# 微分方程式

18T1694W

島袋隆也

2020 年 6 月 24 日

# 1　目的

与えられた微分方程式の解を導出し，その式がどのような動作をするのかを考察することで理解を深めることを目的とする

# 2　公式

計算に使う公式を以下に示す．

公式 1　$\frac{1}{D+\alpha}r(x) = e{-}\alpha x \int r(x)e\alpha x$

公式 2　$y_p = \frac{1}{P(D)}e^{\alpha x} = \frac{1}{P(\alpha)}e^{\alpha x}, (P(\alpha) \neq 0)$

# 3　大問 1

問題文を以下に示す．

$$y'' - 2y' - 3y = e^x \tag{1}$$

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x} \tag{2}$$

$$y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{3x} + \sin x \tag{3}$$

## 3.1　問 1 ｜ $y'' - 2y' - 3y = e^x$

式 (1) は以下の特徴をもつ．

- $y''$ が最も高い階数 $\rightarrow$2 階
- $y$ の微分係数に $x$ がかかっていない $\rightarrow$ 定数係数
- $y''$ にかかる係数が 1 $\rightarrow$ 正規系
- $y$ と $y$ の微分がすべて 1 乗 $\rightarrow$ 線形
- $e^x$ が存在 $\rightarrow$ 非斉次

上記により (1) 式は線形非斉次微分方程式であることがわかる．

線形非斉次微分方程式において，演算子法を用いた特解の導出は以下の手順で行う．

1. 演算子法を用いて表す．
2. y について解く．
3. 変形した逆演算子を用いる．

では，特解 $y_p$ を導出していく．
(1) 式を微分演算子を用い，$y_p$ の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D^2 - 2D - 3)} e^x \tag{4}$$

ここで，$(P(1) = -4 \neq 0)$ が成り立つため，公式 (2) を用いることができる．よって特解 $y_p$ は以下のように求まる．

$$y_p = -\frac{1}{4} e^x \tag{5}$$

### 3.2　問 2 | $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$

問 2 も問 1 と同様に線形非斉次微分方程式である．よって，微分演算子を用い，因数分解し，特解 $y_p$ の式に直すと以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D+1)} e^{3x} \tag{6}$$

ここで，$(P(3) = 0)$ より公式 (2) が使えない．そこで，基本公式である公式 (1) を用いると

$$\frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{4} e^{3x} \tag{7}$$

となり，特解 $y_p$ は以下のように求まる．

$$y_p = \frac{1}{4} x e^{3x} \tag{8}$$

積分定数は一般解を求めたときに吸収されるので書かなくてよい．

### 3.3　問 3 | $y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{3x} + \sin x$

非斉次項の $\sin x$ はオイラーの公式を応用し $e_{ix}$ と置き換えられる．問 2 と同様に計算すると，特解 $y_p$ を求める式は以下のようになる．

$$y_p = \frac{1}{(D-3)(D+1)} (e^x + e^{3x} + e^{ix}) \tag{9}$$

公式 (1) を用いると，

$$y_p = \frac{1}{D-3} (\frac{1}{2} e^x + \frac{1}{4} e^{3x} + \frac{1}{1+i} e^{ix}) \tag{10}$$

同様に $\frac{1}{D-3}$ の項も計算し，$e^{ix}$ の係数を有理化すると，

$$y_p = -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} x e^{3x} - \frac{2-i}{10} (\cos x + i \sin x) \tag{11}$$

ここで，$\sin x$ を $e^{ix}$ と置いたことから虚部を解にすると特解 $y_p$ は以下のように求まる．

$$y_p = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^{3x} - \frac{1}{5}\sin x + \frac{1}{10}\cos x \tag{12}$$

積分定数は一般解を求めたときに吸収されるので書かなくてよい．

# 4　大問 2

問題を以下に示す．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + x = F(t)\ (\alpha \geq 0) \tag{13}$$

式 (13) について，

1. 特性方程式の解が虚数解となる定数 $\alpha$ の範囲を求めよ。
2. $\alpha = 0$ のときの斉次解を求めよ。
3. $\alpha = 0,\ F(t) = 2\cos$ のときの一般解を求めよ。

## 4.1　問 1 ｜特性方程式の解が虚数解となる定数 $\alpha$ の範囲を求めよ

式 (13) の特性方程式は以下のようになる．

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + x = 0 \tag{14}$$

二次方程式の解の公式を用いると，

$$\lambda = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} \tag{15}$$

よって，虚数解となる $\alpha$ の範囲は

$$-2 < \alpha < 2 \tag{16}$$

## 4.2　問 2 ｜ $\alpha = 0$ のときの斉次解を求めよ。

式 (15) に $\alpha = 0$ を代入して特性方程式の解を求めると，斉次解は

$$y = C_1e^{2xi} + C_2e^{-2xi}, (C_1, C_2 \quad ) \tag{17}$$

で与えられる．

ここで，オイラーの公式を用い，$A = i(C_1 - C_2)\ B = C_1 + C_2$ とすると

$$y = A\sin 2x + Bi\cos 2x, (A\ B \quad ) \tag{18}$$

### 4.3　問 3 ｜ $\alpha = 0$, $F(t) = 2\cos t$ のときの一般解を求めよ。

## 参考文献