微分方程式

18T1694W

島袋隆也

2020 年 6 月 25 日

1　公式

計算に使う公式を以下に示す．

公式 1　$\frac{1}{D+\alpha}r(x) = e^{-\alpha x}\int r(x)e\alpha x$

公式 2　$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}, (P(\alpha) \neq 0)$

2　大問 1

問題文を以下に示す．

2.1　問 1 ｜ $y'' - 2y' - 3y = e^x$

問題文の式は以下の特徴をもつ．

- y'' が最も高い階数 $\rightarrow$2 階
- y の微分係数に x がかかっていない $\rightarrow$ 定数係数
- y'' にかかる係数が 1 $\rightarrow$ 正規系
- y と y の微分がすべて 1 乗 $\rightarrow$ 線形
- e^x が存在 $\rightarrow$ 非斉次

上記により線形非斉次微分方程式であることがわかる．
線形非斉次微分方程式において，演算子法を用いた特解の導出は以下の手順で行う．

1. 演算子法を用いて表す．
2. y について解く．
3. 変形した逆演算子を用いる．

微分演算子を用い，y_p の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D^2 - 2D - 3)}e^x \tag{1}$$

ここで，$(P(1) = -4 \neq 0)$ が成り立つため，公式 (2) を用いることができる．よって特解 y_p は以下のように求まる．

$$y_p = -\frac{1}{4}e^x \tag{2}$$

2.2　問 2 | $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

問 2 も問 1 と同様に線形非斉次微分方程式である．よって，微分演算子を用い，因数分解し，特解 y_p の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D+1)} e^{3x} \tag{3}$$

ここで，$(P(3) = 0)$ より公式 (2) が使えない．そこで，基本公式である公式 (1) を用いると

$$\frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{4} e^{3x} \tag{4}$$

となり，特解 y_p は以下のように求まる．

$$y_p = \frac{1}{4} x e^{3x} \tag{5}$$

2.3　問 3 | $y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{3x} + \sin x$

非斉次項の $\sin x$ はオイラーの公式を応用し e_{ix} と置き換えられる．問 2 と同様に計算すると，特解 y_p を求める式は以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D+1)} (e^x + e^{3x} + e^{ix}) \tag{6}$$

公式 (1) を用いると，

$$y_p = \frac{1}{D-3} (\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{1+i} e^{ix}) \tag{7}$$

同様に $\frac{1}{D-3}$ の項も計算し，e^{ix} の係数を有理化すると，

$$y_p = -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} x e^{3x} - \frac{2-i}{10} (\cos x + i \sin x) \tag{8}$$

ここで，$\sin x$ を e^{ix} と置いたことから虚部を解にすると特解 y_p は以下のように求まる．

$$y_p = -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} x e^{3x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{10} \cos x \tag{9}$$

3　大問 2

式 (10) について，以下について答えよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + x = F(t) \ (\alpha \geq 0) \tag{10}$$

3.1 問 1 | 特性方程式の解が虚数解となる定数 α の範囲を求めよ

式 (10) の特性方程式は以下のようになる．

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + x = 0 \tag{11}$$

二次方程式の解の公式を用いると，

$$\lambda = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \tag{12}$$

よって，虚数解となる α の範囲は

$$-2 < \alpha < 2 \tag{13}$$

3.2 問 2 | $\alpha = 0$ のときの斉次解を求めよ。

式 (12) に $\alpha = 0$ を代入して特性方程式の解を求めると，斉次解は

$$x = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it}, \tag{14}$$

で与えられる．(C_1, C_2 は任意定数)

ここで，オイラーの公式を用い，$A = i(C_1 - C_2)$ $B = C_1 + C_2$ とすると

$$y = A \sin t + B \cos t, \tag{15}$$

で与えられる．(A，B は任意定数)

3.3 問 3 | $\alpha = 0$, $F(t) = 2\cos t$ のときの一般解を求めよ。

斉次解は問 2 で求めてあるため，特解を求める．微分演算子を用いて大問 1 の問 2 と同様に計算すると

$$x_p = \frac{1}{(D-i)(D+i)} 2e^{it} = t \sin t \tag{16}$$

よって，一般解は

$$x = A \sin t + B \cos t + t \sin t \tag{17}$$

ここで考察を述べていく．この問題は，質量 $m = 1$，摩擦係数 $\alpha, (\alpha \geq 0)$，ばね係数 $k = 1$ の重りがついたバネに，外力 $2\cos x$ が加わっているものと考えることができる．
外力を $2\cos x$，内力を $x'' + \alpha x' + x$ とし，特性方程式から推測できる 3 つの条件でそれぞれ場合分けして考える．

$\underline{\alpha = 2}$
これは臨界値であり，外力と内力が釣り合っている状態である．そのため，時間が経つと振動はするが振幅は変わらない．グラフに描くと図 1のようになる．

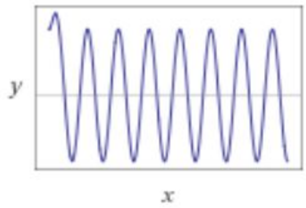

図1　$\alpha = 2$ のときのグラフ

$\underline{\alpha < 2}$
これは，外力が内力を上回っている様態であり，時間が経つと振動しながら振幅が大きくなる．グラフに描くと図 2のようになる．

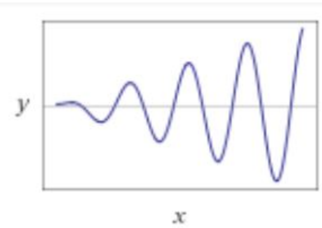

図2　$\alpha = 0$ のときのグラフ

$\underline{\alpha > 2}$
これは，内力が外力を上回っている状態であり，時間がたつと振動しながら減衰していきやがて，$2cosx$ に収束する動きを見せる．グラフに描くと図 3のようになる．

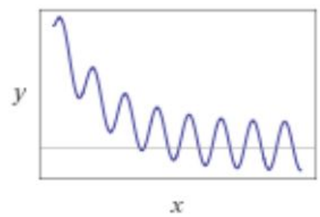

図3　$\alpha = 10$ のときのグラフ