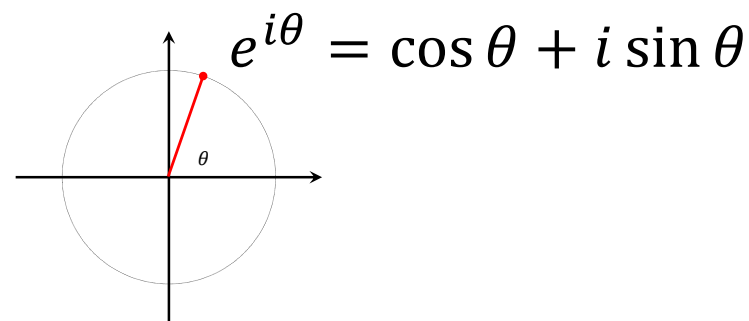
$$+ \dots$$



Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開
- **オイラーの式と複素数表現**
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

オイラーの式



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

これはもうこういう表記法だと思って覚えてください

練習) 複素数の積を求めよ

- $a(\cos \theta + i \sin \theta) * b(\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

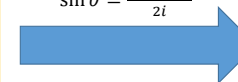
フーリエ級数の複素数表現

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数} \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \\ C_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt \end{aligned}$$

練習: 下の式(1)-(5)より, 式(6),(7)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \quad \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \quad \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \quad \dots (3)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \dots (4)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \dots (5)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \quad \dots (6)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad \dots (7)$$

まとめ: フーリエ級数展開

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

- オイラーの式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- フーリエ級数展開: 周期Tを持つ関数は正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \quad b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

- フーリエ級数展開 (複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \quad \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \quad \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt \quad \dots (3)$$

一方オイラーの式より,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \dots (4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - ib_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}) \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + (a_k + ib_k) e^{-ik\omega_0 t} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \quad \dots (5)$$

ただし,

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \quad \dots (6)$$

と置いた.

また, 式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると,

$$\frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad \dots (7)$$

$$\frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad \dots (8)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} dt \quad \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

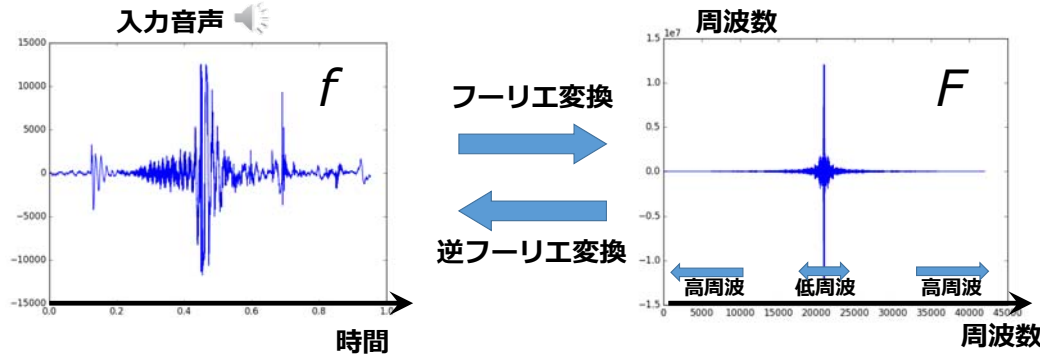
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

フーリエ変換とは

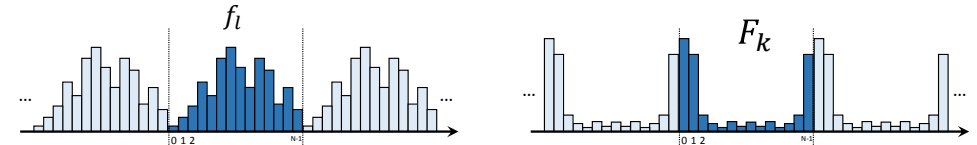
FourierSound.py

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法



離散フーリエ変換 (1D)

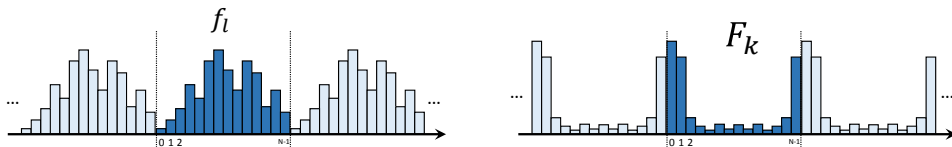
$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}} \quad \text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



- 周期Nの離散値 f_l を周期Nの離散値 F_k に変換する
- f_l と F_k は複素数 (ただし f_l は実数列のことが多い)
- f_l が実数の場合 $F_k = \overline{F_{-k}}$ が成り立つ ($F_{-k} = F_{N-k}$)

離散フーリエ変換 (1D)

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \left(\cos \frac{2\pi k l}{N} - i \sin \frac{2\pi k l}{N} \right) \quad \text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(\cos \frac{2\pi k l}{N} + i \sin \frac{2\pi k l}{N} \right)$$



- 周期Nの離散値 f_l を周期Nの離散値 F_k に変換する
- f_l と F_k は複素数 (ただし f_l は実数列のことが多い)
- f_l が実数の場合 $F_k = \overline{F_{-k}}$ が成り立つ ($F_{-k} = F_{N-k}$)

離散フーリエ変換の計算例

$N = 8$ のとき

入力: $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

↑複素数とかでできて
ややこしいけど
ただの和分

$$F_0 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} + i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) \right]$$

$$F_1 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} + i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 7}{8} + i \sin \frac{2\pi 7}{8} \right) \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} + i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 14}{8} + i \sin \frac{2\pi 14}{8} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} + i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 21}{8} + i \sin \frac{2\pi 21}{8} \right) \right]$$

⋮

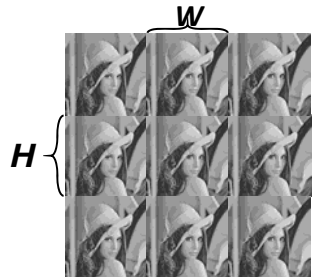
離散フーリエ変換（2D）

フーリエ変換：

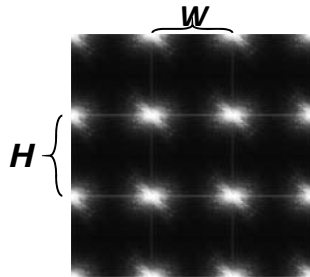
$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi xu}{W}} e^{-\frac{2\pi yv}{H}}$$

逆フーリエ変換：

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi xu}{W}} e^{\frac{2\pi yv}{H}}$$



f_{xy}

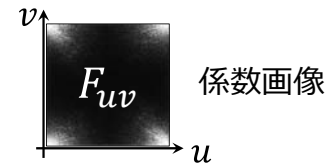


F_{uv}

縦横方向に周期H/Wで繰り返す離散値 f_{xy} を、離散値 F_{uv} に変換
 f_{xy} と F_{uv} は複素数列。
ただし、 f_{xy} は画像（実数列）のことが多い



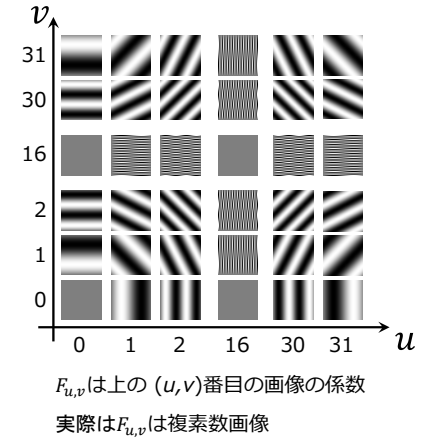
$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)i}$$



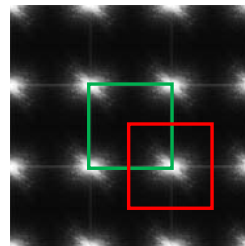
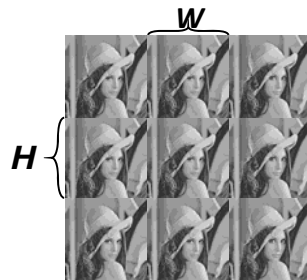
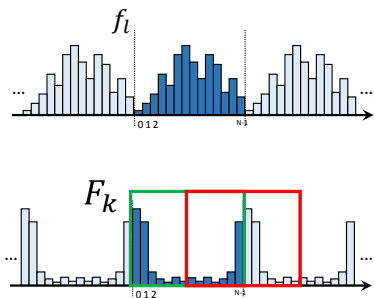
係数画像

- $F_{0,0}$ は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$ は、画像区間において『縦に u 回・横に v 回振動する正弦波画像』の係数
- $U=v=N/2$ がもっとも高周波で、 $u=N-1$ は $u=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

$$W=H=32 \text{ のときの } \sin\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)$$



Shiftの話

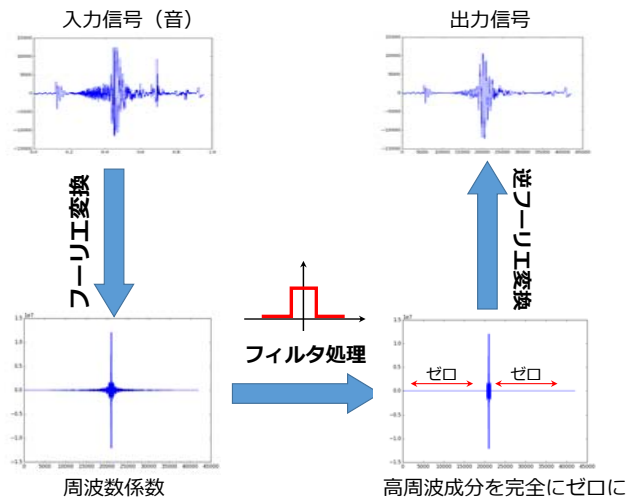


- フーリエ変換を実装すると、ピークが端に来る変換結果になる
 - 上図緑四角：これは間違いじゃない
 - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので 上図赤四角の位置を出力することが多い
 - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数展開
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

周波数フィルタリング（音）

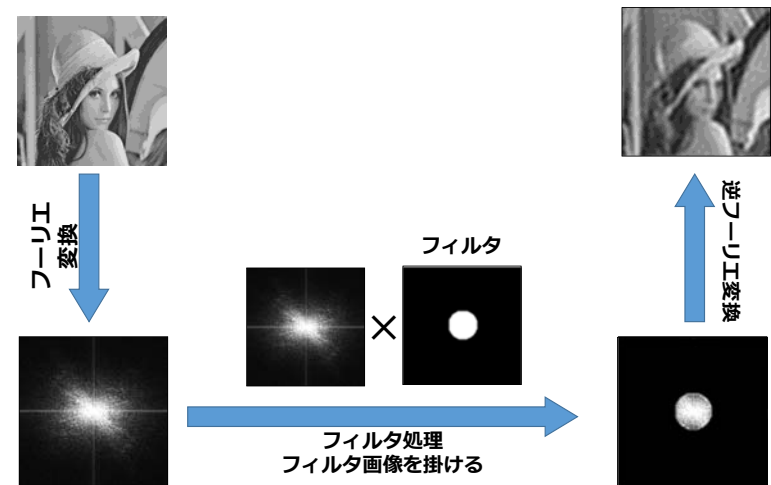


フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

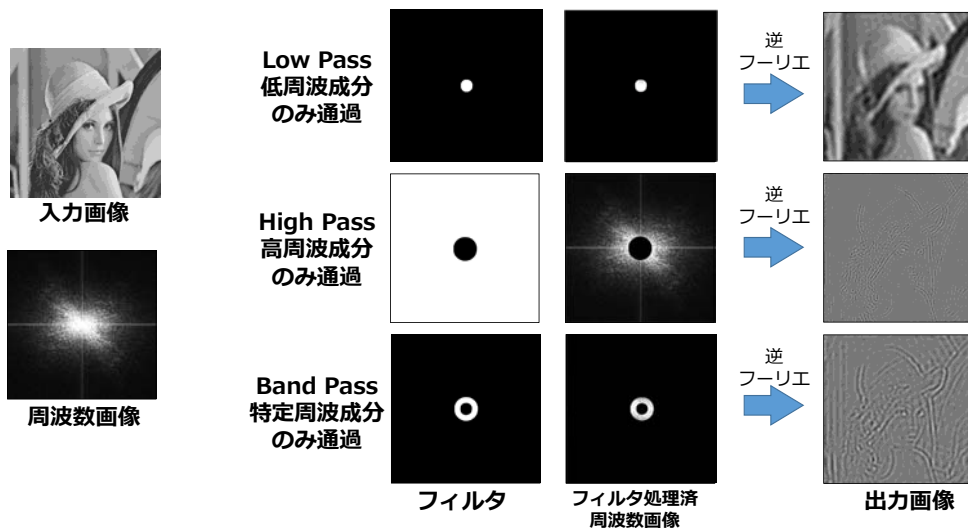
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

周波数フィルタリング（画像）



周波数フィルタリング（画像）

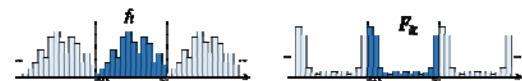


まとめ：離散フーリエ変換と周波数フィルタ

離散フーリエ変換（1D/2D）の実装方法を解説した

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



周波数空間でマスクを掛ける周波数フィルタを紹介した

