微分方程式

18T1694W

島袋隆也

2020 年 6 月 24 日

1　目的

与えられた微分方程式の解を導出し，その式がどのような動作をするのかを考察することで理解を深めることを目的とする

2　公式

計算に使う公式を以下に示す．

公式 1　$\frac{1}{D+\alpha}r(x) = e{-}\alpha x \int r(x) e\alpha x$

公式 2　$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}, (P(\alpha) \neq 0)$

3　大問 1

問題文を以下に示す．

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \tag{1}$$

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x} \tag{2}$$

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{3x} + \sin x \tag{3}$$

3.1　問 1 ｜ $y'' - 2y' - 3y = e^x$

問題の式は以下の特徴をもつ．

- y'' が最も高い階数 $\rightarrow$2 階
- y の微分係数に x がかかっていない $\rightarrow$ 定数係数
- y'' にかかる係数が 1 $\rightarrow$ 正規系
- y と y の微分がすべて 1 乗 $\rightarrow$ 線形
- e^x が存在 $\rightarrow$ 非斉次

上記により (1) 式は線形非斉次微分方程式であることがわかる．

演算子法による線形非斉次微分方程式における特解の導出は以下の手順で行う．

1. 演算子法を用いて表す．
2. y について解く．
3. 変形した逆演算子を用いる．

では，特解 y_p を導出していく．
(1) 式を微分演算子を用い，y_p の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D^2 - 2D - 3)} e^x \tag{4}$$

ここで，$(P(1) = -4 \neq 0)$ が成り立つため，公式 (2) を用いることができる．よって特解 y_p は

$$y_p = -\frac{1}{4} e^x \tag{5}$$

3.2　問 2 | $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

問 2 も問 1 と同様に線形非斉次微分方程式である．よって，微分演算子を用い，因数分解し，y_p の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D-1)(D-2)} e^{3x} \tag{6}$$

ここで，$(P(3) = 0)$ より公式 (2) が使えない．そこで，基本公式である公式 (1) を用いる．よって，特解 y_p は

$$\frac{1}{D-2} e^{3x} = e^{3x} \tag{7}$$

となり，特解は

$$y_p = \frac{1}{D-1} e^{3x} \tag{8}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{3x} \tag{9}$$

4　大問 2

4.1

参考文献